

Уникальность спина $1/2$

С.В. Петров

Статья посвящена 100-летию юбилею квантовой механики, и в частности спину электрона — феномену, не имеющему аналога в классической физике. Гипотеза спина электрона была выдвинута Уленбеком и Гаудсмитом в 1925–1926 гг. для объяснения многочисленных экспериментальных данных. Спустя два года наличие спина электрона было обнаружено Дираком при построении релятивистского волнового уравнения для свободной частицы. Для Дирака это оказалось большим сюрпризом, поскольку, как он утверждал позднее (в 1977 г.), его целью было получить релятивистское волновое уравнение для простейшей частицы, каковой он считал частицу с нулевым спином. А оказалось, что простейшей является частица со спином $1/2$.

Ключевые слова: спин электрона, волновое уравнение Дирака, матрицы Паули, обобщённый угловой момент, тонкая структура спектра

PACS numbers: 01.65. + g, 03.65.Pm, 14.60.Cd

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.12.040079>

Квантовая механика — на пороге своего 100-летнего юбилея. В 1925 г. вышли пионерские работы Гейзенберга, Борна и Иордана, в которых впервые появилось словосочетание "квантовая механика", а в 1926 г. — статьи Шрёдингера, ставшие основой волновой механики. С течением времени определение "волновая" трансформировалось — механику, рождённую Шрёдингером, стали называть "квантовой"¹. Методы квантовой механики, приведшие (и весьма быстро!) к успешному решению самых разных физических проблем, позволили Вигнеру охарактеризовать квантовую механику как "непостижимо эффективную".

Вскоре после рождения возникла проблема (начало которой положила знаменитая дискуссия Бора и Эйнштейна), не решённая до сих пор — умение использовать квантовую механику при решении конкретных задач ещё не обеспечивает её понимания². Прежде всего это касалось интерпретации волновой функции и процесса изме-

рения квантовых объектов. Сложившаяся ситуация вызвала категорические высказывания нобелевских лауреатов: "...Все умеют ей (т.е. квантовой механикой — СВМ) пользоваться, но никто её толком не понимает" (Гелл-Манн), "Думаю, я могу ответственно заявить, что никто не понимает квантовую механику" (Фейнман). Поздние разделы квантовой механики (например, квантовая запутанность, квантовые вычисления и др.) не изменили ситуации — пропасть между умением использовать квантовую механику и её пониманием по-прежнему глубока. Таким образом, возникает вопрос: если квантовая механика так "непостижимо эффективна", то, может быть, стоит этим ограничиться и отказаться от попыток её "понимания"? Универсального ответа на такой вопрос не существует, и каждый исследователь волен отвечать на него "да" или "нет". Однако поток статей, не иссякающий вплоть до наших дней, свидетельствует о насущной необходимости пытаться решить проблему, возникшую вскоре после рождения квантовой механики.

Предлагаемая статья не претендует на анализ понятий, касающихся квантовой механики в целом, и посвящена частному феномену квантовой механики — спину электрона. Важность данного феномена обусловлена не только тем, что отсутствует классический аналог спина, но и фундаментальностью самого электрона. Как и квантовой механики в целом, спину электрона тоже 100 лет — гипотеза спина электрона была выдвинута Гаудсмитом и Уленбеком [1, 2] в 1925–1926 гг. История открытия электронного спина весьма краткая (по историческим меркам), но богата на события³.

Обнаружение спина изначально было связано с аномальным эффектом Зеемана, и особенно с исследованием тонкой структуры сложных атомов. Успех теории Бора —

¹ Это связано с тем, что сначала Шрёдингер, а потом фон Нейман показали эквивалентность обоих подходов. В современной квантово-механической терминологии они фигурируют как представление Шрёдингера и представление Гейзенберга.

² Следует отметить, что в классической механике и электродинамике, предвещающих квантовую механику, такой проблемы не существует, поскольку понятия, используемые там, представляются нам очевидными. И хотя теория относительности радикально изменила понятие времени, оно не стало плохо понимаемым.

С.В. Петров

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, химический факультет,
Ленинские горы 1, стр. 3, 119992 Москва, Российская Федерация
E-mail: spswix@rambler.ru

Статья поступила 19 января 2025 г.,
после доработки 19 декабря 2025 г.

³ Здесь мы упомянем только некоторые факты этой обширной истории. Более подробное изложение можно найти в монографии [3].

Зоммерфельда в описании спектра состояний атома водорода давал надежду, что подобный подход может быть применён и к многоэлектронным атомам. В таком атоме каждый электрон движется по своей, разрешённой, орбите, определяемой совокупностью квантовых чисел, среди которых допускались и полуцелые (Ланде в 1922 г. ввёл полуцелое квантовое число для описания рентгеновских спектров). Единственным критерием правильности такого эмпирического подхода являлось согласие с экспериментом.

В 1925 г. Паули сформулировал свой знаменитый принцип запрета, позволивший объяснить оболочечную структуру атома и периодичность таблицы Менделеева, при этом для каждой разрешённой орбиты Паули ввёл четыре квантовых числа, среди которых были и полуцелые. Гаудсмит и Уленбек, изучая работу Паули, пришли к выводу, что раз каждое квантовое число соответствует одной степени свободы, а у точечного электрона, очевидно, три степени свободы, то четвёртую степень свободы следует соотнести с каким-то внутренним движением электрона. Поскольку планетарная модель атома в то время не вызывала сомнений (интересно отметить, что в 1925 г. были уже опубликованы статьи Гейзенберга [4] и Борна и Иордана [5], положившие начало полному отказу от классических представлений), то естественно было допустить (помимо орбитального движения) вращение электрона вокруг своей оси. Такую же идею высказывал Кронинг (1925 г.), а ещё в 1921 г. Комптон говорил об электро-не, вращающемся, подобно миниатюрному гироскопу. Однако представление об электро-не, вращающемся вокруг своей оси, противоречило теории относительности, поскольку, как следовало из расчётов, точка на поверхности вращающегося электрона, имеющего классический радиус e^2/mc^2 и обладающего внутренним моментом $\hbar/2$, обязана двигаться со скоростью, во много раз превышающей скорость света. Таким образом, налицо было противоречие между не вызывающим сомнения "внутренним поведением каждого электрона" [1, 2] и его классической интерпретацией. Указанное противоречие было разрешено Паули (ещё в самом начале 1926 г. в разговоре с Н. Бором называвшим ересью гипотезу спина), предложившим рассматривать спин как существенно квантовое свойство электрона. В соответствии с этим он записал волновое уравнение [6] для электрона во внешнем электромагнитном поле с гамильтонианом [7]

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(\hat{p}_x + \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \left(\hat{p}_y + \frac{e}{c} A_y \right)^2 + \left(\hat{p}_z + \frac{e}{c} A_z \right)^2 \right] - e\Phi + \boldsymbol{\mu} \mathbf{B}, \quad (1)$$

где внутренний магнитный момент электрона $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \hat{\mathbf{S}}$. Здесь $\mu_0 = eh/2mc$ — магнетон Бора, введённый в научный обиход Паули в 1920 г., а $\hat{\mathbf{S}} = \hbar/2\boldsymbol{\sigma}$ — трёхмерный оператор спина, компоненты которого определяются матрицами

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

получившими название матриц Паули⁴. Φ и $\mathbf{A}$ — скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля, $\mathbf{B}$ — напряжённость магнитного поля ($\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$).

⁴ В дальнейшем будем считать $\hbar = 1$.

Гамильтониан (1) получен стандартным образом. Первые два слагаемых представляют классическую функцию Гамильтона для заряда во внешнем электромагнитном поле, в которой компоненты импульса заменены соответствующими операторами. Третье слагаемое, введённое Паули, — энергия взаимодействия внутреннего магнитного момента электрона с внешним магнитным полем. Хотя нерелятивистский гамильтониан Паули (1) явно содержит спиновые динамические переменные (в виде матриц $\boldsymbol{\sigma}$), однако необходимым условием этого является наличие внешнего магнитного поля. В противном случае ($\mathbf{B} = 0$) спин исчезает.

Своего рода точка в истории обнаружения и объяснения феномена электронного спина была поставлена в 1928 г., когда Дирак опубликовал волновое уравнение для релятивистского электрона [8, 9]⁵ в форме Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_D \Psi \quad (3)$$

с гамильтонианом (в настоящей статье мы ограничимся случаем свободного электрона)

$$H_D = c\boldsymbol{\alpha} \hat{\mathbf{p}} + mc^2\beta = c(\alpha_1 \hat{p}_x + \alpha_2 \hat{p}_y + \alpha_3 \hat{p}_z) + mc^2\beta, \quad (4)$$

полученным в результате линеаризации гамильтониана⁶

$$H = \sqrt{c^2 \hat{\mathbf{p}}^2 + m^2 c^4}. \quad (5)$$

Дирак был убеждён, что волновое уравнение должно быть линейным по временной производной ("линейность по $\partial/\partial t$ была абсолютно необходимой для меня" [10]). С другой стороны, оператор $\partial/\partial t$ с точностью до множителя является нулевой компонентой оператора 4-импульса, а из требований релятивистской инвариантности следует, что искомое уравнение должно быть линейным и по пространственным компонентам данного оператора. В конечном итоге это привело Дирака к гамильтониану (4), где величины α_k ($k = 1, 2, 3$) и β (Дирак назвал их "динамическими переменными или операторами" [9]) удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k^2 &= \beta^2 = 1, \\ \alpha_k \alpha_m + \alpha_m \alpha_k &= \alpha_k \beta + \beta \alpha_k = 0, \quad k \neq m \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и, следовательно, не могут быть числами. В качестве таких величин Дирак выбрал эрмитовы матрицы 4×4 , которые имеют вид

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \sigma_k \\ \sigma_k & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

а двумерные блоки σ_k являются матрицами Паули $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$ и $\sigma_3 = \sigma_z$ и удовлетворяют тем же соотношениям (6).

Таким образом, при описании движения свободного релятивистского электрона его спин появляется автоматически. Тем не менее естественное появление динамических переменных, ответственных за спин, в задаче о сво-

⁵ Обе эти работы вышли друг за другом с месячным интервалом и, по сути дела, представляют две части одной статьи.

⁶ Гамильтониан (5) получается в результате замены в классической релятивистской функции Гамильтона компонент релятивистского импульса p_τ соответствующими операторами $\hat{p}_\tau = (\hbar/i) \partial/\partial \tau$, $\tau = x, y, z$.

бодном электро́не было для Дирака неожиданным. Он считал, что представление об электро́не как бесспиновой частице является более общим, а спин следует вводить в теорию по мере надобности, как, например, в задаче об атоме водорода⁷. Спустя полвека Дирак вспоминал [10]: "В то время я хотел всего лишь квантовой теории, которая удовлетворяла бы общим требованиям, таким как возможность применения теории преобразований⁸ и принципы теории относительности". Таким образом, стремясь получить волновое уравнение для "простейшей" (т.е. бесспиновой частицы), соответствующее канонам квантовой механики и теории относительности, Дирак доказал (хотя и не преследовал данную цель), что спин $1/2$ является неотъемлемым атрибутом электро́на и именно электрон является "простейшей" частицей. Хотя три матрицы Паули представляют собой (с точностью до множителя) три декартовы компоненты оператора спина ($\hat{S} = (1/2)\hat{\sigma}$), то на первый взгляд кажется, что при построении гамильтониана (4) можно обойтись только этими тремя матрицами. Однако в таком случае, как вспоминал Дирак [10] (см. также [11]), получить гамильтониан (4) не удаётся. К желаемому результату приводит замена матриц Паули σ_k на четырёхмерные матрицы α_k (7) и добавление матрицы β ⁹. Оператор спина $\hat{S}$ в данном случае можно записывать в виде четырёхмерной диагональной матрицы с двумерными блоками $1/2\hat{\sigma}$. Поскольку динамические величины, ответственные за спин, присутствуют в гамильтониане Дирака (4), решение волнового уравнения (3) должно явным образом свидетельствовать о наличии спина у электро́на. Дирак [8, 9] не приводит решения волнового уравнения для свободного электро́на¹⁰, однако замечает, что волновая функция помимо зависимости от пространственных координат и времени должна зависеть от некоей спиновой переменной. Как должна выглядеть такая волновая функция, если динамические величины, ответственные за спин, представлены в гамильтониане Дирака (4) численными матрицами? Ответ на этот вопрос содержится в решении стационарного уравнения Дирака (время отделяется почти так же (см. [12]), как и в нерелятивистской квантовой механике, так что $\Psi(\mathbf{r}, t) = \exp[-(i/\hbar)Et] \psi(\mathbf{r})$)

$$H_D \psi = E \psi, \quad (8)$$

где гамильтониан H_D можно переписать в виде

$$H_D = c \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & \hat{\sigma} \mathbf{p} \\ \hat{\sigma} \mathbf{p} & \hat{\sigma} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (9)$$

и, учитывая явный вид матриц Паули (2),

$$\hat{\sigma} \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \hat{p}_z & \hat{p}_x - i\hat{p}_y \\ \hat{p}_x + i\hat{p}_y & -\hat{p}_z \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Нетрудно убедиться, что искомая волновая функция пропорциональна собственной функции оператора импульса

$$\psi = \exp \left[\left(\frac{i}{\hbar} \right) \mathbf{p} \mathbf{r} \right] \mathbf{u}, \quad (11)$$

где $\mathbf{u}$ — численный четырёхмерный столбец, позволяющий говорить о волновой функции (11) как о биспиноре. На первый взгляд, релятивистская волновая функция (11) напоминает волновую функцию свободной нерелятивистской частицы, которая имеет тот же вид (11), но с заменой вектора $\mathbf{u}$ на произвольную константу. Однако отличие гораздо существеннее, поскольку вектор $\mathbf{u}$ не произволен, а является решением системы из четырёх линейных однородных алгебраических уравнений

$$\mathbb{H}_D \mathbf{u} = E \mathbf{u}. \quad (12)$$

Матрица $\mathbb{H}_D$ имеет точно такую же структуру, что и гамильтониан Дирака (9), если в последнем заменить оператор импульса $\hat{\mathbf{p}}$ его классическим аналогом $\mathbf{p}$. Наличие матриц Паули в $\mathbb{H}_D$ позволяет трактовать его как некий спиновый оператор, параметризованный компонентами классического вектора импульса. При этом наличие или отсутствие спиновых динамических величин никак не влияет на собственные значения энергии E . Действительно, корни характеристического многочлена системы уравнений (12)

$$E = \pm \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}, \quad (13)$$

что соответствует релятивистскому инварианту — скалярному произведению 4-вектора энергии–импульса $\mathbf{P} = (E/c, \mathbf{p})$ на самого себя, безотносительно того, обладает ли электрон спином или нет¹¹. Очевидно, что спиновое состояние свободно движущегося релятивистского электро́на связано с вектором $\mathbf{u}$ — собственным вектором матрицы $\mathbb{H}_D$. По аналогии с орбитальным угловым моментом о спине говорят как о векторной величине. Эта аналогия обусловлена теми же самыми коммутационными соотношениями между декартовыми компонентами оператора спина, что и для компонент оператора орбитального момента. Как следствие такой одинаковости коммутационных соотношений, квантуется проекция оператора спина на некоторое избранное направление в пространстве (обычно на ось z [13]).

Разумеется, аналогия между спиновым и орбитальным моментами не полная. Во-первых, у спина $1/2$ нет классического аналога¹². Во-вторых, орбитальный момент является характеристикой движения электро́на, в то время как спиновый момент является характеристикой самого электро́на¹³. Согласно теории обобщённого углового момента [15], собственные значения оператора квадрата момента $-N/2(N/2 + 1)$ (N — целое

⁷ Характерно его замечание по этому поводу [8]: "The question remains as to why *Nature* should have chosen this particular model for the electron instead of being satisfied with the point-charge."

⁸ Термин "теория преобразований" в настоящее время практически не употребляется. В [3] по этому поводу сказано, что теория преобразований "позволила представить нерелятивистскую квантовую механику систем с конечным числом степеней свободы как логически последовательную, компактную и единую систему взглядов".

⁹ Появление матрицы β имеет более скрытый, но не менее важный смысл, поскольку существование матриц α_k в виде (5) тесно связано с матрицей β .

¹⁰ Основная цель, которую преследовал Дирак, — получить волновое уравнение, полностью удовлетворяющее требованиям как квантовой механики, так и теории относительности. Решение же такого уравнения является следующим шагом.

¹¹ Проблема отрицательных значений энергии здесь не обсуждается, поскольку находится вне рамок настоящей статьи (см. [12]).

¹² В отличие от спина 1, который такой аналог имеет (см. [14]).

¹³ Здесь уместно вернуться к началу нашей статьи, чтобы подчеркнуть уникальность спина. Он обнаруживает себя (в отличие, например, от заряда) уже в самом волновом уравнении для свободного электро́на.

число), а собственные значения оператора проекции на выделенное направление заключены между $-N/2$ и $+N/2$. В случае орбитального момента $N/2 = l = 0, 1, 2, \dots$ и разные значения орбитального квантового числа l (и соответствующие собственные значения оператора проекции) характеризуют разные состояния одной и той же частицы. В случае спиновых моментов число N фиксировано ($N = 1$ соответствует спину электрона), а разные значения N отвечают разным спинам, как характеристикам разных частиц. Число $(2N + 1)$ определяет размерность абстрактного пространства, в котором определены операторы проекций обобщённого углового момента. Операторы $\hat{S}_\alpha$ ($\alpha = x, y, z$) определены в двумерном пространстве спиновых состояний¹⁴. Обычно в качестве базиса этого пространства выбираются собственные векторы оператора $\hat{S}_z$: $|1/2, 1/2\rangle$ и $|1/2, -1/2\rangle$ (первое число в каждом из векторов есть $N/2$ для $N = 1$, так что собственное значение оператора квадрата спина равно $3/4$, а второе число — одно из двух возможных собственных значений оператора проекции спина S_z), так что любое спиновое состояние имеет вид

$$a \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + b \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad (14)$$

где коэффициенты a и b удовлетворяют условию нормировки

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (15)$$

В матричном представлении операторов $\hat{S}_\alpha$ в качестве базисных векторов $|1/2, 1/2\rangle$ и $|1/2, -1/2\rangle$ можно использовать столбцы $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Учитывая (15), коэффициенты a и b можно записать в виде $a = \exp(i\alpha) \cos \delta$ и $b = \exp(i\beta) \sin \delta$, а произвольное спиновое состояние может быть записано как

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \\ \exp(i\gamma) \sin \delta \end{pmatrix} \quad (16)$$

($\gamma = \beta - \alpha$, а несущественный фазовый множитель $\exp(i\alpha)$ отброшен). Пара чисел δ и γ определяют любое спиновое состояние. При этом любой вектор (16) является собственным вектором оператора $\hat{S}^2$ с одним и тем же собственным значением $3/4$. Можно показать [16], что каждому спиновому состоянию соответствует вполне определённое направление в пространстве. Пусть единичный вектор $\mathbf{n}$ задаёт такое направление, определяемое парой сферических углов θ и φ :

$$\mathbf{n} = (n_x = \sin \theta \cos \varphi, n_y = \sin \theta \sin \varphi, n_z = \cos \theta). \quad (17)$$

Определим оператор проекции спина на данное направление как скалярное произведение¹⁵ $\hat{S}_{\mathbf{n}} = (\hat{\mathbf{S}}\mathbf{n})$. Учитывая явный вид матриц Паули, получим

$$\hat{S}_{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \exp(-i\varphi) \sin \theta \\ \exp(i\varphi) \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Вектор

$$\begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \exp(i\varphi) \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (19)$$

является, как нетрудно проверить, собственным вектором матрицы $\hat{S}_{\mathbf{n}}$ с максимальным собственным значением $1/2$. При смене направления (17) на противоположное следует заменить θ на $\pi - \theta$, а φ на $\pi + \varphi$, при этом $\hat{S}_{-\mathbf{n}} = -\hat{S}_{\mathbf{n}}$, а собственный вектор оператора $\hat{S}_{-\mathbf{n}}$ вместо (19) примет вид

$$\begin{pmatrix} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ -\exp(i\varphi) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Упомянутая выше связь между спиновым состоянием и направлением в реальном трёхмерном пространстве становится очевидной, если векторы (16) и (19) приравнять друг другу (т.е. $\theta = 2\delta$ и $\varphi = \gamma$). Сформулированное выше утверждение (его называют теоремой о максимальной проекции спина $1/2$ [16]) имеет взаимно однозначный характер: заданному спиновому состоянию (16) соответствует одно и только одно направление $\mathbf{n}$, и наоборот. Так, например, состоянию $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ соответствует ось x , состоянию $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ соответствует ось y и состоянию $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ соответствует ось z . С определённой долей условности об этих состояниях можно говорить, что спин направлен или по оси x , или по оси y , или по оси z . Если спиновое состояние и направление в пространстве соответствуют друг другу в вышеуказанном смысле, то среднее значение оператора проекции спина на данное направление достигает максимального значения $1/2$, в то время как среднее значение (в том же спиновом состоянии) оператора проекции спина на любое ортогональное направление равно нулю. Условность выражения "спин направлен по..." легко продемонстрировать на простом примере. Пусть в качестве $\mathbf{n}$ выбрана ось z ($\theta = 2\delta = 0$ и, следовательно, $\hat{S}_{\mathbf{n}} = (1/2)\sigma_z$), что соответствует спиновому состоянию $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. В таком случае средние значения $\overline{S_x} = \overline{S_y} = 0$, $\overline{S_z} = 1/2$, а дисперсия $\Delta S_z = \sqrt{\overline{S_z^2}} = 0$. Однако дисперсии проекций спина на оси x и y в этом состоянии отличны от нуля: $\Delta S_x = \Delta S_y = 1/2$. Можно сказать, что релятивистскому свободному электрону (в отличие от нерелятивистского) тесно в одномерном пространстве. Конечно, полученный результат соответствует соотношению неопределённостей

$$\Delta S_x \Delta S_y \geq \frac{1}{2} \overline{S_z}. \quad (21)$$

На основании теоремы о максимальной проекции спина можно заключить, куда направлен спин свободного электрона. Волновое уравнение допускает решение вида (11), где импульс $\mathbf{p}$ может быть любым как по величине, так и по направлению. Таким образом, движение свободного электрона задаёт фиксированное направ-

¹⁴Здесь $\hat{\mathbf{S}} = (1/2)\boldsymbol{\sigma}$

¹⁵При всей условности термина "скалярное произведение", поскольку $\hat{\mathbf{S}}$ — матричный вектор.

ление в пространстве $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$. Очевидно, что направление вектора спина определяется вектором $\mathbf{u}$ — собственным вектором матрицы $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{D}}$ (12), а поскольку эта матрица параметризована компонентами вектора импульса, то можно ожидать, что направление спина связано с направлением движения свободного электрона. Заметим, что матрица $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{D}}$ коммутирует с матрицей

$$\Sigma_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{p}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \sigma_{\mathbf{p}} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Следовательно, вектор $\mathbf{u}$ является общим собственным вектором обеих матриц. Его можно представить в виде $\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}$, где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ — двумерные векторы, каждый из которых является собственным вектором матрицы $\sigma_{\mathbf{p}}$ ¹⁶. Так как матрица $\sigma_{\mathbf{p}}$ с точностью до множителя совпадает с матрицей $\hat{S}_{\mathbf{n}}$, где $\mathbf{n}$ определяется направлением вектора импульса $\mathbf{p}$, то на основании вышесказанного о направлении спина можно считать, что вектор спина свободного электрона коллинеарен с вектором импульса.

В заключение хотелось бы отметить, что уникальность спина электрона проявилась ещё до того, как понятие "спин" было введено в научный обиход сначала в качестве гипотезы, а затем и как доказанного (экспериментально и теоретически) физического феномена. В 1916 году Зоммерфельд опубликовал статью [17] (см. также [11]), в которой использовал правила квантования Бора для вычисления энергетических уровней атома водорода, считая электрон релятивистским. Зоммерфельд обнаружил, что боровские уровни расщепляются, и это расщепление полностью соответствует тонкой структуре бальмеровских линий. Впоследствии оказалось, что результаты Зоммерфельда совпадают с решением уравнения Дирака (содержащего операторы спина!) для атома

¹⁶ Векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ отличаются друг от друга только численным множителем, который можно определить, рассматривая (12) как систему из двух линейных уравнений относительно $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ [12].

водорода. Однако в 1916 г. никто и не подозревал о существовании спина! Загадка этого совпадения остаётся неразрешённой и до сих пор.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ им. М.В. Ломоносова, регистрационный номер 121031300176-3.

Список литературы

1. Uhlenbeck G E, Goudsmit S *Naturwissenschaften* **13** 953 (1925)
2. Uhlenbeck G E, Goudsmit S *Nature* **117** 264 (1926)
3. Джеммер М *Эволюция понятий квантовой механики* (М.: Наука, 1985); Пер. с англ. яз.: Janner M *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (New York: McGraw-Hill, 1966)
4. Heisenberg W Z. *Phys.* **33** 879 (1925)
5. Born M, Jordan P Z. *Phys.* **34** 858 (1925)
6. Pauli W (Jr.) Z. *Phys.* **43** 601 (1927)
7. Фок В А *Начала квантовой механики* (М.: Изд-во ЛКИ, 2007); Пер. на англ. яз.: Fock V A *Fundamentals of Quantum Mechanics* (Moscow: Mir Publ., 1978)
8. Dirac P A M *Proc. R. Soc. London A* **117** 610 (1928)
9. Dirac P A M *Proc. R. Soc. London A* **118** 351 (1928)
10. Дирак П А М *УФН* **128** 681 (1979); Dirac P A M *Phys. Usp.* **22** 648 (1979); Preprint KFKI-1977-62 (Budapest: Central Research Institute for Physics, Hungarian Academy of Sciences, 1977)
11. Петров С В *УФН* **190** 777 (2020); Pertov S V *Phys. Usp.* **63** 721 (2020)
12. Петров С В *Введение в специальную теорию относительности* (М.: Изд-во Моск. ун-та, 2022)
13. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1989); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1991)
14. Гупалов С В *УФН* **190** 63 (2020); Gupalov S V *Phys. Usp.* **63** 57 (2020)
15. Мессиа А *Квантовая механика* Т. 2 (М.: Наука, 1979); Пер. с англ. яз.: Messiah A *Quantum Mechanics* Vol. 2 (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1961)
16. Балашов В В, Долинов В К *Курс квантовой механики* (М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982)
17. Sommerfeld A *Ann. Physik* **51** 125 (1916) Vol. 356 по новой нумерации на сайте Wiley Online Library

Uniqueness of spin 1/2

S.V. Petrov

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Chemistry, Leninskie gory 1, str. 3, 119992 Moscow, Russian Federation
E-mail: spswix@rambler.ru

This article is dedicated to the 100th anniversary of quantum mechanics, and in particular to electron spin — a phenomenon that has no counterpart in classical physics. The hypothesis of electron spin was proposed by Uhlenbeck and Goudsmit in 1925–1926 to explain numerous experimental data. Two years later, Dirac discovered the existence of electron spin when constructing the relativistic wave equation for a free particle. This came as a great surprise to Dirac, since, as he later claimed (in 1977), his goal was to obtain a relativistic wave equation for the simplest particle, which he considered to be a particle with zero spin. But it turned out that the simplest particle is one with spin 1/2.

Keywords: electron spin, Dirac wave equation, Pauli matrices, generalized angular momentum, spectral fine structure

PACS numbers: **01.65.+g**, 03.65.Pm, 14.60.Cd

Bibliography — 17 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **196** (1) 104–108 (2026)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.12.040079>

Received 19 January 2025, revised 19 December 2025

Physics – Uspekhi **69** (1) (2026)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2025.12.040079>