

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Точечные электрические мультиполи
и энергии их взаимодействия

В.П. Казанцев, О.А. Золотов, О.П. Золотова, В.Е. Зализняк

На основе различных представлений потенциала точечных базисных источников электростатического поля решена задача об энергии их взаимодействия. Полученные результаты будут полезны при реализации вариационного метода приближения электрического поля полями точечных мультиполей.

Ключевые слова: точечные мультиполи, энергия взаимодействия, вариационные принципы

PACS numbers: 03.50.De, 04.20.Fy, 41.20.Cv

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.12.039830>

Содержание

1. Введение (897).
 2. Точечные электрические мультиполи и их представления в различных формах (898).
 3. Энергия точечных мультиполей во внешнем электрическом поле (899).
 4. Энергия взаимодействия точечных мультиполей (900).
 5. Энергия взаимодействия систем зарядов, распределённых по двум непересекающимся шарам (902).
 6. Пример (902).
 7. Заключение (903).
- Список литературы (903).

1. Введение

В работах авторов настоящей статьи продемонстрирована эффективность приближения электрического поля проводников полями точечных зарядов [1] и точечных мультиполей [2]. В основе такого приближения лежит вариационный подход, связанный с минимизацией электростатической энергии по величинам зарядов и мультиполей и координатам точек их локализации.

При реализации такого подхода нужно было находить, в частности, энергию взаимодействия точечных мультиполей. Заметим, что потенциалы точечных мультиполей всех порядков присутствуют в разложениях потенциалов по характеристическим мультиполям сферы [3–6]. Представление этих потенциалов в сферической системе координат существенно усложняет вычисление энергии взаимодействия точечных мультиполей. Укажем также, что понятие точечных мультиполей было введено Максвеллом [7].

На плоскости для описания электрических потенциалов и полей оказалось удобным комплексное представление [8]. Величина точечного электрического заряда на плоскости (линейная плотность заряда равномерно заряженной прямой линии) определяется действительным числом λ_0 , а мультипольный момент порядка n точечного мультиполя — комплексным числом $\lambda_n = \lambda_{nr} + i\lambda_{ni}$ ($\lambda_{nr} = \text{Re } \lambda_n$; $\lambda_{ni} = \text{Im } \lambda_n$).

Если заряд и мультиполи расположены в точках с комплексными координатами z_0 и z_n , то их комплексные потенциалы и электрические поля будут определены формулами

$$\Pi_0(z, z_0) = -\frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{z - z_0}{R} \right),$$

$$\Pi_n(z, z_n) = -\frac{\lambda_n}{2\pi\epsilon_0 n} \frac{1}{(z - z_n)^n},$$

$$E_0^*(z, z_0) = -\Pi_0'(z, z_0) = E_{0x} - iE_{0y} = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0(z - z_0)},$$

$$E_n^*(z, z_n) = -\Pi_n'(z, z_n) = E_{nx} - iE_{ny} = \frac{\lambda_n}{2\pi\epsilon_0(z - z_n)^{n+1}},$$

где индексами x и y отмечены проекции напряжённости электрического поля на соответствующие оси, штрихом обозначена производная по z . Выбор положительной нормировочной постоянной R описан в монографии [8].

Комплексные потенциальные энергии взаимодействия точечного заряда $\lambda_0^{(p)}$ с точечным зарядом $\lambda_0^{(q)}$ и точечным мультиполем $\lambda_m^{(q)}$ могут быть найдены из со-

В.П. Казанцев^(1,*), О.А. Золотов^(1,*),
О.П. Золотова⁽²⁾, В.Е. Зализняк⁽¹⁾

⁽¹⁾ Сибирский федеральный университет,
просп. Свободный 79, 660041 Красноярск,
Красноярский край, Российская Федерация

⁽²⁾ Сибирский государственный университет науки и технологий
им. академика М.Ф. Решетнева
просп. им. газеты "Красноярский рабочий" 31,
660037 Красноярск, Красноярский край, Российская Федерация
E-mail: (*) ozolot_@mail.ru

Статья поступила 5 июля 2024 г.,
после доработки 11 декабря 2024 г.

отношений

$$U_{00}(z_0^{(p)}, z_0^{(q)}) = -\frac{\lambda_0^{(p)} \lambda_0^{(q)}}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{z_0^{(p)} - z_0^{(q)}}{R} \right),$$

$$U_{0n}(z_0^{(p)}, z_n^{(q)}) = \frac{\lambda_0^{(p)} \lambda_n^{(q)}}{2\pi\epsilon_0 n (z_0^{(p)} - z_n^{(q)})^n}.$$

Для комплексной потенциальной энергии взаимодействия двух точечных мультиполей имеет место формула [8]

$$U_{km}(z_k^{(p)}, z_m^{(q)}) = \frac{(-1)^k}{2\pi\epsilon_0} \frac{(k+m-1)!}{k!m!} \frac{1}{(z_k^{(p)} - z_m^{(q)})^{k+m}}.$$

Действительные потенциальные энергии взаимодействия будут совпадать с реальными частями соответствующих комплексных энергий.

Заметим, что относительная простота формул для энергий взаимодействия точечных мультиполей связана с их комплексным представлением.

В настоящей работе на основе представления потенциалов пространственных точечных мультиполей в различных формах будут получены формулы для энергий их взаимодействия.

2. Точечные электрические мультиполи и их представления в различных формах

Понятия точечных мультиполей были введены Максвеллом [7]. Электрический потенциал мультиполя порядка k , расположенного в начале координат, Максвелл определяет как

$$\varphi^{(k)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} A_k \frac{(-1)^k}{k!} \Pi_{m=1}^k (\mathbf{n}_m \nabla) \frac{1}{r}, \quad \mathbf{n}_m^2 = 1. \quad (1)$$

A_k он называет величиной мультипольного момента, а прямое произведение $\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \dots \mathbf{n}_k$ — его "направлением".

Достоинством такого определения служит его инвариантность относительно поворотов системы координат, а также и то, что последующий мультипольный момент, m -й, строится как два предыдущих, одинаковых по величине, но противоположных по "направлению", разнесённых на небольшое расстояние в направлении $\mathbf{n}_m$, с последующим предельным переходом к точечному мультиполю. Такой способ построения точечного мультиполя позволяет сразу записать выражение для его энергии во внешнем электрическом поле с потенциалом $\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r})$:

$$W^{(k)} = \frac{A_k}{k!} \Pi_{m=1}^k (\mathbf{n}_m \nabla) \varphi_{\text{out}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=0}. \quad (2)$$

Выражение (1) для электрического потенциала точечного мультиполя путём выполнения в нём операций дифференцирования можно привести к виду

$$\varphi^{(k)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_k(x, y, z)}{r^{2k+1}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Y_k(\mathbf{r}/r)}{r^{k+1}}. \quad (3)$$

Здесь $Q_k(x, y, z)$ — однородный гармонический многочлен степени k декартовых координат точки $\mathbf{r}$, $Y_k(\mathbf{r}/r) = Y_k(\theta, \alpha)$ — функция направления радиуса-вектора, определяемого, например, угловыми сферическими

координатами. Функцию направления $Y_k(\theta, \alpha)$ Максвелл назвал сферической гармоникой k -го порядка и показал, что число линейно независимых многочленов $Q_k(x, y, z)$ и сферических гармоник $Y_k(\theta, \alpha)$ равно $2k+1$, т.е. они образуют линейное пространство размерности $2k+1$. Отметим, что сферические координаты связаны с декартовыми координатами формулой

$$\mathbf{r} = (x; y; z) = (r \sin \theta \cos \alpha; r \sin \theta \sin \alpha; r \cos \theta).$$

В качестве базисных в пространстве сферических гармоник $Y_k(\theta, \alpha)$ удобно выбрать функции

$$y_0^{(n)}(\theta, \alpha) = P_n(\cos \theta),$$

$$y_{mr}^{(n)}(\theta, \alpha) = (-1)^m \sqrt{2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos(m\alpha), \quad (4)$$

$$y_{mi}^{(n)}(\theta, \alpha) = (-1)^m \sqrt{2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^{(m)}(\cos \theta) \sin(m\alpha),$$

где

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n,$$

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{(-1)^{n+m}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (1-x^2)^n$$

— многочлены и присоединённые функции Лежандра.

Базисные сферические гармоники ортогональны в смысле скалярного произведения функций точек сферы:

$$(f, g) = \int f g d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \alpha) g(\theta, \alpha) \sin \theta d\alpha d\theta,$$

причём

$$\int (y_0^{(n)}(\theta, \alpha))^2 d\Omega = \int (y_{mr}^{(n)}(\theta, \alpha))^2 d\Omega = \int (y_{mi}^{(n)}(\theta, \alpha))^2 d\Omega = \frac{4\pi}{2n+1}. \quad (5)$$

За электрические потенциалы точечных мультиполей, расположенных в начале координат, примем функции

$$q_0^{(n)} \varphi_0^{(n)} = \frac{q_0^{(n)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{y_0^{(n)}(\theta, \alpha)}{r^{n+1}}, \quad q_{mr}^{(n)} \varphi_{mr}^{(n)} = \frac{q_{mr}^{(n)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{y_{mr}^{(n)}(\theta, \alpha)}{r^{n+1}}, \quad (6)$$

$$q_{mi}^{(n)} \varphi_{mi}^{(n)} = \frac{q_{mi}^{(n)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{y_{mi}^{(n)}(\theta, \alpha)}{r^{n+1}}.$$

Величины $q_0^{(n)}$, $q_{mr}^{(n)}$ и $q_{mi}^{(n)}$ — это значения моментов точечных мультиполей соответствующих порядков.

Обратим внимание на то, что распределения зарядов по сфере $r = a$ с поверхностными плотностями

$$q_0^{(n)} \sigma_0^{(n)}(\theta, \alpha) = q_0^{(n)} \frac{2n+1}{4\pi a^{n+2}} y_0^{(n)}(\theta, \alpha), \quad (7)$$

$$q_{mr}^{(n)} \sigma_{mr}^{(n)}(\theta, \alpha) = q_{mr}^{(n)} \frac{2n+1}{4\pi a^{n+2}} y_{mr}^{(n)}(\theta, \alpha) \quad (\gamma = r, i)$$

будут служить источниками потенциалов (6) вне сферы и потенциалов

$$q_0^{(n)} \pi_0^{(n)} = \frac{q_0^{(n)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^n y_0^{(n)}(\theta, \alpha)}{a^{2n+1}}, \quad q_0^{(n)} \pi_{m'}^{(n)} = \frac{q_0^{(n)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^n y_{m'}^{(n)}(\theta, \alpha)}{a^{2n+1}}$$

внутри неё. Совокупность распределений с базисными плотностями зарядов $\sigma_0^{(n)}(\theta, \alpha)$ и $\sigma_{m'}^{(n)}(\theta, \alpha)$ предложено называть [9] характеристическими мультиполями сферы. При этом точечные мультиполи можно рассматривать как результат "заметания" зарядов с поверхности сферы в область ограниченного сферой шара.

Для расчёта энергий взаимодействия более удобным оказалось представить базисные однородные гармонические многочлены в декартовой системе координат:

$$r^n y_0^{(n)}(\theta, \alpha) = \sum_{j=0}^{[n/2]} a_j^{(n0)} (\eta \bar{\eta})^j z^{n-2j},$$

$$r^n y_{m'}^{(n)}(\theta, \alpha) = \frac{1}{2} (\eta^m + \bar{\eta}^m) \sum_{j=0}^{[(n-m)/2]} a_j^{(nm)} (\eta \bar{\eta})^j z^{n-m-2j},$$

(8)

$$r^n y_{mi}^{(n)}(\theta, \alpha) = \frac{1}{2i} (\eta^m - \bar{\eta}^m) \sum_{j=0}^{[(n-m)/2]} a_j^{(nm)} (\eta \bar{\eta})^j z^{n-m-2j},$$

где $\eta = x + iy$; $\bar{\eta} = x - iy$;

$$a_j^{(n0)} = \frac{(-1)^j n!}{2^{2j} (j!)^2 (n-2j)!}, \quad 0 \leq j \leq \left[\frac{n}{2} \right],$$

(9)

$$a_j^{(nm)} = \frac{(-1)^j \sqrt{2(n+m)!(n-m)!}}{2^{2j+m} j! (m+j)! (n-m-2j)!},$$

$$m \geq 1, \quad 0 \leq j \leq \left[\frac{n-m}{2} \right].$$

Электрические потенциалы точечных мультиполей определим теперь с помощью дифференциальных операторов

$$\hat{T}_0^{(n)}(\mathbf{r}') = \frac{\partial_{z'}^n}{n!}, \quad \hat{T}_{m'}^{(n)}(\mathbf{r}') = \sqrt{\frac{2^{2m-1}}{(n+m)!(n-m)!}} \partial_{z'}^{n-m} (\partial_{\eta'}^m + \partial_{\bar{\eta}'}^m),$$

(10)

$$\hat{T}_{mi}^{(n)}(\mathbf{r}') = \sqrt{\frac{2^{2m-1}}{(n+m)!(n-m)!}} \partial_{z'}^{n-m} \frac{1}{i} (\partial_{\eta'}^m - \partial_{\bar{\eta}'}^m)$$

по формулам

$$q_0^{(n)} \varphi_0^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{q_0^{(n)}}{4\pi\epsilon_0} \hat{T}_0^{(n)}(\mathbf{r}') \frac{1}{\sqrt{(z-z')^2 + (\eta-\eta')(\bar{\eta}-\bar{\eta}')}},$$

$$q_{m'}^{(n)} \varphi_{m'}^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{q_{m'}^{(n)}}{4\pi\epsilon_0} \hat{T}_{m'}^{(n)}(\mathbf{r}') \frac{1}{\sqrt{(z-z')^2 + (\eta-\eta')(\bar{\eta}-\bar{\eta}')}},$$

$$q_{mi}^{(n)} \varphi_{mi}^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{q_{mi}^{(n)}}{4\pi\epsilon_0} \hat{T}_{mi}^{(n)}(\mathbf{r}') \frac{1}{\sqrt{(z-z')^2 + (\eta-\eta')(\bar{\eta}-\bar{\eta}')}},$$

(11)

Здесь принято, что точечные мультиполи расположены в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}'$. Такая форма записи обусловлена тем, что оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = 4\partial_{\eta}\partial_{\bar{\eta}} + \partial_z^2$$

и переводит гармонические функции в нуль. Это следует из равенств

$$\partial_x = \partial_{\eta} + \partial_{\bar{\eta}} = \hat{T}_{1r}^{(1)}(\mathbf{r}), \quad \partial_y = i(\partial_{\eta} - \partial_{\bar{\eta}}) = \hat{T}_{1i}^{(1)}(\mathbf{r}),$$

$$\partial_z = \hat{T}_0^{(1)}(\mathbf{r}). \quad (12)$$

Напряжённости электрических полей точечных мультиполей можно найти действием операторов (11) на потенциалы (10). Например,

$$E_{0x}^{(n)} = -\hat{T}_{1r}^{(1)}(\mathbf{r}) \varphi_0^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{T}_{1r}^{(1)}(\mathbf{r}') \hat{T}_0^{(n)}(\mathbf{r}') \varphi_0^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') =$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)}{2n}} \hat{T}_{1r}^{(n+1)}(\mathbf{r}') \varphi_0^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sqrt{\frac{(n+1)}{2n}} \varphi_{1r}^{(n+1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

$$E_{0y}^{(n)} = -\hat{T}_{1i}^{(1)}(\mathbf{r}) \varphi_0^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{T}_{1i}^{(1)}(\mathbf{r}') \hat{T}_0^{(n)}(\mathbf{r}') \varphi_0^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') =$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)}{2n}} \hat{T}_{1i}^{(n+1)}(\mathbf{r}') \varphi_0^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sqrt{\frac{(n+1)}{2n}} \varphi_{1i}^{(n+1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

$$E_{0z}^{(n)} = -\hat{T}_0^{(1)}(\mathbf{r}) \varphi_0^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{T}_0^{(1)}(\mathbf{r}') \hat{T}_0^{(n)}(\mathbf{r}') \varphi_0^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') =$$

$$= (n+1) \hat{T}_0^{(n+1)}(\mathbf{r}') \varphi_0^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (n+1) \varphi_0^{(n+1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Отметим, что вычисление энергии точечного мультиполя во внешнем электрическом поле будет основано на соотношениях (8)–(11).

3. Энергия точечных мультиполей во внешнем электрическом поле

Найдём выражение для энергии взаимодействия точечного мультиполя с внешним электрическим полем. Допустим, что точечный мультиполь с моментом $q_{m'}^{(n)}$ расположен в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}'$, тогда электрический потенциал этого мультиполя в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ можно будет найти по формулам (9) и (10). Энергию взаимодействия мультиполя с распределением зарядов $dq(\mathbf{r})$ можно определить по формуле

$$W = \int \varphi_{m'}^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dq(\mathbf{r}) = \frac{q_{m'}^{(n)}}{4\pi\epsilon_0} \hat{T}_{m'}^{(n)}(\mathbf{r}') \int \frac{dq(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (13)$$

Учитывая, что потенциал внешнего электрического поля определён как

$$\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

для значений энергий точечных мультиполей во внешнем электрическом поле с потенциалом $\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r})$ по-

лучаем

$$\begin{aligned}
 W_0^{(n)} &= \int \varphi_0^{(n)}(\mathbf{r}) d\mathbf{q}(\mathbf{r}) = q_0^{(n)} \hat{T}_0^{(n)}(\mathbf{r}) \varphi_{\text{out}}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} = \\
 &= q_0^{(n)} \frac{1}{n!} \partial_z^n \varphi_{\text{out}}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}, \\
 W_{mr}^{(n)} &= \int \varphi_{mr}^{(n)}(\mathbf{r}) d\mathbf{q}(\mathbf{r}) = q_{mr}^{(n)} \hat{T}_{mr}^{(n)}(\mathbf{r}) \varphi_{\text{out}}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} = \\
 &= q_{mr}^{(n)} \sqrt{\frac{2^{2m-1}}{(n+m)!(n-m)!}} \partial_z^{n-m} (\partial_\eta^m + \partial_{\bar{\eta}}^m) \varphi_{\text{out}}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}, \\
 W_{mi}^{(n)} &= \int \varphi_{mi}^{(n)}(\mathbf{r}) d\mathbf{q}(\mathbf{r}) = q_{mi}^{(n)} \hat{T}_{mi}^{(n)}(\mathbf{r}) \varphi_{\text{out}}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} = \\
 &= \frac{q_{mi}^{(n)}}{i} \sqrt{\frac{2^{2m-1}}{(n+m)!(n-m)!}} \partial_z^{n-m} (\partial_\eta^m - \partial_{\bar{\eta}}^m) \varphi_{\text{out}}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Заметим, что соотношения (14) для вычисления энергии точечных мультиполей во внешнем электрическом поле, по сути дела, распространяют формулу Максвелла (2) на базисные точечные мультиполи.

В формулах (14) предполагается, что $\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r})$ должен быть представлен как функция $z, \eta, \bar{\eta}$:

$$\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r}) = \varphi_{\text{out}}(z, \eta, \bar{\eta}).$$

Например, гармоническую функцию

$$\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r}) = A \exp(\mathbf{p}\mathbf{r}) \cos(\mathbf{q}\mathbf{r}),$$

где A — постоянная величина, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — постоянные ортогональные векторы с одинаковым модулем, следует предварительно записать в виде

$$\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r}) = A \exp(p_+ \bar{\eta} + p_- \eta + p_z z) \cos(q_+ \bar{\eta} + q_- \eta + q_z z),$$

$$p_+ = \frac{p_x + ip_y}{2}, \quad p_- = \frac{p_x - ip_y}{2},$$

$$q_+ = \frac{q_x + iq_y}{2}, \quad q_- = \frac{q_x - iq_y}{2},$$

а затем использовать формулы (14) для расчёта энергии точечного мультиполя во внешнем электрическом поле.

4. Энергия взаимодействия точечных мультиполей

Найдём с помощью соотношений (8)–(11) и (14) энергию взаимодействия двух базисных точечных мультиполей. Выберем систему координат так, чтобы её ось z соединяла первый мультиполь со вторым. Допустим сначала также, что оси этой системы координат будут параллельны соответствующим осям сопутствующих координатных систем для этих мультиполей. Тогда для электрических потенциалов таких мультиполей возможных порядков можно записать

$$\begin{aligned}
 \varphi_0^{(1n_1)}(\mathbf{r}) &= \frac{(-1)^{n_1}}{4\pi\epsilon_0} q_0^{(1n_1)} \hat{T}_0^{(n_1)}(\mathbf{r}) \frac{1}{\sqrt{(z-z_1)^2 + \eta\bar{\eta}}}, \\
 \varphi_{m_1\gamma}^{(1n_1)}(\mathbf{r}) &= \frac{(-1)^{n_1}}{4\pi\epsilon_0} q_{m_1\gamma}^{(1n_1)} \hat{T}_{m_1\gamma}^{(n_1)}(\mathbf{r}) \frac{1}{\sqrt{(z-z_1)^2 + \eta\bar{\eta}}}, \\
 \varphi_0^{(2n_2)}(\mathbf{r}) &= \frac{(-1)^{n_2}}{4\pi\epsilon_0} q_0^{(2n_2)} \hat{T}_0^{(n_2)}(\mathbf{r}) \frac{1}{\sqrt{(z-z_2)^2 + \eta\bar{\eta}}}, \\
 \varphi_{m_2\gamma}^{(2n_2)}(\mathbf{r}) &= \frac{(-1)^{n_2}}{4\pi\epsilon_0} q_{m_2\gamma}^{(2n_2)} \hat{T}_{m_2\gamma}^{(n_2)}(\mathbf{r}) \frac{1}{\sqrt{(z-z_2)^2 + \eta\bar{\eta}}}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь учтено, что координаты точечных мультиполей $\eta_1 = \eta_2 = 0$.

Из соотношений (8)–(11) и (14) видно, что энергии взаимодействия рассматриваемых точечных мультиполей будут отличны от нуля для мультиполей с одинаковыми значениями γ и $m_2 = m_1 = m \leq \max(n_1, n_2)$. В частности, при $m = 0$ находим

$$\begin{aligned}
 W_{00}^{(2n_2 1n_1)} &= \frac{(-1)^{n_1}}{4\pi\epsilon_0} q_0^{(n_1)} q_0^{(n_2)} \hat{T}_0^{(n_1)}(\mathbf{r}) \hat{T}_0^{(n_2)}(\mathbf{r}) \times \\
 &\times \frac{1}{\sqrt{(z-z_1)^2 + \eta\bar{\eta}}} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_2} = \frac{(-1)^{n_1}}{4\pi\epsilon_0} q_0^{(1n_1)} q_0^{(2n_2)} \times \\
 &\times \frac{1}{n_1! n_2!} \partial_z^{n_1+n_2} \frac{1}{\sqrt{(z-z_1)^2 + \eta\bar{\eta}}} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_2} = \\
 &= \frac{q_0^{(1n_1)} q_0^{(2n_2)}}{4\pi\eta_0} \frac{(-1)^{n_2} (n_1+n_2)!}{n_1! n_2! (z_2-z_1)^{n_1+n_2} |z_2-z_1|} = \\
 &= \frac{q_0^{(1n_1)} q_0^{(2n_2)}}{4\pi\epsilon_0} Q_0^{(1n_1 2n_2)}(z_2-z_1).
 \end{aligned} \tag{16}$$

При $\max(n_1, n_2) \geq m > 0$ для энергии взаимодействия точечных мультиполей имеем

$$\begin{aligned}
 W_{m\gamma m\gamma}^{(2n_2 1n_1)} &= \frac{(-1)^{n_1}}{4\pi\epsilon_0} q_{m\gamma}^{(n_1)} q_{m\gamma}^{(n_2)} \hat{T}_{m\gamma}^{(n_1)}(\mathbf{r}) \hat{T}_{m\gamma}^{(n_2)}(\mathbf{r}) \times \\
 &\times \frac{1}{\sqrt{(z-z_1)^2 + \eta\bar{\eta}}} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_2}.
 \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\begin{aligned}
 \hat{T}_{m\gamma}^{(n_1)}(\mathbf{r}) \hat{T}_{m\gamma}^{(n_2)}(\mathbf{r}) &= A \partial_z^{n_1+n_2-2m} (\pm (\partial_\eta^m \pm \partial_{\bar{\eta}}^m)^2) = \\
 &= A \partial_z^{n_1+n_2-2m} (\pm (\partial_\eta^{2m} + \partial_{\bar{\eta}}^{2m} \pm 2\partial_\eta^m \partial_{\bar{\eta}}^m)) = \\
 &= A \partial_z^{n_1+n_2-2m} \left(\pm (\partial_\eta^{2m} + \partial_{\bar{\eta}}^{2m} \pm \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} \partial_z^{2m}) \right) = \\
 &= \pm B \hat{T}_{2m\gamma}^{(n_1+n_2)} + \frac{(-1)^m A}{2^{2m-1}} \partial_z^{n_1+n_2},
 \end{aligned}$$

и учитывая равенства

$$A = \frac{2^{2m-1}}{\sqrt{(n_1+m)!(n_1-m)!(n_2+m)!(n_2-m)!}}, \quad B = \text{const},$$

$$\hat{T}_{2m\gamma}^{(n_1+n_2)} \frac{1}{\sqrt{(z-z_1)^2 + \eta\bar{\eta}}} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_2} = 0,$$

$$\partial_z^{n_1+n_2} \frac{1}{\sqrt{(z-z_1)^2 + \eta\bar{\eta}}} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_2} = \frac{(-1)^{n_1+n_2} (n_1+n_2)!}{(z_2-z_1)^{n_1+n_2} |z_2-z_1|},$$

получаем

$$\begin{aligned}
 W_{m\gamma m\gamma}^{(2n_2 1n_1)} &= \frac{q_{m\gamma}^{(1n_1)} q_{m\gamma}^{(2n_2)}}{4\pi\epsilon_0} Q_m^{(1n_1 2n_2)}(z_2-z_1), \\
 Q_m^{(1n_1 2n_2)}(z_2-z_1) &= \frac{(-1)^{n_2+m} (n_1+n_2)!}{\sqrt{(n_1+m)!(n_1-m)!(n_2+m)!(n_2-m)!}} \times \\
 &\times \frac{1}{(z_2-z_1)^{n_1+n_2} |z_2-z_1|}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Пусть теперь каждый из мультиполей является базисным в сопутствующей ему системе координат. Ориентацию осей сопутствующих систем координат относительно систем, введённых в начале этого раздела, характеризуем углами Эйлера $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ для первого мультиполя и $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ — для второго. Отметим, что выбор углов Эйлера здесь такой же, как и в книге [11], поэтому единичными векторами, направленными из точек расположения мультиполей вдоль третьих осей сопутствующих систем координат, будут

$$\mathbf{k}_p = (\sin \beta_p \cos \alpha_p; \sin \beta_p \sin \alpha_p; \cos \beta_p), \quad p = 1, 2.$$

Углы, образуемые радиусами-векторами, проведёнными от точечных мультиполей в точку наблюдения, с осью z , будем обозначать $\theta^{(p)}$, а углы, образуемые проекциями этих радиусов-векторов на плоскость xu с осью x , — ψ .

В сопутствующих системах координат электрические потенциалы точечных мультиполей различных порядков будут иметь вид

$$\varphi_0^{(np)} = \frac{q_0^{(np)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{y_0^{(n)}(\theta_p, \psi_p)}{r_p^{n+1}}, \quad \varphi_{mr}^{(np)} = \frac{q_{mr}^{(np)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{y_{mr}^{(n)}(\theta_p, \psi_p)}{r_p^{n+1}},$$

$$\gamma = r, i, \quad p = 1, 2. \quad (18)$$

Сферические функции $y_0^{(n)}(\theta_p, \psi_p)$ и $y_{mr}^{(n)}(\theta_p, \psi_p)$ могут быть выражены через сферические функции $y_0^{(n)}(\theta^{(p)}, \psi)$ и $y_{mr}^{(n)}(\theta^{(p)}, \psi)$ посредством линейных соотношений

$$y_0^{(n)}(\theta_p, \psi_p) = y_0^{(n)}(\beta_p, \alpha_p) y_0^{(n)}(\theta^{(p)}, \psi) + \sum_{m=1}^n \sum_{\gamma=r}^i y_{m\gamma}^{(n)}(\beta_p, \alpha_p) y_{m\gamma}^{(n)}(\theta^{(p)}, \psi),$$

$$(19)$$

$$y_{m\delta}^{(n)}(\theta_p, \psi_p) = H_{m\delta 0}^{(n)}(\alpha_p, \beta_p, \gamma_p) y_0^{(n)}(\theta^{(p)}, \psi) + \sum_{l=1}^n \sum_{\varepsilon=r}^i H_{m\delta l\varepsilon}^{(n)}(\alpha_p, \beta_p, \gamma_p) y_{l\varepsilon}^{(n)}(\theta^{(p)}, \psi).$$

Первое равенство здесь выражает в удобной для электростатики форме теорему сложения сферических функций. Функции $H_{m\delta 0}^{(n)}(\alpha_p, \beta_p, \gamma_p)$ и $H_{m\delta l\varepsilon}^{(n)}(\alpha_p, \beta_p, \gamma_p)$ могут быть выражены через функции Вигнера [11]. Ниже будут приведены соответствующие формулы.

Из равенства (18) и первого равенства (19) видно, что задача об энергии взаимодействия двух ориентированных произвольным образом точечных мультиполей с моментами $q_0^{(n1)}$ и $q_0^{(k2)}$ эквивалентна задаче о взаимодействии двух систем точечных мультиполей с моментами

$$\tilde{q}_0^{(n1)} = q_0^{(n1)} y_0^{(n)}(\beta_1, \alpha_1), \quad \tilde{q}_{m\gamma}^{(n1)} = q_0^{(n1)} y_{m\gamma}^{(n)}(\beta_1, \alpha_1), \quad m = 1, \dots, n,$$

$$\tilde{q}_0^{(k2)} = q_0^{(k2)} y_0^{(k)}(\beta_2, \alpha_2), \quad \tilde{q}_{m\gamma}^{(k2)} = q_0^{(k2)} y_{m\gamma}^{(k)}(\beta_2, \alpha_2); \quad m = 1, \dots, k. \quad (20)$$

Первая система точечных мультиполей расположена в точке z_1 оси z , а вторая — в точке z_2 этой оси. Причём оси сопутствующих систем координат для всех мультиполей параллельны, а одной из этих осей является ось z .

Из соотношений (16), (17) и (20) следует, что энергия взаимодействия точечных мультиполей с различными индексами m будет равна нулю. Поэтому энергия взаимодействия двух рассматриваемых точечных мультипо-

лей с моментами $q_0^{(n1)}$ и $q_0^{(k2)}$ может быть записана в виде

$$W_{00}^{n1k2}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, z_2 - z_1) = \frac{q_0^{(n1)} q_0^{(k2)}}{4\pi\epsilon_0} \times$$

$$\times \left(Q_0^{n1k2}(z_2 - z_1) y_0^{(n)}(\beta_1, \alpha_1) y_0^{(k)}(\beta_2, \alpha_2) + \sum_{m=1}^{\min(n, k)} Q_m^{n1k2}(z_2 - z_1) \sum_{\gamma=r}^i y_{m\gamma}^{(n)}(\beta_1, \alpha_1) y_{m\gamma}^{(k)}(\beta_2, \alpha_2) \right). \quad (21)$$

Аналогичным образом находим энергию взаимодействия точечных мультиполей с моментами $q_0^{(n1)}$ и $q_{m\gamma}^{(k2)}$:

$$W_{0m\gamma}^{n1k2}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, z_2 - z_1) = \frac{q_0^{(n1)} q_{m\gamma}^{(k2)}}{4\pi\epsilon_0} \times$$

$$\times \left(Q_0^{n1k2}(z_2 - z_1) y_0^{(n)}(\beta_1, \alpha_1) H_{m\gamma 0}^{(k)}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) + \sum_{l=1}^{\min(n, k)} Q_l^{n1k2}(z_2 - z_1) \sum_{\varepsilon=r}^i y_{l\varepsilon}^{(n)}(\beta_1, \alpha_1) H_{m\gamma l\varepsilon}^{(k)}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \right). \quad (22)$$

И, наконец, для энергии взаимодействия точечных мультиполей с моментами $q_{m\delta}^{(n1)}$ и $q_{p\tau}^{(k2)}$ имеем

$$W_{m\delta p\tau}^{nk}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, z_2 - z_1) = \frac{q_{m\delta}^{(n1)} q_{p\tau}^{(k2)}}{4\pi\epsilon_0} \times$$

$$\times \left(Q_0^{n1k2}(z_2 - z_1) H_{m\delta 0}^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) H_{p\tau 0}^{(k)}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) + \sum_{l=1}^{\min(n, k)} Q_l^{n1k2}(z_2 - z_1) \sum_{\varepsilon=r}^i H_{m\delta l\varepsilon}^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) H_{p\tau l\varepsilon}^{(k)}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \right). \quad (23)$$

В формулах (22) и (23) учтено, что энергия взаимодействия двух точечных мультиполей с моментами $q_{m\delta}^{(n1)}$ и $q_{p\tau}^{(k2)}$ в сопутствующих системах координат будет равна энергии взаимодействия двух систем точечных мультиполей, расположенных в точках z_1 и z_2 оси z в сопутствующей им системе координат, обладающих моментами

$$q_{m\delta}^{(n1)} H_{m\delta 0}^{(k)}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \quad q_{m\delta}^{(n1)} H_{m\delta l\varepsilon}^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1),$$

$$l = 1, \dots, n, \quad \varepsilon = r, i, \quad (24)$$

$$q_{p\tau}^{(k2)} H_{p\tau 0}^{(k)}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \quad q_{p\tau}^{(k2)} H_{p\tau l\varepsilon}^{(k)}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2),$$

$$l = 1, \dots, k, \quad \varepsilon = r, i.$$

Приведём теперь выражения для функций углов Эйлера $H_{m\gamma 0}^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma)$ и $H_{m\gamma l\varepsilon}^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma)$:

$$H_{m\gamma 0}^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{2} \cos(m\gamma) d_{m0}^n(\beta),$$

$$H_{m\gamma 0}^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma) = -\sqrt{2} \sin(m\gamma) d_{m0}^n(\beta),$$

$$H_{m\gamma l\varepsilon}^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^l \cos(m\gamma - l\alpha) d_{m-l}^n(\beta) + \cos(m\gamma + l\alpha) d_{m+l}^n(\beta),$$

$$H_{m\gamma l\varepsilon}^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^l \sin(l\alpha - m\gamma) d_{m-l}^n(\beta) + \sin(m\gamma + l\alpha) d_{m+l}^n(\beta), \quad (25)$$

$$H_{m\gamma l\varepsilon}^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^l \sin(l\alpha - m\gamma) d_{m-l}^n(\beta) - \sin(m\gamma + l\alpha) d_{m+l}^n(\beta),$$

$$H_{m\gamma l\varepsilon}^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma) = \cos(m\gamma + l\alpha) d_{m+l}^n(\beta) - (-1)^l \cos(m\gamma - l\alpha) d_{m-l}^n(\beta).$$

В монографии [11] для вычисления коэффициентов $d_{ml}^{(n)}(\beta)$ предложено несколько способов. В частности, их можно выразить через многочлены Якоби $P_s^{(\mu, \nu)}(\cos \beta)$:

$$d_{ml}^{(n)}(\beta) = \xi_{ml} \left(\frac{s!(s+\mu+\nu)!}{(s+\mu)!(s+\nu)!} \right)^{1/2} \sin^\mu \left(\frac{\beta}{2} \right) \cos^\nu \left(\frac{\beta}{2} \right) P_s^{(\mu, \nu)}(\cos \beta), \quad (26)$$

$$\mu = |m - l|, \quad \nu = |m + l|, \quad s = n - \frac{1}{2}(\mu + \nu),$$

$$\xi_{ml} = \begin{cases} 1 & \text{при } l \geq m, \\ (-1)^{l-m} & \text{при } l < m. \end{cases}$$

Укажем также, что

$$P_s^{(\mu, \nu)}(x) = \frac{(-1)^s}{2^s s!} (1-x)^{-\mu} (1+x)^{-\nu} \frac{d^s}{dx^s} [(1-x)^{s+\mu} (1+x)^{s+\nu}].$$

Здесь параметры μ и ν принимают неотрицательные целочисленные значения. В этом случае при вычислении $P_s^{(\mu, \nu)}(x)$ удобно использовать формулу

$$P_s^{(\mu, \nu)}(x) = \frac{(s+\mu)!(s+\nu)!}{s!2^s} \sum_{k=0}^s \frac{C_s^k (x-1)^{s-k} (1+x)^k}{(s-k+\mu)!(k+\nu)!}. \quad (27)$$

Конкретные выражения для коэффициентов преобразования (25) довольно громоздки. Приведём для примера формулы, определяющие эти коэффициенты, при $n = 0, 1, 2, 3$:

$$H_{00}^{(0)}(\alpha, \beta, \gamma) = 1,$$

$$H_{00}^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma) = \cos \beta, \quad H_{01r}^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma) = \sin \beta \cos \alpha,$$

$$H_{01i}^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma) = \sin \beta \sin \alpha,$$

$$H_{1r0}^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma) = -\sin \beta \cos \gamma,$$

$$H_{1r1r}^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma,$$

$$H_{1r1i}^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma) = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma,$$

$$H_{1i0}^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma) = \sin \beta \sin \gamma,$$

$$H_{1i1r}^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma) = -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma,$$

$$H_{1i1i}^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma) = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma.$$

5. Энергия взаимодействия систем зарядов, распределённых по двум непересекающимся шарам

В качестве приложения полученных результатов рассчитаем энергию взаимодействия двух распределений зарядов по областям двух непересекающихся шаров.

Найдём энергию взаимодействия зарядов $dq(\mathbf{r})$, распределённых по области шара $r < a$, с внешним электрическим полем с потенциалом $\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r})$, представленным в области шара гармонической функцией. Её можно записать внутри шара в виде ряда гармонических многочленов:

$$\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(\delta_0^{(n)} y_0^{(n)}(\theta, \alpha) + \sum_{m=1}^n (\delta_{mr}^{(n)} y_{mr}^{(n)}(\theta, \alpha) + \delta_{mi}^{(n)} y_{mi}^{(n)}(\theta, \alpha)) \right)$$

с коэффициентами

$$\delta_0^{(n)} = \frac{(\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r}), r^n y_0^{(n)}(\theta, \alpha))}{(r^n y_0^{(n)}(\theta, \alpha), r^n y_0^{(n)}(\theta, \alpha))},$$

$$\delta_{m\gamma}^{(n)} = \frac{(\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r}), r^n y_{m\gamma}^{(n)}(\theta, \alpha))}{(r^n y_{m\gamma}^{(n)}(\theta, \alpha), r^n y_{m\gamma}^{(n)}(\theta, \alpha))}.$$

Здесь использовано обозначение

$$(f(\mathbf{r}), g(\mathbf{r})) = \int_{r < a} f(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}) dV.$$

Тогда для энергии взаимодействия зарядов шара с внешним полем будем иметь

$$W = \int \varphi_{\text{out}}(\mathbf{r}) dq(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\delta_0^{(n)} q_0^{(n)} + \sum_{m=1}^n (\delta_{mr}^{(n)} q_{mr}^{(n)} + \delta_{mi}^{(n)} q_{mi}^{(n)}) \right).$$

Для вычисления коэффициентов $\delta_0^{(n)}$ и $q_{m\gamma}^{(n)}$ заметим, что величины

$$\rho_0^{(n)} = \frac{r^n y_0^{(n)}(\theta, \alpha)}{(r^n y_0^{(n)}(\theta, \alpha), r^n y_0^{(n)}(\theta, \alpha))},$$

$$\rho_{m\gamma}^{(n)} = \frac{r^n y_{m\gamma}^{(n)}(\theta, \alpha)}{(r^n y_{m\gamma}^{(n)}(\theta, \alpha), r^n y_{m\gamma}^{(n)}(\theta, \alpha))}$$

можно интерпретировать как плотности зарядов, порождающих вне шара потенциалы точечных мультиполей, локализованных в центре шара, с единичными моментами, которые и взаимодействуют с внешним полем. При расчёте их энергий взаимодействия следует использовать соотношения (14).

Если $\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r})$ — потенциал зарядов другого шара, представленный вне шара суммой потенциалов точечных мультиполей, локализованных в его центре, то энергия взаимодействия зарядов двух непересекающихся шаров будет равна сумме энергий взаимодействия точечных мультиполей, локализованных в центрах шаров с моментами, определяемыми обычным образом.

6. Пример

В качестве примера использования энергий взаимодействия точечных мультиполей приведём вариационное решение задачи о двух проводящих шарах с одинаковыми потенциалами в однородном электрическом поле, направленном вдоль соединяющей их центры линии.

Пусть центры шаров лежат на оси z . Центр первого шара с радиусом a_1 совпадает с началом координат, а второго шара с радиусом a_2 смещён вдоль оси z на расстояние $b \geq a_1 + a_2$. С каждым шаром свяжем сферические системы координат с полярными и азимутальными углами $(\theta_k; \varphi) k = 1, 2$.

Пусть E — величина напряжённости внешнего электрического поля, направленного вдоль оси z . Потенциалы зарядов, наведённых на шарах внешним полем, аппроксимируем суперпозицией потенциалов характеристиче-

ских мультиполей шаров:

$$\varphi_N(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^N q_{k0}^{(n)} \pi_0^{(n)}(\theta_k). \quad (28)$$

Для собственных энергий зарядов шаров запишем

$$W_k = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 a_k} \sum_{n=0}^N \left(\frac{q_{k0}^{(n)}}{a_k^n} \right)^{2n}. \quad (29)$$

Для энергии взаимодействия зарядов шаров находим с помощью соотношения (17)

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b} \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N (-1)^{n_2} \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} \frac{a_1^{n_1} a_2^{n_2}}{b^{n_1+n_2}} \frac{q_{10}^{(n_1)}}{a_1^{n_1}} \frac{q_{20}^{(n_2)}}{a_2^{n_2}}. \quad (30)$$

Энергия взаимодействия зарядов шаров с внешним полем будет равна

$$W_e = -(q_{10}^{(1)} + q_{20}^{(1)}) E - q_{20}^{(0)} b E. \quad (31)$$

Учитывая закон сохранения заряда: $q_{10}^{(0)} = -q_{20}^{(0)} = -q$, удобно энергию наведённых зарядов представить в виде

$$W = W_1^0 + W_2^0 + W_{12}^0 + W_1 + W_2 + W_{12} + W_e,$$

В свою очередь энергию наведённых зарядов представим в матричной форме, вводя обозначения

$$\frac{q_{k0}^{(n)}}{a_k^n} = Q_k^{(n)}, \quad \mathbf{Q}_k = (Q_k^{(1)}, Q_k^{(2)}, \dots, Q_k^{(N)}), \quad \mathbf{c}_k = \left(\frac{a_k}{b}, 0, \dots, 0 \right),$$

$$A_{ij} = (-1)^j \frac{(i+j)!}{i! j!} \frac{a_1^i a_2^j}{b^{i+j}},$$

$$(\mathbf{a}_1)_i = A_{i0}, \quad (\mathbf{a}_2)_i = A_{0i},$$

$$W_1^0 + W_2^0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b} \left(\frac{b}{2a_1} + \frac{b}{2a_2} \right) q^2,$$

$$W_{12}^0 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 b} q^2 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \mathbf{a}_1 \mathbf{Q}_1 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \mathbf{a}_2 \mathbf{Q}_2,$$

$$W_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b} \frac{b}{2a_k} \mathbf{Q}_k^T \hat{e} \mathbf{Q}_k, \quad W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b} \mathbf{Q}_1^T \hat{A} \mathbf{Q}_2, \quad (32)$$

$$W_e = -(\mathbf{c}_1 \mathbf{Q}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{Q}_2) b E - q b E,$$

где $k = 1, 2$, $\hat{e}$ — единичная матрица порядка N .

Тогда

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b} \left(\frac{b}{2a_1} + \frac{b}{2a_2} - 1 \right) q^2 - q b E + \\ & + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} (\mathbf{a}_1 \mathbf{Q}_1 - \mathbf{a}_2 \mathbf{Q}_2) + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b} \left(\frac{b}{2a_1} \mathbf{Q}_1^T \hat{e} \mathbf{Q}_1 + \frac{b}{2a_2} \mathbf{Q}_2^T \hat{e} \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_1^T \hat{A} \mathbf{Q}_2 \right) - \\ & - (\mathbf{c}_1 \mathbf{Q}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{Q}_2) b E. \end{aligned}$$

Минимизируя полученное выражение для энергии по q , $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$, окончательно получаем

$$W = -\frac{2\pi\epsilon_0 b^3 E^2}{(b/a_1 + b/a_2 - 2)} (1 + \mathbf{Z} \mathbf{X}), \quad (33)$$

Таблица. Результаты численных расчётов энергии двух одинаковых касающихся проводящих шаров во внешнем поле, направленном вдоль соединяющей центры линии

N	$-\frac{W}{8\pi\epsilon_0 R^3 E^2}$	$\Delta, \%$
0	1	17
1	1,200000000	0,17
2	1,201834862	0,02
3	1,202041429	0,001
4	1,202056396	0,00004
5	1,202056654	0,00002

где $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{X}$ — векторы порядка $2N$, причём

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a_1} + \frac{b}{a_2} - 2 \right) \mathbf{c}_1 - \mathbf{a}_1 \\ \left(\frac{b}{a_1} + \frac{b}{a_2} - 2 \right) \mathbf{c}_2 + \mathbf{a}_2 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{X}$ — решение уравнения

$$\hat{B} \mathbf{X} = \mathbf{Z},$$

$\hat{B}$ — квадратная матрица порядка $2N$:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a_1} + \frac{b}{a_2} - 2 \right) \frac{b}{a_1} \hat{e} - \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1^T & \left(\frac{b}{a_1} + \frac{b}{a_2} - 2 \right) \hat{A} + \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2^T \\ \left(\frac{b}{a_1} + \frac{b}{a_2} - 2 \right) \hat{A}^T + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_1^T & \left(\frac{b}{a_1} + \frac{b}{a_2} - 2 \right) \frac{b}{a_2} \hat{e} - \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2^T \end{pmatrix},$$

причём знаком $\otimes$ обозначено тензорное произведение.

В качестве численного примера рассмотрим случай касания двух шаров одинакового радиуса R . Точное решение этой задачи приведено, например, в [12]. Результаты расчётов по вышеприведённым формулам представлены в таблице. Там же приведена и погрешность Δ относительно точного решения [12], которое выражается через дзета-функцию Римана:

$$-\frac{W}{8\pi\epsilon_0 R^3 E^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3) \approx 1,20205690.$$

Из таблицы хорошо видна быстрая сходимость метода.

7. Заключение

Полученные в работе результаты позволяют находить энергию взаимодействия двух базисных точечных мультиполей при произвольной их ориентации относительно друг друга. Предложенную работу можно также рассматривать как основу раздела "Точечные источники электрического поля" в учебниках по электричеству и магнетизму.

Список литературы

1. Казанцев В П УФН **172** 357 (2002); Kazantsev V P *Phys. Usp.* **45** 325 (2002)
2. Казанцев В П, Золотов О А, Долгополова М В УФН **176** 537 (2006); Kazantsev V P, Zolotov O A, Dolgoplova M V *Phys. Usp.* **49** 517 (2006)

3. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1967); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1975)
4. Батыгин В В, Топтыгин И Н *Сборник задач по электродинамике* (М.: Наука, 1970); Пер. на англ. яз.: Batygin V V, Toptygin I N *Problems in Electrodynamics* (London: Academic Press, 1978)
5. Jackson J D *Classical Electrodynamics* (New York: J. Wiley, 1962); Пер. на русск. яз.: Джексон Дж *Классическая электродинамика* (М.: Мир, 1965)
6. Panofsky W K H, Phillips M *Classical Electricity and Magnetism* (Cambridge, MA: Addison-Wesley Publ. Co., 1955); Пер. на русск. яз.: Пановский В, Филипс М *Классическая электродинамика* (М.: Физматгиз, 1963)
7. Maxwell J C A *Treatise on Electricity and Magnetism* Vol. 1 (London: Oxford Univ. Press, 1873); Пер. на русск. яз.: Максвелл Д К *Трактат об электричестве и магнетизме* Т. 1 (М.: Наука, 1989)
8. Казанцев В П *Аналитическая электростатика на плоскости* Ч. 1 (Красноярск: СФУ, 2008)
9. Казанцев В П *Теоретическая и математическая физика* **119** 441 (1999); Kazantsev V P *Theor. Math. Phys.* **119** 750 (1999)
10. Соболев С Л *Уравнения математической физики* (М.: Наука, 1966) с. 417
11. Варшалович Д А, Москалев А Н, Херсонский В К *Квантовая теория углового момента* (Л.: Наука, 1975) с. 20; Пер. на англ. яз.: Varshalovich D A, Moskalev A N, Khersonskii V K *Quantum Theory of Angular Momentum* (Singapore: World Scientific, 1988)
12. Казанцев В П *Радиотехника и электроника* **47** 55 (2002); Kazantsev V P *J. Commun. Technol. Electron.* **47** 48 (2002)

Interaction energy of point electric multipoles

V.P. Kazantsev⁽¹⁾, O.A. Zolotov^(1,*), O.P. Zolotova⁽²⁾, V.E. Zalizniak⁽¹⁾

⁽¹⁾ Siberian Federal University, prosp. Svobodnyi 79, 660041 Krasnoyarsk, Russian Federation

⁽²⁾ Reshetnev Siberian State University of Science and Technology,

prosp. imeni gazety Krasnoyarskii Rabochii 31, 660037 Krasnoyarsk, Russian Federation

E-mail: ^(*) ozolot_@mail.ru

Based on various representations of the potential of point basis sources of an electrostatic field, we report the solution to the problem of their interaction energy. The obtained results can be used to approximate the electric field by point multipole fields using the variational principle.

Keywords: point multipole, interaction energy, variational principle

PACS numbers: 03.50.De, 04.20.Fy, 41.20.Cv

Bibliography — 12 references

Received 5 July 2024, revised 11 December 2024

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **195** (8) 897–904 (2025)

Physics – Uspekhi **68** (8) (2025)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.12.039830>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2024.12.039830>