

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

О характерных временах для кинетики рассеяния

Б.И. Стурман, Е.В. Подивилов

Хотя кинетические уравнения для описания различных процессов рассеяния доказали свою практическую значимость, вопрос об области их применимости и выводе из исходных динамических уравнений удовлетворительно решён только для случая газов. Данный вопрос остаётся актуальным для кинетических уравнений, описывающих как нелинейные волновые процессы, так и транспортные явления в полупроводниках. На простейшем примере упругого рассеяния мы показываем, что справедливость кинетического уравнения для функции распределения $n_{\mathbf{k}}$ предполагает наличие внутреннего характерного масштаба времени τ_s , много меньшего, чем стандартные времена рассеяния, такие как транспортное время τ_{tr} . Время τ_s отвечает быстрой стохастизации фаз волн (квазичастиц). Как показывают наши оценки, это время удовлетворяет неравенствам $1 \ll \omega_k \tau_s \ll \omega_k \tau_{tr}$, где $\omega_k = \varepsilon_k/\hbar$ — характерная частота квазичастиц. Это означает, в частности, что за время τ_s матрица плотности $\rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ релаксирует к диагональному виду $n_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$, так что её вклад в транспортные явления мал по параметру τ_s/τ_{tr} по сравнению с вкладом $n_{\mathbf{k}}$.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, процессы рассеяния, матрица плотности, время стохастизации, транспортное время

PACS number: 05.20.Dd

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.08.040020>

Содержание

1. Введение (212).
 2. Вывод кинетического уравнения (213).
 3. Время стохастизации (214).
 4. Количественные оценки (214).
 5. Обсуждение (215).
 6. Заключение (215).
- Список литературы (215).

1. Введение

Кинетические уравнения для функции распределения $n_{\mathbf{k}}$ (чисел заполнения), где $\mathbf{k}$ — квазиимпульс, давно доказали свою значимость и широко используются для описания огромного числа классических и квантовых физических явлений. Сюда относятся разнообразные явления переноса в газах и твёрдых телах [1–7], включая фотогальванические явления [8–11], а также нелинейные волновые явления в гидродинамике и плазме [12–14]. Общим свойством кинетических уравнений (КУ) является то, что они необратимы по времени (диссипативны) и содержат, помимо $n_{\mathbf{k}}$, лишь первую временную производную $\partial n_{\mathbf{k}}/\partial t$. Относительная простота КУ позво-

ляет рассчитывать такие свойства неравновесных статистических систем, как времена релаксации, спектры $n_{\mathbf{k}}$, фототоки и пр. Более общим в рамках одночастичного приближения является описание кинетических явлений с помощью матрицы плотности $\rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$, диагональные элементы которой дают $n_{\mathbf{k}}$. Эффективность метода КУ связана с тем, что, как правило, недиагональные элементы матрицы плотности (с $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$) можно считать относительно малыми. Развитие исследований предъявляет всё более жёсткие требования к деталям кинетического описания.

К сожалению, последовательный вывод КУ из исходных консервативных динамических уравнений движения известен лишь для случая газов [1]. В подавляющем большинстве случаев КУ постулируются с использованием интуитивных соображений о вероятностях элементарных процессов [1–7], что может приводить к недоразумениям и элементарным ошибкам [15]. Вопрос же о природе и статусе соотношения $\rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \simeq n_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$ при этом не возникает. В литературе можно найти лишь косвенные свидетельства того, что малость недиагональных элементов $\rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ связана с быстрой стохастизацией фаз квазичастиц (потерей когерентности) [14, 16]. В нелинейной оптике широко распространён феноменологический метод учёта кинетических эффектов в уравнениях для матрицы плотности [17]. В рамках данного метода различаются (но не вычисляются) времена релаксации заселённости и фазовой релаксации. Аналогичный феноменологический подход был использован недавно при исследовании объёмного фотогальванического эффекта [18], причём времена релаксации диагональных и недиагональных элементов $\rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ не различались. Таким образом, вопрос о необходимости выхода за рамки КУ

Б.И. Стурман^(*), Е.В. Подивилов^(**)

Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,
просп. Академика Коптюга 1, 630090 Новосибирск,
Российская Федерация
E-mail: ^(*)sturman@iae.nsk.su, ^(**)podivilov@iae.nsk.su

Статья поступила 17 июня 2025 г.,
после доработки 29 августа 2025 г.

является открытым. Соответственно, открытым остаётся вопрос о величине наблюдаемых эффектов.

Цель настоящей работы — показать применительно к упругому и квазиупругому рассеянию квазичастиц, что время стохастизации фаз τ_s (т.е. время релаксации недиагональных элементов $\rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$) много меньше времён, связанных с релаксацией $n_{\mathbf{k}}$, включая транспортное время τ_{tr} . Это не только обосновывает применимость соответствующих КУ, но и доказывает справедливость кинетического описания фотогальванических явлений [8–11] и малость поправок, связанных с недиагональными элементами матрицы плотности. В основе нашего подхода лежит классический гамильтоновский формализм для нормальных амплитуд волн (квазичастиц) [12, 14], легко переносимый на квантовый случай.

2. Вывод кинетического уравнения

Простейшим и важным для последующего является КУ для упругого рассеяния:

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}'} (W_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}'} - W_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}), \quad (1)$$

где $W_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \equiv W_{-\mathbf{k}',-\mathbf{k}}$ есть вероятность перехода в единицу времени из состояния $\mathbf{k}'$ в состояние $\mathbf{k}$, пропорциональная концентрации рассеивающих центров N_0 и энергетической дельта-функции $\delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'})$. В таком виде уравнение (1) применимо к любым частицам одного типа — электронам, фононам и т.п. — даже в отсутствие центральной симметрии, когда $W_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \neq W_{\mathbf{k}',\mathbf{k}}$, т.е. отсутствует детальное равновесие [15]. В борновском приближении $W_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = W_{\mathbf{k}',\mathbf{k}}$. Отсутствие в (1) квантовых факторов $(1 \mp n_{\mathbf{k}})$ и $(1 \mp n_{\mathbf{k}'})$ для фермионов и бозонов, ошибочно фигурирующих в большинстве книг, отвечает корректному учёту чисел заполнения в промежуточных состояниях за пределами борновского приближения. Присутствие таких факторов приводило бы к очевидной нелепости: в отсутствие детального равновесия кинетическое уравнение для фононов было бы нелинейным (квадратичным) по $n_{\mathbf{k}}$ в классическом пределе $n_{\mathbf{k}} \gg 1$. Простая форма КУ (1) упрощает последующее рассмотрение.

Для достижения цели настоящей работы — обоснования быстрой стохастизации фаз — мы рассмотрим прежде всего вывод КУ (1) из консервативных динамических уравнений в их простейшей гамильтоновской формулировке. Наш вывод является адаптацией (применительно к упругому рассеянию) метода, изложенного в [12–14], но не повторяет его. Будем считать, что нормальные комплексные амплитуды волн $a_{\mathbf{k}}$, $a_{\mathbf{k}}^*$, являющиеся независимыми, подчиняются классическим гамильтоновским уравнениям движения [12, 14]

$$i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial a_{\mathbf{k}}^*}. \quad (2)$$

В случае упругого рассеяния гамильтониан H может быть выбран в виде

$$H = \sum_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_1} |a_{\mathbf{k}_1}|^2 + \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, 2} (V_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}^* b_{\mathbf{q}} \delta_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}} + \text{с.с.}), \quad (3)$$

где частота $\omega_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}}/\hbar$, $V_{\mathbf{q}} = V_{-\mathbf{q}}^*$ — коэффициент связи с размерностью частоты, а $b_{\mathbf{q}}$ — статические амплитуды со

случайными фазами, отвечающие случайности расположения рассеивающих центров, и единичным модулем. Это отвечает ненулевому статистическому среднему $\langle b_{\mathbf{q}}^* b_{\mathbf{q}'} \rangle = \delta_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}$. В рамках нашего подхода функция распределения $n_{\mathbf{k}} = \langle |a_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$, а матрица плотности есть корреляционная функция, $\rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \langle a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}'} \rangle$.

При стандартном переходе от суммирования к интегрированию по $\mathbf{k}$ частная производная по $a_{\mathbf{k}}^*$ должна пониматься как вариационная производная $\delta/\delta a_{\mathbf{k}}^*$. Нормальные амплитуды $a_{\mathbf{k}}$, $a_{\mathbf{k}}^*$ можно рассматривать как классический аналог квантовых операторов рождения и уничтожения. Небольшое обобщение выражения (3) позволяет описывать электрон-фононное рассеяние с амплитудами фононов $b_{\mathbf{q}}(t)$ и частотами $\Omega_{\mathbf{q}}$. В левую часть консервативных уравнений движения (2) бывает полезным добавить произвольно малое затравочное затухание волн ω , обеспечивающее правильный выбор направления времени.

Далее важно проследить за предположениями, с помощью которых из динамического уравнения,

$$i \frac{\partial a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + 2 \sum_{\mathbf{k}_1} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}, \quad (4)$$

отвечающего гамильтониану (3), получается кинетическое уравнение (1). Для функции распределения имеем из (4):

$$\left\langle \frac{\partial |a_{\mathbf{k}}|^2}{\partial t} \right\rangle \simeq \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 4 \text{Im} \sum_{\mathbf{k}_1} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} \langle b_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}_1} \rangle. \quad (5)$$

Замена в левой части среднего от производной на производную от среднего является общим местом процедуры получения различных КУ в [12–14]. Эта замена требует обоснования, которое, однако, обозначено лишь в [14]. Таким обоснованием является возможность усреднения на масштабе времени, много меньшем, чем характерное время изменения $n_{\mathbf{k}}$. Данное малое время ассоциируется со временем стохастизации фаз τ_s , т.е. потери когерентности. В отсутствие такого малого масштаба времени переход к КУ был бы невозможен. В присутствии же малого масштаба τ_s замена среднего от производной на производную от среднего аналогична таковой при выводе, например, макроскопических уравнений Максвелла из микроскопических. В отличие от [14], мы не предполагаем, что $\tau_s \sim \omega_{\mathbf{k}}^{-1}$. Такое предположение выглядит неестественным в случае упругого рассеяния. Кроме того, оно означало бы, что необратимость кинетического процесса обусловлена консервативным эффектом дисперсии. Далее мы свяжем τ_s непосредственно со свойствами случайного процесса рассеяния.

Фигурирующее в (5) тройное среднее $\langle b_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}_1} \rangle$ зависит от фаз волн. Из-за быстрой фазовой релаксации это среднее адиабатически следует за относительно медленными изменениями $n_{\mathbf{k}}(t)$, а значит, при усреднении уравнения для $b_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}_1}$, которое следует из (4), мы должны пренебречь временной производной. Кроме того, следует воспользоваться очевидным соотношением $\langle b_{\mathbf{q}}^* b_{\mathbf{q}'} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}'} \rangle = n_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$. В результате получаем

$$\langle b_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}_1} \rangle = \frac{V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^* (n_{\mathbf{k}_1} - n_{\mathbf{k}})}{\omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}} - 2i0}. \quad (6)$$

Удержание затравочного затухания 0 в знаменателе важно, несмотря на то что его величина пренебрежимо

мала по сравнению с ω_k . При подстановке соотношения (6) в (5) этот знаменатель приводит к появлению дельта-функции согласно соотношению $\text{Im}(\omega_k - \omega_k - i0)^{-1} = \pi \delta(\omega_k - \omega_k)$. В результате мы получаем искомое кинетическое уравнение (1), в котором $W_{k,k'} = 4\pi |V_{k-k'}|^2 \times \delta(\omega_k - \omega_{k'})$. Свойство симметрии $W_{k,k'} = W_{k',k}$ связано с использованием борновского приближения, такого приближения совершенно достаточно для цели нашей работы.

3. Время стохастизации

Рассмотрим теперь вопрос о скорости стохастизации фаз, т.е. обратном времени стохастизации τ_s^{-1} . Для этого мы выделим случайную часть фазы $\phi_k = \arg a_k + \omega_k t$ и получим, используя статистические свойства амплитуд b_q , из динамического уравнения (4) для квадратичного среднего временной производной:

$$\langle \dot{\phi}_k^2 \rangle = 2 \sum_q \left| \frac{a_{k-q}}{a_k} \right|^2 |V_q|^2. \quad (7)$$

Начальное распределение a_k может считаться когерентным или частично когерентным. Примечательно, что полученное выражение не содержит частотной дельта-функции. Заметим также, что входящее в (7) отношение модулей стремится к 1 при $q \rightarrow 0$. Скорость стохастизации может быть определена как $\gamma_s = \tau_s^{-1} = [\langle \dot{\phi}_k^2 \rangle]^{1/2}$. Её необходимо сравнить со стандартными скоростями (обратными временами) релаксации, определяемыми с помощью кинетического уравнения (1). Это обратное время ухода $\gamma_0 = \sum_{k'} W_{k',k}$ и обратное транспортное время $\gamma_{tr} = \tau_{tr}^{-1} = \sum_{k'} W_{k',k} (1 - \cos \theta)$, где θ — угол рассеяния [3]; время τ_{tr} определяет такую важную характеристику, как подвижность носителей заряда при постоянном токе. Следует иметь в виду, что используемое приближение почти свободных частиц имеет смысл только при условии $\gamma_{0,tr,s} \ll \omega_k$. Нарушение данного условия ведёт, скорее всего, к эффектам локализации.

Обращает на себя внимание принципиальное различие выражений для $\gamma_{0,tr}$ и γ_s . Если скорости $\gamma_{0,tr}$ могут быть грубо оценены как $|V_q|^2/\omega_k$, то скорость γ_s оценивается грубо как $|V_{q_*}|$, где q_* есть некоторое характерное значение q . При этом отношение $\gamma_{0,tr}/\gamma_s$ оценивается грубо как $|V_{q_*}|/\omega_k$, что является малым параметром в рамках концепции почти свободных частиц. Кроме того, важно иметь в виду, что вероятность упругого рассеяния электронов $W_{k,k'}$ обычно резко растёт при $\theta \rightarrow 0$ (т.е. при рассеянии вперёд). Последнее в особенности важно при рассеянии на заряженных дефектах; здесь $W_{k,k'} \propto \theta^{-4}$ при $\theta \rightarrow 0$, что приводит к необходимости "обрезания" на малых углах [2, 3]. Наличие фактора $(1 - \cos \theta) \simeq \theta^2/2$ при $\theta \rightarrow 0$ должно приводить к дополнительному уменьшению отношения γ_{tr}/γ_s .

4. Количественные оценки

Для проведения более аккуратных оценок мы рассмотрим случай электронов, перейдём стандартным образом от суммирования к интегрированию по $\mathbf{k}$ или $\mathbf{q}$ и примем предположения изотропии рассеяния, $V_q = V(q)$, и квадратичного закона дисперсии, $\omega_k = \hbar k^2/2m$, где m — эффективная масса. Кроме того, мы ограничимся случаем рассеяния на заряженных дефектах. В рамках сле-

данных предположений суммирование заменяется интегрированием по $d\mathbf{k}$ с $|V_q|^2$, заменённым на $(N_0 \hbar^2/4\pi m^2) \sigma(\theta)$, с дифференциальным сечением рассеяния $\sigma(\theta) = 1/4 \sin^4(\theta/2) k^4 a_B^2$, борновским радиусом $a_B = \epsilon_0 \hbar^2/m e^2$ и статической диэлектрической проницаемостью ϵ_0 [3]. Заметим, что $\sin(\theta/2) = q/2k$, а использованное выше точное выражение для $\sigma(\theta)$ совпадает с вычисленным в борновском приближении. При вычислении γ_{tr} интеграл по θ логарифмически расходится на нижнем пределе. Такая расходимость может быть разрешена "обрезанием" по θ . Учитывая уменьшение угла рассеяния с ростом прицельного параметра, можно получить, что $\theta_{\min} = 4N_0^{1/3}/a_B k^2$; это отвечает прицельному параметру, равному половине среднего расстояния между рассеивающими центрами [3]. В результате $\gamma_{tr} \approx 8\pi \omega_k \times \Lambda N_0/a_B^2 k^5$, где $\Lambda = \ln(2/\theta_{\min})$. Безразмерный параметр $\eta = N_0/a_B^2 k^5$ должен быть очень мал, чтобы обеспечить неравенство $\gamma_{tr} \ll \omega_k$. Заметим ещё полезное соотношение $\theta_{\min}^3 = 64\eta/k a_B$; оно подчёркивает важность малых значений η и достаточно больших значений $k a_B$.

При проведении оценки γ_s с учётом (7) мы предположим, что функция $|a_{k-q}/a_k|^2$ убывает достаточно быстро при $q \gtrsim k$, так что сингулярность $|V(q)|^2 \propto 1/q^4$ при $q \rightarrow 0$ является определяющей. В таком случае нетрудно получить, что

$$\gamma_s \approx 2\sqrt{2} \omega_k \times \theta_{\min}^{-1/2} \eta^{1/2}. \quad (8)$$

Фактор $\theta_{\min}^{-1/2} > 1$ есть следствие обрезания. Необходимым условием применимости (8) является, очевидно, неравенство $\sqrt{\eta} \ll 1$, более сильное, чем условие справедливости вышеприведённой оценки для γ_{tr} . Для отношения γ_{tr}/γ_s с точностью до численного коэффициента получим

$$\frac{\gamma_{tr}}{\gamma_s} \approx \eta^{1/2} \times \theta_{\min}^{1/2} \ln \left(\frac{2}{\theta_{\min}} \right). \quad (9)$$

Оба фактора в правой части являются малыми, причём малость $\sqrt{\eta}$ имеет более фундаментальный характер. Малость произведения $\theta_{\min}^{1/2} \ln(2/\theta_{\min})$ обусловлена кулоновской расходимостью сечения рассеяния. Если отстраниться от влияния этого фактора, то оценку (9) можно переписать в виде $\gamma_{tr}/\gamma_s \sim \gamma_s/\omega_k \ll 1$, подчёркивающим важность условия применимости концепции почти свободных электронов. Проведённый анализ подтверждает оценку, сделанную выше из общих соображений, и свидетельствует о том, что время стохастизации фаз всегда много меньше транспортного времени.

При достаточно малой концентрации упруго рассеивающих центров N_0 преобладающим механизмом может стать рассеяние на фононах. Произведённый вывод кинетического уравнения нетрудно обобщить и на такой случай. Для этого необходимо рассматривать b_q как амплитуду фонона, добавить в гамильтониан (3) фононный вклад $\sum_q \Omega_q |b_q|^2$ и включить в рассмотрение динамическое уравнение $i\partial_t b_q = \partial H/\partial b_q^*$ (см. также [12, 14]). Функцию распределения фононов $N_q = \langle b_q^* b_q \rangle$ при этом можно считать термодинамически равновесной (рэле-евской). Основные выводы о статусе времени стохастизации естественным образом переносятся на данный случай.

Важно также коснуться квантового описания вывода кинетических уравнений. В таком случае необходимо ис-

пользовать коммутаторное динамическое уравнение для матрицы плотности $\rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \langle \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}'} \rangle$, в котором $\hat{a}_{\mathbf{k}}^+$ и $\hat{a}_{\mathbf{k}'}$ — операторы рождения и уничтожения. Квантовый подход приводит к некоторому усложнению процедуры вывода из-за использования квантовых коммутационных соотношений, однако ведёт к тем же самым выводам (см. [15]). Соотношение (7) отвечает при этом амплитудам вероятности рассеянных электронов.

5. Обсуждение

По существу, вышеприведённое рассмотрение говорит о наличии простой альтернативы: если кинетическое уравнение для процессов рассеяния справедливо, то имеет место быстрая стохастизация фаз, $\tau_s \ll \tau_{tr}$ и $\rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \simeq n_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$. Если же такая быстрая стохастизация отсутствует, то КУ для $n_{\mathbf{k}}$ неприменимо. Таким образом, справедливость КУ предполагает, что отклик системы на временах $t \lesssim \tau_s$ (и, соответственно, на частотах $\omega \gtrsim 2\pi/\tau_s$) контролируется не транспортным временем τ_{tr} , а τ_s .

Сказанное относится и к недавней работе [18]. В указанной работе фототок на переходах из валентной зоны в зону проводимости в нецентросимметричном кубическом кристалле класса T_d вычислялся не как ранее [9, 19–21], с помощью КУ для электронных и дырочных функций распределения $n_{\mathbf{k}}^e$ и $n_{\mathbf{k}}^h$, а с помощью электрон-дырочной матрицы плотности $\rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{e-h}$. Это было мотивировано наличием существенных недиагональных элементов оператора скорости $\mathbf{v}_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{e-h}$ в базе кулоновских волновых функций. Причём релаксация по импульсам феноменологически описывалась одним временем релаксации τ_{tr} . При наличии расхождения с прежним кинетическим подходом, работа [18] претендовала бы на существенную ревизию теории. Однако результаты расчётов тока в рамках одной зонной модели с учётом и без учёта недиагональных эффектов совпали. Оставляя в стороне причины такого совпадения, можно утверждать, что нет причин для пересмотра теории за счёт учёта недиагональных элементов матрицы плотности. Этот результат важен в контексте идущей дискуссии о соотношении вкладов в фототок, обусловленных асимметрией распределений $n_{\mathbf{k}}^{e,h}$ и не связанных с данной асимметрией — так называемых баллистических и сдвиговых токов (см. [11, 22–24]).

Каковы возможные проявления малого времени стохастизации τ_s ? По-видимому, простейшим из них является спектральная зависимость поглощения излучения свободными носителями заряда, доступная эксперименту. Речь идёт о линейном отклике системы. Для параболической зоны и частоты излучения $\omega \ll k_B T/\hbar$, когда справедливо классическое кинетическое описание, мнимая часть диэлектрической проницаемости, ответственная за поглощение, традиционно выражается через τ_{tr} : $\epsilon''_{\omega} = -\tau_{tr} \omega_p^2 / \omega (\omega^2 \tau_{tr}^2 + 1)$, где ω_p — плазменная частота [4, 5]. Соответственно, коэффициент поглощения, пропорциональный $\omega \epsilon''_{\omega}$, должен иметь лоренцевский спектр и быть пропорциональным концентрации свободных носителей. В рамках нашего рассмотрения приведённое выражение для ϵ''_{ω} справедливо лишь при $\omega \ll 2\pi/\tau_s$. При больших частотах модификация лоренцевской зависимости, связанная с неполной релаксацией недиагональных элементов матрицы плотности, может стать важной. Данные экспериментов, проведённых при разных концентрациях носителей, показывают существенные от-

клонения от предсказанной лоренцевской зависимости [5]. Данный эффект заслуживает внимания, однако рассмотрение его теоретических и экспериментальных деталей выходит за рамки настоящей работы.

Помимо уравнений для процессов рассеяния на примесях и фононах, имеется важная категория классических кинетических уравнений, описывающих взаимодействие (распады и слияния) волн за счёт различных консервативных трёх- и четырёх-волновых нелинейных процессов [12–14]. Эти уравнения охватывают широкий круг наблюдаемых явлений в плазме и гидродинамике. В отличие от выше рассмотренных кинетических уравнений, они не содержат явно элементов, ответственных за нарушение инвариантности по отношению к обращению времени, таких как рассеяние на случайно расположенных примесях или термических фононах. Взамен они инкорпорируют различного рода неустойчивости, приводящие к пространственно-временному усилению волн из шума и, тем самым, к стохастизации фаз. Вопрос о величине времени τ_s для таких уравнений, по-видимому, окончательно не решён, хотя роль дисперсии представляется важной [14].

Следует заметить, что элементарные механизмы, иллюстрирующие переход к хаосу в динамических системах, активно рассматривались в литературе (см., например, [16, 25]). Однако они не обнаруживают прямой связи со свойствами кинетических уравнений.

6. Заключение

Мы показали, что условием применимости КУ, описывающих рассеяние квазичастиц на примесях и фононах, является малость времени стохастизации фаз τ_s по сравнению с транспортным временем τ_{tr} , диктуемым самим КУ. Отношение τ_s/τ_{tr} при этом оказывается мало по основному параметру теории $(\tau_s \omega)^{-1} \ll 1$, вследствие чего матрица плотности $\rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ быстро релаксирует к диагональному виду $n_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$, так что вклад недиагональных элементов в наблюдаемые величины оказывается мал по сравнению с вкладом от функций распределения. Данное обстоятельство не только уточняет статус КУ, но и важно при анализе актуальных фотогальванических эффектов.

Список литературы

1. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Физматлит, 2007); Пер. на англ. яз.: Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Physical Kinetics* (Oxford: Pergamon Press, 1981)
2. Аскеров Б М *Кинетические эффекты в полупроводниках* (Л.: Наука, 1970)
3. Гантмахер В Ф, Левинсон И Б *Рассеяние носителей тока в металлах и полупроводниках* (М.: Наука, 1984); Пер. на англ. яз.: Gantmakher V F, Levinson I B *Carrier Scattering in Metals and Semiconductors* (Amsterdam: North-Holland, 1987)
4. Бонч-Бруевич В Л, Калашников С Г *Физика полупроводников* (М.: Наука, 1977)
5. Зеер К *Физика полупроводников* (М.: Мир, 1977); Пер. с англ. яз.: Zeeger K *Semiconductor Physics* (New York: Springer-Verlag, 1973)
6. Гуревич В Л *Кинетика фононных систем* (М.: Наука, 1980)
7. Kamenev A *Field Theory of Non-Equilibrium Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011) DOI:10.1017/SBO9781139003667
8. Белиничер В И, Стурман Б И *УФН* **130** 415 (1980); Belinicher V I, Sturman B I *Sov. Phys. Usp.* **23** 199 (1980)
9. Стурман Б И, Фридкин В М *Фотогальванический эффект в средах без центра симметрии и родственные явления* (М.: Наука, 1992)

10. Ivchenko E L *Optical Spectroscopy of Semiconductor Nanostructures* (Harrow: Alpha Science Intern., 2005)
11. Стурман Б И *УФН* **190** 441 (2020); Sturman B I *Phys. Usp.* **63** 407 (2020)
12. Захаров В Е *Известия вузов. Радиофизика* **17** 431 (1974); Zakharov V E *Radiophys. Quantum Electron.* **17** 326 (1974)
13. Zakharov V E, Musher S L, Rubenchik A M *Phys. Rep.* **129** 285 (1985)
14. Zakharov V, Lvov V, Falkovich G *Kolmogorov-Zakharov Spectra of Turbulence. Wave Turbulence* (Cham: Springer, 2024) DOI:10.1007/978-3-031-82729-7
15. Стурман Б И *УФН* **144** 497 (1984); Sturman B I *Sov. Phys. Usp.* **27** 881 (1984)
16. Заславский Г М *Стохастичность динамических систем* (М.: Наука, 1984); Пер. на англ. яз.: Zaslavsky G M *Chaos in Dynamic Systems* (New York: Harwood Acad. Publ., 1985)
17. Boyd R W *Nonlinear Optics* (New York: Academic Press, 1992)
18. Будкин Г В, Ивченко Е Л *ЖЭТФ* **167** 279 (2025)
19. Шелест В И, Энтин М В *ФТП* **13** 2312 (1979); Shelest V I, Entin M V *Sov. Phys. Semicond.* **13** 1353 (1979)
20. Belinicher V I, Novikov V N *Phys. Status Solidi B* **107** 61 (1981)
21. Альперович В Л и др. *ФТТ* **30** 3111 (1988); Al'perovich V L et al. *Sov. Phys. Solid State* **30** 1788 (1988)
22. Белиничер В И, Ивченко Е Л, Стурман Б И *ЖЭТФ* **83** 649 (1982); Belinicher V I, Ivchenko E L, Sturman B I *Sov. Phys. JETP* **56** 359 (1982)
23. Dai Z, Rappe A M *Phys. Rev. B* **104** 235203 (2021)
24. Dai Z, Rappe A M *Chem. Phys. Rev.* **4** 011303 (2023)
25. Рабинович М И, Трубецков Д И *Введение в теорию колебаний и волн* 3-е изд. (М.–Ижевск: РХД, 2000); Пер. на англ. яз. 2-го русск. изд.: Rabinovich M I, Trubetskov D I *Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1989)

On characteristic times for kinetics of scattering

B.I. Sturman^(*), E.V. Podivilov^(**)

*Institute of Automation and Electrometry, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
prosp. Akademika Koptiyuga 1, 630090 Novosibirsk, Russian Federation*

E-mail: () sturman@iae.nsk.su, (**) podivilov@iae.nsk.su*

Although kinetic equations for various scattering processes have proven their practical significance, the question about their area of applicability and derivation from the initial dynamic equations is satisfactorily solved only for the case of gases. This question remains relevant for kinetic equations describing both nonlinear wave processes and transport phenomena in semiconductors. Using the simplest example of elastic scattering, we show that the validity of the kinetic equation for the distribution function $n_{\mathbf{k}}$ implies the existence of an internal characteristic time scale τ_s much smaller than standard scattering times such as the transport time τ_{tr} . The time τ_s corresponds to the rapid stochasticization of the phases of the waves (quasiparticles). As show our estimates, this time satisfies the inequalities $1 \ll \omega_k \tau_s \ll \omega_k \tau_{tr}$, where $\omega_k = \varepsilon_k/\hbar$ is the characteristic frequency of the quasiparticles. This means that over time τ_s the density matrix $\rho_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ relaxes to the diagonal form $n_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$, so that its contribution to transport phenomena is small in the parameter τ_s/τ_{tr} compared to the contribution of $n_{\mathbf{k}}$.

Keywords: kinetic equations, scattering processes, density matrix, stochasticization time, transport time

PACS number: 05.20.Dd

Bibliography — 25 references

Received 17 June 2025, revised 29 August 2025

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **196** (2) 212–216 (2026)

Physics – Uspekhi **69** (2) (2026)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.08.040020>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2025.08.040020>