

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Максимальная дальность релятивистского броска тела в однородном силовом поле

М.А. Демьянов, Н.А. Кондратенко

Решается задача релятивистской физики о нахождении начального угла броска максимальной дальности в однородном силовом поле при фиксированной величине начальной скорости. Рассмотрены две физически разные постановки — релятивистское движение заряженной частицы в однородном электрическом поле и движение частицы в однородном поле тяжести в соответствии с общей теорией относительности. Показано, что угол броска максимальной дальности в обоих случаях монотонно зависит от величины начальной скорости, возрастая от 45° при малых по сравнению со скоростью света скоростях до $\approx 56,5^\circ$ в случае движения в однородном электрическом поле и до 90° в случае движения в однородном гравитационном поле при скоростях, стремящихся к скорости света.

Ключевые слова: релятивистское движение, однородное электромагнитное поле, общая теория относительности, метрика Риндлера

PACS numbers: 03.30. + p, 04.20. – q

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2026.09.040198>

Содержание

1. Введение (1114).
 2. Постановка задачи в случае однородного электрического поля (1114).
 - 2.1. Траектория броска материальной точки в однородном электрическом поле.
 - 2.2. Примеры траекторий для различных α_0 и β_0 в случае однородного электрического поля.
 - 2.3. Угол максимальной дальности броска при фиксированной величине начальной скорости (случай однородного электрического поля).
 3. Движение в однородном гравитационном поле (1116).
 - 3.1. Примеры траекторий для различных α_0 и β_0 в случае однородного гравитационного поля.
 - 3.2. Угол максимальной дальности броска при фиксированной величине начальной скорости (случай однородного гравитационного поля).
 4. Заключение (1119).
- Список литературы (1119).

1. Введение

В школьном курсе физики изучается классическая задача о движении тела при его броске под углом к горизонту в однородном поле тяжести [1, 2]. В рамках

механики Ньютона, траекторией движения является парабола, и максимальная дальность броска над горизонтальной плоскостью при фиксированной величине начальной скорости достигается при начальном угле 45° , не зависящем от величины начальной скорости. Физический интерес представляет поиск угла, обеспечивающего максимальную дальность броска, в постановке релятивистской механики [3, 4]. Очевидно, что при скоростях броска много меньших скорости света результат будет близок к классическому значению 45° . Следовало ожидать (и это подтвердилось в настоящей работе), что в диапазоне релятивистских скоростей броска результат будет отличаться. Несмотря на то, что траектория релятивистского движения тела в однородном силовом поле хорошо известна, как в случае электромагнитного поля [5], так и в случае гравитационного поля [6], задача о нахождении начального угла, при котором осуществляется бросок с максимальной дальностью, до этого не рассматривалась. Поэтому отсутствовали как качественные, так и количественные результаты решения указанной задачи в релятивистской постановке. В настоящей работе рассмотрена задача о нахождении начального угла релятивистского броска максимальной дальности и найдено его предельное значение при величине начальной скорости, устремлённой к скорости света.

2. Постановка задачи в случае однородного электрического поля

Заряженную материальную точку бросают под углом к горизонту над бесконечной плоскостью в однородном электрическом поле, силовые линии которого направлены вертикально. При этом начальная скорость и угол броска считаются заданными. Движение материальной точки подчиняется релятивистскому обобщению вто-

М.А. Демьянов^(1,2,a), Н.А. Кондратенко^(2,b)

⁽¹⁾ Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского (ЦАГИ),
ул. Жуковского 1, 140180 Жуковский, Московская обл.,
Российская Федерация

⁽²⁾ Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Институтский пер. 9, 141701 Долгопрудный, Московская обл.,
Российская Федерация

E-mail: ^(a) demyanov@phystech.edu, ^(b) thrust_set@vk.com

Статья поступила 20 февраля 2026 г.,
после доработки 26 мая 2026 г.

рого закона Ньютона:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E},$$

где $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ — импульс тела, m — масса тела, $\mathbf{v}$ — скорость тела, $\gamma = 1/[1 - \beta^2]^{1/2}$ — лоренц-фактор, $\beta = |\mathbf{v}|/c$ — приведённая скорость, c — скорость света, q — электрический заряд, $\mathbf{E}$ — однородное электрическое поле.

Нахождение траектории движения материальной точки в декартовых координатах (x, y) сводится к решению системы дифференциальных уравнений на компоненты скорости $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)/c^2}} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)/c^2}} \right) = -g \end{cases}, \quad (1)$$

здесь введено обозначение по аналогии с ускорением свободного падения тела в однородном поле $g = |q\mathbf{E}/m|$ — отношение электрической силы, действующей на заряженную частицу, к её массе.

Полагается, что знак заряда материальной точки таков, что сила, действующая со стороны электрического поля, направлена вниз.

Начальные условия броска:

$$u(0) = V_0 \cos(\alpha_0), \quad v(0) = V_0 \sin(\alpha_0),$$

где V_0 — величина начальной скорости, $\alpha_0 \in (0, (\pi/2))$ — начальный угол броска.

В качестве свободных параметров, определяющих траекторию, и как следствие дальность броска, выступают величины V_0 и α_0 . Требуется найти начальный угол α_0 , при котором достигается максимальная дальность броска. Начальная скорость V_0 является фиксированной.

2.1. Траектория броска материальной точки в однородном электрическом поле

Из системы дифференциальных уравнений (1) следует:

$$\begin{cases} \frac{u}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)/c^2}} = A_1 \\ \frac{v}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)/c^2}} = A_2 - gt \end{cases},$$

где A_1, A_2 — константы, значения которых находятся из начальных условий ($t = 0$):

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{u(0)}{\sqrt{1 - (u^2(0) + v^2(0))/c^2}} = \frac{V_0 \cos(\alpha_0)}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} \\ A_2 &= \frac{v(0)}{\sqrt{1 - (u^2(0) + v^2(0))/c^2}} = \frac{V_0 \sin(\alpha_0)}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Получаем систему алгебраических уравнений на компоненты скорости $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} u^2 = \left(1 - \frac{u^2 + v^2}{c^2}\right) A_1^2 \\ v^2 = \left(1 - \frac{u^2 + v^2}{c^2}\right) (A_2 - gt)^2 \end{cases}.$$

Решение этой системы с учётом связи (2) констант A_1, A_2 с компонентами начальной скорости записывается в виде:

$$\begin{aligned} u(t) &= c \frac{\beta_0 \cos(\alpha_0)}{\sqrt{1 - \beta_0^2 \sin^2(\alpha_0) + (\beta_0 \sin(\alpha_0) - (gt/c)\sqrt{1 - \beta_0^2})^2}} \\ v(t) &= c \frac{\beta_0 \sin(\alpha_0) - (gt/c)\sqrt{1 - \beta_0^2}}{\sqrt{1 - \beta_0^2 \sin^2(\alpha_0) + (\beta_0 \sin(\alpha_0) - (gt/c)\sqrt{1 - \beta_0^2})^2}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\beta_0 = V_0/c$ — начальная приведённая скорость.

Зависимость координат тела от времени получается интегрированием выражения (3) с начальными условиями $x(0) = 0, y(0) = 0$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c^2}{g} \frac{\beta_0 \cos(\alpha_0)}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \left[\operatorname{arsh} \left(\frac{(gt/c)\sqrt{1 - \beta_0^2} - \beta_0 \sin(\alpha_0)}{\sqrt{1 - \beta_0^2 \sin^2(\alpha_0)}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{arsh} \left(\frac{\beta_0 \sin(\alpha_0)}{\sqrt{1 - \beta_0^2 \sin^2(\alpha_0)}} \right) \right] \\ y(t) &= \frac{c^2}{g} \times \\ &\quad \times \frac{1 - \sqrt{1 - \beta_0^2 \sin^2(\alpha_0) + (\beta_0 \sin(\alpha_0) - (gt/c)\sqrt{1 - \beta_0^2})^2}}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

При выводе соотношений используется тождество $\operatorname{arsh}(a/\sqrt{1 - a^2}) = \operatorname{arth}(a)$.

Исключая время t из уравнений (4), получаем траекторию полёта тела в координатах (x, y) :

$$y = \frac{c^2}{g} \frac{1 - \sqrt{1 - \beta_0^2 \sin^2(\alpha_0)} \operatorname{ch} \left[\frac{gx}{c^2} \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{\beta_0 \cos(\alpha_0)} - \operatorname{arth}(\beta_0 \sin(\alpha_0)) \right]}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}. \quad (5)$$

Время достижения максимальной высоты T_H определяется из выражения $v(T_H) = 0$, и время полёта тела T_L , определяемое соотношением $y(T_L) = 0$, равны соответственно:

$$T_H = \frac{c}{g} \frac{\beta_0 \sin(\alpha_0)}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}, \quad T_L = \frac{2c}{g} \frac{\beta_0 \sin(\alpha_0)}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} = 2T_H. \quad (6)$$

Высота полёта $H = y(T_H)$ и длина полёта $L = x(T_L)$ равны:

$$\begin{aligned} H &= \frac{c^2}{g} \frac{1 - \sqrt{1 - \beta_0^2 \sin^2(\alpha_0)}}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}, \\ L &= \frac{2c^2}{g} \frac{\beta_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \cos(\alpha_0) \operatorname{arth}(\beta_0 \sin(\alpha_0)). \end{aligned} \quad (7)$$

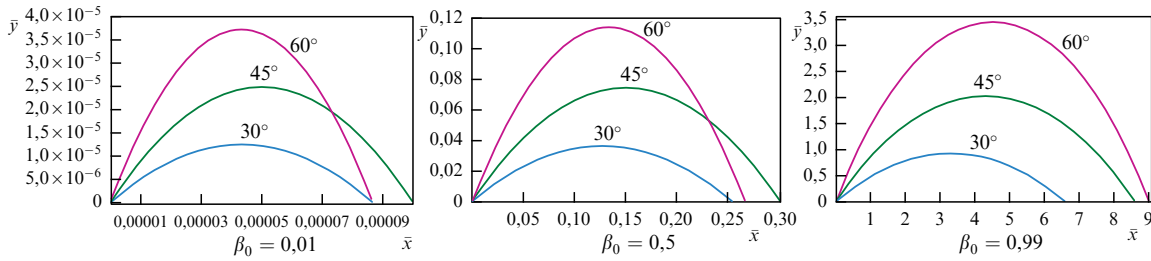


Рис. 1. Траектории броска в однородном электрическом поле при различных значениях начальной скорости и начального угла: синяя кривая — 30° , зелёная кривая — 45° , фиолетовая кривая — 60° .

2.2. Примеры траекторий для различных α_0 и β_0 в случае однородного электрического поля

Чтобы понять основные закономерности движения тела при броске с релятивистскими скоростями, построим график траектории движения при различных значениях α_0 и β_0 . Для наглядности графики удобно представлять в безразмерных координатах, в которых масштабы длины приводятся к c^2/g :

$$\bar{x} = \frac{gx}{c^2}, \quad \bar{y} = \frac{gy}{c^2}.$$

В безразмерных координатах выражение для траектории приобретает вид:

$$\bar{y} = \frac{1 - \sqrt{1 - \beta_0^2 \sin^2(\alpha_0)} \operatorname{ch} \left[\frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{\beta_0 \cos(\alpha_0)} \bar{x} - \operatorname{arth}(\beta_0 \sin(\alpha_0)) \right]}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}. \quad (8)$$

На рисунке 1 представлены траектории броска тела в безразмерных координатах при различных значениях начальной скорости и начального угла, в том числе и траектория, соответствующая нерелятивистскому пределу.

2.3. Угол максимальной дальности броска при фиксированной величине начальной скорости (случай однородного электрического поля)

Найдём угол $\alpha_{\max}$, при котором достигается максимальная длина броска при фиксированной начальной скорости β_0 . Из уравнения (7) условие максимума, применённое для L , приводит к трансцендентному уравнению:

$$\frac{\cos^2(\alpha_{\max})}{1 - \beta_0^2 \sin^2(\alpha_{\max})} = \sin(\alpha_{\max}) \frac{\operatorname{arth}(\beta_0 \sin(\alpha_{\max}))}{\beta_0}. \quad (9)$$

Уравнение (9) легко решается численно стандартными методами, откуда получается зависимость $\alpha_{\max}(\beta_0)$, представленная на рис. 2.

Видно, что угол максимальной дальности броска монотонно возрастает при увеличении начальной скорости. При начальной скорости, приближающейся к скорости света, угол максимальной дальности стремится к значению, примерно равному $56,5^\circ$.

Интересно, что при $\beta_0 \rightarrow 1$ величина $\alpha_{\max}$ стремится к конечной величине. Из уравнения (9) видно, что при $\beta_0 = 1$ выполняется:

$$\sin(\alpha_{\max, c}) \operatorname{arth}(\sin(\alpha_{\max, c})) = 1, \quad (10)$$

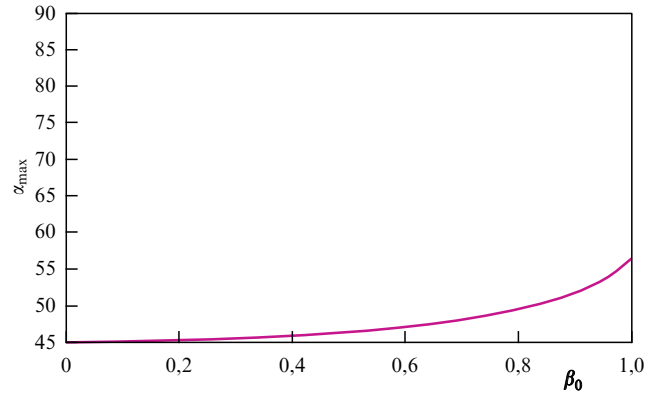


Рис. 2. Зависимость угла $\alpha_{\max}$ максимальной дальности от начальной приведённой скорости β_0 для случая однородного электрического поля.

где индекс c в обозначении $\alpha_{\max, c}$ соответствует предельному случаю $V_0 \rightarrow c$.

Численное решение уравнения (10) приводит к значению $\alpha_{\max, c} \approx 56,5^\circ$.

Стоит обратить внимание, что рассмотренный предельный случай $V_0 \rightarrow c$ не описывает движение света (фотона). Из линейности уравнений Максвелла следует отсутствие самодействия электромагнитного поля. Таким образом, в рассмотренном случае электромагнитного поля, фотоны будут двигаться по прямолинейной траектории.

3. Движение в однородном гравитационном поле

В данном разделе рассмотрим движение тела в однородном гравитационном поле в соответствии с общей теорией относительности (ОТО). Согласно геометрической трактовке ОТО на тело не действует сила в прямом смысле, а траекторией движения является геодезическая в искривлённом пространстве–времени. Сохраняя аналогию с рассмотренным ранее движением в однородном электрическом поле, метрику пространства–времени следует искать в виде:

$$ds^2 = a(y) dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Метрика, описывающая пространство–время, должна являться решением уравнений Эйнштейна (будем полагать космологическую постоянную Λ нулевой):

$$R_k^i - \frac{1}{2} R \delta_k^i = \frac{8\pi\gamma}{c^4} T_k^i, \quad (11)$$

здесь R_k^i — тензор Риччи, $R = R_i^i$ — скалярная кривизна, γ — гравитационная постоянная, T_k^i — тензор энергии — импульса материи.

В рассматриваемом случае тело движется в пустоте, поэтому $T_k^i \equiv 0$, тогда свёртка (11) по индексам i, k , приводит к равенству $R = 0$. Таким образом, получается известный вид уравнений Эйнштейна в пустом пространстве:

$$R_k^i = 0. \quad (12)$$

Тензор Риччи выражается через тензор кривизны R_{klm}^i посредством свёртки $R_{ik} = R_{isk}^s$. В свою очередь, тензор кривизны расписывается с использованием символов Кристоффеля Γ_{kl}^i :

$$R_{klm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{sl}^i \Gamma_{km}^s - \Gamma_{sm}^i \Gamma_{kl}^s. \quad (13)$$

Символы Кристоффеля Γ_{kl}^i выражаются через метрический тензор g_{ik} :

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{ir} \left(\frac{\partial g_{rk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{rl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^r} \right). \quad (14)$$

В рассматриваемом случае метрический тензор имеет вид:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} a(y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда отличные от нуля символы Кристоффеля равны:

$$\Gamma_{0y}^0 = \frac{1}{2} \frac{a'}{a}, \quad \Gamma_{00}^y = \frac{1}{2} a'.$$

Уравнения Эйнштейна в пустоте $R_{ik} = 0$ приводят к единственному уравнению:

$$a''a = \frac{1}{2} a'^2. \quad (15)$$

Таким образом, метрика, являющаяся решением уравнений Эйнштейна (11) имеет вид:

$$ds^2 = y^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (16)$$

Метрика (16) называется метрикой Риндлера. Константы интегрирования при решении уравнения (15) выбраны так, чтобы координатная особенность находилась в точке $y = 0$. Переопределение временной координаты t с помощью обычного масштабирования, позволяет полностью исключить константы интегрирования из рассмотрения. Отметим, что точка $y = 0$ соответствует горизонту событий. Таким образом, одномерное однородное гравитационное поле является полем чёрной дыры, имеющей форму двумерной плоскости в пространстве.

Ненулевые символы Кристоффеля в метрике Риндлера:

$$\Gamma_{0y}^0 = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{00}^y = y. \quad (17)$$

Уравнение движения материальной точки в однородном гравитационном поле выписывается через ковариантную производную:

$$\frac{Du^i}{ds} = \frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l = 0. \quad (18)$$

В развёрнутом виде уравнение (18) задаёт систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{2}{y} \frac{dt}{ds} \frac{dy}{ds} = 0 \\ \frac{d^2 x}{ds^2} = 0 \\ \frac{d^2 y}{ds^2} + y \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0 \end{cases}. \quad (19)$$

Из системы (19) можно исключить интервал s и оставить только явную зависимость от параметра t . Отметим, что параметр t не соответствует напрямую какому-либо физическому времени. Чтобы исключить s , надо воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции $d/ds = (dt/ds)(d/dt)$, и при взятии второй производной по интервалу $d^2/ds^2 = (d^2 t/ds^2)(d/dt) + (dt/ds)^2 (d^2/dt^2)$ воспользоваться первым уравнением из (19). Тогда получится $d^2/ds^2 = (dt/ds)^2 [(d^2/dt^2) - (2/y)(dy/dt)(d/dt)]$. Используя данное соотношение, систему (19) можно свести к виду:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{2}{y} \frac{dy}{dt} \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{2}{y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - y \end{cases}. \quad (20)$$

Начальные условия: $x(0) = 0$, $y(0) = y_0$, $dx(0)/dt = V_0 \cos(\alpha_0)$, $dy(0)/dt = V_0 \sin(\alpha_0)$, где τ — собственное время наблюдателя, находящегося в точке броска.

Заметим, что при постановке начальных условий использовалась локальная скорость, воспринимаемая наблюдателем, находящимся в начальной точке броска. Соответственно, пересчёт относительно параметра t производится с помощью временной компоненты метрического тензора по формуле $c d\tau = \sqrt{g_{00}} dx^0$. Тогда начальные условия переписутся в виде:

$$\begin{aligned} x(0) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = \frac{y_0}{c} V_0 \cos(\alpha_0), \\ \frac{dy(0)}{dt} = \frac{y_0}{c} V_0 \sin(\alpha_0). \end{aligned} \quad (21)$$

Решение уравнений (20) с учётом начальных условий (21) имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{y_0 (V_0/c) \cos(\alpha_0) \operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t) - (V_0/c) \sin(\alpha_0) \operatorname{sh}(t)}, \\ y(t) &= \frac{y_0}{\operatorname{ch}(t) - (V_0/c) \sin(\alpha_0) \operatorname{sh}(t)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Обнуление производной $(dy(t_1))/dt = 0$ позволяет найти время достижения максимальной высоты T_H . Время полёта тела T_L определяется из условия $y(t_2) = y_0$. Стоит отметить, что время здесь понимается по часам наблюдателя, находящегося в начальной точке

броска тела.

$$\begin{aligned} T_H &= \frac{y_0}{c} t_1 = \frac{y_0}{c} \operatorname{arh}\left(\left(\frac{V_0}{c}\right) \sin \alpha_0\right), \\ T_L &= \frac{y_0}{c} t_2 = 2 \frac{y_0}{c} \operatorname{arh}\left(\left(\frac{V_0}{c}\right) \sin \alpha_0\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Для нахождения физического расстояния нужно использовать трёхмерный пространственный метрический тензор $dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, для которого выполняется соотношение $\gamma_{\alpha\beta} g^{\beta\epsilon} = -\delta_\alpha^\epsilon$.

В силу того, что пространственная часть рассматриваемой пространственно-временной метрики является евклидовой и обнулены недиагональные элементы первой строки метрического тензора $g_{0\alpha} = 0$, физическое расстояние, в данном случае, в точности равно значению координат $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Высота полёта $H = y(t_1) - y_0$ и длина полёта $L = x(t_2)$ равны:

$$\begin{aligned} H &= y_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (V_0/c)^2 \sin^2 \alpha_0}} - 1 \right), \\ L &= 2y_0 \left(\frac{V_0}{c} \right)^2 \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{1 - (V_0/c)^2 \sin^2 \alpha_0}. \end{aligned} \quad (24)$$

Заметим, что в случае, когда $V_0 = c$, знаменатель в (24) обнулится, если начальный угол $\alpha_0 \rightarrow \pi/2$. То есть для объектов, движущихся со скоростью света, длина броска в данном пределе стремится к бесконечности. При этом если изначально подставить точное значение $\alpha_0 = \pi/2$, не устремляя $V_0 \rightarrow c$, то длина броска $L = 0$. Такое разрывное поведение функции L требует объяснения. Дело в том, что при $V_0 = c$ в соответствии с формулой (22), подстановка $\alpha_0 = \pi/2$, приводит к траектории $y(t) = y_0 e^t = y_0 + ct$. То есть объект, движущийся со скоростью света вертикально вверх, никогда не упадёт и будет бесконечно по времени и расстоянию удаляться от поверхности горизонта событий. Поэтому прямая подстановка $V_0 = c$ в (24) при $\alpha_0 = \pi/2$ недопустима.

Стоит обратить внимание, что в формулы (24) входит начальное вертикальное положение y_0 тела относительно горизонта событий. С точки зрения ньютоновой механики может показаться противоречивым, что высота и дальность броска зависят от значения y_0 . На самом деле, в случае $V_0 \ll c$, тело в процессе движения практически не изменяет относительной вертикальной координаты $|(y - y_0)/y_0| \ll 1$, и выражение $c^2/y_0 = g$ характеризует местное ускорение свободного падения, в соответствии с ньютоновой теорией. В данной трактовке, зависимость ускорения свободного падения g от расстояния до горизонта событий возникает из-за эффекта замедления времени.

Из выражения (22) для траектории можно исключить время, тогда получится явная зависимость y от x :

$$y = \sqrt{y_0^2 + 2y_0 \operatorname{tg}(\alpha_0)x - \frac{(1 - (V_0/c)^2 \sin^2(\alpha_0))}{(V_0/c)^2 \cos^2(\alpha_0)} x^2}. \quad (25)$$

Выражение (25) согласуется с известным фактом [6], что движение частиц в метрике Риндлера происходит по дугам эллипсов, центр которых находится на горизонте событий $y = 0$. При приближении скорости частицы к скорости света, эллипс переходит в окружность.

3.1. Примеры траекторий для различных α_0 и β_0 в случае однородного гравитационного поля

Чтобы изобразить траектории для различных значений начальных параметров α_0 и β_0 удобно перейти в безразмерные координаты. Для этого выберем в качестве основного масштаба y_0 и, при этом, будем рассматривать координату y за вычетом y_0 , чтобы начало траектории приходилось в ноль:

$$\bar{x} = \frac{x}{y_0}, \quad \bar{y} = \frac{y}{y_0} - 1.$$

Тогда уравнение траектории примет вид:

$$\bar{y} = \sqrt{1 + 2\operatorname{tg}(\alpha_0) \bar{x} - \frac{(1 - \beta_0^2 \sin^2(\alpha_0))}{\beta_0^2 \cos^2(\alpha_0)} \bar{x}^2} - 1. \quad (26)$$

На рисунке 3 представлены траектории броска тела в безразмерных координатах при различных значениях начальной скорости и начального угла, в том числе и траектория, соответствующая нерелятивистскому пределу.

3.2. Угол максимальной дальности броска при фиксированной величине начальной скорости (случай однородного гравитационного поля)

Найдём угол $\alpha_{\max}$, при котором достигается максимальная дальность броска при фиксированной начальной скорости β_0 . Из выражения (24) следует:

$$\alpha_{\max} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2 - \beta_0^2}}. \quad (27)$$

График зависимости (27) представлен на рис. 4.

Отметим, что максимальная длина броска при заданном β_0 даётся формулой:

$$L_{\max} = \frac{y_0 \beta_0^2}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}.$$

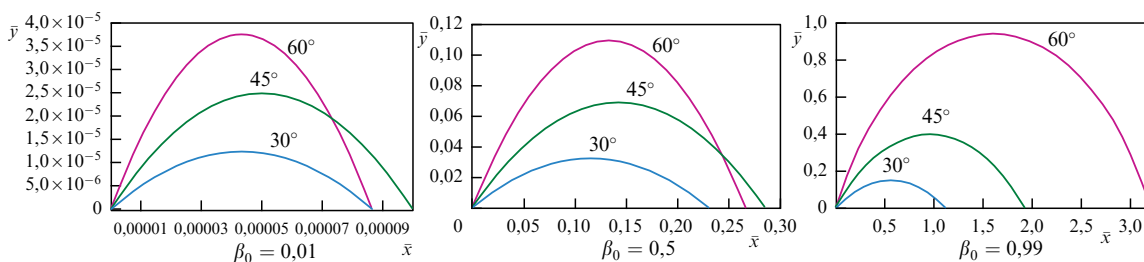


Рис. 3. Траектории броска в однородном гравитационном поле при различных значениях начальной скорости и начального угла: синяя кривая — 30°, зелёная кривая — 45°, фиолетовая кривая — 60°.

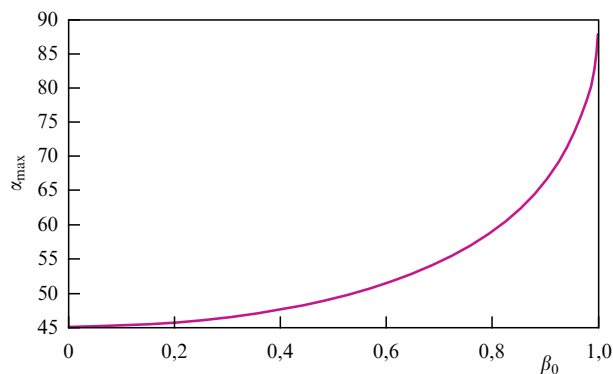


Рис. 4. Зависимость угла $\alpha_{\max}$ максимальной дальности от начальной приведённой скорости β_0 для случая однородного гравитационного поля.

На рисунке 4 видно, что зависимость угла максимальной дальности броска от начальной скорости является монотонно возрастающей. При начальной скорости, приближающейся к скорости света, угол максимальной дальности стремится к 90° .

Отметим, что общая теория относительности описывает движение света, поэтому предел $\beta_0 \rightarrow 1$ в точности соответствует движению фотона в однородном гравитационном поле.

4. Заключение

В работе рассмотрена релятивистская задача о нахождении начального угла броска максимальной дальности в однородном силовом поле при фиксированном значении величины начальной скорости. Были рассмотрены случаи однородного электрического поля и однородного гравитационного поля. Для обоих случаев найдены траектории движения тела, получены выражения для дальности, высоты, времени полёта в зависимости от

начальной величины скорости и начального угла броска. Исследованы предельные траектории тела — когда начальная скорость броска мала по сравнению со скоростью света и реализуются условия ньютоновской механики, и когда начальная скорость приближается к скорости света. В случае однородного электрического поля выведено неявное трансцендентное уравнение, связывающее угол броска максимальной дальности с величиной начальной скорости. В случае однородного гравитационного поля выражение для угла максимальной дальности броска получается в виде явной формулы. Показано, что в обоих случаях угол броска максимальной дальности является монотонно возрастающей функцией величины начальной скорости. В случае однородного электрического поля угол броска максимальной дальности возрастает от 45° при малых, по сравнению со скоростью света, скоростях до $\approx 56,5^\circ$ при скоростях, стремящихся к скорости света. В случае однородного гравитационного поля угол броска максимальной дальности возрастает от 45° при малых, по сравнению со скоростью света, скоростях до 90° при скоростях, стремящихся к скорости света.

Список литературы

1. Мякишев Г. Я., Буховцев Б. Б., Сотский Н. Н. *Физика. 10-й класс. Базовый и углублённый уровни. Учебник* (Классический курс) (М.: Просвещение, 2023)
2. Рымкевич А. П. *Физика. 10–11 классы. Задачник* (М.: Просвещение, 2022) Учебное пособие для общеобразовательных учреждений
3. Сивухин Д. В. *Общий курс физики* Т. 1 *Механика* (М.: Наука, 1989)
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля* (М.: Наука, 1988); Пер. на англ. яз.: Landau L. D., Lifshitz E. M. *The Classical Theory of Fields* (Amsterdam: Butterworth-Heinemann, 2003)
5. Гинзбург В. Л. *УФН* **98** 569 (1969); Ginzburg V. L. *Sov. Phys. Usp.* **12** 565 (1970)
6. Rindler W. *Relativity: Special, General and Cosmological* (Oxford: Oxford Univ. Press, 2001)

The maximum range of a relativistic throw in a uniform force field

M.A. Demyanov^(1,2,a), N.A. Kondratenko^(2,b)

⁽¹⁾ Zhukovskii Central Aerohydrodynamics Institute, ul. Zhukovskogo 1, 140180 Zhukovskii, Moscow Region, Russian Federation

⁽²⁾ Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),

Institutskii per. 9, 141701 Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation

E-mail: ^(a) demyanov@phystech.edu, ^(b) thrust_set@vk.com

The problem of relativistic physics is solved to find the initial angle of a maximum range throw in a uniform force field with a fixed initial velocity. Two physically different formulations are considered: the relativistic motion of a charged particle in a uniform electric field, and the motion of a particle in a uniform gravitational field in accordance with the general theory of relativity. It is shown that the maximum range throw angle in both cases monotonously depends on the initial velocity, increasing from 45° for velocities small compared to the speed of light to approximately $\approx 56,5^\circ$ for motion in a uniform electric field and to 90° for motion in a uniform gravitational field, at velocities approaching the speed of light.

Keywords: relativistic motion, uniform electromagnetic field, general theory of relativity, Rindler metric

PACS numbers: **03.30.+p, 04.20.-q**

Bibliography — 6 references

Received 20 February 2026, revised 26 May 2026

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **196** (10) 1114–1119 (2026)

Physics – Uspekhi **69** (10) (2026)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2026.09.040198>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2026.09.040198>