

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Распределение вероятностей по энергии и площадям в процессах, описываемых уравнением случайных движений Колмогорова 1934 года

Г.С. Голицын

Уравнение Колмогорова подробно описано в статье Г.С. Голицына [УФН **194** 86 (2024)], являющейся кратким изложением книги Г.С. Голицына "Вероятностные структуры макромра: землетрясения, ураганы, наводнения" (Москва: Физматлит, 2022), но там недостаточно внимания уделено вероятностным распределениям, интегральным и дифференциальным, для процессов, описываемых этим уравнением. Интегральное распределение для космических лучей выведено лишь методом подобия и размерности, а распределение горизонтальных длин L облаков и их периметров вместе с отношением периметра облака к его размеру вовсе не объяснено. В представленной статье эти недоработки исправляются, а результаты и методы могут быть полезны и для других целей.

Ключевые слова: функция распределения, случайные движения, вторые моменты распределения вероятностей, статистические законы природы

PACS numbers: **05.40.** – **a**, **91.30.** – **f**, 96.50.S–DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.08.039983>

Рассмотрим три вторых момента распределения вероятностей из [1, 3]:

$$\langle u_i^2(t) \rangle = \varepsilon t \equiv E, \quad (1)$$

$$\langle u_i x_i(t) \rangle = \varepsilon t^2 \cong K, \quad (2)$$

$$\langle x_i^2(t) \rangle = \varepsilon t^3 \equiv r^2, \quad (3)$$

где ε — скорость генерации энергии на единицу массы, E — энергия на единицу массы рассматриваемого процесса, K — коэффициент диффузии (турбулентного перемешивания), S — площадь случайного процесса. Выражая из (3) время $t = (r^2/\varepsilon)^{1/3}$ и подставляя его в (1) и (2), получаем законы турбулентности 1941 г. и закон Ричардсона–Обухова [3] для турбулентного перемешивания. Распределение вероятностей — это их частота встречаемости во времени. Различают интегральное распределение, называемое также гистограммой или кумулятивным [1, 2], а также дифференциальное (см. ниже (4)–(8)). Если событие вызывается двумя независимыми случайными процессами, то общая вероятность частоты события равна произведению этих процессов [4]. Здесь далее вероятности степенные, тогда показатель степени общего процесса

будет суммой показателей вероятности этих независимых процессов. Таким образом, из (1) мы можем записать для потока событий такие гистограммы:

$$N(\geq E) = \int_E^\infty N(E) dE = \frac{\varepsilon}{E}, \quad (4)$$

$$N(E) = -\frac{dN(\geq E)}{dE} = \frac{\varepsilon}{E^2}. \quad (5)$$

Поясню это на конкретных примерах. Во-первых, рассмотрим распределение числа N городов с численностью населения P [5]. Согласно (1), для них гистограмма описывается выражением $N(\geq P) = \varepsilon/P$, а дифференциальное распределение $N(P) \sim P^{-2}$. Мы вместо E можем рассматривать любые положительно определённые величины, например, массы M снежных лавин в горах. Для них $N(\geq M) \sim M^{-1}$. Мои беседы с географами показали, что в этих эмпирических примерах закономерности им очевидны, но их выводы неизвестны. С другой стороны, рассуждения, представленные в этой статье, позволяют сформулировать эмпирическое правило теории вероятности: крупные события случаются гораздо реже мелких при однородности причин, их вызывающих.

Точно так же для площадных распределений из (3)

$$N(\geq S) = \left(\frac{\varepsilon}{S}\right)^{1/3}, \text{ где может быть } S = L^2 \quad (6)$$

$$N(S) = \frac{1}{S} \left(\frac{\varepsilon}{S}\right)^{1/3}, \quad (7)$$

Г.С. Голицын

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН,
Пыжевский пер. 3, 109017 Москва, Российская Федерация
E-mail: gsg@ifaran.ru

Статья поступила 29 ноября 2024 г.,
после доработки 31 июля 2025 г.

а для распределений со случайным коэффициентом диффузии в (2) $K = K(E)$

$$N(\geq K) = (\varepsilon/K)^{1/2}, \quad N(K) = \varepsilon^{1/2} K^{-3/2}. \quad (8)$$

Заметим, что у Ньюмена [5] в таблице показателей фракталов есть показатели "с половинками" (например, 2,5).

В общем случае перед всеми этими формулами следует поставить безразмерные коэффициенты, которые находятся из сравнения с реальными данными [1].

Проиллюстрируем эти формулы для упомянутых выше случаев. Для космических лучей (КЛ) следует брать формулу (4), но необходимо помнить, что их плотность определяется не только в единицу времени, но и на единицу площади. Эта единица может быть определена только из известной объёмной плотности их энергии, оцениваемой как $w = 0,5 \text{ эВ см}^{-3} \sim 10^{-11} \text{ Дж м}^{-3}$ [6]. КЛ образуются в результате взрыва сверхновых звёзд. В нашей Галактике такие взрывы бывают два-три раза в столетие, а энергия взрывов варьируется от 10^{48} до 10^{49} Дж, что даёт для среднего ввода мощности $G \approx 10^{33} \text{ кВт}$. Объёмная плотность энергии эквивалентна давлению, т.е. $w = nE$, где n — концентрация частиц КЛ. Таким образом, единица площади (её обратная величина) должна быть $(w/E)^{2/3}$, а общий интегральный поток будет

$$I(\geq E) = \frac{G}{E} \left(\frac{w}{E} \right)^{2/3} \sim E^{-5/3}, \quad (9)$$

тогда как

$$I(E) \sim \frac{G}{E^2} \left(\frac{w}{E} \right)^{2/3} \sim E^{-8/3}. \quad (10)$$

Дифференциальный поток, измерявшийся в международном эксперименте ПАМЕЛА на российском спутнике "Ресурс-5", дал значение [7]

$$I(E) \sim E^{-n}, \quad n = 2,67 \pm 0,02!$$

Удивительно точное совпадение теории с многолетними космическими наблюдениями; в авторах статьи [6] около 60 европейских и русских авторов. Если бы эти авторы представили свои данные, как это обычно делается [6], в интегральном виде, то погрешность была бы на порядок меньше: $I(\geq E) \sim E^{-n+1}$, т.е. $n = 1,67 \pm \delta$, $\delta \ll 0,02$.

В литературе были недавно описаны два стохастических элемента полей облачности: 1) отношение длины периметра облака к его площади и 2) дифференциальные распределения длин облаков и голубых полосок неба между ними (см. [1]). Всё это с точностью до немногих процентов может быть понято в рамках теории случайных движений Колмогорова 1934 г. из дифференциально-го распределения горизонтальных длин.

Облака — объекты с площадью S и масштабом длины L , которая задаётся как $L = S^{1/2}$ (Мандельброт [8]). Их периметры P явно больше L , а отношение P/L было найдено эмпирически: 1,35 для дождевых радарных облаков [9] и по спутниковым данным в интервале $1 < L < 1500 \text{ км}$ для серебристых ледяных облаков на высотах 80–90 км [10], в численных моделях (см. [1, 2]). Но нигде не приведена оценка интервалов погрешности

вокруг 1,35. Мы произвели численные оценки данных [9] и провели фрактальные вычисления: найдено, что неопределённости с вероятностью 95 % равны $\pm 0,03$, т.е. показатель равен $1,35 \pm 0,03$ [11, 12]. Величина 1,35 близка к $4/3$. Периметр ограничивает площадь облака, согласно (6), и его фрактальная оценка показателя должна содержать $1/3$. Однако мы заинтересованы в его длине в единицах L , поэтому к $1/3$ надо добавить 1, т.е. суммарный показатель фрактала равен $1 + 1/3 = 4/3$. В [2] высказывалось суждение, что величина 1,35 должна объясняться турбулентностью, но тогда подразумевалась турбулентность в свете работы 1941 г., когда теория случайных движений А.Н. Колмогорова никем, кроме авто-ров [3], не использовалась. Она не была использована в [9], но там была ярко показана роль предфрактальных множителей, несущих полезную информацию: например, они дают возможность образовывать безразмерные комплексы подобия.

Аналогичным образом объясняется подобие длин L отдельных облаков. Показатели степеней в распределениях от облаков в формуле (6) и дополнительный параметр длины L самого облака в сумме дают $1 + 2/3 = 5/3$, что на $1/150$ отличается от эмпирического значения $1,66 \pm 0,00$. Эта неопределённость вызвана условной точностью определения границ облака ввиду их различия по оптической толщине. Следует отметить, что лишь эмпирические показатели навели на мысль использовать здесь аппарат гистограмм и различных распределений вероятностей. В [13] приведён балл глобальной среднегодовой облачности: $0,66 \pm 0,03 \%$. Там же приведены подобные оценки для широтных зон по отдельным месяцам.

Формулы (5)–(8) могут быть использованы для оценок распределения вероятностей интегральных (гистограмм, кумулятивных) или дифференциальных распределений путём применения формул книги Феллера [4], где первые обратно пропорциональны t^{-1} , а вторые — t^{-2} , или $(t_s t)^{-1}$, где $1/t_s$ — дополнительная частота исследуемого процесса.

Формула (6) замечательно проявила себя на согласии с ней эмпирических распределений литосферных плит по площадям S [14] и на распределении по массам спиральных галактик (см. [2], § 11.7). В работе [14] показано, что

$$N(\geq S) = 7S^{-n}, \quad \text{где } n = 0,33, \quad (11)$$

и представлена таблица всех значений площадей в стерадианах от 0,0012 до 2,7. Мелкие плиты очень трудно выявляются на земной поверхности, а шесть крупных плит выпадают из зависимости (11), хотя Южная Америка вполне согласуется с остальными 43 плитами с размерами от 0,002 до 1 ср. Воспользовавшись данными для площадей в этом интервале, мы воспроизвели зависимость, но вместо 7 получили 6,54, значение $n = 0,33 \dots \pm \delta$, где $\delta \approx 0,03$ с 95 %-ной вероятностью.

Спиральные галактики имеют соотношение радиуса и толщины диска $O(100)$, поэтому три года назад я предположил, что их массы пропорциональны их площадям. Я построил график $N(\geq M) \sim M^{-1/3}$. Этот график, взятый из [2], изображён на рисунке, который пока не печатался в научной астрономической литературе.

Результаты А.М. Обухова [3] не привлекали внимания более полувека, и сам я их прочувствовал лишь в 2017 г. Тогда, в середине XX века, было мало данных, и сама эта работа была опубликована в недостаточно распростра-

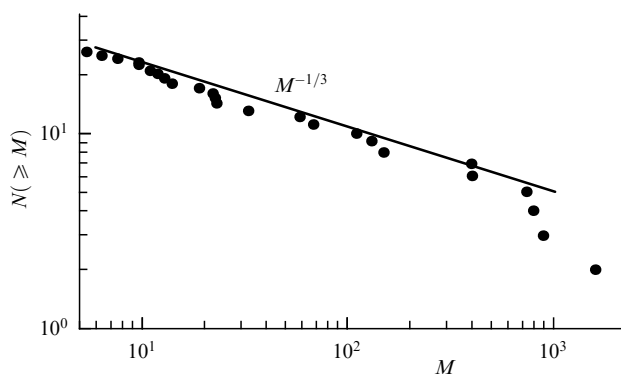


Рисунок. Кумулятивное распределение по массам близлежащих галактик.

нённом издании. Работы [1, 2] и данная заметка описывают уже около дюжины случаев использования идей А.Н. Колмогорова 1934 г., возводя их в ранг полезных практических инструментов теории вероятности. При этом метод весьма прост и точен. Перечислим эти случаи: теория инерционного интервала турбулентности Колмогорова–Обухова, моя теория общей циркуляции планетных атмосфер, где кинетическая энергия всей атмосферы оценивается как $K = Q_0 \tau$, где Q_0 — общий приток энергии от Солнца, $\tau = r/c_e$ — время установления термодинамического равновесия, r — размер планеты, c_e — скорость звука (см. [2], § 12), закон Гутенберга–Рихтера для частоты и размера землетрясений, ураганов, торнадо и смерчей, облаков и др. (см. [2]).

В заключение выражаю благодарность О.Г. Чхетиани, В.Г. Кочиной, Н.В. Вазаевой и А.В. Кислому за помощь в работе и полезные обсуждения.

Список литературы

1. Голицын Г С *УФН* **194** 86 (2024); Golitsyn G S *Phys. Usp.* **67** 80 (2024)
2. Голицын Г С *Вероятностные структуры макромира: землетрясения, ураганы, наводнения...* (М.: Физматлит, 2022)
3. Obukhov A M, in *Advances in Geophysics* Vol. 6 (Eds H E Landsberg, J Van Mieghem) (New York: Academic Press, 1959) p. 113
4. Feller W *An Introduction to Probability Theory and its Applications* (New York: Wiley, 1970, 1971); Пер. на русск. яз.: Феллер У *Введение в теорию вероятностей и ее приложения* (М.: Мир, 1967)
5. Newman M E J *Contemp. Phys.* **46** 323 (2005)
6. Карелин А В и др. *ЖЭТФ* **146** 513 (2014); Karelin A V et al. *J. Exp. Theor. Phys.* **119** 448 (2014)
7. Березинский В С и др. *Астрофизика космических лучей* (Под ред. В Л Гинзбурга) 2-е изд. (М.: Наука, 1990); Пер. на англ. яз.: Berezhinskii V S et al. *Astrophysics of Cosmic Rays* (Ed. V L Ginzburg) (Amsterdam: North-Holland, 1990)
8. Mandelbrot B B *Fractals: Form, Chance, and Dimension* (San Francisco: W. H. Freeman, 1977)
9. Lovejoy S *Science* **216** 185 (1982)
10. von Savigny C et al. *Geophys. Res. Lett.* **38** L02806 (2011)
11. Golitsyn G S, Chkhetiani O G, Vazaeva N V *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **58** 645 (2022)
12. Голицын Г С, Чхетиани О Г, Вазаева Н В *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **59** 242 (2023)
13. Чернокульский А В, Мохов И И *Исследование Земли из космоса* (3) 12 (2010)
14. Bird P *Geochem. Geophys. Geosyst.* **4** 1027 (2003)

Probability distributions over energy and areas in processes described by Kolmogorov's 1934 random motion equation

G.S. Golitsyn

A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Pyzhevskii per. 3, 109017 Moscow, Russian Federation
E-mail: gsg@ifaran.ru

The Kolmogorov equation is described in detail in the paper by G.S. Golitsyn [*UFN* **194** 86 (2024); *Phys. Usp.* **67** 80 (2024)], which is a summary of the book by G.S. Golitsyn, *Probability structures of the macrocosm: earthquakes, hurricanes, floods* (Moscow: Fizmatlit, 2022), but insufficient attention is paid to probability distributions, integral and differential, for the processes described by this equation. The integral distribution for cosmic rays is derived only by the method of similarity and dimensionality, and the distribution of horizontal lengths L of clouds and their perimeters together with the ratio of the cloud perimeter to its size are not explained at all. Here, these shortcomings are corrected, and the results and methods can be useful for other purposes.

Keywords: distribution function, random motions, second moments of probability distribution, statistical laws of nature

PACS numbers: **05.40.** – **a**, **91.30.** – **f**, 96.50.S–

Bibliography — 14 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **195** (9) 1017–1019 (2025)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.08.039983>

Received 29 November 2024, revised 31 July 2025

Physics – Uspekhi **68** (9) (2025)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2025.08.039983>