

Старая квантовая механика Бора и Зоммерфельда с современной точки зрения

К. Барли, А. Руффинг, С.К. Суслов

Мы обсуждаем модель атома Бора и её дальнейшее развитие Зоммерфельдом на основе современного математического аппарата волновой механики. Вывод правил квантования и уровней энергии осуществляется в квазиклассическом приближении. Интегралы, введённые Зоммерфельдом, вычисляются при помощи элементарных методов, и устанавливаются их связи с уравнениями Шрёдингера и Дирака. Историческое развитие и ключевые моменты перехода от классической к квантовой теории обсуждаются с целью разъяснить структуру и значимость старой квантовой механики.

Ключевые слова: модель Бора, правило квантования Бора–Зоммерфельда, уравнение Шрёдингера, уравнение Дирака, метод ВКБ, формула тонкой структуры, загадка Зоммерфельда, система компьютерной алгебры — Математика, трансурановые элементы

PACS numbers: 01.65. + g, 02.70. – c, 03.65. – w

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.08.040014>

Содержание

Предсказывать трудно, особенно будущее!
Нильс Бор

1. Введение (83).
2. Модель атома Бора (84).
3. Правила квантования Вильсона и Зоммерфельда в волновой механике (85).
 - 3.1. Формула тонкой структуры Зоммерфельда. 3.2. Формула тонкой структуры в волновой механике.
4. Вычисление интегралов Зоммерфельда (91).
5. Дальнейшие примеры и разрешение "загадки Зоммерфельда" (91).
6. Ошибка, которой Шрёдингер не сделал (92).
7. Заключение (93).
8. Приложения (94).
 - А. Скорость, ускорение и момент импульса при круговом движении. Б. Неустойчивость атома водорода в классической физике. В. Независимое рассмотрение интегралов Зоммерфельда. Г. Письмо Шрёдингера Зоммерфельду. Д. Вывод уравнений (3.18)–(3.21) при помощи системы Mathematica. Е. Релятивистский водородоподобный ион урана (uranium, $Z = 92$) в сравнении с гипотетическим ионом оганессона (oganesson, $Z = 118$) и далее.

Список литературы (100).

К. Барли^(1,a), А. Руффинг^(2,b), С.К. Суслов^(3,c)

⁽¹⁾ Department of Mathematics, College of Arts and Sciences, Howard University, 2141 6th St NW, Washington, DC 20059, USA

⁽²⁾ Landeshauptstadt München, Seminar TMG Universität, Referat für Bildung und Sport, Marienplatz 8, 80331 München, Germany

⁽³⁾ School of Mathematical and Statistical Sciences, Arizona State University, Tempe, AZ 85287–1804, USA
E-mail: ^(a) Kamal.Barley@howard.edu, ^(b) alruffing@web.de, ^(c) sks@asu.edu

Статья поступила 3 июля 2025 г.

Если вы хотите стать физиком, вам нужно делать три вещи: во-первых, изучать математику, во-вторых, ещё больше изучать математику, и в-третьих, снова делать то же самое¹.

Арнольд Зоммерфельд

1. Введение

Ровно столетие назад в Арозе (Швейцария) родилась волновая квантовая механика. Эрвин Шрёдингер отдыхал в этом классическом альпийском городке на Рождество 1925 года, когда и совершил своё эпохальное открытие — волновое уравнение квантовой механики, опубликованное в 1926 г. (см. [1]).

Детальный анализ излучения чёрного тела и последовавшая за этим квантовая теория заложили основу для модели атома Бора, представляющей собой фундаментальный шаг в понимании структуры атома, сделанный более столетия назад. Признавая квантовую природу энергии и дискретность энергетических уровней электронов, Планк [2], Эйнштейн [3], Резерфорд [4] и Бор [5] смогли объяснить поведение света и вещества на атомных масштабах и подготовили тем самым путь к развитию квантовой механики. Среди основных источников по так называемой "старой квантовой механике" Бора и Зоммерфельда можно упомянуть классические публикации [6–20], источники, цитируемые в указанных работах, и несколько общеобразовательных видеофильмов [21].

Краткая история. Первые наблюдения тонкой структуры спектральных линий атома водорода были выпол-

¹ В оригинале: "Wenn man Physiker sein will, muss man drei Dinge tun: erstens Mathematik studieren, zweitens mehr Mathematik studieren und drittens dasselbe tun".

нены А.А. Майкельсоном в 1887 г. [22, 23]. После отрицательного результата в его экспериментах по эфирному ветру он обратился к спектроскопии и обнаружил, что хорошо заметная красная линия серии Бальмера H_α была на самом деле дублетом [16, 24, 25]. Электрон был открыт Дж.Дж. Томпсоном в 1897 г. [26], и Лорд Резерфорд предложил планетарную модель атома в 1911 г. Нильс Бор сформулировал свою теорию водородоподобных систем в 1913 г. [6, 7, 9, 12, 15, 16] и в 1916 г. А. Зоммерфельд обобщил правила квантования Бора на релятивистский атом водорода [18] (см. также [25, 27, 28]). Точное решение было впоследствии получено Ч.Г. Дарвином [29] и В. Гордоном [30] вслед за открытием уравнения Дирака [31, 32] в 1928 г. Примечательно, что их результаты в точности совпадали со "старой" формулой Зоммерфельда — феномен, сейчас известный как "загадка Зоммерфельда" [24], который далее обсуждается в [8, с. 426–429].

Наша цель в настоящей работе состоит в детальном анализе с современной математической точки зрения следующих вопросов:

1. Модель Бора: круговые орбиты электронов в водородоподобных атомах и вывод формулы Бора (Нобелевская премия по физике 1922 г. [5]).
2. Вильсон и Зоммерфельд: правила квантования для многомерных периодических систем, основанные на классическом действии; вывод релятивистской формулы Зоммерфельда для эллиптических орбит в классической и волновой механике.
3. Элементарное вычисление интегралов Зоммерфельда.
4. Дополнительные примеры и разрешение "загадки Зоммерфельда"; ошибка, не сделанная Шрёдингером.
5. Приложение А. Методы векторного анализа для кругового движения.
6. Приложение Б. Неустойчивость атома водорода в классической физике, обусловленная падением электрона на ядро, предсказанным в модели Резерфорда.
7. Приложение В. Независимое вычисление интегралов Зоммерфельда посредством дифференцирования по параметру.
8. Приложение Г. Письмо Шрёдингера Зоммерфельду от 29 января 1926 г.
9. Приложение Д. Использование системы компьютерной алгебры Математика.
10. Приложение Е. Уран против оганессона и далее в "старой квантовой механике".

Традиционные курсы физики избегают обсуждения квазиклассического вывода формулы тонкой структуры Зоммерфельда из-за его сложности и ввиду того, что точное и элегантное решение существует только в рамках релятивистской квантовой механики. Несмотря на то что квазиклассическое приближение предлагает важный концептуальный взгляд, оно также влечёт за собой трудоёмкий и зачастую изощрённый анализ, делая его менее пригодным для вводных курсов.

Наша цель и мотивация. Настоящие заметки предназначены в качестве дополнения к традиционным курсам [33–38] и нашей недавней статье [39]. Здесь мы излагаем свои соображения, обсуждаем исторические детали и ведём расширенную дискуссию по избранным вопросам. Такое рассмотрение может послужить ценным ресурсом для преподавания и изучения квантовой физики, а также может использо-

ваться для курсовых проектов на любом уровне, от начального до выпускного. В связи с этим наше изложение является самодостаточным в той степени, насколько возможно. Мотивацией для данной работы послужил курс лекций по математике квантовой механики, читаемый студентам университета штата Аризона (Arizona State University) одним из авторов (СКС) в течение более чем 20 лет [39–46] (см. также ссылки, приведённые в указанных работах и [47]).

2. Модель атома Бора

Второй закон Ньютона для кругового движения заряженной частицы, такой как электрон, в статическом кулоновском поле тяжёлого иона с положительным зарядом Ze можно записать в виде

$$ma = F = \frac{Ze^2}{r^2}, \quad a = \frac{v^2}{r} \quad (2.1)$$

согласно (А.1) из приложения А. (Здесь $m \approx 9,1094 \times 10^{-28}$ г и $e \approx 4,8032 \times 10^{-10}$ статкулонов — масса электрона и абсолютная величина его электрического заряда соответственно в СГС единицах.) Для импульса электрона $p = mv$ имеем

$$p^2 = \frac{mZe^2}{r}, \quad (2.2)$$

и полная энергия даётся величиной

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} = -\frac{Ze^2}{2r}, \quad (2.3)$$

что составляет в точности половину потенциальной энергии согласно теореме *вириала*.

Нильс Бор [6, 7, 12], следуя экспериментам Николсона [48], предложил проквантовать соответствующий угловой момент электрона

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad pr = \hbar n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

в терминах *приведённой постоянной Планка* $\hbar \approx 1,0546 \times 10^{-27}$ см² г с⁻¹ в СГС единицах. Для равномерного кругового движения векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ перпендикулярны друг другу (А.3) (рис. 1). В результате Бор вывел так называемые боровские орбиты²:

$$r = r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{mZe^2} \quad (2.5)$$

и соответствующие дискретные уровни энергии электрона:

$$E_n = -\frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad (2.6)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ — главное квантовое число.

Действительно, используя (2.2) и (2.4), получим:

$$\frac{mZe^2}{r} = p^2 = \left(\frac{\hbar n}{r}\right)^2, \quad (2.7)$$

² В терминах длины волны де Бройля λ правило квантования утверждает, что длина орбиты равна $2\pi r_n = n\lambda$, где $\lambda = h/p = 2\pi\hbar/p$.

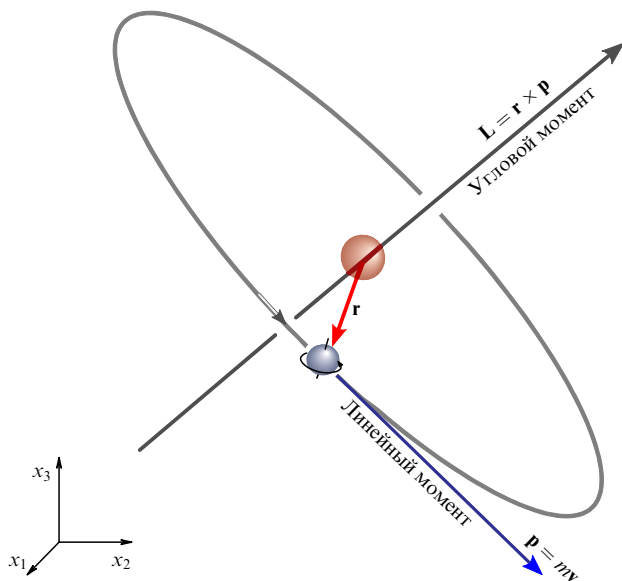


Рис. 1. Атом Бора.

что приводит к (2.5). Аналогично, из (2.3) и (2.5) следует

$$E_n = -\frac{Ze^2}{2r_n} = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2n^2}, \quad (2.8)$$

что завершает вывод формулы Бора для дискретных энергий (2.6).

В модели атома Бора электроны движутся по стационарным орбитам (2.5) и не излучают энергии (неустойчивость классического атома Резерфорда обсуждается в приложении Б). Электроны могут переходить между различными уровнями энергии (2.6), поглощая или излучая фотоны (кванты света) с определёнными значениями энергии. Энергия фотона соответствует разнице между начальным и конечным уровнями [12] (рис. 2). Альберт Эйнштейн писал об этой модели как о "высшей музыкальности в области мысли" [49].

Периодическая таблица Менделеева и модель Бора — это две важные ступени в нашем понимании структуры атома и элементов. Таблица Менделеева, предложенная в 1869 г., расположила элементы в порядке возрастания атомного веса и повторяющихся химических свойств [17, с. 2, 3]. Модель Бора, сформулированная в 1913 г. [7], установила теоретическую концепцию атомной структуры, в рамках которой вращающиеся вокруг ядра электроны находятся на фиксированных квантовых энергетических уровнях. Такое упрощённое представление об электронной структуре атома естественным образом лежит в основе периодического расположения элементов в современной таблице Менделеева [28].

3. Правила квантования Вильсона и Зоммерфельда в волновой механике

Темы для обсуждения: задача Кеплера в классической механике [24; 28, с. 84–90, 109–119, 251–258; 50, с. 146–148; 51, с. 92–102, 466–477, 481, 482]; сферические гармоники [36, 40, 52, 53]; уравнение Шрёдингера [35, 36, 38, 54], релятивистское уравнение Шрёдингера и уравнение Дирака [33–35, 38, 39, 46]; спинорные сферические гармоники [33, 34, 37, 45, 46, 53] и разделение переменных

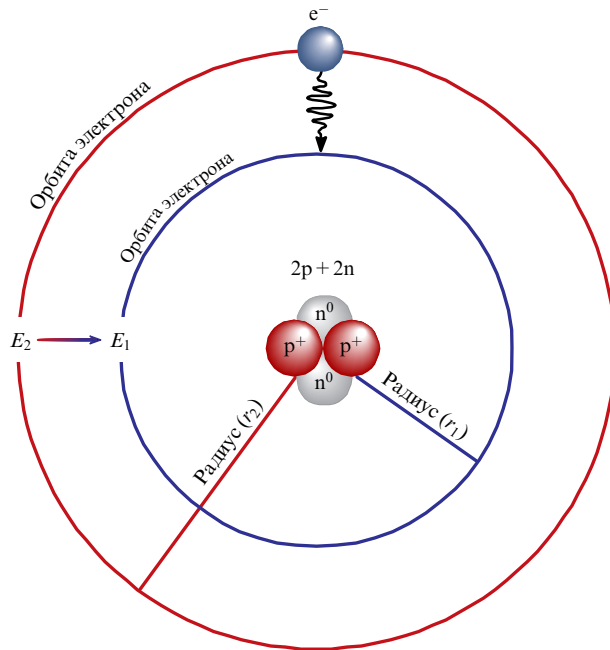


Рис. 2. Изменение электронных орбит и энергий, $r_2 \rightarrow r_1$ и $E_2 \rightarrow E_1$, в ионе гелия He^+ после излучения фотона в модели Бора. Для гелия $Z=2$, поэтому, согласно (2.5), (2.6): $r_1 = 0,2646 \times 10^{-8}$ см, $r_2 = 4r_1 = 1,0584 \times 10^{-8}$ см и $E_1 = -8,719 \times 10^{-11}$ эрг = $-54,424$ эВ, $E_2 = E_1/4 = -2,1798 \times 10^{-11}$ эрг = $-13,606$ эВ соответственно. Излучённый фотон имеет длину волны $\lambda \approx 30,379$ нм, находящуюся внутри ультрафиолетовой области электромагнитного спектра.

для уравнения Дирака в центральном поле; квазиклассическое приближение [38, 52, 55, 56].

Краткая история: в качестве обобщения правил Бора Вильсон [20] и Зоммерфельд [18] независимо предложили метод для квантования интегралов действия в классической механике на периоде движения для многомерных периодических систем (см. также [28, замечание на с. 111]).

3.1. Формула тонкой структуры Зоммерфельда

Мы следуем [24; 28, с. 251–258] при дальнейшем изложении, опираясь на законы сохранения энергии и углового момента и проводя все необходимые вычисления. Классический релятивистский гамильтониан, или полная энергия E водородоподобных систем с притягивающим кулоновским потенциалом, имеет квадратичную форму:

$$\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (3.1)$$

В полярных координатах

$$\mathbf{p}^2 = (p_r)^2 + \frac{1}{r^2} (p_\theta)^2, \quad (3.2)$$

где $p_r = \gamma m \dot{r} = \gamma m (dr/dt)$ (радиальный импульс) и $p_\theta = \gamma m r^2 \dot{\theta} = \gamma m r^2 (d\theta/dt)$ (угловой момент). В релятивистском случае $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — это знакомый множитель Лоренца (см. приложение А по поводу дальнейших деталей).

Из-за сохранения углового момента p_θ не изменяется. Вводя новую переменную $s = 1/r$, мы заметим, что

$$\frac{ds}{d\theta} = -\frac{p_r}{p_\theta}. \quad (3.3)$$

В этих обозначениях уравнение (3.1) записывается следующим образом:

$$\left(\frac{E}{mc^2} + \frac{Ze^2}{mc^2} s \right)^2 = 1 + \left(\frac{p_\theta}{mc} \right)^2 \left[\left(\frac{ds}{d\theta} \right)^2 + s^2 \right]. \quad (3.4)$$

Дифференцирование относительно θ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} + \omega^2 (s - D) = 0. \quad (3.5)$$

Здесь, по определению,

$$\omega^2 = 1 - \frac{Z^2 e^4}{c^2 p_\theta^2}, \quad D = \frac{Ze^2 E}{\omega^2 c^2 p_\theta^2}. \quad (3.6)$$

Решение уравнения (3.5) даёт релятивистские орбиты Кеплера в виде

$$s = \frac{1}{r} = C_1 \cos(\omega\theta) + C_2 \sin(\omega\theta) + D, \quad (3.7)$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные. Точка наибольшего сближения (перигелий) возникает при $\theta = 0$, когда $C_2 = 0$:

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos(\omega\theta) + D. \quad (3.8)$$

Классические релятивистские кеплеровские орбиты имеют форму конических сечений, как и в нерелятивистском случае [24, 28], но с новой угловой переменной $\phi = \omega\theta$. Таким образом, для эллиптических орбит (связанные состояния) движение от одного перигелия ($\phi = 0$) к следующему ($\phi = 2\pi$) требует значения $\theta = 2\pi/\omega$, со смещением $\Delta\theta = 2\pi/\omega - 2\pi$ за каждый оборот³ (см. рис. 3 и наш блокнот, т.е. дополнительную компьютерную программу системы Mathematica, EllipsesAnimateAu.nb [57], для последующего численного моделирования.)

Введя эксцентриситет ϵ , мы получим при $\phi = 0$ расстояние до перигелия $r_{\min} = a(1 - \epsilon)$ и при $\phi = \pi$ — расстояние до афелия $r_{\max} = a(1 + \epsilon)$. В обычных геометрических обозначениях уравнение орбиты становится

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \epsilon \cos(\omega\theta)}{a(1 - \epsilon^2)}. \quad (3.9)$$

Теперь можно применить правила квантования Вильсона – Зоммерфельда:

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} p_\theta d\theta = h n_\theta \quad (\text{что даёт } p_\theta = \hbar n_\theta), \quad (3.10)$$

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi/\omega} p_r dr = h n_r. \quad (3.11)$$

Чтобы вычислить последний интеграл, мы преобразуем радиальный импульс следующим образом:

$$p_r = \gamma m \dot{r} = \gamma m \left(\frac{dr}{d\theta} \right) \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta} \right). \quad (3.12)$$

³ В терминологии классической работы [28], где обсуждаются только существенно малые $\Delta\theta$. В настоящей работе мы сохраняем оригинальное название "эллиптической" кривой, хотя для некоторых значений ω может возникать другая топологическая структура, такая как орбиты с многочисленными точками самопересечения (см. рис. 10 и 11 далее).

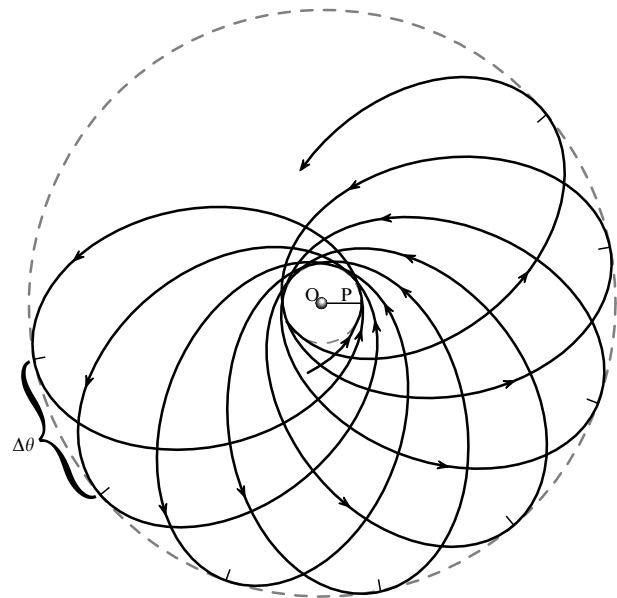


Рис. 3. Релятивистское кеплеровское движение [28, с. 254]. (Здесь О — фиксированный фокус, в котором расположено ядро; Р — начальное положение перигелия.) Перигелий и афелий движутся вокруг ядра в точке О по двум concentricким кругам.

Поэтому

$$p_r dr = p_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \right)^2 d\theta = p_\theta \epsilon^2 \omega \frac{\sin^2 \phi}{(1 + \epsilon \cos \phi)^2} d\phi, \quad (3.13)$$

где использовано уравнение орбиты (3.9). Тогда условие радиального квантования (3.11) приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\epsilon^2 \sin^2 \phi d\phi}{(1 + \epsilon \cos \phi)^2} = \frac{n_r}{\omega n_\theta}. \quad (3.14)$$

Для вычисления интеграла,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\epsilon^2 \sin^2 \phi d\phi}{(1 + \epsilon \cos \phi)^2} = (1 - \epsilon^2)^{-1/2} - 1, \quad (3.15)$$

см. [28, pp. 476, 477, немецкое изд.] и наш дополнительный блокнот системы Mathematica BohrAtomMathematica.nb [57].

В результате получаем

$$\frac{1}{1 - \epsilon^2} = \left(1 + \frac{n_r}{\omega n_\theta} \right)^2, \quad (3.16)$$

$$D = \frac{\alpha Z E}{n_\theta^2 \omega^2 \hbar c} = \frac{1}{a(1 - \epsilon^2)}, \quad (3.17)$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c)$ — постоянная тонкой структуры. Наконец, используя два последних выражения совместно с уравнениями для орбиты (3.9) и энергии (3.4), после длинных, но несложных вычислений получаем ту самую формулу, найденную Зоммерфельдом:

$$\frac{E_{n_r, n_\theta}}{mc^2} = \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{(n_r + (n_\theta^2 - \alpha^2 Z^2)^{1/2})^2} \right]^{-1/2}, \quad (3.18)$$

где n_r (радиальное квантовое число) и n_θ (азимутальное квантовое число) — положительные целые числа. Этот

результат позволил впервые объяснить тонкую структуру спектральных линий. (Дальнейшие разъяснения можно найти в [24; 28, с. 251–258] и в приложении Д вместе с дополнительной программой системы Математика.)

Замечание. Уравнения (3.6), (3.10) и (3.16)–(3.18) позволяют определить квантовые значения параметров эллиптической орбиты электрона (3.9) следующим образом:

$$\omega_{n_\theta} n_\theta = (n_\theta^2 - \alpha^2 Z^2)^{1/2}, \quad (3.19)$$

$$\epsilon_{n_r, n_\theta} = \sqrt{n_r} \frac{(n_r + 2\sqrt{n_\theta^2 - \alpha^2 Z^2})^{1/2}}{n_r + \sqrt{n_\theta^2 - \alpha^2 Z^2}}, \quad (3.20)$$

$$a_{n_r, n_\theta} = \frac{a_0}{Z} \left(n_r + \sqrt{n_\theta^2 - \alpha^2 Z^2} \right) \times \\ \times \sqrt{\alpha^2 Z^2 + \left(n_r + \sqrt{n_\theta^2 - \alpha^2 Z^2} \right)^2}, \quad (3.21)$$

где $a_0 = \hbar^2/(me^2)$ — уже знакомый радиус Бора. Эти формулы обобщают круговые орбиты. (Дальнейшие детали можно найти в нашей дополнительной программе системы Mathematica [57]; см. приложение Д.)⁴

В нерелятивистском пределе получим

$$\omega_{n_\theta} = 1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{2n_\theta^2} - \frac{\alpha^4 Z^4}{8n_\theta^4} + \mathcal{O}(\alpha^6), \quad (3.22)$$

$$\epsilon_{n_r, n_\theta} = \frac{\sqrt{n_r}(n_r + 2n_\theta)^{1/2}}{n_r + n_\theta} + \frac{\sqrt{n_r}\alpha^2 Z^2}{2(n_r + n_\theta)^2(n_r + 2n_\theta)^{1/2}} + \\ + \frac{\sqrt{n_r}(3n_r + 5n_\theta)\alpha^4 Z^4}{8n_\theta(n_r + n_\theta)^3(n_r + 2n_\theta)^{3/2}} + \mathcal{O}(\alpha^6), \quad (3.23)$$

$$\frac{Za_{n_r, n_\theta}}{a_0} = (n_r + n_\theta)^2 - \frac{\alpha^2 Z^2(2n_r + n_\theta)}{2n_\theta} - \\ - \frac{\alpha^4 Z^4}{8} \left(\frac{2n_r}{n_\theta^3} + \frac{1}{(n_r + n_\theta)^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^6), \quad (3.24)$$

$$\frac{E_{n_r, n_\theta}}{mc^2} = 1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{2(n_r + n_\theta)^2} - \frac{\alpha^4 Z^4(4n_r + n_\theta)}{8n_\theta(n_r + n_\theta)^4} + \mathcal{O}(\alpha^6), \quad (3.25)$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c)$ и $c \rightarrow \infty$ (см. наш блокнот системы Mathematica, BohrAtomMathematica.nb [57]). (Это асимптотическое разложение будет анализироваться ниже (3.49).) В данном нерелятивистском пределе мы приходим к эллиптическим орбитам Зоммерфельда для водородоподобных систем [28, pp. 109–119] (рис. 4). Как следует из (3.20) и (3.23), круговые орбиты Бора возникают только при $n_r = 0$.

В своей классической книге, "Библии" атомной теории, Зоммерфельд заключает [28, с. 258]: "*Вычисленные выше уровни энергии и соответствующая им картина расположения линий в точности сохраняются и при волновом рассмотрении. Способ, которым они выводятся в волновой механике, не только намного менее нагляден (anschaulich), но и более трудоёмок, чем способ, описанный здесь. Поэтому и было необходимо выполнить вычисления, насколько возможно, в соответствии с методом старой квантовой теории. В дальнейшем все получаемые*

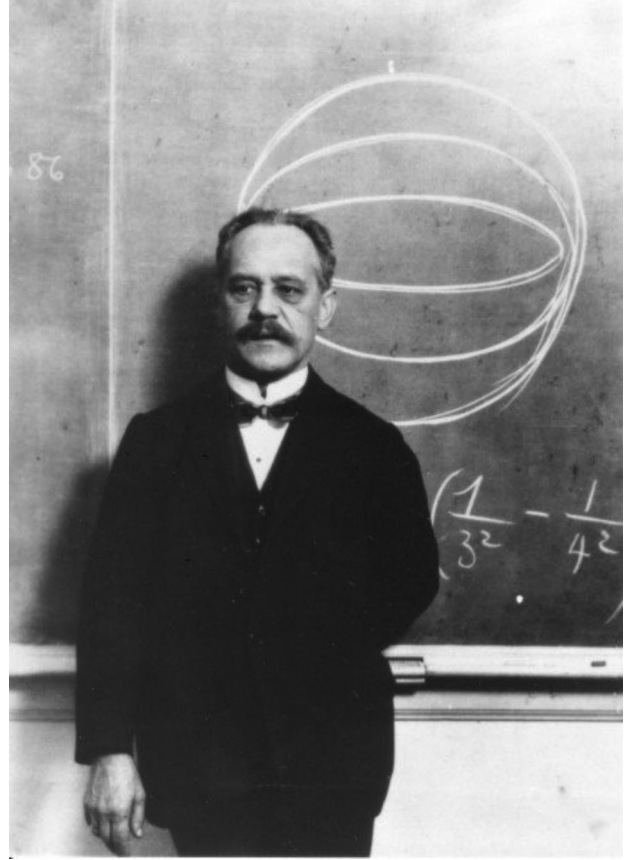


Рис. 4. Эллиптические орбиты Зоммерфельда для атома водорода [28, с. 116].

из этих результатов следствия можно будет непосредственно переносить и в волновую механику".

Действительно, в своей следующей книге по основам волновой механики Зоммерфельд обсуждал квантование проблемы Кеплера для релятивистских уравнений Шрёдингера и Дирака [59, с. 100–104, 112–118, 282–286] (см. также [19]).

3.2. Формула тонкой структуры в волновой механике

Во время становления квантовой теории правила квантования Бора – (Вильсона) – Зоммерфельда служили неким "мостом" между классической и квантовой механикой (исторические детали можно найти в [13, 15, 16, 18, 20, 28, 48]). В настоящее время для решения соответствующих задач Кеплера используются волновые уравнения Шрёдингера [60] и Дирака [61]. Как же Шрёдингер вывел своё знаменитое уравнение и затем применил его к атому водорода? Согласно его собственному свидетельству [1, 62, 63] и [64, 030† с. 141–143]⁵, основополагающая работа де Бройля о волновой теории вещества (1923–1924 гг.) [65] и работы Эйнштейна по идеальным бозе-газам (1924–1925 гг.) заложили основу для открытия волновой механики (см. также [39, 66, 67]).

Феноменологические правила квантования "старой" квантовой теории [18, 20] в современной физике выво-

⁴ Классические решения релятивистской задачи Кеплера обсуждаются также в [51, с. 481, 482] и [58, с. 100–102].

⁵ В своём письме Эйнштейну от 3 ноября 1925 г. он пишет: "Несколько дней тому назад я прочитал с большим интересом гениальную диссертацию Луи де Бройля, которую я наконец получил в своё распоряжение...".

дятся из соответствующих волновых уравнений при помощи так называемого квазиклассического приближения, известного также как метод Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна (ВКБ), описание развития которого имеется в [36, 52, 55, 68 – 70].

Это приближение уточняет правила квантования Бора – Зоммерфельда в рамках волновой механики. Метод ВКБ, дающий приближённые решения волновых уравнений, приводит к правилам квантования для энергии, похожим на правило Бора – Зоммерфельда, но с важной поправкой фазы.

При разделении переменных в сферических координатах квантование для углового момента и спина остаётся точным, поскольку концепция спина неотделима от структуры волнового уравнения Дирака [42]. После этого анализ сводится к решению радиальных уравнений.

Мы следуем [39, с. 95, 96], но с несколько иными деталями. Вспомним одномерное стационарное уравнение Шрёдингера:

$$u'' + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)]u = 0. \quad (3.26)$$

Для частицы в центральном поле соответствующие 3D волновые уравнения могут быть разделены в сферических координатах, что приводит к радиальным уравнениям, которые в общем виде можно записать следующим образом:

$$u''(x) + q(x)u(x) = 0, \quad (3.27)$$

где $x^2 q(x)$ вместе с первой производной непрерывны при $0 \leq x \leq b < \infty$. Эти уравнения могут быть приближённо решены при помощи ВКБ-метода.

Дальнейший материал для повторения: ВКБ волновые функции, их соотношение с функциями Эйри [71], вывод правил квантования и дальнейшие технические детали обсуждаются в [38, 52] и в других изданиях. Что касается квазиклассического приближения, мы рекомендуем посмотреть материал в [52, § 19, с. 235 – 251; 38, § 28, с. 178 – 188], а также [72, с. 380 – 390] и главу 9 в [71] относительно функций Эйри.

Хорошо известно, что традиционное квазиклассическое приближение нарушается около $x = 0$ для центральных полей. Однако путём замены переменной $x = e^z$ и функции $u = e^{z/2}v(z)$ радиальное уравнение приводится к новому виду:

$$v''(z) + q_1(z)v(z) = 0, \quad (3.28)$$

где

$$q_1(z) = -\frac{1}{4} + (x^2 q(x))_{x=e^z}. \quad (3.29)$$

Эта подстановка известна как преобразование (или модификация) Лангера [55, 73, 74]. При $z \rightarrow -\infty$ (т.е. $x \rightarrow 0$), функция $q_1(z)$ стремится к постоянной:

$$-\frac{1}{4} + \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x) \quad \text{и} \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} q_1^{(k)}(z) = 0 \quad (k = 1, 2).$$

Таким образом, $q_1(z)$ и её первые производные изменяются медленно при больших отрицательных z [72, с. 387].

Метод ВКБ может быть, следовательно, применён к этому преобразованному уравнению, а в первоначаль-

ном уравнении мы заменяем $q(x)$ на квадрат эффективного импульса:

$$q(x) - \frac{1}{4x^2} = p_{\text{effective}}^2(x) \quad (3.30)$$

(подробности см. в [52, 55, 73, 74]).

Правило квантования Бора – Зоммерфельда, выведенное, например, в [38] и [52], принимает вид

$$\int_{r_1}^{r_2} p(r) dr = \pi \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \quad (3.31)$$

при условии $p(r_1) = p(r_2) = 0$. (Здесь $n_r = 0, 1, 2, \dots$ — радиальное квантовое число.)

Для всех рассматриваемых кулоновских проблем мы используем общий интеграл, изначально полученный Зоммерфельдом [28, с. 611, 612] с помощью комплексного анализа: если

$$p(r) = \sqrt{-A + \frac{B}{r} - \frac{C}{r^2}} \quad (A, C > 0), \quad (3.32)$$

то

$$\int_{r_1}^{r_2} p(r) dr = \pi \left(\frac{B}{2\sqrt{A}} - \sqrt{C} \right) \quad (3.33)$$

при $p(r_1) = p(r_2) = 0$ (см. также [51, с. 468 – 470]). В разделе 4 и приложении В мы приводим два независимых элементарных способа вычисления этого интеграла.

В результате получаем следующее общее выражение для нахождения дискретных уровней энергии:

$$\frac{B}{2\sqrt{A}} - \sqrt{C} = n_r + \frac{1}{2}, \quad (3.34)$$

которое пригодно для всех рассматриваемых задач кулоновского типа (и не только для них [44, 59]).

Проблемы Кеплера в волновой механике. Для хорошо известного случая *нерелятивистской кулоновской задачи* радиальное уравнение записывается в безразмерных единицах следующим образом [1, 36, 38]:

$$u'' + \left[2 \left(\varepsilon_0 + \frac{Z}{x} \right) - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] u = 0 \quad (3.35)$$

$$\left(\varepsilon_0 = \frac{E}{E_0}, \quad E_0 = \frac{e^2}{a_0}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}, \quad x = \frac{r}{a_0} \right),$$

где $l = 0, 1, 2, \dots$ — проквантованный орбитальный угловой момент.

Применяя правило Бора – Зоммерфельда, необходимо, в соответствии с (3.30), использовать выражение:

$$p(r) = \left[2 \left(\varepsilon_0 + \frac{Z}{r} \right) - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} \right]^{1/2}, \quad p(r_1) = p(r_2) = 0, \quad (3.36)$$

модифицированное подстановкой Лангера, что, в частности, подробно обсуждается в [39, 44, 52, 55].

Определяя параметры в общем интеграле (3.32), мы имеем:

$$A = -2\varepsilon_0, \quad B = 2Z, \quad C = \left(l + \frac{1}{2} \right)^2.$$

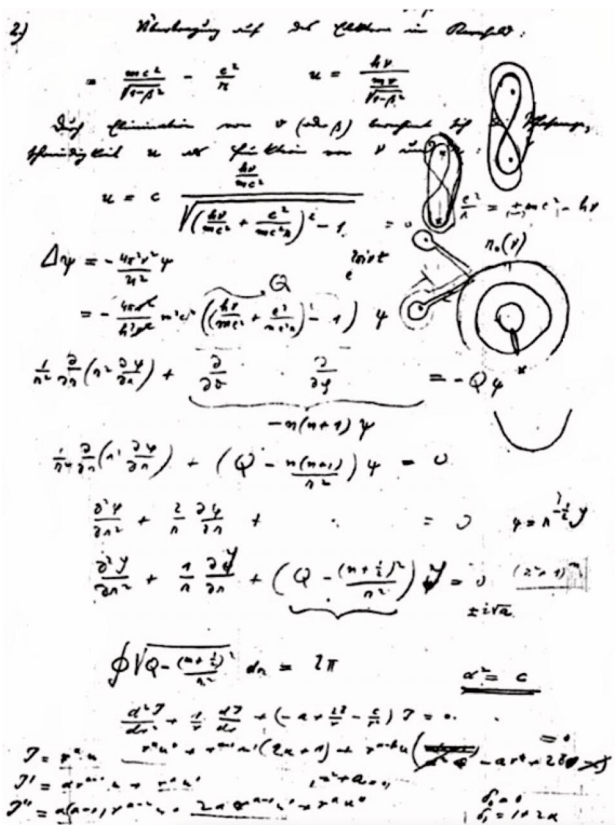


Рис. 5. Страницка из записной книжки Шрёдингера № 1, показывающая самую первую запись волнового уравнения [17, 67, 75, 76] (вероятно, сделана во время католического Рождества 1925 г.).

Подставляя эти значения в объединённое правило квантования (3.34), находим:

$$\frac{Z}{\sqrt{-2\varepsilon_0}} - l - \frac{1}{2} = n_r + \frac{1}{2}. \quad (3.37)$$

Решая для ε_0 , получаем точные уровни энергии для нерелятивистского водородоподобного атома:

$$\varepsilon_0 = \frac{E}{E_0} = -\frac{Z^2}{2(n_r + l + 1)^2}. \quad (3.38)$$

Здесь $n = n_r + l + 1$ — главное квантовое число, и мы приходим к известной формуле Бора для дискретных уровней энергии (2.6) в квазиклассическом приближении. (Сейчас ВКБ-метод в квантовой механике обычно излагается только после того, как уже получено точное решение [36].)

Нашей главной задачей в данном разделе будет анализ соответствующих релятивистских проблем. Для релятивистского уравнения Шрёдингера запишем [39]:

$$u'' + \left[\left(\varepsilon + \frac{\mu}{x} \right)^2 - 1 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] u = 0, \quad (3.39)$$

(оригинальная версия приведена на рис. 5⁶) и применяем преобразование Лангера, чтобы определить эффектив-

ный импульс:

$$p(x) = \left[\left(\varepsilon + \frac{\mu}{x} \right)^2 - 1 - \frac{(l+1/2)^2}{x^2} \right]^{1/2}. \quad (3.40)$$

Параметры заданы следующим образом:

$$A = 1 - \varepsilon^2, \quad B = 2\mu\varepsilon, \quad C = \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \mu^2.$$

Применение условия квантования Бора–Зоммерфельда (3.34) даёт:

$$\frac{\mu\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = n_r + v + 1, \quad \varepsilon = \frac{E}{mc^2}, \quad (3.41)$$

что приводит к точным релятивистским уровням энергии:

$$E = E_{n_r} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + (\mu/(n_r + v + 1))^2}} \quad (n_r = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.42)$$

где

$$\mu = \frac{Ze^2}{\hbar c}, \quad v = v_{\text{Schrödinger}} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \mu^2}. \quad (3.43)$$

В нерелятивистском пределе $c \rightarrow \infty$ (или $\mu \rightarrow 0$), получаем [35, 38]:

$$\begin{aligned} \frac{E_{n_r, l}}{mc^2} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\left[n_r + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \mu^2} \right]^2}}} = \\ &= 1 - \frac{\mu^2}{2n^2} - \frac{\mu^4}{2n^4} \left(\frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4} \right) + \mathcal{O}(\mu^6), \quad \mu \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

где $n = n_r + l + 1$ — соответствующее нерелятивистское главное квантовое число (см. также нашу дополнительную программу системы Mathematica, BohrAtomMathematica.nb [57]).

В этом разложении Тейлора:

- первое слагаемое соответствует энергии покоя $E_0 = mc^2$;
- второй член даёт нерелятивистское собственное значение энергии Шрёдингера;
- третий член описывает тонкую структуру, снимая вырождение состояний с одинаковыми n , но разными l .

Формула Зоммерфельда для тонкой структуры в релятивистской кулоновской задаче представляет собой одно из наиболее значительных достижений "старой" квантовой механики [28, с. 251–258]. Здесь мы выведем этот результат в квазиклассическом приближении, используя радиальные уравнения Дирака (разделение переменных в сферических координатах детально обсуждается в работах [37, 45, 46, 52, 78]).

В безразмерных единицах одно из дифференциальных уравнений второго порядка для дираковской спинорной компоненты принимает вид

$$v_1'' + \frac{(\varepsilon^2 - 1)x^2 + 2\mu x - v(v+1)}{x^2} v_1 = 0, \quad (3.45)$$

⁶ Записные книжки Шрёдингера воспроизведены в Архиве истории квантовой физики (Archive for the History of Quantum Physics, ANQP); дальнейшие детали приведены в [66, 77].

тогда как второе уравнение получается подстановкой $v \rightarrow -v$ (см. уравнения (6.58), (6.59) в работе [45] и/или уравнения (3.81), (3.82) в работе [46]).

Замечание. Следует подчеркнуть, что приведённая выше форма (шрёдингеровского типа) для радиальных уравнений — проверяемая при помощи системы компьютерной алгебры [40] — является важной для успешного применения ВКБ-приближения к релятивистской кулоновской проблеме [39]. (Альтернативный вариант может быть найден, например, в [79, 80].)

Применяя преобразование Лангера, находим эффективную функцию импульса:

$$p(x) = \left[\left(\varepsilon + \frac{\mu}{x} \right)^2 - 1 - \frac{(v + 1/2)^2 + \mu^2}{x^2} \right]^{1/2}. \quad (3.46)$$

Таким образом, для уравнения Дирака получаем:

$$A = 1 - \varepsilon^2, \quad B = 2\mu\varepsilon, \quad C = \left(v + \frac{1}{2} \right)^2.$$

С помощью правила квантования Бора–Зоммерфельда (3.34) мы опять приходим к уравнению (3.41), которое даёт соответствующий спектр энергии:

$$E = E_{n_r, j} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \mu^2/(n_r + v)^2}} \quad (n_r = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.47)$$

с заменой $n_r \rightarrow n_r - 1$, как обсуждается в [45, 46, 52]. Здесь опять $\mu = Ze^2/(\hbar c)$ и в теории Дирака:

$$v = v_{\text{Dirac}} = \sqrt{\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - \mu^2}, \quad (3.48)$$

где $j = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ — полный угловой момент (включающий спин электрона). (Заметим, что только на этой стадии мы можем идентифицировать *азимутальное квантовое число*, n_θ , как $n_\theta = j + 1/2$ в "старой" формуле Зоммерфельда (3.18).)

В нерелятивистском пределе ($\mu \rightarrow 0$) формула Дирака–Зоммерфельда даёт [35, 38, 46, 78]:

$$\frac{E_{n_r, j}}{mc^2} = 1 - \frac{\mu^2}{2n^2} - \frac{\mu^4}{2n^4} \left(\frac{n}{j + 1/2} - \frac{3}{4} \right) + \mathcal{O}(\mu^6), \quad (3.49)$$

где $n = n_r + j + 1/2$ — главное квантовое число для водородоподобных атомов (см. также [57]).

В этом разложении:

- первое слагаемое — энергия покоя электрона, $E_0 = mc^2$;
- второе слагаемое даёт нерелятивистскую энергию Шрёдингера;
- третье слагаемое даёт поправку тонкой структуры, происходящую от спин-орбитального взаимодействия в приближении Паули.

Такое предсказание согласуется с экспериментальными данными по расщеплению тонкой структуры в водородоподобных системах. Напротив, релятивистская формулировка Шрёдингера не смогла точно описать тонкую структуру для водородоподобных атомов (таких как водород, ионизованный гелий, дважды ионизованный литий). Например, полное расщепление тонкой структуры при $n = 2$ было переоценено множителем $8/3$ относительно предсказания Зоммер-

фельда, которое хорошо согласуется с экспериментом.

Действительно, максимальное расщепление для уровней тонкой структуры возникает при значениях орбитального момента $l = 0$ и $l = n - 1$ по Шрёдингеру, по сравнению со значениями полного углового момента $j = 1/2$ и $j = n - 1/2$ по Зоммерфельду, как видно из уравнений (3.44) и (3.49) соответственно [35, 38]. Отношение этих расщеплений составляет:

$$\frac{\Delta E_{\text{Schrodinger}}}{\Delta E_{\text{Sommerfeld}}} = \frac{4n}{2n - 1} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (3.50)$$

В случае $n = 2$ получаем $\Delta E_{\text{Schrodinger}} = (8/3) \Delta E_{\text{Sommerfeld}}$.

Замечание. С помощью программы Mathematica мы получили два следующих члена в разложении (3.49) (см. блокнот BohrAtomMathematica.nb [28, 57]):

$$-\frac{\mu^6}{4n^6} \left[\frac{5}{4} - \frac{3n}{j + 1/2} + \frac{3n^2}{2(j + 1/2)^2} + \frac{n^3}{2(j + 1/2)^3} \right], \quad (3.51)$$

$$\frac{\mu^8}{16n^8} \left[\frac{35}{8} - \frac{15n}{j + 1/2} + \frac{15n^2}{(j + 1/2)^2} - \frac{n^3}{(j + 1/2)^3} - \frac{3n^4}{(j + 1/2)^4} - \frac{n^5}{(j + 1/2)^5} \right]. \quad (3.52)$$

Итак, формула тонкой структуры Зоммерфельда сейчас может быть выведена квазиклассически из радиальных уравнений Дирака. Этот вывод не только ведёт к правилам квантования Бора и Зоммерфельда [28, 59] — предложенным почти за десять лет до появления концепции спина⁷ — но также связывает их с современной квантовой теорией. Действительно, классический релятивистский гамильтониан не содержит спина, что является причиной неоднозначности, присущей изначальному квантованию Бора и Зоммерфельда (см. [27, 83]). Фактически мы довели до конца ВКБ-аргументы самого Зоммерфельда [59, с. 134–143] на основе современного математического подхода.

Полная аналитическая трактовка релятивистской кулоновской задачи, включающая нерелятивистский предел, может быть найдена в работах [40, 45, 46, 52] (основанных на методе Никифорова и Уварова), а также и в стандартных курсах [33–35, 37, 38].

Итог. Фундаментальный результат теории тонкой структуры Зоммерфельда, именно, формулы (3.47), (3.48), даёт правильные выражения для уровней энергии водородоподобных систем в волновой механике. По загадочному стечению исторических обстоятельств Зоммерфельду удалось в 1916 г. вывести верную формулу из того, что в конце концов оказалось неадекватным теоретическим подходом. Необходимо напомнить, что в то время и квантовая механика, и концепция спина были ещё далеки от своего появления, которое произошло почти через десять лет. Таким образом, "возможно, самое удивительное численное совпадение в истории

⁷ Понятие спина электрона было введено Дж.Ю. Уленбеком и С. Гаудсмитом в письме, опубликованном в *Die Naturwissenschaften*, выпуск от 20 ноября 1925 г. (см. детали в [81]). Концепция спина объяснила, почему знаменитый эксперимент Штерна и Герлаха [28, с. 124–126, 505–507] приводит к двум отдельным пучкам атомов серебра, в отличие от предсказания "старой" квантовой теории без спина, которая приводила бы к предсказанию трёх отдельных пучков атомов серебра [82].

физики", по замечанию Кронига, иллюстрирует тот любопытный факт, что несовершенные физические модели могут, тем не менее, давать правильные количественные предсказания (см. [25, с. 84, 85] и упомянутые там работы).

4. Вычисление интегралов Зоммерфельда

Обучение математическому анализу в Соединённых Штатах выработало "современный подход" в пользу так называемых "практических задач" — и действительно, интеграл, необходимый для вывода одной из выдающихся формул последнего столетия — формулы Зоммерфельда для тонкой структуры, представляет собой тот самый классический пример из квантовой физики.

Для всех рассматриваемых проблем мы используем общий интеграл (3.32), (3.33), изначально найденный Зоммерфельдом при помощи комплексного интегрирования [28, с. 611, 612] (рис. 6). Напротив, элементарный вывод этого интеграла был предложен в [39]. Интегрируя по частям левую часть (3.33), получаем:

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} p(r) dr &= rp(r) \Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \frac{r[-(B/r^2) + 2(C/r^3)]}{2p(r)} dr = \\ &= \frac{B}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{-Ar^2 + Br - C}} - \int_{r_1}^{r_2} \frac{(C/r^2) dr}{\sqrt{-A + (B/r) - (C/r^2)}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для предпоследнего интеграла запишем:

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{(B^2/(4A) - C) - (r\sqrt{A} - B/(2\sqrt{A}))^2}} &= \\ = \frac{1}{\sqrt{A}} \arcsin \frac{r\sqrt{A} - B/(2\sqrt{A})}{\sqrt{B^2/(4A) - C}} \Big|_{r_1}^{r_2} &= \frac{\pi}{\sqrt{A}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Далее, подставляя $r = 1/x$ в последний интеграл (4.1), находим:

$$\begin{aligned} - \int_{x_1=1/r_1}^{x_2=1/r_2} \frac{C dx}{\sqrt{-A + Bx - Cx^2}} &= \\ = -\sqrt{C} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{C} dx}{\sqrt{(B^2/(4C) - A) - (x\sqrt{C} - B/(2\sqrt{C}))^2}} &= \\ = \pi\sqrt{C}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где мы дополнили до квадрата и использовали стандартный определённый интеграл. (Также можно было бы поменять местами A и C и воспользоваться предыдущим вычислением.) Объединение двух последних результатов завершает доказательство.

Ещё одно независимое вычисление этого интеграла приведено в приложении В.

5. Дальнейшие примеры и разрешение "загадки Зоммерфельда"

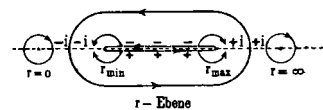
Как хорошо известно, Бор вывел квазиклассические правила квантования для водородоподобных атомов, основываясь на классическом круговом движении, тогда как Зоммерфельд обобщил эти идеи на релятивистские

478

Zusätze und Ergänzungen.

gezogen. Die r -Ebene ist zwischen $r_{\min}$ und $r_{\max}$ aufgeschlitzt zu denken und stellt das obere Blatt einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche dar. Wegen des positiven Charakters der Phasenintegrale ist bei positivem dr (unteres Ufer des Schlitzes) das Vorzeichen der Quadratwurzel positiv, bei negativem dr (oberes Ufer desselben) negativ zu nehmen, wie in der Figur angedeutet ist. Daraus folgt zugleich, daß die Quadratwurzel außerhalb des Schlitzes auf der reellen Achse der r -Ebene imaginär ist, und zwar positiv imaginär für

Fig. 101.



$r > r_{\max}$, negativ imaginär für $0 < r < r_{\min}$, wie ebenfalls in der Figur angedeutet ist. Man erkennt dies, wenn man von dem positiven oder negativen Ufer des Verzweigungsschnittes aus je einen halben Umlauf um die Verzweigungspunkte $r = r_{\max}$ oder $r = r_{\min}$ macht.

Wir fahren mit der Erweiterung des Integrationsweges fort und ziehen diesen auf die Pole des Integranden zusammen. Es sind dies die Stellen

$$r = 0 \quad \text{und} \quad r = \infty.$$

An der Stelle $r = 0$ verhält sich J_s wie

$$\sqrt{C} \int \frac{dr}{r} \left(1 + \frac{B}{C} r + \dots \right).$$

Рис. 6. Половинка страницы из книги Зоммерфельда, показывающая контур интегрирования. <https://archive.org/details/atombauundspekt00sommgoog/page/478/mode/2up> (Дальнейшие детали см. в [51, с. 468–470] и [28, с. 611–612].)

эллиптические орбиты [28]. Измерения Пашеном расщепления между уровнями тонкой структуры были интерпретированы как экспериментальная проверка специальной теории относительности [19, 24, 25, 28]. Точное решение было впервые получено Ч.Г. Дарвином [29] и В. Гордоном [30], но только после открытия уравнения Дирака [31, 32] — и примечательно, что новый результат воспроизвёл "старую" формулу Зоммерфельда (3.47)!

Вернер Гейзенберг [84] ссылался на данное обстоятельство как на "чудо" и писал: "Было бы любопытно прояснить, идёт ли здесь речь о чуде или же эта формула — возможный результат теоретико-группового подхода" [85]. В письме от 1956 года Эрвин Шрёдингер прокомментировал: "Это случайное совпадение" [86]. Как недавно было показано [44], Шрёдингер оказался прав — "загадка Зоммерфельда" [24] сейчас разрешена и обобщена на класс многомерных задач, обладающих различными группами симметрии.

Тема для просмотра: Подход Никифорова и Уварова [39, с. 97, 98; 40, с. 44–47; 72, с. 339–347] и [52].

Для получения точных решений запишем общее уравнение гипергеометрического типа [52] в виде

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(x)}{\sigma(x)} u' + \frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma^2(x)} u = 0, \quad (5.1)$$

со следующими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= x, \quad \tilde{\tau}(x) = 0, \\ \tilde{\sigma}(x) &= -ax^2 + bx - c + \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Тогда выражение

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma} = \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{ax^2 + (k-b)x + c} \end{aligned} \quad (5.3)$$

должно сводиться к линейной функции [52]. Если $k = b \pm 2\sqrt{ac}$, можно выделить полный квадрат и получить:

$$\pi = \frac{1}{2} \pm (\sqrt{ax} \pm \sqrt{c}), \quad \tau = \bar{\tau} + 2\pi = 1 \pm 2(\sqrt{ax} \pm \sqrt{c}). \quad (5.4)$$

Мы выбираем

$$\tau' = -2\sqrt{a} < 0 \quad \text{и} \quad \lambda = k + \pi' = b - 2\sqrt{ac} - \sqrt{a}. \quad (5.5)$$

В результате для всех потенциалов зоммерфельдовского типа правило квантования Никифорова и Уварова [52]

$$\lambda + n\tau' + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'' = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.6)$$

даёт

$$\frac{b}{2\sqrt{a}} - \sqrt{c} = n + \frac{1}{2} \quad (5.7)$$

как общую формулу для нахождения точных уровней энергии при $n = n_r$. (Следует отметить, что Зоммерфельд уже получал подобное соотношение в специальных случаях [59].)

Разрешение загадки. Сравнивая (3.34) и (5.7), мы приходим к следующему результату [44]:

Теорема

$$a = A, \quad b = B, \quad c = C. \quad (5.8)$$

Действительно, общее (основанное на ВКБ) правило (3.34) одновременно справедливо и для точных уровней энергии (5.7), полученных на основе подхода Никифорова и Уварова [40, 44] для всех рассматриваемых кулоновских проблем. Другие примеры включают квантовые гармонические осцилляторы, а также системы с потенциалами Кратцера и Пёшля–Теллера [40]. (См. также [43] для обобщения когерентных состояний Шрёдингера [62].)

В связи с формулой тонкой структуры Зоммерфельда Эрвин Шрёдингер свидетельствовал, среди прочего, в письме от 29 февраля 1956 г. [86]: "...Вы, естественно, в курсе того, что вывод Зоммерфельдом формулы тонкой структуры только по воле случая даёт результат, согласующийся с экспериментом. Из этого конкретного примера можно заметить, что новая форма квантовой теории (т.е. квантовая механика) ни в коем случае не является таким уж неизбежным продолжением старой теории, как обычно предполагается. При этом теория Шрёдингера, модифицированная релятивистским образом (без спина), даёт формальное выражение для формулы тонкой структуры Зоммерфельда, но оно неверно из-за появления полужелых чисел вместо целых. Моя статья, где это показано, не была... опубликована; она была отозвана мною и заменена нерелятивистской трактовкой... Вычисления [релятивистским методом] слишком малоизвестны. Это показывает, с одной стороны, как необходимо было открытие [уравнения] Дирака, и, с другой стороны, как ошибочно было бы предположить, что старая форма квантовой теории находится "примерно" в соответствии с более новой формой." (См. также [39, приложение Г, с. 110] и [87] об открытии релятивистского уравнения Шрёдингера.)



Рис. 7. Арнольд Зоммерфельд и Нильс Бор в Лунде, сентябрь 1919 г., во время его впечатляющего лекционного тура по Скандинавии после первой мировой войны: "...внезапный возврат к доброму предвоенному времени" [8, с. 240–246] — фото из Немецкого музея, Мюнхен.

Методологическое замечание. Сейчас должно быть ясно, что неоднозначность в квантовании задачи Кеплера в "старой квантовой механике" [27, 83] могла быть разрешена только после "двух квантовых революций" — именно, когда сферическая симметрия была явно принята во внимание при разделении переменных и соответствующие радиальные уравнения были выведены точно, без приближений, и лишь затем изучены в ВКБ-приближении с поправкой Лангера.

Шрёдингер, по-видимому, первым последовал по такому пути в 1925 г. (или был близок к этому, но избежал неверного шага, перейдя к точному решению?) в его неопубликованных заметках. Он использовал уравнение (3.39), которое соответствует частице с нулевым спином (см. [39], рис. 5, где воспроизведены его оригинальные записи, а также работу [42], где содержится дальнейшее обсуждение концепции спина и волновых уравнений). По свидетельству, сделанному впоследствии, именно из-за расхождения с экспериментом Шрёдингер и не опубликовал свою первоначальную работу (см. также его письмо к Вейлю в [39, приложение Г]).

6. Ошибка, которой Шрёдингер не сделал

Интересно отметить, что нижняя левая часть на рис. 5 приводит "старое" правило квантования Бора–Зоммерфельда, включающее то, что сейчас называется поправкой Лангера [55], а именно⁸, $n(n+1) \rightarrow (n+1/2)^2$, но с целым l , а не с полужелым $l+1/2$ в правой части, как должно быть в ВКБ-приближении (3.31) (можно было бы изменить обозначения Шрёдингера, переставив $n \leftrightarrow l$, как принято сейчас; см. также сноски^{16,17} далее). Как мы сейчас хорошо понимаем, эта форма привела бы к неправильному спектру в его релятивистском уравнении — в частности, главное квантовое число в нерелятивистской задаче Кеплера получило бы полужелые значения вместо целых (дальнейшие детали приведены в нашей дополнительной компьютерной программе для системы Mathematica [57]).

⁸ В этом случае получается $\sqrt{C} = n + 1/2$.

Однако Шрёдингер такой ошибки не сделал. Вместо этого он указал, "...*(хотя лишь словами)*..." [39, приложение Г, с. 111]; см. также [64, 184† с. 484, 485], точное решение при помощи метода Лапласа, выраженное в виде контурного интеграла [39, приложение В]!

Шрёдингер детально знал интегралы, введённые Зоммерфельдом. Например, это явно упомянуто в его письме Зоммерфельду от 29 января 1926 г. [66, с. 462] (см. также [64, 041† с. 170–172]): "...*Наконец, я хотел бы добавить, что открытие всей связи [между волновым уравнением и квантованием атома водорода] восходит к Вашему изящному методу интегрирования для оценки радиального квантового интеграла. Это характерная и знакомая комбинация $-(B/\sqrt{A}) + \sqrt{C'}$, которая внезапно, как Святой Грааль, появляется из показателей степеней α_1 и α_2* ".

В этом письме Шрёдингер впервые заявляет об успехе волновой теории применительно к квантовому осциллятору, ротатору, нерелятивистскому (и частично релятивистскому) атому водорода (задача Кеплера) и свободному движению точечной массы в безграничном пространстве и в ящике, до последующих публикаций [1, 88]. Он также сформулировал программу для дальнейших исследований. Для удобства читателя его полное письмо даётся в переводе с немецкого в приложении Г.

Зоммерфельд ответил с энтузиазмом в письме от 3 февраля 1926 г. [64, 042† с. 173–175]: "*То, что Вы пишете в Вашем эссе и письме, чрезвычайно интересно. Моё личное мнение о мистике целых чисел должно остаться в тайне, как и мое личное удобство... Моё впечатление таково: Ваш метод может заменить новую квантовую механику Гейзенберга, Борна, Дирака... Так как Ваши результаты полностью согласуются с их результатами...*" Это было началом триумфа волновой механики Шрёдингера [66, с. 617–636] (см. также [89] и [90]).

Временная линия. Точные даты фундаментальных открытий Шрёдингера, приведших к его первым публикациям [1, 88], достоверно неизвестны [75, 76, 91] и [66, pp. 459–465]. Однако можно оценить их временную линию, основываясь на письме Шрёдингера к Эйнштейну [64, 030† с. 141–143] от 3 ноября 1925 г.; на воспоминаниях Блоха о двух коллоквиумах в Цюрихе [92], предположительно имевших место в конце ноября и/или начале декабря 1925 г. [66, с. 419–423]; письме Вину [64, 037† с. 162–165] из Арозы от 27 декабря 1925 г. и на письме к Зоммерфельду [64, 041† с. 170–172] из Цюриха от 29 января 1926 г. В результате мы приходим к правдоподобной оценке этого периода — от начала ноября 1925 г. до конца января 1926 г.

В то же время, в январе 1926 г., Бор отзывался о развитии "старой" теории в письме к своему другу,

шведскому физiku Карлу Озеену [25, с. 85] (цитируется из [93, с. 73]), следующим образом: "*На нынешнем этапе развития квантовой теории мы едва ли можем сказать, было ли удачей или неудачей то, что свойства кеплерова движения можно было так просто соотнести со спектром атома водорода, как это полагалось возможным в то время. Если бы эта связь имела лишь тот асимптотический характер, которого можно ожидать из принципа соответствия, то мы не должны были поддаваться искушению применять механику так грубо, как мы полагали возможным в течение некоторого времени. С другой стороны, именно эти механические соображения были полезны в построении анализа оптических явлений, который постепенно привел к квантовой механике*". — И в самом деле, было трудно предсказать!

7. Заключение

Традиционные курсы [33–36, 38, 54] не рассматривают вывод формулы Зоммерфельда для тонкой структуры в квазиклассическом приближении — и читатель сейчас может понять почему. Действительно, фактически имеется три различных уровня сложности, отражающих историю "трёх квантовых революций" в развитии квантовой физики:

— элементарный уровень классической механики [50, 51] в модели атома Бора (см. рис. 1);

— начальная квантовая механика [36, 54], включающая нерелятивистский (и, безуспешно, релятивистский) атом водорода;

— и наконец, релятивистская квантовая теория [33–35, 37, 38], включающая уравнение Дирака и формулу Зоммерфельда для тонкой структуры.

Эта историческая цепь событий схематически представлена в табл. 1.

ВКБ-метод может применяться только после внимательного изучения основных свойств уравнения Дирака, включая построение спинорных сферических гармоник [33, 34, 37, 45, 46, 53] и нетривиальное разделение переменных в сферических координатах. Это, естественно, требует определённого "педагогического мастерства" и существенных затрат времени как при преподавании, так и при изучении квантовой механики. Настоящие заметки — изначально обусловленные вводными курсами по математике квантовой механики в Университете штата Аризона (Arizona State University) [39–46, 94] и в Техническом университете Мюнхена (Technische Universität München) [47] — хотя и не исчерпывающие, но могут помочь лекторам восполнить указанный пробел.

Таблица 1

Период времени (снизу вверх)	Главные результаты
Волновая механика Дирака: 1928 г.	Релятивистское уравнение Дирака; формула тонкой структуры (3.47), (3.48); мы выводим этот результат в ВКБ-приближении.
Волновая механика Шрёдингера: 1925–1926 гг.	Нерелятивистское и релятивистское уравнения Шрёдингера: формула Бора (3.38), формула тонкой структуры Шрёдингера (3.42)–(3.44); мы выводим (3.38) и (3.42)–(3.44) в ВКБ-приближении.
"Старая" квантовая механика: 1911–1916 гг.	Планетарная модель атома Резерфорда; правила квантования Бора–(Вильсона)–Зоммерфельда: формула Бора (2.6) и формула тонкой структуры (3.18)

Разрешение "загадки Зоммерфельда" до сих пор представляет теоретический и педагогический интерес [44]. Только в теории Дирака, которая даёт полное релятивистское квантово-механическое описание атома водорода и аккуратно предсказывает его тонкую структуру, данный вопрос может быть рассмотрен строго. И только на этом уровне мы приходим вместо "загадки" к математически корректно определённым утверждениям, такому как гипотеза или теорема.

Системы компьютерной алгебры, такие как Maple и Mathematica, являются ценными вспомогательными средствами при преподавании и изучении квантовой механики, особенно для начинающих. Эти системы могут осуществлять сложные математические вычисления, позволяя студентам сконцентрироваться на более глубоком изучении основных понятий и методах решения задач вместо погружения в утомительные вычисления. Следует признать, что каждая из рассматриваемых квантово-механических задач, за исключением нескольких тривиальных, обычно требует отдельного анализа с многочисленными специфическими деталями, которые делают формальное применение выбранной системы компьютерной алгебры делом довольно не простым, как могло бы показаться на первый взгляд (см., например, [40, 41, 94]).

В конечном итоге практическое использование системы Mathematica в настоящей работе [57] также может помочь студентам в проведении сложных вычислений и в лучшем понимании квантовой физики. Вычисления, основанные на искусственном интеллекте с его линейными функциями и простыми функциями активации, очевидно, не могут даже отдалённо достичь уровня строгого математического вывода, скажем, уравнений (3.18)–(3.21), приведённого в приложении Д.

Благодарности

Мы благодарим Р.А. Абагяна, С.И. Крючкова, Н.А. Ланфера, С.В. Петрова и Е.В. Степанова за их помощь и полезные комментарии. Особую благодарность мы приносим М.С. Аксентьевой за ценные советы по улучшению изложения, а также С.Д. Данилову за перевод нашей статьи с английского и Н.К. Дорониной за редактирование окончательной версии. Мы глубоко признательны Т.Б. Аксентьевой за консультирование и важные уточнения по переводу с немецкого языка письма Шрёдингера Зоммерфельду.

8. Приложения

А. Скорость, ускорение и момент импульса при круговом движении

Для однородного кругового движения получаем

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (\text{A.1})$$

Действительно, если

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = r \cos(\omega t) \mathbf{e}_1 + r \sin(\omega t) \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}(0) = r \mathbf{e}_1, \quad (\text{A.2})$$

где $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — два ортонормированных вектора (рис. 8), то

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r\omega(-\sin(\omega t)\mathbf{e}_1 + \cos(\omega t)\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{A.3})$$

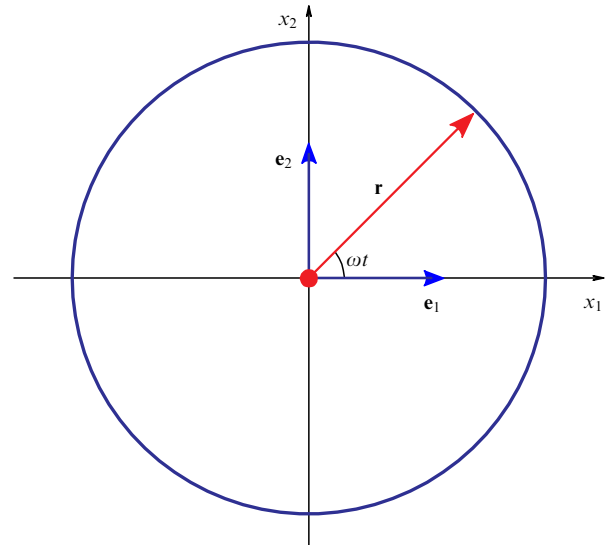


Рис. 8. Однородное круговое движение.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -r\omega^2(\cos(\omega t)\mathbf{e}_1 + \sin(\omega t)\mathbf{e}_2) = -\omega^2\mathbf{r}. \quad (\text{A.4})$$

Таким образом,

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = r^2\omega^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) = r^2\omega^2 = v^2, \quad v = \omega r. \quad (\text{A.5})$$

Подобным образом,

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \omega^4 r^2, \quad a = \omega^2 r. \quad (\text{A.6})$$

Соотношение (A.1) следует из двух последних выражений: $a = \omega^2 r$ и $\omega = v/r$.

Более того,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{v} &= r^2\omega \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= r^2\omega(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))\mathbf{e}_3 = r\mathbf{v}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

(см. рис. 1).

Уравнение (3.2) может быть выведено аналогичным способом. В самом деле, в полярных координатах

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{e}_1 + r \sin \theta \mathbf{e}_2 \quad (\text{A.8})$$

получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}) \mathbf{e}_1 + (\dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}) \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{v}^2 &= (\dot{r})^2 + r^2(\dot{\theta})^2, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

что означает (3.2).

Для релятивистской частицы:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{A.10})$$

и в центральном поле $U = U(r)$:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{dU}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (\text{A.11})$$

Соответствующий угловой момент импульса, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, является интегралом движения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{L} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \\ &= m\gamma(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) - \frac{dU}{dr} \frac{1}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

или $\mathbf{L} = \text{const.}$

В полярных координатах (A.8) получаем

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \gamma m r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3. \quad (\text{A.13})$$

Б. Неустойчивость атома водорода в классической физике

Как известно [15–17, 21], вращающийся электрон в планетарной модели Резерфорда должен упасть на ядро, двигаясь по спирали, согласно законам классической механики и электродинамики. Действительно, полная мгновенная мощность, излучённая по всем телесным углам, даётся хорошо известной формулой Лармора [95]:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2 a^2}{3c^3}, \quad (\text{Б.1})$$

где $c \approx 2,9979 \times 10^{10}$ см с^{-1} — скорость света в СГС единицах. Здесь, согласно (2.1)–(2.3),

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{mr^2}, \quad (\text{Б.2})$$

и таким образом,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{e^2}{mr^2} \right)^2 = -\frac{2e^6}{3c^3 m^2 r^4}. \quad (\text{Б.3})$$

С другой стороны, по теореме вириала (2.3) находим:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2}{2r^2} \frac{dr}{dt}. \quad (\text{Б.4})$$

Приравнявая (Б.3) и (Б.4), мы получим:

$$r^2 \frac{dr}{dt} = -\frac{4e^4}{3m^2 c^3} \quad \text{или} \quad 3r^2 dr = -\frac{4e^4}{m^2 c^3} dt. \quad (\text{Б.5})$$

Интегрирование обеих сторон даёт

$$-r_1^3 = r^3 \Big|_{r_1}^0 = \int_{r=r_1}^0 3r^2 dr = -\frac{4e^4}{m^2 c^3} \int_{t=0}^{\tau} dt = -\frac{4e^4}{m^2 c^3} \tau, \quad (\text{Б.6})$$

где $r_1 \approx 0,52921 \times 10^{-8}$ см — первый радиус Бора для атома водорода, как следует из (2.5). Поэтому электрон в модели Резерфорда упадёт на ядро менее чем через 1 нс:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{m^2 c^3}{4e^4} r_1^3 \approx \frac{(9,1094 \times 10^{-28})^2 (2,9979 \times 10^{10})^3}{4(4,8032 \times 10^{-10})^4} \times \\ &\times (0,52921 \times 10^{-8})^3 \approx 1,5564 \times 10^{-11} \text{ с}. \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

(Согласно [15], эта оценка была получена в 1904 г. Г.А. Шоттом.)

Скорость электрона на первой боровской орбите может быть оценена следующим образом:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{e}{\sqrt{mr_1}} \approx \frac{4,8032 \times 10^{-10}}{(0,52921 \times 10^{-8} \times 9,1094 \times 10^{-28})^{1/2}} \approx \\ &\approx 2,1876 \times 10^8 \text{ см с}^{-1} \approx 0,7297 \times 10^{-2} c \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

(нерелятивистское движение) и время одного оборота составляет:

$$t_{\text{rot}} = \frac{2\pi r_1}{v_1} \approx 2 \times 3,1415 \frac{0,52921 \times 10^{-8}}{2,1876 \times 10^8} \approx 1,5199 \times 10^{-16} \text{ с}. \quad (\text{Б.9})$$

Поэтому полное количество оборотов до падения на центр может быть оценено следующим образом:

$$N_{\text{total}} = \frac{\tau}{t_{\text{rot}}} \approx \frac{1,5564 \times 10^{-11}}{1,5199 \times 10^{-16}} \approx 102400. \quad (\text{Б.10})$$

Время движения по спирали, τ , намного превосходит орбитальное время, t_{rot} , поэтому трактовка движения по спирали как последовательности круговых орбит в атоме водорода вполне уместна (дальнейшие детали можно найти в [16, 17]).

В. Независимое рассмотрение интегралов Зоммерфельда

Для вычисления интегралов, приводящих к правилу квантования Бора–Зоммерфельда, можно воспользоваться методом дифференцирования по параметру [28, 59]. Как хорошо известно, если

$$J(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} F(x, y) dy, \quad (\text{B.1})$$

то

$$\frac{dJ}{dx} = \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dy + F(x, g(x)) \frac{dg}{dx} - F(x, f(x)) \frac{df}{dx}. \quad (\text{B.2})$$

В случае ВКБ-приближения два последних слагаемых исчезают, так как пределы интегрирования — это точки поворота, где подынтегральная функция обращается в нуль [56].

Мы применим этот метод для независимого вычисления интегралов Зоммерфельда, обсуждаемых в статье [44]. Записывая

$$I = \int_{r_1}^{r_2} p(r) dr, \quad p(r) = \sqrt{-A + \frac{B}{r} - \frac{C}{r^2}} \quad (A, C > 0), \quad (\text{B.3})$$

при условии $p(r_1) = p(r_2) = 0$, находим:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dB} &= \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{-Ar^2 + Br - C}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{A}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{(B^2 - 4AC)/(4A^2) - (r - B/(2A))^2}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{A}} \arcsin \left(\frac{2Ar - B}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{\pi}{2\sqrt{A}}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

В результате

$$\frac{dI}{dB} = \frac{\pi}{2\sqrt{A}}, \quad I(B_0 = 2\sqrt{AC}) = 0 \quad (\text{B.5})$$

и после интегрирования:

$$I = \pi \left(\frac{B}{2\sqrt{A}} - \sqrt{C} \right). \quad (\text{B.6})$$

Это, по-видимому, самый простой способ вычисления таких интегралов.

Г. Письмо Шрёдингера Зоммерфельду⁹

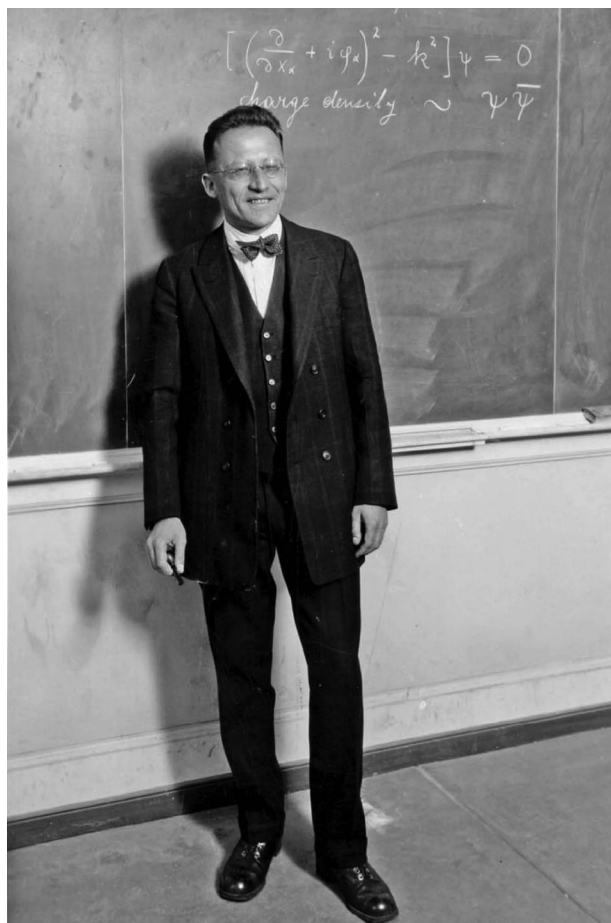
Цюрих, 29 января 1926 г.

Достопочтенный господин профессор!

Я настолько долго не давал Вам о себе знать¹⁰, что теперь чувствую необходимость написать Вам как можно скорее, чтобы Вы вдруг не написали мне ранее, если уже успели посмотреть мою работу, посвящённую квантам, которую я ранее направил господину тайному советнику Вину для публикации в *Annalen der Physik*, с просьбой прежде всего показать её Вам¹¹. Разумеется, ничьё мнение я так сильно не предвосхищаю, как Ваше: разделите ли Вы радужные надежды, которые я связываю с квантовыми уравнениями, полученными из принципа Гамильтона¹².

Мне удалось к настоящему времени представить ещё некоторые проблемы механики в новом подходе. В пределах моих математических возможностей всё образуется наикрасивейшим образом — что примечательно, это не калька старых правил квантования, а есть существенные различия по характерным пунктам¹³.

Гармонический осциллятор необходимо рассматривать при помощи тех же аналитических приёмов, что и задачу Кеплера* (в уравнение осцилляций, получаемое для функции ψ , следует ввести квадрат абсциссы в качестве независимой переменной)¹⁴. И тут мы вновь сталкиваемся со странным случаем того, как уравнение, которое не может быть проинтегрировано в обычных квадратурах, интегрируется как раз таки в частном случае, в элементарных функциях — очередное доказа-



Надпись на обороте фотографии:

Профессор Э. Шрёдингер, декабрь 1926 г.

(см. <https://search.library.wisc.edu/digital/AHDIU5YGAIKZOW8N>).

тельство того, как любезно Природа стремится облегчить нам понимание её законов. Полученные собственные значения (энергетические уровни): $\frac{2n+1}{2} \hbar \nu$, то есть так называемое полуцелое квантование¹⁵. Хотя здесь квантовые разности остаются неизменными, то в этом мне видится хорошее предзнаменование, ведь $\frac{2n+1}{2}$ является арифметическим средним из n и $n+1$.

Ротатор (dumbbell, сферический волчок) в трёхмерном случае (т.е. с двумя переменными ϑ, φ) очень прост, собственные функции будут соответствовать стандартным сферическим функциям, а собственные значения (уровни энергии) получаются как $n(n+1) \frac{\hbar^2}{8\pi^2 J}$. Характерное выражение $n(n+1)$ находим из дифференциального уравнения для сферических гармоник. Меня это несказанно радует, не столь из-за вышеприведённого случая, а из-за возможности надеяться, что и в дальнейшем там, где это нужно, будут получаться $n(n+1)$ вместо n^2 ¹⁶ (в Ваших формулах интенсивности и в формулах аномального расщепления Зеемана)¹⁷. А в случае ротатора,

⁹ Перевод по [64, с. 170–173]. Это письмо также опубликовано в издании: Arnold Sommerfeld, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Band 2, S. 236–238.

¹⁰ Предыдущее (известное) письмо Шрёдингера [64, с. 132–135] Зоммерфельду было написано в июле 1925 г.

¹¹ Это было первое сообщение Шрёдингера по волновой механике [1], посланное за несколько дней до этого Вильгельму Вину, одному из редакторов *Annalen der Physik* (см. также ответ Вина [64, с. 177]).

¹² Ср. [50, 51]. См. также ответ Зоммерфельда [64, с. 173–175].

¹³ Согласно коллеге Шрёдингера по предшествующей работе Петеру Паулю Эвальду [96, р. 385], фундаментальный труд Куранта и Гильберта 1924 г. по методам математической физики [97] "позволил физикам впить дух единого математического метода в особенно важной области, связанной с ключевыми понятиями: собственные значения, собственные функции. Соответствующие проблемы... возникают в физике через осцилляции всякого рода." С большой степенью уверенности можно полагать, что Шрёдингер не имел этой книги в Арозе [39]. Только в своей второй статье Шрёдингер благодарит своего ассистента Э. Фуеса (E. Fues) за указание связи задачи о гармоническом осцилляторе с полиномами Эрмита и указывает на связь своей волновой функции в "проблеме Кеплера" с полиномами Лагерра [88].

¹⁴ "Осциллятор Планка" рассматривается во второй статье Шрёдингера [88] как первый пример.

¹⁵ Ср. [88]. Полуцелые квантовые числа были также введены Гейзенбергом в его ранних попытках описать аномальный эффект Зеемана.

¹⁶ Во введении к своей книге, дополнительному материалу по волновой механике [59, с. 2], Зоммерфельд указывает, что эти трудности старой квантовой теории нашли сейчас своё естественное объяснение в новой волновой механике.

¹⁷ Как отмечал Зоммерфельд в [28, с. 333, 476], появление $j(j+1)$ вместо j^2 в g -факторе Ланде "предполагает, что два соседних состояния j и $j+1$ физически уместны вместо одного состояния j .

напротив, нужно будет сперва подумать, не нанесёт ли это ущерба объяснению полосатых спектров. Однако, я в этом сомневаюсь. Легко заметить, что этот эффект является лишь совсем небольшой разницей линейных слагаемых положительной и отрицательной ветвей, а это отличие, если я правильно помню, и без того действительно проявляется (или что-то ему подобное, я провёл все эти расчёты только вчера, с того момента ещё не было времени перепроверить).

Для свободного движения материальной точки получаем, что возможно любое значение энергии, при условии, что материальная точка находится в бесконечном пространстве. Если же она находится в ящике, который мы указываем как граничные условия для ψ -функции, получаем дискретные уровни энергии, примерно соответствующие квантованию зигзагообразного движения. Если проводить вычисления релятивистским методом, то для свободной материальной точки собственные функции будут соответствовать фазовым волнам де Бройля¹⁸, а в случае материальной точки в ящике это будут собственные колебания объёма ящика с учётом дисперсионного закона фазовых волн де Бройля.

Помимо вычисления особых частных случаев, таких как эффекты Штарка, Зеемана и релятивистское движение Кеплера, следующей важной задачей видится формулировка закона для интенсивности и поляризации, который должен заменить принцип соответствия¹⁹. Так как я полагаю, что ψ -функция действительно описывает внутриатомные процессы, приводящие к излучению света, она должна нести информацию об этом. Необходимо исследовать колебания интенсивности между двумя одновременно возбужденными собственными колебаниями, а также их распределение в пространстве. Наверняка в таком случае богатая математическая теория (ортогональность собственных функций, понимание собственных значений как экстремальных для интегралов Гамильтона и так далее) приведёт к простым результатам.

Меня беспокоит релятивистская проблема Кеплера²⁰. Я не совсем уверен в правдивости моего утверждения в статье, что сопутствующее движение ядра столь значительно при новом подходе. Ещё менее я уверен в своём замечании, что и при старом подходе это может быть так, поэтому хотел бы Вас попросить зачеркнуть это замечание, если сочтёте его бессмыслицей²¹.

Но, разумеется, на мой взгляд, помощь может подоспеть только от движения ядер, иначе получаются частичные (дробные) кванты, что противоречит результатам наблюдений. И именно эти половинчатые кванты получаются из тех самых $n(n+1)$, связанных со сферическими функциями, что, в свою очередь, крайне радует.

В конечном итоге хотел бы ещё отметить, что нахождение всей взаимосвязи, даже если это сходно не очевидно, опирается на Ваш изящный метод интегрирования для оценки радиального квантового интеграла. Именно, характерное и знакомое значение $-\frac{B}{\sqrt{A}} + \sqrt{C'}$, внезапно, как святой Грааль, засияло из показателей степеней α_1 и α_2 ²².

Надеюсь, что Вы, достопочтенный господин Профессор, а также все Ваши пребываете в добром здравии.

С наилучшими и почтеннейшими пожеланиями от моего дома Вашему, преисполненный благодарности, остаюсь всегда преданный Вам,

Э. Шрёдингер

P.S. Официального решения по Инсбруку пока ещё нет²³. Однако, полагаю, что останусь здесь. На моё решение, в первую очередь, влияет переезд Швайдлера в Вену²⁴. После разговора с Вами (я не знаю, Ваше ли это непосредственное мнение) мне написал Герцфельд, что следует попытаться поддержать Смекала²⁵. Думаю, это будет затруднительно, ведь Марх назван *àque loco* и задействован уже в течение какого-то времени. Однако Тирринг сделает это в любом случае, он написал мне ранее, просил сообщить об официальном решении. Пожалуйста, при случае не сообщайте о моём решении, как уже о свершившемся. По отношению к обоим учреждениям это было бы с моей стороны некрасиво. И, с другой стороны, такая задержка меня вполне радует, так как теперь, после больших усилий, я здесь всё же кое-какую мелочь получу, а именно: новую доску для лекционного зала и, надеюсь, немножечко больше денег в бюджет для семинарской библиотеки.

Д. Вывод уравнений (3.18)–(3.21) при помощи системы Mathematica

Эта часть нашей статьи вынесена в отдельный документ AppendixE.pdf, который читатель может найти на веб-странице журнала УФН www.ufn.ru в русском (DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.08.040014>) и английском (DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2025.08.040014>) варианте вместе с дополнительными программами. Из нашего вспомогательного блокнота системы Mathematica, AppendixE.pdf [57]: "Читатель может скопировать все вводные секции этой дополнительной программы системы Mathematica, обозначенные $In[\#]:=$, из нашего PDF-документа прямо в новый блокнот Математики и выполнить одну за другой, по порядку, все команды, чтобы повторить наши вычисления".

Дальнейшая поддержка с системой Mathematica: Дополнительно к блокноту AppendixE.nb, представленному

¹⁸ Как мы видим из его письма Эйнштейну [64, с. 141–143], в своей работе Шрёдингер был воодушевлён "замечательными тезисами" (1925 г.) Луи де Бройля о фазовых волнах электронов, с которыми он впервые ознакомился в начале ноября 1925 г.

¹⁹ См. также замечания в его письмах Лоренцу [64, с. 203–205] и Вентцелю [64, с. 226–228].

²⁰ Шрёдингер, как следует из его заметок (рис. 5), сначала предложил релятивистское волновое уравнение, прежде чем прийти к хорошо известному нерелятивистскому уравнению [39]. (См. также его письма Зоммерфельду [64, с. 178–184] и Лоренцу [64, с. 252–261] и исторические исследования [66, 76, 77].)

²¹ Зоммерфельд обсуждает этот вопрос в своём следующем письме [64, с. 173–175].

²² См. [28, с. 611–612].

²³ Шрёдингер также получил предложение из Инсбрука (ср. также с его письмом Зоммерфельду [64, с. 132–135]), которое он отклонил в середине марта (ср. его письмо [64, с. 197–200] от 17 марта 1926 г. Тиррингу).

²⁴ Предыдущий заведующий кафедрой в Инсбруке, Эгон фон Швайдлер (1873–1948), только что получил назначение в Физический институт Венского университета. Его преемником в Инсбруке, после того как позиция была сведена к позиции лектора (ср. [64, с. 178–184]), стал друг Шрёдингера Артур Марх (1891–1957).

²⁵ Адольф Смекал (1895–1959) не получил позиции экстраординарного профессора в Вене до 1927 г. и принял приглашение в Халле в 1928 г. Герцфельд в то время собирался принять позицию профессора в университете Джона Хопкинса в Балтиморе.

выше, наши компьютерные программы системы Mathematica также включают BohrAtomMathematica.nb и EllipsesAnimateAu.nb, обе на начальном уровне.

Программа EllipsesAnimateSofisticated.nb разработана для создания более сложной анимации, численного моделирования, релятивистского кеплеров движения водородоподобных ионов по всей периодической системе элементов. (Подробности можно найти в [57].)

Е. Релятивистский водородоподобный ион урана (uranium, $Z = 92$) в сравнении с гипотетическим ионом оганессона (oganesson, $Z = 118$) и далее

Попробуем сравнить, оставаясь в рамках модели атома Бора–Зоммерфельда, релятивистские водородоподобные ионы урана ($Z = 92$), гипотетического оганессона ($Z = 118$) и более тяжёлых элементов. Существование самопересекающихся орбит в сверхсильном статическом кулоновском поле демонстрируется при помощи компьютерной системы Mathematica. В частности, возникновение многократно самопересекающихся траекторий будет показано для поля гипотетического иона унбибиума (unbibium), элемента с $Z = 122$.

Мы полагаем, что использование модели Бора–Зоммерфельда, чтобы противопоставить водородоподобные ионы U^{91+} и Og^{117+} , а также анализ гипотетического иона Ubb^{121+} предлагает новый педагогический и исторический взгляд, который связывает раннюю квантовую теорию [18, 28] с современными супертяжёлыми трансурановыми релятивистскими системами [98] в квазиклассическом приближении (с возможным применением уравнения Дирака на следующем этапе [99]).

Е.1. Уран: $Z = 92$

Уран (U) — это встречающийся естественным образом в природе радиоактивный тяжёлый металл с атомным номером $Z = 92$, известный из-за своей способности выделять значительную энергию в процессе ядерного распада, что является источником энергии в ядерных реакторах и оружии. Квантовая электродинамика водородоподобного иона урана была изучена в [100, 101] (см. также [98, 102–106] и приведённые там ссылки). Мы используем компьютерную систему Mathematica для численного моделирования [57].

В рассматриваемой модели атома Бора–Зоммерфельда, даже в случае сильного электрического поля ядра урана, одиночный электрон остаётся на классической релятивистской эллиптической орбите со смещающимся перигелием, в форме открытых "розеток" [24, 28, 58] (ср. рис. 3 и рис. 9, где приведена стандартная орбита с "винтовым номером", или числом поворотов, равным единице).

На представленном компьютерном моделировании релятивистского кеплеровского движения электрона в водородоподобном ионе урана U^{91+} при $Z = 92$ ядро находится в неподвижном фокусе в начале координат. Для данного квантового состояния мы выбрали $n_r = n_\theta = 1$ в формуле тонкой структуры (3.18). С учётом (3.19)–(3.21) получаем: $\omega = 0,741135$, $\epsilon = 0,904882$ и $a = 0,0353163$ в атомных единицах Бора. Перигелий и афелий движутся по двум концентрическим окружностям вокруг ядра с радиусами: $r_{\min} = a(1 - \epsilon) = 0,003359209$ и $r_{\max} = a(1 + \epsilon) = 0,067273472$ соответственно. На графике геометрические места последовательных положений перигелиев и афелиев, их внешняя и внутренняя

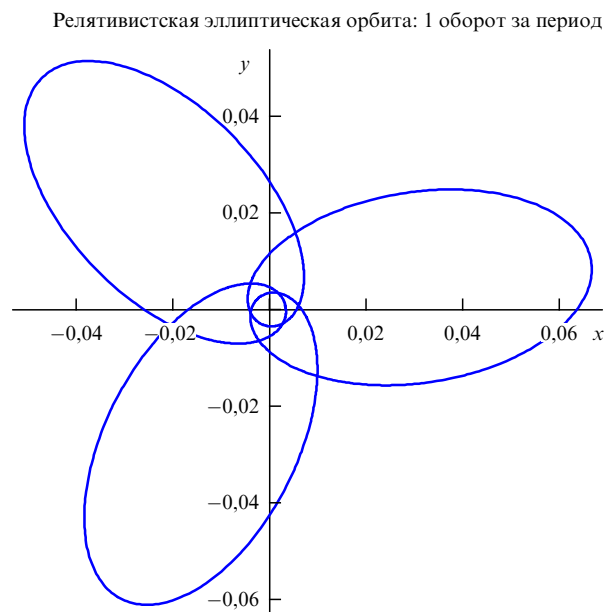


Рис. 9. Кеплерово эллиптическое движение против часовой стрелки в водородоподобном ионе урана U^{91+} с $n_\theta = n_r = 1$. "Винтовой номер" равен единице.

огигающие орбит для простоты не показаны. Полное смещение перигелия эллипса против часовой стрелки за один период задаётся формулой $\Delta\theta = 2\pi(1/\omega - 1) = 2,19461$.

Е.2. Оганессон: $Z = 118$

Оганессон (Og) — наиболее тяжёлый синтетический элемент периодической таблицы с атомным номером $Z = 118$. Открытый учёными из Объединённого института ядерных исследований (JINR) (Россия) и Национальной лаборатории им. Лоуренса Ливермора (LLNL) (США) в 2006 г. [98], он назван по имени физика Ю.Ц. Оганесяна (см. [107–112] и приведённые там ссылки).

Наше моделирование при помощи системы Mathematica показало, что в сверхсильном электрическом поле ядра оганессона классические, ограниченные в пространстве кеплеровы орбиты одиночного электрона могут менять свою топологию (рис. 10, демонстрирующий орбиту с "винтовым номером", или числом поворотов, около двух²⁶).

На графике релятивистского кеплеровского движения электрона в водородоподобном ионе оганессона Og^{117+} , когда $Z = 118$, ядро расположено в фиксированном фокусе в начале координат. Для этого квантового состояния мы выбираем $n_r = n_\theta = 1$ в формуле тонкой структуры (3.18). Используя (3.19)–(3.21), получаем: $\omega = 0,508457$, $\epsilon = 0,941479$ и $a = 0,0222041$ в атомных единицах Бора. Перигелий и афелий движутся вокруг ядра вдоль двух концентрических кругов с радиусами: $r_{\min} = a(1 - \epsilon) = 0,0012994$ и $r_{\max} = a(1 + \epsilon) = 0,0431087$ соответственно. Геометрические места точек, проходящих перигелием и афелием, их внешняя и внутренняя огигающие для простоты не показаны. Полное смещение

²⁶ Это пример так называемой "химической орбиты", или "двойного ожерелья", в терминологии американского космолога Джона Арчибальда Уилера [113–115].

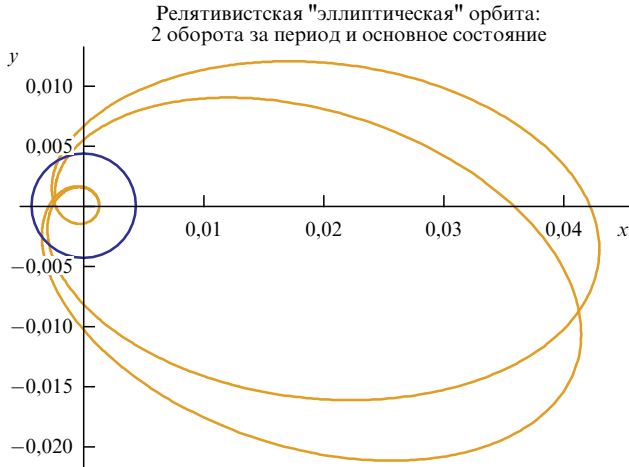


Рис. 10. Кеплерово "эллиптическое" движение по часовой стрелке с самопересечением в гипотетическом водородоподобном ионе оганессона Og^{117+} с $n_\theta = n_r = 1$, в сравнении с основным состоянием, когда $n_\theta = 1$ и $n_r = 0$. "Винтовой номер" равен двум.

перигелия самопересекающегося "эллипса" в течение периода составляет $\Delta\theta = 2\pi(1/\omega - 1) = 6,07418$.

В точке самопересечения с помощью программы Mathematica приблизительно получаем:

$$r(3,074037420536865) = r(9,283329709624294) = 0,0025044.$$

При этом

$$\begin{aligned} r(9,283329709624294) - r(3,074037420536865) &= 4,33681 \times 10^{-19}, \\ \omega \times \frac{9,283329709624294 + 3,074037420536865}{2} &= 3,141592653589793 = \pi. \end{aligned}$$

Е.3. Унбибиум: $Z = 122$

В качестве другого примера рассмотрим гипотетический элемент с $Z = 122$, который временно назван унбибиумом (Ubb). Это супертяжёлый элемент в конце периодической системы, который ещё предстоит открыть.

В приведённом компьютерном моделировании релятивистского кеплерова движения электрона в гипотетическом водородоподобном ионе унбибиума, Ubb^{121+} , когда $Z = 122$, ядро, как всегда, расположено в фиксированном фокусе в начале координат. Для этого квантового состояния мы взяли $n_r = n_\theta = 1$ в формуле тонкой структуры (3.18). Используя (3.19)–(3.21), получаем: $\omega = 0,455419$, $\epsilon = 0,949782$ и $a = 0,0203534$ в атомных единицах Бора.

Перигелий и афелий движутся вокруг ядра вдоль двух концентрических кругов с радиусами: $r_{\min} = a(1 - \epsilon) = 0,00102211$ и $r_{\max} = a(1 + \epsilon) = 0,0396847$ соответственно. Геометрические места точек, проходимых перигелием и афелием, их внешняя и внутренняя огибающие для простоты не показаны. Смещение перигелия "эллипса" в течение одного периода принимает значение $\Delta\theta = 2\pi(1/\omega - 1) = 7,5133$. "Винтовой номер", или число поворотов, почти равно трём.

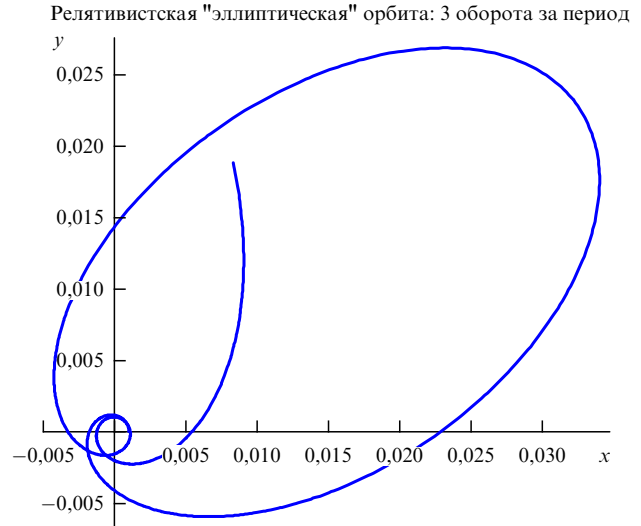


Рис. 11. Кеплерово "эллиптическое" движение против часовой стрелки с четырьмя самопересечениями в гипотетическом водородоподобном ионе унбибиума Ubb^{121+} с $n_\theta = n_r = 1$. "Винтовой" номер около трёх.

В точке первого самопересечения приблизительно получаем:

$$r(10,002448573515926) = r(3,7940322175405243) = 0,00234067,$$

где

$$r(10,002448573515926) - r(3,7940322175405243) = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega \times \frac{10,002448573515926 + 3,7940322175405243}{2} &= \\ &= 3,14159 = \pi. \end{aligned}$$

В точке второго самопересечения приблизительно находим:

$$r(13,18142570270781) = r(0,6150550883486369) = 0,00104189$$

и

$$r(13,18142570270781) - r(0,6150550883486369) = 4,33681 \times 10^{-19}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega \times \frac{13,18142570270781 + 0,6150550883486369}{2} &= \\ &= 3,14159 = \pi. \end{aligned}$$

Имеются ещё два последовательных самопересечения:

$$r(16,9329615821129) = r(10,66) = 0,0017562,$$

где

$$\begin{aligned} r(16,9329615821129) - r(10,660000000000002) &= \\ &= -8,67362 \times 10^{-19} \end{aligned}$$

и

$$\omega \times \frac{16,9329615821129 + 10,66}{2} = 6,28319 = 2\pi.$$

А также

$$r(20,07966609823604) = r(7,513295483876864) = 0,022845,$$

где

$$r(20,07966609823604) - r(7,513295483876864) = 2,77556 \times 10^{-17}.$$

В данном случае

$$\omega \times \frac{20,07966609823604 + 7,513295483876864}{2} = 6,28319 = 2\pi.$$

Параметры рассматриваемых орбит сравниваются в табл. 2 для удобства читателя. Дальнейшая информация может быть найдена в наших дополнительных блокнотах, компьютерных программах системы Mathematica [57].

Таблица 2

Параметры	Ион U ⁹¹⁺	Ион Og ¹¹⁷⁺	Ион Ubb ¹²¹⁺
ω	0,741135	0,508457	0,455419
ϵ	0,904882	0,941479	0,949782
a/a_0	0,0353163	0,0222041	0,0203534
$r_{\min}$	0,003359209	0,0012994	0,00102211
$r_{\max}$	0,067273472	0,0431087	0,0396847
$\Delta\theta$	2,19461	6,07418	7,5133
"Винтовой номер"	1	2	3

Мы продемонстрировали, что в сверхсильном статическом электрическом поле, аналогичном полю гипотетического водородоподобного иона оганессона, появляется возможность возникновения самопересекающихся траекторий, что ведёт к существенному отличию от стандартных классических орбит. Подобным же образом нужно исследовать возможное многократное вращение налетающего электрона вокруг ядра оганессона в процессе рассеяния [18]. Было бы интересно проанализировать возможность похожего эффекта "типа оганессона" в теории гравитации [58], а также изучить возможные нестандартные следствия в квантовой электродинамике в сильном (U) по сравнению с сверхсильным (Og) кулоновским полем [33, 98, 100–105, 108, 109, 116].

Например, при рождении электрон-позитронной пары в результате столкновения ядра оганессона с другим тяжёлым ионом электрон может быть напрямую захвачен этим ядром с внутренней орбиты. Дальнейшая ядерная реакция с одним из протонов оганессона может приводить к образованию нейтрона и нейтрино, таким образом внося вклад в неустойчивость этого сверхтяжёлого элемента ввиду сохранения электрического заряда.

В гипотетическом унбибиуме, элементе с $Z = 122$, существует возможность появления многократно самопересекающихся траекторий, что должно вносить ещё больший вклад в захват электрона с орбиты и, как результат, последующее изменение ядра Ubb.

Перевод с английского и немецкого: С.Д. Данилов

Список литературы

- Schrödinger E "Quantisierung als Eigenwertproblem" *Ann. Physik* **79** 361 (1926) Vol. 384 по новой нумерации томов на сайте Wiley Online Library, DOI:10.1002/andp.19263840404; Пер. на англ. яз.: Schrödinger E "Quantisation as a problem of proper values (Part I)", in *Collected Papers on Wave Mechanics* (AMS Chelsea Publishing, Vol. 302) (Providence, RI: Chelsea Publ. Co., 1982) pp. 1–12; <https://bookstore.ams.org/chel-302>
- Planck M, The Nobel Prize in Physics 1918 was awarded to Max Karl Ernst Ludwig Planck "in recognition of the services he rendered to the advancement of Physics by his discovery of energy quanta", <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1918/summary/>
- Einstein A, The Nobel Prize in Physics 1921 was awarded to Albert Einstein "for his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect", <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1921/summary/>
- Rutherford E, The Nobel Prize in Chemistry 1908 was awarded to Ernest Rutherford "for his investigations into the disintegration of the elements, and the chemistry of radioactive substances", <https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1908/summary/>
- Bohr N, The Nobel Prize in Physics 1922 was awarded to Niels Henrik David Bohr "for his services in the investigation of the structure of atoms and of the radiation emanating from them", <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1922/summary/>
- Aaserud F, Heilbron J L *Love, Literature, and the Quantum Atom: Niels Bohr's 1913 Trilogy Revisited* (Oxford: Oxford Univ. Press, 2013) DOI:10.1093/acprof:oso/9780199680283.001.0001; <https://academic.oup.com/book/6847>
- Bohr N *Niels Bohr Collected Works* (Ed. L Rosenfeld) Vol. 2 *Work on Atomic Physics (1912–1917)* (Ed. U Hoyer) (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1981) DOI:10.1016/S1876-0503(08)70031-8
- Eckert M *Arnold Sommerfeld: Science, Life and Turbulent Times. 1868–1951* (New York: Springer, 2013) DOI:10.1007/978-1-4614-7461-6
- Ельясевич М А "Развитие Нильсом Бором квантовой теории атома и принципа соответствия (Работы Н. Бора 1912–1923 гг. по атомной физике и их значение) *УФН* **147** 253–301 (1985); El'yashevich M A "Niels Bohr's development of the quantum theory of the atom and the correspondence principle (his 1912–1923 work in atomic physics and its significance)" *Sov. Phys. Usp.* **28** 879–909 (1985)
- Firme C L *Quantum Mechanics: Detailed Historical, Mathematical and Computational Approaches* (Boca Raton, FL: CRC Press, Taylor and Francis Group, 2022)
- Kragh H *Niels Bohr and the Quantum Atom: The Bohr Model of Atomic Structure 1913–1925* (Oxford: Oxford Univ. Press, 2012) DOI:10.1093/acprof:oso/9780199654987.001.0001
- Kragh H (Ed.) *Niels Bohr: On the Constitution of Atoms and Molecules* (Classic Texts in the Sciences) (Cham: Birkhäuser, Springer Nature Switzerland AG, 2022) DOI:10.1007/978-3-030-97664-4
- Mehra J, Rechenberg H *The Quantum Theory of Planck, Einstein, Bohr and Sommerfeld: Its Foundation and the Rise of Its Difficulties 1900–1925* 1st ed. (The Historical Development of Quantum Theory, Vol. 1, Pt. 2) (New York: Springer-Verlag, 1982); <https://link.springer.com/book/9780387951751>
- Мигдал А Б "Нильс Бор и квантовая физика" *УФН* **147** 303–342 (1985); Migdal A B "Niels Bohr and quantum physics" *Sov. Phys. Usp.* **28** 910–934 (1985)
- Милантьев В П "Создание теории Бора и ее развитие (к 90-летию боровской теории атома)" *УФН* **174** 209–215 (2004); Milant'ev V P "Creation and development of Bohr's theory (on the 90th anniversary of the Bohr theory of the atom)" *Phys. Usp.* **47** 197 (2004)
- Reed B C *The Bohr Atom: A Guide* (Bristol: IOP Publ., 2020) DOI:10.1088/978-0-7503-3611-6
- Steinhauser M O *Quantenmechanik für Naturwissenschaftler: Ein Lehr- und Übungsbuch mit zahlreichen Aufgaben und Lösungen* (Berlin: Springer, 2022) DOI:10.1007/978-3-662-62610-8
- Sommerfeld A "Zur Quantentheorie der Spektrallinien" *Ann. Physik* **356** 1–94 (1916) DOI:10.1002/andp.19163561702

19. Sommerfeld A "Zur Feinstruktur der Wasserstofflinien. Geschichte und gegenwärtiger Stand der Theorie" *Naturwissenschaften* **28** 417–423 (1940) DOI:10.1007/BF01490583
20. Wilson W "LXXXIII. The quantum-theory of radiation and line spectra" *London Edinburgh Dublin Philos. Mag. J. Sci.* **29** 795–802 (1915) DOI:10.1080/14786440608635362
21. Видеоролики различных преподавателей об атоме Бора: "Bohr Model in Brief: The planetary model, its connection to emission spectra and quantized electrons", https://www.youtube.com/watch?v=xytRf3fs_gY; "What is the Bohr model of the atom?", https://www.youtube.com/watch?v=_Gt7mo8SNkA; "How Niels Bohr created the quantum atom", <https://www.youtube.com/watch?v=xINR4MoqYVc>; "This star almost broke Bohr's atomic model", <https://www.youtube.com/watch?v=BcX1aYrLct4>; "Sommerfeld and the fine structure of the atom", <https://www.youtube.com/watch?v=H4ZnVpiQTDw>; образовательные видеоролики, посвященные атомной модели Бора и связанным с ней концепциям: "Why don't electrons fall onto the nucleus?", <https://www.youtube.com/watch?v=cf7t-tZnNuE>
22. Michelson A A, The Nobel Prize in Physics 1907 was awarded to Albert Abraham Michelson "for his optical precision instruments and the spectroscopic and metrological investigations carried out with their aid", <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1907/summary/>
23. Albert A Michelson, Wikipedia, online accessed 29 May 2025, https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Albert_A._Michelson&oldid=1293056736
24. Biedenharn L C "The 'Sommerfeld Puzzle' revisited and resolved" *Found. Phys.* **13** 13–34 (1983) DOI:10.1007/BF01889408
25. Kragh H "The fine structure of hydrogen and the gross structure of the physics community, 1916–26" *Hist. Stud. Phys. Sci.* **15** 67–125 (1985) DOI:10.2307/27757550
26. Thomson J J, The Nobel Prize in Physics 1906 was awarded to Joseph John Thomson "in recognition of the great merits of his theoretical and experimental investigations on the conduction of electricity by gases", <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1906/summary/>
27. Грановский Я И "Формула Зоммерфельда и теория Дирака" *УФН* **174** 577 (2004); Granovskii Ya I "Sommerfeld formula and Dirac's theory" *Phys. Usp.* **47** 523 (2004)
28. Sommerfeld A *Atomic Structure and Spectral Lines* (New York: Dutton, 1923) translated from the 3rd German ed.; <https://archive.org/details/atomicstructures0000somm/page/n7/mode/2up>; in German: Sommerfeld A *Atombau und Spektrallinien* Bd. 1, 2. Aufl. (Braunschweig: F. Vieweg and Sons, 1921); <https://archive.org/details/atombauundspekt00sommgoog/page/478/mode/2up>
29. Darwin C G "The wave equations of the electron" *Proc. R. Soc. London A* **118** 654–680 (1928) DOI:10.1098/rspa.1928.0076
30. Gordon W "Die Energieniveaus des Wasserstoffatoms nach der Diracschen Quantentheorie des Elektrons" *Z. Phys.* **48** 11–14 (1928) DOI:10.1007/BF01351570
31. Dirac P A M "The quantum theory of the electron" *Proc. R. Soc. London A* **117** 610 (1928) DOI:10.1098/rspa.1928.0023
32. Dirac P A M "The evolution of the physicist's picture of nature" *Sci. Am.* **208** (5) 45 (1963) DOI:10.1038/scientificamerican0563-45
33. Akhiezer A I, Berestetskii V B *Quantum Electrodynamics* (Interscience Monographs and Texts in Physics and Astronomy, Vol. 11) (New York: Interscience Publ., 1965); Пер. с русск. яз.: Ахиезер А И, Берестецкий В Б *Квантовая электродинамика* (М.: Физматгиз, 1959)
34. Berestetskii V B, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Relativistic Quantum Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1971); Пер. с русск. яз.: Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Релятивистская квантовая теория* (М.: Физматгиз, 1968)
35. Davydov A S *Quantum Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1965); Пер. с русск. яз.: Давыдов А С *Квантовая механика* (М.: Физматгиз, 1963)
36. Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* 3rd ed. (Oxford: Pergamon Press, 1977) DOI:10.1016/C2013-0-02793-4; Пер. с русск. яз.: Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* 3-е изд., перераб. и доп. (М.: Наука, 1974)
37. Rose M E *Relativistic Electron Theory* (New York: John Wiley and Sons, 1961); <https://ia801405.us.archive.org/22/items/in.ernet.dli.2015.148057/2015.148057.Relativistic-Electron-Theory.pdf>
38. Schiff L I *Quantum Mechanics* 3rd ed. (International Ser. in Pure and Applied Physics) (New York: McGraw-Hill Book Co., 1968); <https://physicsgg.files.wordpress.com/2021/01/schiff-l-i-quantum-mechanics-mgh-1949t417s.pdf>
39. Барли К, Вега-Гузман Х, Руффинг А, Суслов С К "Открытие релятивистского уравнения Шрёдингера" *УФН* **192** 100 (2022); Barley K, Vega-Guzmán J, Ruffing A, Suslov S K "Discovery of the relativistic Schrödinger equation" *Phys. Usp.* **65** 90 (2022)
40. Ellis L, Ellis I, Koutschan C, Suslov S K "On potentials integrated by the Nikiforov–Uvarov method", in *Applications and q-Extensions of Hypergeometric Functions* (Contemporary Mathematics, Vol. 819, Eds H S Cohl, R S Costas-Santos, R S Maier) (Providence, RI: American Mathematical Society, 2025) p. 43; <https://bookstore.ams.org/view?ProductCode=CONM/819>
41. Goren B, Barley K, Suslov S K "Matrix approach to helicity states of Dirac free particles", in *Proc. of the Second Intern. Workshop on Quantum Nonstationary Systems* (Eds A Dodonov, C C H Ribeiro) (São Paulo: LF Editorial, 2024) pp. 333–384, Ch. 19; <http://www.cif.unb.br/eventos/proceedings-qns2>
42. Kryuchkov S I, Lanfear N A, Suslov S K "The role of the Pauli–Lubański vector for the Dirac, Weyl, Proca, Maxwell and Fierz–Pauli equations" *Phys. Scr.* **91** 035301 (2016) DOI:10.1088/0031-8949/91/3/035301; arXiv:1510.05164
43. Kryuchkov S I, Suslov S K, Vega-Guzmán J M "The minimum-uncertainty squeezed states for atoms and photons in a cavity" *J. Phys. B* **46** 104007 (2013) DOI:10.1088/0953-4075/46/10/104007
44. Suslov S K "The 'Sommerfeld's Puzzle' and its extensions", in *Proc. of the Second Intern. Workshop on Quantum Nonstationary Systems* (Eds A Dodonov, C C H Ribeiro) (São Paulo: LF Editorial, 2024) pp. 43–59; <https://lfeditorial.com.br/produto/proceedings-of-the-second-international-workshop-on-quantum-nonstationary-systems/>
45. Suslov S K, Trey B "The Hahn polynomials in the nonrelativistic and relativistic Coulomb problems" *J. Math. Phys.* **49** 012104 (2008) DOI:10.1063/1.2830804
46. Suslov S K, Vega-Guzmán J M, Barley K "An introduction to special functions with some applications to quantum mechanics", in *Orthogonal Polynomials. 2nd AIMS–Volkswagen Stiftung Workshop, Douala, Cameroon, 5–12 October, 2018. Conf. Proc.* (Tutorials, Schools, and Workshops in the Mathematical Sciences, Eds M Foupouagnigni, W Koepf) (Cham: Birkhäuser, 2020) pp. 517–628, DOI:10.1007/978-3-030-36744-2_21
47. Ruffing A "Mathematische Methoden der Quantenmechanik", Лекции, прочитанные в Мюнхенском техническом ун-те (Technische Univ. München) в 2001–2014
48. Mehra J, Rechenberg H *The Historical Development of Quantum Theory* Vol. 1, Pt. 1 *The Quantum Theory of Planck, Einstein, Bohr and Sommerfeld: Its Foundation and the Rise of Its Difficulties 1900–1925* (New York: Springer-Verlag, 1982); <https://link.springer.com/book/9780387951744>
49. Einstein A "Autobiographical note", in *Albert Einstein: Philosopher-Scientist* (Library of Living Philosophers, Vol. 7) (Ed. P A Schilpp) Vol. 1 (La Salle, IL: Open Court Publ. Co., 1970) pp. 46–47
50. Gantmacher F *Lectures in Analytical Mechanics* (Moscow: Mir Publ., 1975); Пер. с русск. яз.: Гантмахер Ф Р *Лекции по аналитической механике* (М.: Наука, 1966)
51. Goldstein H, Poole C, Safko J *Classical Mechanics* (San Francisco, CA: Addison Wesley, 2002)
52. Nikiforov A F, Uvarov V B *Special Functions of Mathematical Physics. A Unified Introduction with Applications* (Basel: Birkhäuser, 1988)
53. Varshalovich D A, Moskalev A N, Khersonskii V K *Quantum Theory of Angular Momentum* (Singapore: World Scientific, 1988) DOI:10.1142/0270
54. Merzbacher E *Quantum Mechanics* 3rd ed. (New York: John Wiley and Sons, 1998)
55. Berry M V, Mount K E "Semiclassical approximations in wave mechanics" *Rep. Prog. Phys.* **35** 315 (1972) DOI:10.1088/0034-4885/35/1/306

56. Ghatak A K, Gallawa R L, Goyal I C *Modified Airy Function and WKB Solutions to the Wave Equation* (NIST Monograph, Vol. 176) (Boulder, CO: National Institute of Standards and Technology, 1991)
57. Barley K K, Ruffing A, Suslov S K "Old quantum mechanics by Bohr and Sommerfeld from modern perspective: Supplementary files" DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.08.040014>
58. Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* 4th ed. (Oxford: Pergamon Press, 1975) DOI:10.1016/B978-0-08-025072-4.50001-0; Пер. с русск. яз.: Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973)
59. Sommerfeld A *Wave-Mechanics* 2nd ed. (New York: E.P. Dutton and Co. Inc., 1938) Suppl. Vol. to "Atomic Structure and Spectral Lines"
60. Schrödinger E, The Nobel Prize in Physics 1933 was awarded jointly to Erwin Schrödinger and Paul Adrien Maurice Dirac "for the discovery of new productive forms of atomic theory", <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1933/summary/>
61. Dirac P A M, The Nobel Prize in Physics 1933 was awarded jointly to Erwin Schrödinger and Paul Adrien Maurice Dirac "for the discovery of new productive forms of atomic theory", <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1933/dirac/facts/>
62. Schrödinger E "The continuous transition from micro- to macro-mechanics", in *Collected Papers on Wave Mechanics* (Providence, RI: Chelsea Publ. Co.: AMS Chelsea Publ., 2010) pp. 41–44; Translated from German: *Naturwissenschaften* **28** 664–666 (1926) DOI:10.1007/BF01507634
63. Schrödinger E "An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules" *Phys. Rev.* **28** 1049–1070 (1926)²⁷ DOI:10.1103/PhysRev.28.1049
64. von Meyenn K (Ed.) *Eine Entdeckung von ganz außerordentlicher Tragweite: Schrödingers Briefwechsel zur Wellenmechanik und zum Katzenparadoxon* (Berlin: Springer, 2011) DOI:10.1007/978-3-642-04335-2
65. de Broglie L, The Nobel Prize in Physics 1929 was awarded to Prince Louis-Victor Pierre Raymond de Broglie "for his discovery of the wave nature of electrons", <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1929/summary/>
66. Mehra J, Rechenberg H *Erwin Schrödinger and the Rise of Wave Mechanics* Pt. 2 *The Creation of Wave Mechanics; Early Response and Applications 1925–1926* (The Historical Development of Quantum Theory, Vol. 5/2) 1st ed. (New York: Springer-Verlag, 1987); <https://link.springer.com/book/9780387951805>
67. Moore W *Schrödinger: Life and Thought* (Ser. Canto Classics) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2015) DOI:10.1017/CBO9781316424056
68. Brillouin L "La mécanique ondulatoire de Schrödinger une méthode générale de résolution par approximations successives" *C. R. Acad. Sci.* **183** 24–26 (1926); <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3136h/f24>
69. Kramers H A "Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung" *Z. Phys.* **39** 828–840 (1926) DOI:10.1007/BF01451751
70. Wentzel G "Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik" *Z. Phys.* **38** 518–529 (1926) DOI:10.1007/BF01397171
71. Olver F, Daalhuis A, Lozier D, Schneider B, Boisvert R, Clark C, Mille B, Cohl H, McClain M, NIST Digital Library of Mathematical Functions (2025), release 1.2.4 of 2025-03-15, <https://dlmf.nist.gov/>
72. Nikiforov A F, Novikov V G, Uvarov V B *Quantum-Statistical Models of Hot Dense Matter. Methods for Computation Opacity and Equation of State* (Progress in Mathematical Physics, Vol. 37) (Basel: Birkhäuser, 2005) DOI:10.1007/b137687
73. Langer R E "On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to the Bessel functions of large order" *Trans. Am. Math. Soc.* **33** 23–64 (1931) DOI:10.1090/S0002-9947-1931-1501574-0
74. Langer R E "On the connection formulas and the solutions of the wave equation" *Phys. Rev.* **51** 669–676 (1937) DOI:10.1103/PhysRev.51.669
75. Kragh H "Erwin Schrödinger and the wave equation: The crucial phase" *Centaurus* **26** 154–197 (1982) DOI:10.1111/j.1600-0498.1982.tb00659.x
76. Kragh H "Equation with the many fathers. The Klein–Gordon equation in 1926" *Am. J. Phys.* **52** 1024–1033 (1984) DOI:10.1119/1.13782
77. Joas C, Lehner C "The classical roots of wave mechanics: Schrödinger's transformations of the optical-mechanical analogy" *Stud. Hist. Philos. Sci. B* **40** 338–351 (2009) DOI:10.1016/j.shpsb.2009.06.007
78. Bethe H A, Salpeter E *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms* (Mineola, NY: Dover Publ., 2008)
79. Good R H (Jr.) "The generalization of the WKB method to radial wave equations" *Phys. Rev.* **90** 131–137 (1953) DOI:10.1103/PhysRev.90.131
80. Lu P "Derivation of Sommerfeld–Dirac fine-structure formula by WKB method" *Phys. Rev. A* **1** 1283–1285 (1970) DOI:10.1103/PhysRevA.1.1283
81. Mehra J (Ed.) *The Discovery of Electron Spin* Vol. 1 (Singapore: World Scientific, 2001) Ch. 17, pp. 585–611 DOI:10.1142/9789812810588_0017
82. Stern O, The Nobel Prize in Physics 1943 was awarded to Otto Stern "for his contribution to the development of the molecular ray method and his discovery of the magnetic moment of the proton", <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1943/summary/>
83. Петров С В "Ошибался ли Зоммерфельд? (К истории появления спина в релятивистских волновых уравнениях)" **190** 777 (2020); Petrov S V "Was Sommerfeld wrong? (To the history of the appearance of spin in relativistic wave equations)" *Phys. Usp.* **63** 721 (2020)
84. Heisenberg W, The Nobel Prize in Physics 1932 was awarded to Werner Karl Heisenberg "for the creation of quantum mechanics, the application of which has, inter alia, led to the discovery of the allotropic forms of hydrogen", <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1932/summary/>
85. Heisenberg W "Ausstrahlung von Sommerfelds Werk in der Gegenwart" *Phys. Blätter* **24** 530–537 (1968) DOI:10.1002/phbl.19680241203
86. Yourgrau W, Mandelstam S *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory* 3rd ed. (Philadelphia, PA: W.B. Saunders Co., 1968)
87. Schrödinger E "Preface", in *Collected Papers on Wave Mechanics* 3rd ed. (Montréal: Minkowski Institute Press, 2021) pp. ix–xiii
88. Schrödinger E "Quantisation as a problem of proper values" *Collected Papers on Wave Mechanics* (AMS Chelsea Publishing Ser., Vol. 302) (Providence, RI: Chelsea Publ. Co., 2010) Pt. II, pp. 13–40; <https://bookstore.ams.org/chel-302>
89. Einstein A *Letters on Wave Mechanics: Correspondence with H.A. Lorentz, Max Planck, and Erwin Schrödinger* (New York: Philosophical Library, Open Road, 2011)
90. Fock V "Zur Schrödingerschen Wellenmechanik" *Z. Phys.* **38** 242–250 (1926) DOI:10.1007/BF01399113
91. Wessels L "Schrödinger's route to wave mechanics" *Stud. Hist. Phil. Sci. A* **10** 311–340 (1979) DOI:10.1016/0039-3681(79)90018-9
92. Bloch F "Heisenberg and the early days of quantum mechanics" *Phys. Today* **29** (12) 23–27 (1976) DOI:10.1063/1.3024633
93. Rozental S (Ed.) *Niels Bohr: His Life and Work as Seen by His Friends and Colleagues* (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1968) p. 73
94. Koutschan C, Suazo E, Suslov S K "Fundamental laser modes in paraxial optics: from computer algebra and simulations to experimental observation" *Appl. Phys. B* **121** 315–336 (2015) DOI:10.1007/s00340-015-6231-9
95. Jackson J D *Classical Electrodynamics* 2nd ed. (New York: John Wiley and Sons, 1975)
96. Ewald P P "Ein Buch über mathematische Physik: Courant–Hilbert" *Naturwissenschaften* **13** 384–387 (1925) DOI:10.1007/BF01559098
97. Courant R, Hilbert D *Methoden der Mathematischen Physik* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 12) (Berlin: Springer, 1924) DOI:10.1007/978-3-662-36445-1
98. Oganessian Y "Discovery of the island of stability for super heavy elements", in *IPAC2017: Proc. of the 8th Intern. Particle Accelerator*

²⁷ Последняя статья Э. Шрёдингера в 1926 г.

- Conf., Copenhagen, Denmark, 14–19 May, 2017* (Eds G Arduini, M Lindroos, J Pranke, V R W Schaa, M Seidel) (Copenhagen, Denmark: Eur. Spallation Source (ESS), MAXIV and Aarhus Univ., 2017) pp. 4848–4851; <https://proceedings.jacow.org/ipac2017/>
99. Barley K, Ruffing A, Suslov S K "Oganesson versus uranium hydrogen-like ions from the viewpoint of old quantum mechanics", arXiv:2509.06249, DOI:10.48550/arXiv.2509.06249
 100. Gumberidze A, Stöhlker Th, Banaś D, Beckert K, Beller P, Beyer HF, Bosch F, Hagmann S, Kozhuharov C, Liesen D, Nolden F, Ma X, Mokler P H, Steck M, Sierpowski D, Tashenov S "Quantum electrodynamics in strong electric fields: The ground-state Lamb shift in hydrogenlike uranium" *Phys. Rev. Lett.* **94** 223001 (2005) DOI:10.1103/PhysRevLett.94.223001
 101. Gumberidze A, Stöhlker Th, Banaś D, Beckert K, Beller P, Beyer H F, Bosch F, Cai X, Hagmann S, Kozhuharov C, Liesen D, Nolden F, Ma X, Mokler P H, Steck M, Sierpowski D, Tashenov S, Warczak A, Zou Y "Precision tests of QED in strong fields: experiments on hydrogen- and helium-like uranium" *J. Phys. Conf. Ser.* **58** 87–92 (2007) DOI:10.1088/1742-6596/58/1/013
 102. Flerov G N, Karamian S A "The search for superheavy elements in nature: foundations and prospects", in *Atti del Convegno Mendeleeviano, Periodicità e simmetrie nella struttura elementare della materia. Torino-Roma, 15–21 settembre, 1969/Convegno Mendeleeviano. Torino-Roma, 1969* (Ed. M Verde) (Torino–Roma, 1971) pp. 73–96
 103. Mohr P J, Plunien G, Soff G "QED corrections in heavy atoms" *Phys. Rep.* **293** 227–369 (1998) DOI:10.1016/S0370-1573(97)00046-X
 104. Shabaev V M "Two-time Green's function method in quantum electrodynamics of high-Z few-electron atoms" *Phys. Rep.* **356** 119–228 (2002) DOI:10.1016/S0370-1573(01)00024-2; physics/0009018, DOI:10.48550/arXiv.physics/0009018
 105. Шаббаев В М "Квантовая электродинамика тяжелых ионов и атомов: статус и перспективы" *УФН* **178** 1220 (2008); Shabaev V M "Quantum electrodynamics of heavy ions and atoms: current status and prospects" *Phys. Usp.* **51** 1175 (2008) DOI:10.1070/PU2008v051n11ABEH006801
 106. Suslov S K "Expectation values in relativistic Coulomb problems" *J. Phys. B* **42** 185003 (2009) DOI:10.1088/0953-4075/42/18/185003
 107. Chapman K "The oganesson odyssey" *Nature Chem.* **10** 796 (2018) DOI:10.1038/s41557-018-0098-4
 108. Giuliani S A, Matheson Z, Nazarewicz W, Olsen E, Reinhard P-G, Sadhukhan J, Schuettrumpf B, Schunck N, Schwerdtfeger P "Colloquium: Superheavy elements: Oganesson and beyond" *Rev. Mod. Phys.* **91** 011001 (2019) DOI:10.1103/RevModPhys.91.011001
 109. Kaygorodov M Y, Skripnikov L V, Tupitsyn I I, Eliav E, Kozhedub Y S, Malyshev A V, Oleynichenko A V, Shabaev V M, Titov A V, Zaitsevskii A V "Electron affinity of oganesson" *Phys. Rev. A* **104** 012819 (2021) DOI:10.1103/PhysRevA.104.012819
 110. Kragh H *From Transuranic to Superheavy Elements: A Story of Dispute and Creation* (SpringerBriefs in History of Science and Technology) (Cham: Springer, 2018) DOI:10.1007/978-3-319-75813-8
 111. Oganessian Yu Ts, Utyonkov V K, Lobanov Yu V, Abdullin F Sh, Polyakov A N, Sagaidak R N, Shirokovsky I V, Tsyganov Yu S, Voinov A A, Moody K J, Patin J B, Shaughnessy D A, Stoyer M A, Stoyer N J, Wilk P A, Kenneally J M, Landrum J H, Wild J F, Gulbekian G G, Bogomolov S L, Gikal B N, Mezentsev A N, Iliev S, Subbotin V G, Sukhov A M, Subotic K, Zagrebaev V I, Vostokin G K, Itkis M G, Loughheed R W "Synthesis of the isotopes of elements 118 and 116 in the ^{249}Cf and $^{245}\text{Cm} + ^{48}\text{Ca}$ fusion reactions" *Phys. Rev. C* **74** 44602 (2006) DOI:10.1103/PhysRevC.74.044602
 112. Oganessian Yu Ts, Abdullin F Sh, Alexander C, Binder J, Boll R A, Dmitriev S N, Ezold J, Felker K, Gostic J M, Grzywacz R K, Hamilton J H, Henderson R A, Itkis M G, Miernik K, Miller D, Moody K J, Polyakov A N, Ramayya A V, Roberto J B, Ryabinin M A, Rykaczewski K P, Sagaidak R N, Shaughnessy D A, Shirokovsky I V, Shumeiko M V, Stoyer M A, Stoyer N J, Subbotin V G, Sukhov A M, Tsyganov Yu S, Utyonkov V K, Voinov A A, Vostokin G K "Production and decay of the heaviest nuclei $^{293,294}117$ and $^{294}118$ " *Phys. Rev. Lett.* **109** 162501 (2012) DOI:10.1103/PhysRevLett.109.162501
 113. Ceulemans A, Thyssen P "The 'chemical mechanics' of the periodic table", in *Mendeleev to Oganesson: A Multidisciplinary Perspective on the Periodic Table* (Eds E Scerri, G Restrepo) (New York: Oxford Univ. Press, 2018) pp. 104–121, <https://doi.org/10.1093/oso/9780190668532.003.0008>
 114. Powers R T "Frequencies of Radial Oscillation and Revolution as Affected by Features of a Central Potential", in *Atti del Convegno Mendeleeviano, Periodicità e simmetrie nella struttura elementare della materia. Torino–Roma, 15–21 settembre, 1969/Convegno Mendeleeviano. Torino–Roma, 1969* (Ed. M Verde) (Turin, Italy: Vincenzo Bona, 1971) pp. 235–242
 115. Wheeler J A "From Mendelée's atom to the collapsing star", in *Philosophical Foundations of Science: Proc. of Section L, 1969, American Association for the Advancement of Science* (Boston Studies in the Philosophy of Science, Vol. 11, Eds R J Seeger, R S Cohen) (Dordrecht: Springer, 1974) Ch. 15, pp. 257–301, DOI:10.1007/978-94-010-2126-5_15
 116. Pomeranchuk I, Smorodinsky J "On the energy levels of systems with $Z > 137$ " *J. Phys. USSR* **9** 97–100 (1945); https://ufn.ru/ufn13/ufn13_4/Russian/pomeranchuk.pdf

Old quantum mechanics by Bohr and Sommerfeld from modern perspective

K. Barley^(1,a), A. Ruffing^(2,b), S.K. Suslov^(3,c)

⁽¹⁾ Department of Mathematics, College of Arts and Sciences, Howard University, 2141 6th St NW, Washington, DC 20059, USA

⁽²⁾ Landeshauptstadt München, Seminar TMG Universität, Referat für Bildung und Sport, Marienplatz 8, 80331 München, Germany

⁽³⁾ School of Mathematical and Statistical Sciences, Arizona State University, Tempe, AZ 85287–1804, USA

E-mail: ^(a) Kamal.Barley@howard.edu, ^(b) alruffing@web.de, ^(c) sks@asu.edu

We review Bohr's atomic model and its extension by Sommerfeld from a mathematical perspective of wave mechanics. The derivation of quantization rules and energy levels is revisited using semiclassical methods. Sommerfeld-type integrals are evaluated by elementary techniques, and connections with the Schrödinger and Dirac equations are established. Historical developments and key transitions from classical to quantum theory are discussed to clarify the structure and significance of the old quantum mechanics.

Keywords: Bohr's atomic model, Bohr–Sommerfeld quantization rule, Schrödinger equation, Dirac equation, WKB method, fine structure formula, Sommerfeld puzzle, computer algebra system: Mathematica, transuranic elements

PACS numbers: **01.65. + g**, **02.70. – c**, **03.65. – w**

Bibliography — 116 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **196** (1) 83–103 (2026)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.08.040014>

Received 3 July 2025

Physics – Uspekhi **69** (1) (2026)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2025.08.040014>