

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Сферически симметричная статическая задача
общей теории относительности для сплошной среды

В.В. Васильев, Л.В. Фёдоров

Статья является аналитическим обзором, посвящённым сферически симметричной задаче общей теории относительности (ОТО). Эта задача занимает особое место в ОТО, так как она сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям, допускающим аналитическое решение, которое используется для описания космологических моделей. Анализируется постановка задачи механики, связанная с проблемами полноты и разрешимости системы уравнений ОТО. Рассматриваются решения сферически симметричной статической задачи для вакуума, идеальной жидкости и упругой среды, соответствующие классической механике, линеаризованной системе уравнений ОТО, метрике Шварцшильда и псевдориманову пространству специального типа, являющемуся плоским по отношению к пространственным координатам и искривлённым в отношении времени.

Ключевые слова: общая теория относительности, механика жидкости и газа, механика деформируемого твёрдого тела, сферически симметричная статическая задача

PACS numbers: 04.20. – q, 04.40. – b, 46.25. – y

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.11.039800>

Содержание

1. Введение (199).
2. Уравнения общей теории относительности (200).
3. Тензор энергии – импульса (201).
4. Классическое решение сферически симметричной статической задачи (201).
5. Линеаризованное решение общей теории относительности (203).
6. Решения в метрике Шварцшильда (204).
6.1. Решение внешней задачи. 6.2. Решение внутренней задачи для идеальной несжимаемой жидкости. 6.3. Решение внутренней задачи для идеальной сжимаемой жидкости.
7. Решение в псевдоримановом пространстве специального типа (209).
7.1. Уравнения общей теории относительности в псевдоримановом пространстве специального типа. 7.2. Решение внешней задачи. 7.3. Решение внутренней задачи для идеальной несжимаемой жидкости. 7.4. Решение внутренней задачи для идеальной сжимаемой жидкости. 7.5. Решение для линейно упругой среды.
8. Заключение (214).

Список литературы (214).

В.В. Васильев^(*), Л.В. Фёдоров^(**)
Институт прикладной механики РАН,
Ленинградский просп. 7, стр. 1, 125040 Москва,
Российская Федерация
E-mail: ^(*) vvas@dol.ru, ^(**) lfff@mail.ru

Статья поступила 1 апреля 2024 г.,
после доработки 13 августа 2024 г.

1. Введение

Сферически симметричная задача общей теории относительности (ОТО) занимает особое место в теории, так как она сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям и для некоторых физических моделей допускает аналитическое решение. Этой задаче посвящено большое количество публикаций, наиболее существенные из которых будут рассматриваться далее в процессе проводимого анализа. Существенно, что в настоящей работе сферически симметричная задача ОТО рассматривается в рамках подхода, характерного для механики сплошной среды. В соответствии с этим ОТО трактуется как феноменологическая теория, основанная на традиционной для механики модели однородного изотропного континуума, реальная микроструктура которого игнорируется. Поэтому возможные приложения получаемых решений к проблемам космологии (нейтронные звёзды и т.п.) далее не затрагиваются. Большое внимание уделяется корректности математической постановки задачи, в частности, анализу полноты разрешающей системы уравнений. Ниже последовательно рассматриваются решения сферически симметричной задачи в рамках классической механики деформируемого твёрдого тела и решения в рамках ОТО применительно к метрике Шварцшильда и в рамках предлагаемого псевдориманова пространства специального вида, являющегося плоским по отношению к пространственным координатам и искривлённым по отношению к временной координате.

2. Уравнения общей теории относительности

В рамках рассматриваемой модели континуум характеризуется тензором энергии–импульса (согласно Н.А. Кильчевскому [1], более адекватным является название "тензор кинетических напряжений") T_i^j ($i, j = 1, 2, 3, 4$), задаваемым в четырёхмерном римановом пространстве с метрической формой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (1)$$

В задачах механики тензор энергии–импульса удовлетворяет четырём уравнениям закона сохранения

$$\nabla_k T_i^k = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \quad (2)$$

Здесь используются смешанные компоненты тензора, так как для рассматриваемой далее сферически симметричной задачи они совпадают с физическими компонентами. Если x^1, x^2, x^3 являются пространственными координатами, а x^4 — временной координатой, то первые три уравнения (2) являются уравнениями движения, а последнее уравнение обеспечивает сохранение массы. ОТО основана на уравнении

$$E_i^j = \chi T_i^j, \quad (3)$$

устанавливающей пропорциональность между тензором энергии–импульса и тензором Эйнштейна:

$$E_i^j = R_i^j - \frac{1}{2} g_i^j R. \quad (4)$$

Здесь R_i^j — тензор кривизны Риччи, выражающийся через метрический тензор g_i^j , а R — его линейный инвариант. Коэффициент пропорциональности в уравнении (3),

$$\chi = \frac{8\pi\gamma}{c^4}, \quad (5)$$

выражается через классическую гравитационную постоянную γ и скорость света c и следует из условия совпадения уравнений ОТО с уравнениями гравитационной теории Ньютона при слабой гравитации. Поскольку тензор энергии–импульса T_i^j должен удовлетворять уравнению (2), тензор Эйнштейна также удовлетворяет этому уравнению, так что

$$\nabla_k E_i^k = 0. \quad (6)$$

Уравнения (3) с левыми частями в форме уравнений (4) составляют систему из десяти нелинейных уравнений в частных производных, включающих десять компонент метрического тензора. Однако, как известно [2–5], эта система не является полной. Дело в том, что тензоры E_i^j и T_i^j тождественно удовлетворяют четырём уравнениям (6) или (2). Это означает, что из десяти уравнений взаимно независимыми являются только шесть. Традиционно предлагается дополнить систему четырьмя координатными условиями. В качестве таких условий могут быть использованы так называемые условия гармоничности [3], которые имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{G} g^{ij}) = 0, \quad (7)$$

где G — определитель метрического тензора. Несмотря на наличие доказательства существования вакуумного решения уравнений ОТО, дополненных уравнением (7) [6], и полученного решения сферически симметричной задачи для вакуума [7, 8], координатное условие (7) не

нашло широкого распространения. Общей формы координатных условий в ОТО не существует, и все полученные к настоящему времени решения используют координатные условия, задаваемые из различных соображений.

Ситуацию позволяет несколько прояснить обращение к теории упругости [9, 10]. Для задач статики при отсутствии гравитации тензор энергии–импульса совпадает с тензором напряжений σ_{ij} . В декартовых координатах x_1, x_2, x_3 напряжения связаны тремя уравнениями равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1, 2, 3). \quad (8)$$

Здесь $(\cdot)_{,j} = \partial(\cdot)/\partial x_j$, а символ $(1, 2, 3)$ обозначает круговую перестановку индексов. Уравнения (8) аналогичны уравнениям (2) ОТО. Во второй половине XIX в. в работах Д. Максвелла и Г. Морера было предложено следующее преобразование напряжений [11]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \varphi_{22,33} + \varphi_{33,22} - 2\varphi_{23,23}, \\ \sigma_{12} &= -\varphi_{33,12} - \varphi_{12,33} + \varphi_{13,23} + \varphi_{23,13} \quad (1, 2, 3). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь φ_{ij} — тензор функций напряжений [12]. Подстановка напряжений (9) в уравнения равновесия (8) позволяет тождественно удовлетворить эти уравнения. Аналогичная ситуация имеет место в ОТО: подстановка тензора энергии–импульса из равенств (3) в уравнения (2) тождественно удовлетворяет эти уравнения. Продолжая аналогию с теорией упругости, запишем линеаризованную форму уравнений ОТО. Предположим, что компоненты метрического тензора имеют вид

$$g_{ij} = 1 + f_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad g_{i4} = 0, \quad g_{44} = -1,$$

где амплитудные значения функций f_{ij} много меньше единицы. Осуществляя линеаризацию уравнений ОТО по отношению к этим функциям, получаем

$$\begin{aligned} \chi\sigma_{11} &= \frac{1}{2} (-f_{22,33} - f_{33,22} + 2f_{23,23}), \\ \chi\sigma_{12} &= \frac{1}{2} (f_{33,12} + f_{12,33} - f_{13,23} - f_{23,13}) \quad (1, 2, 3). \end{aligned}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (9), если принять $f_{ij} = -2\varphi_{ij}/\chi$. Таким образом, линеаризованные уравнения ОТО аналогичны уравнениям теории упругости. Естественно, что аналогия между линейными уравнениями теории упругости и нелинейными уравнениями ОТО является условной. Однако в теории упругости доказывается важное свойство уравнений (9): они в принципе не могут быть решены относительно тензора функций напряжений. Решение этих уравнений существует, только если их правые части — напряжения — удовлетворяют некоторым условиям совместности [11]. Эти условия имеют простой геометрический смысл: они требуют, чтобы напряжённое пространство было евклидовым, т.е. чтобы кривизна этого пространства была равной нулю [13]. В ОТО пространство не является евклидовым и такие условия существовать не могут. Однако приведённый анализ позволяет считать, что неполнота уравнений ОТО не связана с недостающими координатными условиями. Естественно предположить, что гравитация порождает некоторое псевдориманово пространство специального вида, ограниченное некоторыми физическими условиями, которыми и должны

быть дополнены уравнения ОТО. Такое пространство предлагается далее в разделе 6.

Выше обсуждалась неполнота системы уравнений ОТО по отношению к метрическому тензору. Аналогичная ситуация имеет место и в отношении тензора энергии – импульса. Десять компонент этого тензора связаны четырьмя уравнениями (2), и система является неполной. Предлагаемая модель псевдориманова пространства специального вида позволяет устранить и эту проблему.

3. Тензор энергии – импульса

Структура тензора энергии – импульса, входящего в уравнения ОТО, следует из уравнений классической механики твёрдого тела и гравитационной теории Ньютона.

Получим этот тензор для сферически симметричной задачи. В сферических координатах r, θ, φ и в переменных Эйлера движение континуума в гравитационном поле Ньютона описывается следующими уравнениями [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) - \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{2}{r} \rho v_r + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь σ_r и σ_θ — радиальное и кольцевое напряжения, v_r — радиальная скорость, ρ — плотность, t — время и ψ — гравитационный потенциал Ньютона. Используя тождественные преобразования и второе уравнение (10), можно привести правую часть первого уравнения к следующей форме [1]:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) &= \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_r^2)}{\partial r} - v_r \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} \right] = \\ &= \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_r^2)}{\partial r} + \frac{2}{r} \rho v_r^2. \end{aligned}$$

Используя этот результат, запишем уравнения (10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r - \rho v_r^2) + \frac{2}{r} [(\sigma_r - \rho v_r^2) - \sigma_\theta] - \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} (\rho c v_r) + \frac{2}{r} \rho c v_r + \frac{\partial(\rho c^2)}{c \partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Для того чтобы привести эти уравнения к уравнениям (2), используемым в ОТО, рассмотрим риманово пространство, соответствующее следующей метрической форме:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\Omega^2 - (1-f)c^2 dt^2, \\ d\Omega^2 &= d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где амплитудное значение функции f много меньше единицы. Записывая уравнения (2) для метрической формы (12) и осуществляя линеаризацию по отношению к функции f , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^1}{\partial r} + \frac{2}{r} (T_1^1 - T_2^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} T_4^4 + \frac{\partial T_1^4}{c \partial t} &= 0, \\ \frac{\partial T_4^1}{\partial r} + \frac{2}{r} T_4^1 + \frac{\partial T_4^4}{c \partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Сравнивая уравнения (11) и (13), можно заключить, что

$$\begin{aligned} T_1^1 &= \sigma_r - \rho v_r^2, \quad T_2^2 = \sigma_\theta, \quad T_4^4 = \rho c^2, \quad T_1^4 = \rho v_r c, \\ T_4^1 &= -\rho v_r c, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \end{aligned}$$

Учитывая последнее из этих соотношений, в котором f является составляющей метрического тензора псевдориманова пространства, а ψ — гравитационным потенциалом теории Ньютона, можно заключить, что аналогия между гравитацией и кривизной пространства следует из теории Ньютона. В дальнейшем будем использовать более общие тензорные соотношения:

$$\begin{aligned} T_1^1 &= \sigma_1^1 - \rho v_1 v^1, \quad T_2^2 = \sigma_2^2, \quad T_4^4 = \rho c^2, \\ T_4^1 &= \rho c v^1, \quad T_1^4 = -\rho c v_1, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\sigma_1^1 = \sigma_r$, $\sigma_2^2 = \sigma_\theta$, поскольку, как уже отмечалось, смешанные компоненты тензоров в сферических координатах равны физическим компонентам. Во всех равенствах (14) плотность одинакова, что является следствием гипотезы об эквивалентности гравитационной и инертной масс.

Полные выражения для компонент тензора энергии – импульса, учитывающие эффекты специальной теории относительности, получены В.А. Фоком [7].

4. Классическое решение сферически симметричной статической задачи

Рассмотрим задачу о гравитации для сплошного упругого сферического тела радиусом R и с постоянной плотностью ρ . В рамках теории гравитации Ньютона гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона, которое для сферически симметричного гравитационного поля имеет вид

$$\varphi'' + \frac{2}{r} \varphi' = 4\pi\gamma\rho, \quad (15)$$

где $(\cdot)' = d(\cdot)/dr$. Для окружающего тело внешнего евклидова пространства ($R \leq r < \infty$) $\rho = 0$ и затухающее при $r \rightarrow \infty$ решение уравнения (15) имеет вид

$$\varphi_e = -\frac{\gamma m}{r}, \quad (16)$$

где m — масса сферы и индекс "e" относится к внешнему пространству. Введём так называемый гравитационный радиус, играющий важную роль в рассматриваемой задаче:

$$r_g = \frac{2\gamma m}{c^2}. \quad (17)$$

Тогда решению (16) можно придать следующую форму:

$$\varphi_e = -\frac{r_g c^2}{2r}. \quad (18)$$

Для внутреннего пространства сферы ($0 \leq r \leq R$, индекс "i") регулярное при $r = 0$ решение уравнения (15) имеет вид

$$\varphi_i = \frac{2}{3} \pi\gamma\rho r^2 + C. \quad (19)$$

Постоянная C определяется из условия непрерывности потенциала на границе сферы, т.е. $\varphi_i(R) = \varphi_e(R)$. В результате равенство (19) принимает следующую окончательную форму:

$$\varphi_i = -\frac{r_g c^2}{4R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (20)$$

Объёмные гравитационные силы, действующие внутри сферы, в теории Ньютона выражаются через гравитационный потенциал следующим образом: $f_g = -\rho \varphi_i'$. Тогда уравнение равновесия элемента сферы принимает вид

$$\sigma_r' + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) - \frac{\rho r_g c^2 r}{2R^3} = 0. \quad (21)$$

Второе уравнение для напряжений следует из условия совместности деформаций, которые выражаются через радиальное перемещение следующим образом:

$$\varepsilon_r = u', \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (22)$$

Исключая перемещение из этих соотношений, получим уравнение совместности деформаций

$$(r\varepsilon_\theta)' = \varepsilon_r. \quad (23)$$

Для линейно-упругой среды деформации выражаются через напряжения с помощью закона Гука

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - 2\nu\sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r], \quad (24)$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона. Подставляя деформации (24) в уравнение (23), получим уравнение совместности деформаций в напряжениях

$$r[(1-\nu)\sigma_\theta' - \nu\sigma_r'] + (1+\nu)(\sigma_\theta - \sigma_r) = 0. \quad (25)$$

Таким образом, имеем два уравнения (21) и (25) относительно напряжений σ_r и σ_θ . Решение этих уравнений, регулярное при $r=0$ и удовлетворяющее граничному условию на поверхности сферы $\sigma_r(R) = 0$, определяется равенствами

$$\bar{\sigma}_r = -k\bar{r}_g(1-\bar{r}^2), \quad \bar{\sigma}_\theta = -k\bar{r}_g \left(1 + \frac{1+\nu}{3-\nu} \bar{r}^2 \right), \quad (26)$$

$$k = \frac{3-\nu}{20(1-\nu)}.$$

Здесь

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\rho c^2}, \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\rho c^2}, \quad \bar{r}_g = \frac{r_g}{R}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R}. \quad (27)$$

Рассмотрим частный случай — сферу, состоящую из идеальной несжимаемой жидкости с плотностью ρ . В этом случае $\sigma_r = \sigma_\theta = -p(r)$, где p — давление в жидкости, которое определяется из уравнения, следующего из уравнения (21), т.е.

$$p' + \frac{\rho r_g c^2 r}{2R^3} = 0. \quad (28)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию $p(R) = 0$, имеет вид

$$\bar{p} = \frac{\bar{r}_g}{4} (1 - \bar{r}^2), \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho c^2}. \quad (29)$$

Существенно, что для определения давления не потребовалось привлекать уравнение совместности деформаций (25), которое удовлетворяется тождественно.

Уровень гравитации определяется величиной параметра \bar{r}_g . При $\bar{r}_g = 0$ гравитация отсутствует. Для реальных объектов величина \bar{r}_g является малой по сравнению с единицей. Например, для Земли $\bar{r}_g = 1,4 \times 10^{-6}$. Считая, что для Земли $\rho = 5520 \text{ кг м}^{-3}$, получаем в центре Земли очень большое давление $p = 1,74 \times 10^5 \text{ ГПа}$. Как показано ниже, ОТО даёт ещё большее значение давления.

Представляет интерес геометрическая интерпретация результатов, следующих из теории гравитации Ньютона. Метрическая форма (1) в римановом пространстве, обладающем сферической симметрией, имеет вид

$$ds^2 = g_{11} dr^2 + g_{22} d\Omega^2 - g_{44} c^2 dt^2. \quad (30)$$

Для статической задачи входящие сюда метрические коэффициенты зависят только от радиальной координаты. В классической теории гравитации движение тела происходит, в соответствии со вторым законом Ньютона, под действием гравитационной и инерционной сил. В ОТО это движение осуществляется вдоль геодезической линии, искривлённой гравитацией. Сопоставляя уравнения движения, можно найти следующие метрические коэффициенты пространства, соответствующие теории гравитации Ньютона [2]:

$$g_{11}^n = 1, \quad g_{22}^n = r^2, \quad g_{44}^n = 1 - \frac{r_g}{r}. \quad (31)$$

Отсюда следует, что пространственные метрические коэффициенты соответствуют евклидову пространству и гравитация проявляется только через временной коэффициент. Этот результат будет использован далее в разделе 6.

Полученное решение может быть проверено экспериментально. Как известно, гравитация вызывает изменение направления лучей света, проходящих вблизи Солнца. Угол, на который траектория светового луча отклоняется от прямолинейной, определяется равенством [8]

$$\alpha = 2J - \pi, \quad J = \int_R^\infty \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}((g_{22}^R/g_{44}^R) - 1)}} dr, \quad (32)$$

где $g_{ii}^R = g_{ii}(R)$. Используя равенства (31) и учитывая, что для Солнца $\bar{r}_g = 4,3 \times 10^{-6}$, имеем

$$J \approx R \int_R^\infty \frac{1}{r\sqrt{r^2 - R^2}} \left(1 - \frac{r_g}{2r} \right) dr = \frac{1}{2} (\pi - \bar{r}_g). \quad (33)$$

В результате первое равенство (32) даёт $\alpha = \bar{r}_g = 0,675''$. Этот результат вдвое меньше экспериментального значения ($\alpha = 1,75''$ [14]). Таким образом, гравитационная теория Ньютона не подтверждается экспериментально.

Уравнение движения частицы единичной массы в радиальном направлении с учётом равенства (18) записы-

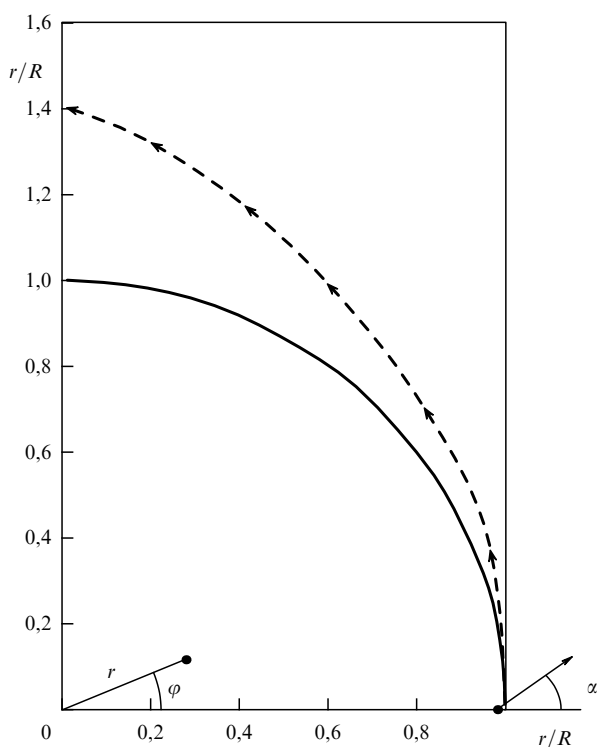


Рис. 1. Распространение света с поверхности сферы.

вається в виде

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\rho\varphi'_e = -\frac{r_g c^2}{2r^2}. \tag{34}$$

Его первый интеграл определяет физическую скорость

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2 \frac{r_g}{r} + C.$$

Вторая космическая скорость для сферического тела радиуса R получается отсюда, если принять $C = 0$ и $r = R$, т.е.

$$v_e = c\sqrt{\frac{r_g}{R}}. \tag{35}$$

Таким образом, при $R = r_g$ вторая космическая скорость равна скорости света и тело оказывается невидимым. Этот результат обсуждается в работе [15]. Он был получен в конце XVIII в. Дж. Мичелом и П. Лапласом, которые предсказали существование так называемых тёмных звёзд.

Траектория светового луча в экваториальной ($\theta = 0$) плоскости сферического тела (рис. 1) определяется следующими равенствами [8]:

$$\frac{dr}{dt} = c\sqrt{\frac{g_{44}}{g_{11}} \left(1 - k^2 \frac{g_{44}}{g_{22}}\right)}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = kc \frac{g_{44}}{g_{22}},$$

где k — коэффициент, зависящий от начального условия. Найдём физические составляющие, т.е. радиальную и окружную скорости

$$v_r = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{44}}} \frac{dr}{dt} = c\sqrt{1 - k^2 \frac{g_{44}}{g_{22}}}, \quad v_\varphi = kc\sqrt{\frac{g_{44}}{g_{22}}}. \tag{36}$$

Для скорости, направленной под углом α к радиусу (см. рис. 1), имеем $v_r = c \cos \alpha$, $v_\varphi = c \sin \alpha$. Тогда

$$k = \sin \alpha \sqrt{\frac{g_{22}^R}{g_{44}^R}},$$

$$\frac{dr}{dt} = c\sqrt{\frac{g_{44}}{g_{11}} \left(1 - \sin^2 \alpha \frac{g_{22}^R g_{44}}{g_{44}^R g_{22}}\right)}.$$

На поверхности сферы при $r = R$ получаем

$$\frac{dr}{dt} = c \cos \alpha \sqrt{\frac{g_{44}^R}{g_{11}^R}}. \tag{37}$$

Подставляя сюда метрические коэффициенты (31), соответствующие теории Ньютона, находим

$$\frac{dr}{dt} = c \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{r_g}{R}}.$$

Отсюда следует, что при $R = r_g$ свет не распространяется по радиусу. Заметим, что тёмная звезда невидима только снаружи. Из второго равенства (36) следует, что на поверхности тела свет распространяется по круговым траекториям.

5. Линеаризованное решение общей теории относительности

Предположим, что геометрия псевдориманова пространства мало отличается от плоской. В этом случае метрические коэффициенты в форме (30) можно записать в виде

$$g_{11} = 1 + f_1, \quad g_{22} = r^2(1 + f_2), \quad g_{44} = 1 + f_4, \tag{38}$$

где амплитудные значения функций f много меньше единицы. Тогда уравнения ОТО, линеаризованные по отношению к функциям f , принимают вид

$$\frac{1}{r^2} (f - rf'_4) = \chi\sigma_r, \quad \frac{1}{2r} (f - rf'_4)' = \chi\sigma_\theta, \quad \frac{1}{r^2} (rf)' = \chi\rho c^2, \tag{39}$$

где $f = f_1 - (rf_2)'$.

Рассмотрим внешнее пустое пространство, для которого $\rho = 0$ и $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$. Тогда система (39) оказывается однородной, т.е.

$$f - rf'_4 = 0, \quad (f - rf'_4)' = 0, \quad (rf)' = 0. \tag{40}$$

Заметим, что второе уравнение является следствием первого. Это свойство системы обусловлено неполнотой уравнений ОТО, отмеченной в разделе 2. Таким образом, для трёх неизвестных функций f_1, f_2, f_4 имеются только два независимых уравнения. Выразим функцию f из первого уравнения (40) и подставим во второе уравнение. В результате получаем

$$f''_4 + \frac{2}{r} f'_4 = 0.$$

При $f_4 = \varphi$ это уравнение совпадает с уравнением (15) для гравитационного потенциала в пустом пространстве ($\rho = 0$) теории Ньютона. Таким образом, в линейном

приближении ОТО сводится к теории Ньютона в пустом пространстве.

Для того чтобы найти три функции f из двух независимых уравнений системы (40), доопределим эту систему. Для линейного приближения естественно принять $f_2 = 0$, т.е. $g_{22} = r^2$. Это означает, что окружность сферы равна $2\pi R$. Однако пространство не является евклидовым, так как расстояние между двумя точками, лежащими на радиусе, не равно разности радиальных координат этих точек. При $f_2 = 0$ решение уравнений (40) имеет вид

$$f_1 = \frac{C_1}{r}, \quad f_4 = -\frac{C_1}{r} + C_2.$$

Поскольку $f_4 \rightarrow 0$, при $r \rightarrow \infty$ имеем $C_2 = 0$ и, согласно равенствам (38),

$$g_{11} = g^2 \approx 1 + \frac{C_1}{r}, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{44} = h^2 \approx 1 - \frac{C_1}{r}.$$

При $r \rightarrow \infty$ решение должно асимптотически совпадать с выражениями (31), соответствующими теории Ньютона. Окончательно получаем $C_1 = r_g$ и

$$g_{11} = 1 + \frac{r_g}{r}, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{44} = 1 - \frac{r_g}{r}. \quad (41)$$

Эти выражения отличаются от равенств (31), соответствующих теории Ньютона. Воспользовавшись формулами (32) и (33), найдём угол отклонения светового луча в окрестности Солнца. Подставляя равенства (41), имеем

$$J \approx R \int_R^\infty \left[1 + \frac{r_g}{2r} + \frac{r_g r}{2R(R+r)} \right] \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - R^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{2r_g}{R}.$$

В результате получаем $\alpha = 2\bar{r}_g$, что вдвое превышает угол, следующий из теории Ньютона, и согласуется с экспериментальным результатом ($\alpha = 1,75''$). Полученный в начале XX в. и подтверждающий ОТО, этот результат послужил основанием для всеобщего признания теории, однако, строго говоря, он подтверждает только её линейное приближение и только для пустого пространства.

Воспользовавшись равенствами (37) и (41), найдём, что на поверхности сферы

$$\frac{dr}{dt} = c \sqrt{\frac{1 - r_g/R}{1 + r_g/R}} \cos \alpha.$$

Таким образом, как и в теории Ньютона, свет не распространяется с поверхности сферы с радиусом $R = r_g$.

Рассмотрим внутреннюю задачу, описываемую уравнениями (39), которые должны быть дополнены уравнением, следующим из системы (2), т.е.

$$\sigma_r' + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + f_4' (\sigma_r - \rho c^2) = 0. \quad (42)$$

Если пренебречь σ_r по сравнению с ρc^2 , то получим уравнение равновесия теории упругости (21).

Гравитационная постоянная ОТО χ (5) находится, как уже отмечалось, из сопоставления линеаризованных уравнений ОТО, которые и рассматриваются в настоящем разделе, с уравнением, следующим из гравитационной теории Ньютона. Выразим f из первого уравнения (39), f' — из второго уравнения и подставим в третье

уравнение. В результате получаем

$$f_4'' + \frac{2f_4'}{r} = \frac{\chi}{2} (\rho c^2 - \sigma), \quad (43)$$

где $\sigma = \sigma_r + 2\sigma_\theta$ — инвариант тензора напряжений. Пренебрегая σ по сравнению с ρc^2 , считая, что f_4 выражается через классический гравитационный потенциал по формуле $f_i = \pi\varphi/c^2$, и полагая $\chi = 8\pi\gamma/c^4$, придём к уравнению (15) гравитационной теории Ньютона. Однако изложенный выше вывод является ошибочным. Дело в том, что первые два уравнения (39) включают одну и ту же комбинацию функций $(f - rf_i')$ и в общем случае являются несовместными. Исключая эту комбинацию из указанных уравнений, получаем следующее условие совместности:

$$\sigma_r' + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0.$$

Это уравнение отличается от уравнения (42) отсутствием члена, учитывающего гравитацию. Таким образом, в линейном приближении тензор Эйнштейна не удовлетворяет уравнению закона сохранения материального тензора и линейное приближение ОТО не описывает гравитацию в сплошной среде (однако описывает её в пустом пространстве). Причина заключается в том, что члены, включающие напряжения, являются в уравнении (42) линейными, а гравитационный член — квадратичным. Равенство (5) для гравитационной постоянной ОТО может быть получено, если рассмотреть квадратичное приближение уравнений Эйнштейна [16].

6. Решения в метрике Шварцшильда

Полная система уравнений ОТО для сферически симметричной задачи включает три уравнения (4) [17]:

$$E_1^1 = \frac{1}{g_{22}} - \frac{1}{g_{11}} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{g'_{22}}{g_{22}} \right)^2 + \frac{g'_{22}g'_{44}}{2g_{22}g_{44}} \right] = \chi T_1^1, \quad (44)$$

$$E_2^2 = -\frac{1}{2g_{11}} \left[\frac{g''_{44}}{g_{44}} - \frac{1}{2} \left(\frac{g'_{44}}{g_{44}} \right)^2 + \frac{g''_{22}}{g_{22}} - \frac{1}{2} \left(\frac{g'_{22}}{g_{22}} \right)^2 + \frac{g'_{22}}{2g_{22}} \left(\frac{g'_{44}}{g_{44}} - \frac{g'_{11}}{g_{11}} \right) - \frac{g'_{11}g'_{44}}{2g_{11}g_{44}} \right] = \chi T_2^2, \quad (45)$$

$$E_4^4 = \frac{1}{g_{22}} - \frac{1}{g_{11}} \left[\frac{g''_{22}}{g_{22}} - \frac{1}{4} \left(\frac{g'_{22}}{g_{22}} \right)^2 - \frac{g'_{11}g'_{22}}{2g_{11}g_{22}} \right] = \chi T_4^4 \quad (46)$$

и одно уравнение (6)

$$\frac{dE_1^1}{dr} + \frac{g'_{22}}{g_{22}} (E_1^1 - E_2^2) + \frac{g'_{44}}{2g_{44}} (E_1^1 - E_4^4) = 0, \quad (47)$$

в котором $E_i^i = \chi T_i^i$.

6.1. Решение внешней задачи

Рассмотрим внешнее решение ($\infty > r \geq R$). Для пустого пространства $T_i^i = 0$ и уравнения (44)–(46) являются однородными. Они допускают решение в общем виде. Выражая g_{11} и g_{44} через g_{22} с помощью уравнений (44) и (46), получаем [18, 19]

$$g_{11} = \frac{(g'_{22})^2}{4(g_{22} + C_1\sqrt{g_{22}})}, \quad g_{44} = C_2 \left(1 + \frac{C_1}{g_{22}} \right), \quad (48)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Подставляя эти результаты в уравнение (45), можно заключить, что оно удовлетворяется при любой функции $g_{22}(r)$. Как отмечено в разделе 2, уравнения (44)–(46) не являются взаимно независимыми. Поскольку правые части этих уравнений тождественно удовлетворяют уравнению (47), уравнение (45) является следствием уравнений (44), (46) и (47).

Для того чтобы получить решение, равенства (48) необходимо дополнить некоторым координатным условием. Решение Шварцшильда получено при условии $g_{22} = r^2$. Заметим, что первоначально Шварцшильд использовал другое условие, наложенное на определитель метрического тензора ($G = 1$), которое может быть сведено к записанному выше условию [20, 21]. Известно обоснование координатного условия Шварцшильда [3, 5, 22], которое для задачи статики выглядит следующим образом. Примем $g_{22} = f^2(r)$ и введём новую переменную $r' = f(r)$. Тогда $g_{22} = (r')^2$ и, опуская штрих для сокращения записи, получаем $g_{22} = r^2$.

Однако такое преобразование справедливо для неограниченного пространства, в котором $0 \leq (r, r') < \infty$ и различие между r и r' несущественно. Если в пространстве имеется сфера радиусом $r = R$, то определить соответствующее значение r' и сформулировать граничные условия на поверхности сферы оказывается невозможным.

Постоянные интегрирования, входящие в равенства (48), определяются из асимптотических условий, согласно которым при $r \rightarrow \infty$ полученное решение должно вырождаться в решение (31), соответствующее теории Ньютона. Принимая $g_{22} = r^2$, приходим к внешнему решению Шварцшильда

$$g_{11}^c = \frac{1}{1 - r_g/r}, \quad g_{44}^c = 1 - \frac{r_g}{r}. \quad (49)$$

Здесь r_g определяется равенством (17), а индекс "с" соответствует внешнему пространству. Из равенств (32) и (33) получаем $\alpha = 2\bar{r}_g$, что согласуется с экспериментом. Подставляя решение (49) в равенство (37), можно заключить, что на поверхности сферы радиусом R

$$\frac{dr}{dt} = c \cos \alpha \left(1 - \frac{r_g}{R} \right).$$

То есть свет не распространяется с поверхности сферы радиусом $R = r_g$ [23, 24]. Из равенств (49) при этом следует, что метрический коэффициент g_{11}^c обращается на поверхности этой сферы в бесконечность, а коэффициент g_{44}^c оказывается равным нулю. Предположим, что решение (49) справедливо во всём пространстве, т.е. при $0 \leq r < \infty$. В этом случае решение (49) сингулярно на сфере радиусом r_g и в точке $r = 0$. Сфера радиусом r_g называется горизонтом событий чёрной дыры. Внутри этой сферы коэффициенты g_{11}^c и g_{44}^c изменяют знак. Поскольку метрические коэффициенты не могут быть отрицательными, в метрической форме (30) приходится при первом члене ставить знак плюс, а при последнем — знак минус. Это означает, что радиальная координата ведёт себя как временная, а поскольку время необратимо, то после пересечения горизонта событий движение возможно только к центру, являющемуся точкой сингулярности. Никакая информация не может быть получена из-

под горизонта событий. Экспериментальное подтверждение рассматриваемого сценария является в принципе невозможным, так как для этого необходимо проникнуть за горизонт событий, показать, что за ним пустое пространство, и передать эту информацию.

Определяя компоненты тензора кривизны псевдориманова пространства с метрическими коэффициентами (49), можно установить, что некоторые из них сингулярны при $r = r_g$, однако инвариант тензора кривизны, который не зависит от системы координат, не является сингулярным. Из этого традиционно делается вывод о том, что сингулярность при $r = r_g$ является координатной, т.е. может быть устранена, если перейти от координат r и t к координатам u и v , используя преобразование

$$du = c_{11} dr + c_{12} dt, \quad dv = c_{21} dr + c_{22} dt. \quad (50)$$

Известно несколько вариантов такого преобразования. Наиболее распространёнными являются:

— преобразование Леметра, для которого

$$c_{11} = \sqrt{\frac{r_g}{r}} \frac{1}{1 - r_g/r}, \quad c_{12} = c_{22} = 1, \\ c_{21} = \sqrt{\frac{r}{r_g}} \frac{1}{1 - r_g/r}; \quad (51)$$

— преобразование Крускала, для которого

$$c_{11,21} = \frac{rf_{\pm}}{4r_g^2 \sqrt{(r/r_g) - 1}}, \quad c_{12,22} = \frac{cf_{\pm}}{4r_g} \sqrt{\frac{r}{r_g} - 1}, \\ f_{\pm} = \exp\left(\frac{(r - ct)}{2r_g}\right) \pm \exp\left(\frac{(r + ct)}{r_g}\right). \quad (52)$$

В координатах u, v коэффициенты метрической формы не являются сингулярными, однако, как следует из равенств (51) и (52), сингулярность не устраняется, а переводится в преобразование, так как коэффициенты c_{ij} оказываются сингулярными при $r = r_g$. Преобразование дифференциалов, коэффициенты которого являются сингулярными, трудно признать математически корректным [25].

Воспользовавшись снова аналогией с теорией упругости, определим деформации пространства как разности между метрическими коэффициентами плоского и искривлённого пространства [9]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{r_g}{r - r_g}, \quad \varepsilon_{22} = 0.$$

Отсюда следует, что кольцевая деформация при $r = r_g$ отсутствует, а радиальная деформация имеет разрыв. Объяснить такую деформацию однородного пустого пространства достаточно сложно.

В ОТО имеется так называемая теорема Бирхгофа [17], согласно которой внешнее сферически симметричное гравитационное поле является статическим. Из этой теоремы, в частности, следует, что пульсация сферического тела постоянной массы не изменяет геометрии окружающего его пространства. Для иллюстрации этой теоремы предположим, что метрические коэффициенты зависят не только от радиальной координаты, но и от времени. Тогда уравнения (44) и (46), из которых получено решение (49), записываются следующим

образом:

$$(E_1^1)_D = E_1^1 + \frac{1}{g_{44}} \left[\frac{\ddot{g}_{22}}{g_{22}} - \left(\frac{\dot{g}_{22}}{2g_{22}} \right)^2 - \frac{\dot{g}_{22}\dot{g}_{44}}{2g_{22}g_{44}} \right],$$

$$(E_4^4)_D = E_4^4 + \frac{1}{4g_{44}} \left[\left(\frac{\dot{g}_{22}}{g_{22}} \right)^2 + \frac{2\dot{g}_{11}\dot{g}_{22}}{g_{11}g_{22}} \right].$$

Здесь E_i^j определяются равенствами (44) и (46), соответствующими статической задаче, и $\dot{g} = \partial g / c \partial t$. При $g_{22} = r^2$ производные по времени исчезают и задача сводится к статической. Таким образом, теорема Бирхгофа является следствием координатного условия Шварцшильда. Для задач динамики это условие выглядит ещё менее обоснованным, чем для задач статики, так как неизвестная функция двух переменных $g_{22}(r, t)$ приравнивается к одному из своих аргументов. Координатное условие Шварцшильда не используется и в задачах космологии [2, 26, 27].

Условие Шварцшильда является не единственным, привлекаемым для решения статической сферически симметричной задачи. В работах [7, 8] используется условие гармоничности (7), которое принимает вид

$$\frac{d}{dr} \left(g_{22} \sqrt{\frac{g_{44}}{g_{11}}} \right) = 2r \sqrt{g_{11}g_{44}}.$$

В результате получаются следующие компоненты метрического тензора:

$$g_{11}^e = \frac{r + r_g/2}{r - r_g/2}, \quad g_{22}^e = \left(r + \frac{r_g}{2} \right)^2, \quad g_{44}^e = \frac{r - r_g/2}{r + r_g/2}. \tag{53}$$

Для такой метрики равенство (37) даёт

$$\frac{dr}{dt} = c \frac{R - r_g/2}{R + r_g/2} \cos \alpha.$$

Отсюда следует, что свет не распространяется с поверхности сферы при радиусе $R = r_g/2$. При таком радиусе коэффициент g_{11}^e (53) оказывается сингулярным, а $g_{44}^e = 0$.

Соответствие решения (53) решению Шварцшильда (49) обсуждается в работе [28]. Имеются и другие формы координатного условия [29, 30]. В работах [18, 19] в качестве координатного условия предлагается использовать условие стационарности плотности метрического тензора. Такая модель позволяет объяснить гравитационное притяжение. Оптимальным в рамках этой модели является пространство с одной гравитирующей массой сферической формы. Если имеется несколько таких масс, то они, взаимно притягиваясь, стремятся соединиться.

6.2. Решение внутренней задачи для идеальной несжимаемой жидкости

Более реалистичной является ситуация, при которой в центре находится сферическое тело с радиусом R , создающее гравитацию. В этом случае решение (49) справедливо при $r \geq R$ и сингулярность решения (49) при $r = 0$ не появляется. В решении (49) для наружного пространства минимальным радиусом является $r = R$. Таким образом, сингулярность Шварцшильда имеет место на поверхности материальной сферы. Эта поверхность, естественно, не является горизонтом событий, так как проникновение через неё невозможно.

Основная система уравнений (44)–(47) для внутренней задачи при $g_{22} = r^2$ принимает вид

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{g_{11}} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{g'_{44}}{rg_{44}} \right] = \chi \sigma_r, \tag{54}$$

$$-\frac{1}{2g_{11}} \left[\frac{g''_{44}}{g_{44}} - \frac{1}{2} \left(\frac{g'_{44}}{g_{44}} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{g'_{44}}{g_{44}} - \frac{g'_{11}}{g_{11}} \right) - \frac{g'_{11}g'_{44}}{2g_{11}g_{44}} \right] = \chi \sigma_\theta, \tag{55}$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{g_{11}} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{g'_{11}}{rg_{11}} \right] = \chi \rho c^2, \tag{56}$$

$$\sigma'_r + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{g'_{44}}{2g_{44}} (\sigma_r - \rho c^2) = 0. \tag{57}$$

При наличии уравнения (57) только два из уравнений (54)–(56) являются линейно независимыми. Таким образом, при известной плотности имеем три уравнения, которые включают четыре неизвестных функции — $g_{11}, g_{44}, \sigma_r, \sigma_\theta$, т.е. система является неполной. Полученная система допускает решение для сферы, состоящей из идеальной жидкости, для которой $\sigma_r = \sigma_\theta = -p$, где p — давление в жидкости. С точки зрения теории упругости такая задача является статически определимой, т.е. для её решения используется только уравнение равновесия. Уравнение (57) упрощается при этом следующим образом:

$$p' + \frac{g'_{44}}{2g_{44}} (\rho c^2 + p) = 0. \tag{58}$$

Решение внутренней задачи получено Шварцшильдом для несжимаемой жидкости, плотность которой ($\rho = \rho_0$) не зависит от давления. В качестве основных использовались уравнения (54), (56) и (58). Решение уравнения (56) имеет вид

$$g_{11}^i = \frac{1}{1 - (\chi \rho_0 c^2 / 3) r^2 + C_3 / r}, \tag{59}$$

где индекс "i" соответствует внутреннему пространству, а C_3 — постоянная интегрирования. Следует принять $C_3 = 0$, в противном случае коэффициент g_{11}^i оказывается сингулярным в центре сферы любого радиуса. Таким образом,

$$g_{11}^i = \frac{1}{1 - (\chi \rho_0 c^2 / 3) r^2}. \tag{60}$$

Выражение (60) уже не содержит постоянной интегрирования. Такой результат связан с координатным условием $g_{22} = r^2$. Подстановка данного условия в уравнение (46), которое имеет второй порядок, приводит его к уравнению (56), имеющему первый порядок. Решение этого уравнения (59) содержит только одну постоянную, которая определяется из условия регулярности в центре шара. При этом постоянная, которая позволила бы удовлетворить граничное условие на поверхности сферы,

$$g_{11}^i(r = R) = g_{11}^e(r = R) = \frac{1}{1 - R/r_g}, \tag{61}$$

в решении отсутствует. Подставляя в это условие равенство (60) и используя соотношения (5) и (17) для χ и r_g , получаем следующее выражение для массы сферы:

$$m = \frac{4}{3} \pi \rho_0 R^3. \quad (62)$$

Выражение (62) соответствует евклидову пространству. Однако, согласно равенству (60), пространство внутри сферы является псевдоримановым, и её масса имеет вид

$$m = 4\pi\rho_0 \int_0^R \sqrt{g_{11}^i} r^2 dr \approx \frac{4}{3} \pi \rho_0 R^3 \left[1 + \frac{3r_g}{10R} + \frac{9}{56} \left(\frac{r_g}{R} \right)^2 + \dots \right]. \quad (63)$$

Этот результат совпадает с равенством (62) при $r_g = 0$, т.е. при отсутствии гравитации. Поскольку масса определяется равенством (63), можно заключить, что граничное условие (61) в решении Шварцшильда не удовлетворяется. Тем не менее продолжим анализ. Используя равенства (5), (17) и (62), находим:

$$\frac{1}{3} \chi \rho_0 c^2 = \frac{r_g}{R^3}. \quad (64)$$

Тогда выражение (60) принимает вид

$$g_{11}^i = \frac{1}{1 - r_g r^2 / R^3}. \quad (65)$$

Полагая в формуле (17) $\sigma_r = -p$ и подставляя g_{11}^i из равенства (65), находим:

$$\frac{1}{g_{44}^i} \frac{dg_{44}^i}{d\bar{r}} = \bar{r}_g \bar{r} \frac{3\bar{p} + 1}{1 - \bar{r}_g \bar{r}^2}, \quad (66)$$

где

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{r}_g = \frac{r_g}{R}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho_0 c^2}. \quad (67)$$

Подставляя выражение (66) в уравнение (58), получаем

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{r}} + \frac{1}{2} \bar{r}_g \bar{r} \frac{3\bar{p} + 1}{1 - \bar{r}_g \bar{r}^2} (\bar{p} + 1) = 0. \quad (68)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию $\bar{p}(\bar{r} = 1) = 0$, имеет вид

$$\bar{p} = \frac{\sqrt{1 - \bar{r}_g \bar{r}^2} - \sqrt{1 - \bar{r}_g}}{3\sqrt{1 - \bar{r}_g} - \sqrt{1 - \bar{r}_g \bar{r}^2}}. \quad (69)$$

Подставляя этот результат в равенство (66) и интегрируя с учётом граничного условия $g_{44}^i(\bar{r} = 1) = g_{44}^s(\bar{r} = 1)$, находим:

$$g_{44}^i = \frac{1}{4} \left(3\sqrt{1 - \bar{r}_g} - \sqrt{1 - \bar{r}_g \bar{r}^2} \right)^2. \quad (70)$$

Принимая в равенстве (69) $r = 0$, получаем давление в центре сферы

$$\bar{p}_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - \bar{r}_g}}{3\sqrt{1 - \bar{r}_g} - 1}. \quad (71)$$

Зависимость $\bar{p}_0(\bar{r}_g)$, построенная по формуле (71), показана на рис. 2 сплошной линией. Пунктирная линия соответствует классическому решению (29). Знаменатель

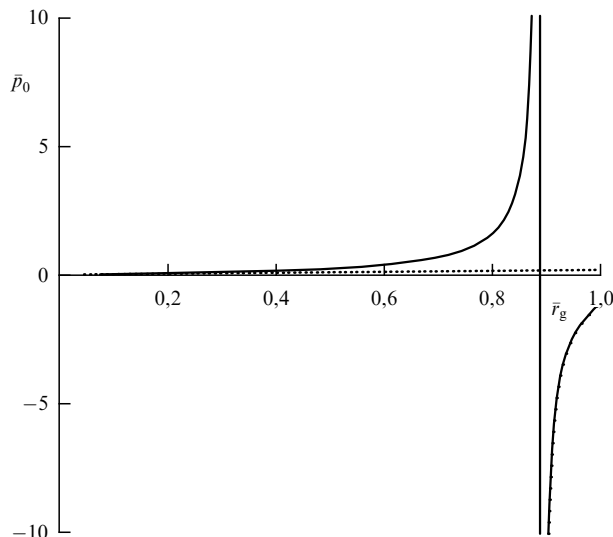


Рис. 2. Зависимость давления от гравитационного радиуса. Сплошная линия — решение Шварцшильда, пунктирная линия — классическое решение.

выражения (71) обращается в нуль при $\bar{r}_g = \bar{r}_s = 8/9$. Таким образом, давление в центре сферы обращается в бесконечность при $R = R_s = 9/8 r_g = 1,125 r_g$. Подобный результат традиционно используется для физического обоснования существования чёрных дыр [31]. Однако тогда возникают два вопроса. Во-первых, почему давление становится сингулярным при радиусе $R = R_s$. Этот радиус больше $R = r_g$, при котором образуется сингулярность на поверхности сферы. Во-вторых, равенство (71) определяет давление и при $r > r_s$, однако давление в данной области оказывается отрицательным (см. рис. 2), что не имеет физического смысла. Таким образом, можно заключить, что внутреннее решение Шварцшильда для идеальной несжимаемой жидкости справедливо при $R > R_s = 1,125 r_g$. При этом сингулярность Шварцшильда, имеющая место при $R = r_g$, не появляется.

6.3. Решение внутренней задачи для идеальной сжимаемой жидкости

Модель несжимаемой жидкости не вполне соответствует ОТО, так как скорость звука в такой жидкости является бесконечно большой, а в ОТО скорость звука ограничена скоростью света [32]. Для решения задачи используются уравнения (54)–(57), в которых $\sigma_r = \sigma_\theta = -p$ и $\rho = \rho(r)$. Как уже отмечалось, из указанных четырёх уравнений взаимно независимыми являются только три. При этом возможны два подхода. В работах, посвящённых сферически симметричной задаче ОТО, для решения привлекаются три уравнения Эйнштейна (54)–(56) для метрического тензора, а уравнение закона сохранения (57) удовлетворяется автоматически. Для задачи механики характерен другой подход: основным является уравнение (57), а уравнения (54) и (56) используются для определения коэффициентов, входящих в это уравнение. При этом автоматически удовлетворяется уравнение (55). В такой интерпретации теория получила название релятивистской механики [33]. Заметим, что система (54), (56), (57) имеет меньший порядок, чем система (54)–(56). В работах, где используется система (54)–(56), предлагается получать первый интеграл этих уравнений [34, 35]. При

использовании системы (54), (56), (57) эта операция является излишней, так как эти уравнения уже имеют меньший порядок. Заметим, что решение Шварцшильда получено на основании именно этих уравнений. Независимо от того, какие уравнения используются, система является неполной и замыкается физическим соотношением, связывающим плотность с давлением.

Заметим, что подход, основанный на использовании уравнений Эйнштейна без привлечения уравнений закона сохранения (2), обладает применительно к континууму некоторыми методическими особенностями. В правые части уравнений Эйнштейна входят компоненты тензора энергии – импульса, которые, как правило, задаются. Существенно, чтобы задаваемые компоненты не противоречили уравнениям (2). Примером может служить известная работа Ю. Оппенгеймера и Х. Снайдера [36]. В уравнениях Эйнштейна принимается, что все компоненты тензора энергии – импульса, за исключением $T_{44}^4 = \rho c^2$, равны нулю. Однако уравнения (2) являются однородными и из них при этом следует, что $T_{44}^4 = 0$ и уравнения Эйнштейна в метрике Шварцшильда соответствуют пустому пространству.

Обратное решение задачи ОТО для сжимаемой жидкости получено Р. Толменом [37]. В уравнениях (54)–(56) задавались функции $g_{11}(r)$ или $g_{44}(r)$ и находились функции $p(r)$ и $\rho(r)$. Найдено семь возможных решений, имеющих относительную ценность, поскольку явных зависимостей $\rho(p)$ не получено. При задании функции $\rho(p)$ получить аналитическое решение не представляется возможным. Первое численное решение построено Ю. Оппенгеймером и Г. Волковым [38] для степенной зависимости $\rho(p)$.

Численное интегрирование уравнений (54)–(56) проводилось от центра сферы, где задавались искомые функции, до радиуса, при котором давление обращалось в нуль. Этот радиус считался наружным радиусом сферы, который изначально не задавался.

При наличии вычислительной техники решение этой задачи для сферы с заданным радиусом не вызывает затруднений [39]. Предположим, что плотность является линейной функцией давления, т.е.

$$\rho = \rho_0(1 + kp). \tag{72}$$

Для получения решения используем уравнения (54), (55) и (57) или (58). Учтём, что $\sigma_r = \sigma_\theta = -p$ и введём следующие обозначения:

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho_0 c^2}, \quad \bar{k} = \frac{k}{\rho_0 c^2}, \quad (\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{d\bar{r}}.$$

Здесь R — радиус наружной поверхности сферы, который для случая сжимаемой жидкости зависит от давления и заранее неизвестен, а ρ_0 — плотность жидкости при $p = 0$. Для рассматриваемой задачи можно ввести два относительных гравитационных радиуса: истинный,

$$\bar{r}_g = \frac{2\gamma m}{c^2 R}, \quad m = 4\pi\rho_0 \int_0^R (1 + kp) r^2 dr = 4\pi R^3 \rho_0 \int_0^1 (1 + \bar{k}\bar{p}) \bar{r}^2 d\bar{r},$$

и условный,

$$\bar{r}_g^0 = \frac{2\gamma m}{c^2 R}, \quad m = \frac{4}{3} \pi \rho_0 R^3.$$

При сжатии жидкости масса сферы не изменяется, поэтому \bar{r}_g и \bar{r}_g^0 связаны следующим соотношением:

$$\bar{r}_g = 3\bar{r}_g^0 \int_0^1 (1 + \bar{k}\bar{p}) \bar{r}^2 d\bar{r}. \tag{73}$$

Для сферы с постоянной плотностью справедливо равенство (64)

$$\frac{1}{3} \chi \rho_0 c^2 = \frac{\bar{r}_g^0}{R^2},$$

с помощью которого из уравнений можно исключить коэффициент χ . В результате уравнения (54), (55) и (58) принимают вид

$$\frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{1}{g_{11}} \left(\frac{1}{\bar{r}^2} + \frac{g'_{44}}{r g_{44}} \right) = -3\bar{r}_g^0 \bar{p}, \quad \frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r} - \frac{\bar{r}}{g_{11}} \right) = 3\bar{r}_g^0 \bar{r}^2 (1 + \bar{k}\bar{p}),$$

$$\bar{p}' + \frac{g'_{44}}{2g_{44}} [1 + (1 + \bar{k})\bar{p}] = 0. \tag{74}$$

Эти уравнения имеют третий порядок и интегрируются численно при граничных условиях

$$g_{11}(\bar{r} = 0) = 1, \quad \bar{p}(\bar{r} = 1) = 0, \quad g_{44}(\bar{r} = 1) = 1 - \bar{r}_g. \tag{75}$$

Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что уравнения (74) включают параметр \bar{r}_g^0 , а последнее граничное условие (75) содержит параметр \bar{r}_g . Эти параметры связаны соотношением (73), в которое входит неизвестное давление $p(\bar{r})$. В связи с этим краевая задача (74), (75) решается методом итераций. На первом этапе задаётся \bar{r}_g^0 и принимается, что $\bar{r}_g = \bar{r}_g^0$. Определяется функция $\bar{p}(\bar{r})$ и по формуле (73) находится значение \bar{r}_g , которое используется в качестве \bar{r}_g^0 для второго приближения. Процесс продолжается, пока третье граничное условие не будет удовлетворено с заданной степенью точности.

В качестве тестовой рассматривается задача для сферы, состоящей из несжимаемой жидкости, для которой $\bar{k} = 0$ и $\bar{r}_g = \bar{r}_g^0$. На рисунке 3 представлены рас-

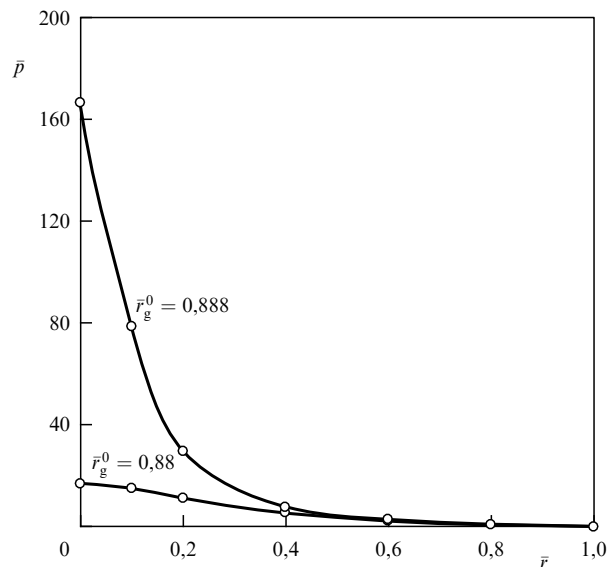


Рис. 3. Зависимости давления от радиальной координаты. \circ — численное решение, сплошная линия — аналитическое решение.

Таблица. Гравитационные радиусы, соответствующие различным значениям параметра \bar{k}

| \bar{k} | 0,0001 | 0,001 | 0,01 | 0,1 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| \bar{r}_g^0 | 0,8840 | 0,8820 | 0,8850 | 0,7710 | 0,6110 | 0,5120 | 0,4470 | 0,3990 |
| \bar{r}_g | 0,8842 | 0,8836 | 0,8803 | 0,8276 | 0,7197 | 0,6492 | 0,5877 | 0,5359 |

предела давления при $\bar{r}_g^0 = 0,88$ и $\bar{r}_g^0 = 0,888$. Точки соответствуют численному решению, а линии — аналитическому решению (69). При $\bar{r}_g^0 = 8/9 = 0,888(8)$ аналитически найденное давление в центре сферы обращается в бесконечность, а численное решение расходится. Как следует из рис. 3, численное решение хорошо совпадает с аналитическим, а его расходимость свидетельствует о сингулярности давления в центре сферы. В таблице приведены задаваемые значения параметра \bar{r}_g^0 и соответствующие им значения \bar{r}_g , при которых численное решение начинает расходиться, для различных значений параметра \bar{k} .

Можно заключить, что при увеличении степени сжимаемости жидкости предельная величина \bar{r}_g , при которой давление в центре сферы обращается в бесконечность, снижается. Зависимости относительного давления от радиальной координаты для различных значений параметра \bar{k} (они соответствуют значениям радиусов, приведённым в таблице) представлены на рис. 4.

Заметим, что масса сферы в равенстве (73) соответствует евклидову пространству. При массе (63), соответствующей псевдориманову внутреннему пространству, последнее граничное условие (75) не удовлетворяется.

Более сложной моделью материала сферы является линейно упругая среда. Однако метрика Шварцшильда не позволяет решить такую задачу, так как два напряжения связаны одним уравнением равновесия (57). В теории упругости к этому уравнению добавляется уравнение совместности деформаций (25), которое не существует в римановом пространстве. Создаётся парадоксальная ситуация — теория Ньютона позволяет определить напряжения, вызываемые гравитацией (см. раздел 3), а в более общей теории относительности такой возможности нет. Эта задача рассматривается в следующем разделе.

7. Решение в псевдоримановом пространстве специального типа

Обратимся к равенствам (14), определяющим структуру тензора энергии – импульса, и уравнениям (3), (4), связывающим этот тензор с кривизной псевдориманова пространства. Из этих уравнений следует, что кривизна пространства порождается не только гравитацией, но и напряжениями. Проведём следующий виртуальный эксперимент. Предположим, что твёрдое тело находится в состоянии свободного падения, на него не действуют никакие силы и пространство является евклидовым как внутри, так и снаружи тела. Приложим к телу систему самоуравновешенных сил, порождающих внутри тела напряжённое состояние и не приводящих его в движение. Тогда, согласно ОТО, внутри тела возникает риманово пространство. Однако трёхмерное риманово пространство содержится в евклидовом пространстве шести измерений [22]. Ситуация оказывается существенно более простой и естественной, если предположить, что существует некоторое псевдориманово пространство, которое является плоским по отношению к пространственным координатам и искривлённым только по отношению к временной координате. Таковым является пространство в гравитационной теории Ньютона (см. раздел 3). В таком пространстве процессы, не связанные с гравитацией, описываются классической механикой сплошной среды, а уравнения ОТО привлекаются только для исследования гравитации. Естественно, что речь идёт не о реальном пространстве, а о его математической модели — структуре реального пространства неизвестна. Если использовать описанную модель пространства, то десять уравнений ОТО для метрического тензора, шесть из которых являются, как уже отмечалось, взаимно независимыми, включают четыре неизвестные компоненты метрического тензора ($g_{14}, g_{24}, g_{34}, g_{44}$) и система оказывается переопре-

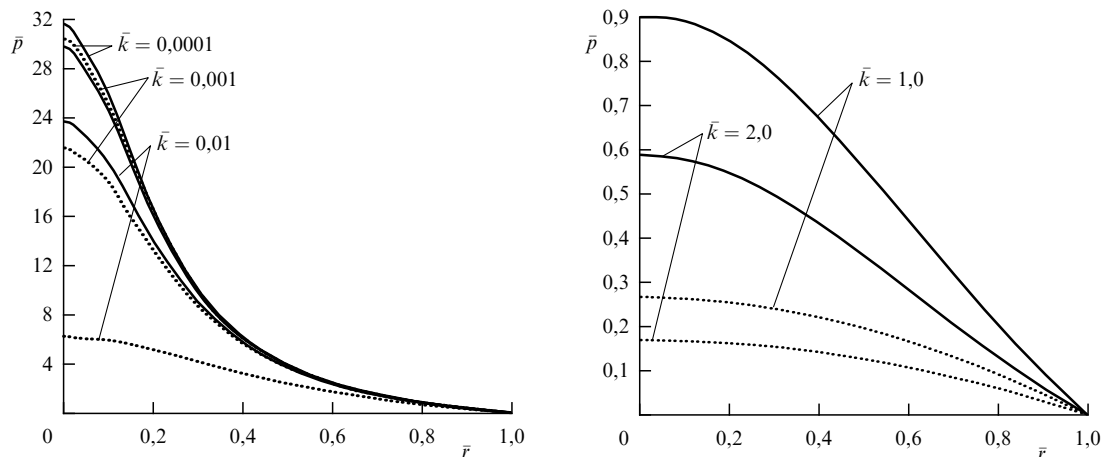


Рис. 4. Зависимости давления от радиальной координаты. Сплошная линия — сжимаемая жидкость, пунктирная линия — несжимаемая жидкость.

делённой. Заметим, что в теории дифференциальных уравнений в частных производных ситуация, при которой количество уравнений превышает число входящих в них неизвестных функций, является менее критичной, чем ситуация, при которой число неизвестных превышает число уравнений. Часть лишних уравнений может быть использована для определения произвольных функций интегрирования, входящих в решения других уравнений, а часть может удовлетворяться тождественно. Такая ситуация имеет место в теории упругости: система уравнений для решения задачи в напряжениях содержит девять уравнений (три уравнения равновесия и шесть уравнений совместности деформаций), которые включают шесть неизвестных компонент тензора напряжений. Несмотря на то что в общем случае система является переопределённой, при решении конкретных задач число уравнений всегда совпадает с числом неизвестных. Как показано далее, такая ситуация имеет место в сферически симметричной задаче ОТО, для которой система уравнений ОТО оказывается полной.

7.1. Уравнения общей теории относительности в псевдоримановом пространстве специального типа

В сферических координатах общая метрическая форма для сферически симметричной задачи имеет вид

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 + 2g_{14}c dr dt + 2g_{24}c d\theta dt - g_{44}c^2 dt^2. \quad (76)$$

Уравнения ОТО для такой формы достаточно громоздки и здесь не приводятся. Коэффициенты этих уравнений включают θ и не соответствуют сферически симметричной задаче. Таким образом, возможны два варианта — $g_{14} = 0$, $g_{24} \neq 0$ и $g_{14} \neq 0$, $g_{24} = 0$. Для первого случая решением является коэффициент $g_{24} = Cr^2$, который не удовлетворяет асимптотическому условию $g_{24}(r \rightarrow \infty) = 0$ [40]. Таким образом, следует принять $g_{24} = 0$, и метрическая форма (76) принимает следующий вид:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 + 2g_{14}c dr dt - g_{44}c^2 dt^2. \quad (77)$$

Предположим, что в общем случае метрические коэффициенты зависят от r и t . Тогда уравнения ОТО принимают вид

$$E_1^1 = \frac{1}{r^2 g^2} [g(r g'_{44} - g_{14}^2) + 2r g_{44} \dot{g}_{14} - r g_{14} \dot{g}_{44}] = \chi T_1^1, \quad (78)$$

$$E_2^2 = \frac{1}{4r g^2} (4g_{14} g_{44} g'_{14} - 4g_{14}^2 g'_{44} - 2g_{44} g'_{44} - 2r g_{44} g''_{44} + r g_{44}^2 - 2r g_{14}^2 g''_{44} + 2r g_{14} g'_{14} g'_{44} - 4g_{44} \dot{g}_{14} + 2g_{14} \dot{g}_{44} + 4r g_{14} g'_{14} \dot{g}_{14} + 2r g_{14} \dot{g}_{44} - 4r g \dot{g}'_{14}) = \chi T_2^2, \quad (79)$$

$$E_4^4 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r g_{14}^2}{g} \right) = \chi T_4^4, \quad (80)$$

$$E_1^4 = -\frac{g_{14}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{g} \right) = \chi T_1^4, \quad (81)$$

$$E_4^1 = -\frac{g_{14}}{r g^2} (2g_{44} \dot{g}_{14} - g_{14} \dot{g}_{44}) = \chi T_4^1, \quad g = g_{44} + g_{14}^2. \quad (82)$$

Как и ранее, здесь $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial r$ и $(\cdot)\dot{} = \partial(\cdot)/\partial t$. Тензор энергии – импульса удовлетворяет уравнениям закона сохранения (2), т.е.

$$(T_1^1)' + \frac{2}{r} (T_1^1 - T_2^2) + \frac{g'_{44}}{2g} (T_1^1 - T_4^4) + \frac{g_{14} g'_{44}}{2g} T_1^4 + \frac{g'_{14}}{g} T_4^1 + \dot{T}_1^4 + \frac{\dot{g}}{2g} T_1^4 = 0, \quad (83)$$

$$r g'_{44} [g_{14} (T_1^1 - T_4^4) - g_{44} T_1^4] + 2g [r \dot{T}_4^4 + r (T_4^1)' + 2T_4^1] + 2r g_{14} g'_{14} T_4^1 - 2r g_{44} \dot{g}_{14} T_1^4 + r g_{14} \dot{g}_{44} T_1^4 = 0. \quad (84)$$

Уравнения ОТО не являются в строгом смысле статическими даже для статических задач, поскольку в них фигурирует скорость света, направленная по оси времени. Если радиальная и временная оси ортогональны, эта скорость не имеет проекций на радиальную ось и для задачи статики в равенствах (14) $v_1 = v^1 = 0$. Однако при метрической форме (77) оси не ортогональны и нулю равна только контравариантная (параллельная) проекция v^1 , а ковариантная (ортогональная) проекция v_1 отлична от нуля. Таким образом, равенства (14) для тензора энергии – импульса имеют вид

$$T_1^1 = \sigma_r, \quad T_2^2 = \sigma_\theta, \quad T_4^4 = \rho c^2, \quad T_4^1 = 0, \quad T_1^4 = -\rho c v_1. \quad (85)$$

7.2. Решение внешней задачи

Рассмотрим наружное пустое пространство, окружающее сферу с радиусом R . Для вакуума $T_i^j = 0$, уравнения (78)–(82) оказываются однородными, а уравнения (83), (84) удовлетворяются тождественно. Найдём решение уравнений (78)–(82), которые для пустого пространства принимают вид

$$r g'_{44} - g_{14}^2 = 0, \quad (86)$$

$$4g_{14} (g_{44} g'_{14} - g_{14} g'_{44}) - 2g_{44} (r g'_{44})' + r g_{44}^2 - 2r g_{14} (g_{44}'' - g'_{14} g'_{44}) = 0, \quad (87)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r g_{14}^2}{g} \right) = 0, \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{g} \right) = 0. \quad (88)$$

В силу существования двух уравнений (83) и (84), в которых $T_i^j = E_i^j/\chi$, из четырёх уравнений (86)–(88) только два являются взаимно независимыми. Соответственно имеются две неизвестные функции $g_{14}(r)$ и $g_{44}(r)$, т.е. система уравнений ОТО является полной. В результате интегрирования уравнений (88) получаем

$$g_{14}^2 = \frac{C_1 g}{r}, \quad g = C_2, \quad g_{44} = C_2 - \frac{C_1 C_2}{r}.$$

Это решение должно сводиться при $r \rightarrow \infty$ к соотношениям (31), соответствующим теории Ньютона. Окончательно находим

$$g_{14}^c = \pm \sqrt{\frac{r g}{r}}, \quad g_{44}^c = 1 - \frac{r g}{r}. \quad (89)$$

Решение (89) определяет два симметричных внешних пространства, соответствующих положительному и отрицательному значениям g_{14}^e . Оно получено из уравнений (88). Подставляя решение (89) в уравнения (86) и (87), можно убедиться в том, что они удовлетворяются тождественно. Таким образом, равенства (89) являются решением уравнений Эйнштейна для внешней сферически симметричной задачи. Заметим, что это решение, в отличие от решения Шварцшильда (49), не является сингулярным. В работах [40–42] доказывается, что свет не распространяется с поверхности сферы с радиусом $R = r_g$ и что угол отклонения траектории света от прямолинейной в окрестности Солнца в пространстве с метрическими коэффициентами в форме (89) равен $2\bar{r}_g$ и соответствует экспериментальному значению.

Следует заметить, что метрическая форма (89) известна в ОТО с 1920-х гг. как координатная форма Гулстанда–Пенлеве [43, 44]. Она была получена в результате замены координат в метрической форме Шварцшильда и исследовалась в работах [45, 46]. В настоящей работе эта метрика не связана с метрикой Шварцшильда и следует из используемой модели псевдориманова пространства.

Осуществляя тождественное преобразование метрической формы (77), получаем [40]

$$ds^2 = \left(1 + \frac{g_{14}^2}{g_{44}}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 - g_{44} \left(c - \frac{g_{14}}{g_{44}} \frac{dr}{dt}\right)^2 dt^2.$$

Для задачи статики $dr/dt = 0$ и

$$ds^2 = g_{11}^s dr^2 + r^2 d\Omega^2 - g_{44} c^2 dt^2. \quad (90)$$

Эта метрическая форма совпадает с формой, используемой в решении Шварцшильда, если принять

$$g_{11}^e = 1 + \frac{g_{14}^2}{g_{44}}. \quad (91)$$

Заметим, что формально пространство оказывается римановым по отношению к радиальной координате, однако соответствующий метрический коэффициент образован из временных коэффициентов исходной метрической формы.

7.3. Решение внутренней задачи для идеальной несжимаемой жидкости

Для сплошной среды уравнения ОТО, соответствующие статической задаче, принимают вид

$$\frac{1}{r^2 g} (g_{14}^2 - r g_{44}') = \chi \sigma_r, \quad (92)$$

$$\frac{1}{4r g^2} [4g_{14}(g_{44} g_{14}' - g_{14} g_{44}') - 2g_{44}(r g_{44}')' + r(g_{44}')^2 - 2r g_{14}(g_{44}'' - g_{14}' g_{44}')] = \chi \sigma_\theta, \quad (93)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r g_{14}^2}{g} \right) = \chi \rho c^2, \quad (94)$$

$$\frac{g_{14}}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{g} \right) = -\chi \rho c v_1, \quad g = g_{44} + g_{14}^2. \quad (95)$$

Соответственно уравнения (83) и (84) принимают следующую форму:

$$\sigma_r' + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{g_{44}'}{2g} (\sigma_r - \rho c^2) + \frac{g_{14} g_{44}'}{2g} T_1^4 = 0, \quad (96)$$

$$r g_{44}' [g_{14} (\sigma_r - \rho c^2) + g_{44} \rho c v_1] = 0. \quad (97)$$

Для идеальной несжимаемой жидкости $\sigma_r = \sigma_\theta = -p$ и $\rho = \rho_0$. Система (92)–(97) содержит четыре взаимно независимых уравнения и включает четыре неизвестные функции: g_{14} , g_{44} , p и v_1 , т.е. система уравнений ОТО является полной. Из уравнения (97) имеем

$$v_1 = \frac{g_{14}}{\rho_0 c g_{44}} (p + \rho_0 c^2). \quad (98)$$

Подставляя этот результат в уравнение (96), получаем

$$p' + \frac{g_{44}'}{2g_{44}} (p + \rho_0 c^2) = 0. \quad (99)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (58), используемым в решении Шварцшильда. Из уравнения (94) с учётом условия регулярности решения в центре сферы имеем

$$g_{14}^2 = \frac{g}{3} \chi \rho_0 c^2 r^2.$$

Поскольку пространство внутри сферы евклидово, справедливо равенство (64), с помощью которого можно исключить χ . Тогда

$$g_{14}^2 = \frac{g}{R^3} r_g r^2. \quad (100)$$

В соответствии с равенством (91) введём новую функцию

$$f = g_{11}^e = 1 + \frac{g_{14}^2}{g_{44}} = \frac{g}{g_{44}}. \quad (101)$$

Подставляя этот результат в соотношение (100), получаем

$$f = g_{11}^s = \frac{1}{1 - r_g r^2 / R^3}. \quad (102)$$

Это выражение совпадает с решением Шварцшильда (65). Преобразуя уравнение (92) с помощью равенств (64), (101) и (102), находим

$$\frac{g_{44}'}{g_{44}} = \frac{r_g r}{R^3 - r_g r^2} \left(\frac{3p}{\rho_0 c^2} + 1 \right). \quad (103)$$

Этот результат совпадает с равенством (66), используемым в решении Шварцшильда. Поскольку уравнения (99) и (102) совпадают с уравнениями (58) и (66) из раздела 6.2, функции $p(r)$ и $g_{44}(r)$ оказываются такими же, как и в решении Шварцшильда, и определяются соотношениями (69) и (70). Соответственно оказывается справедливым и анализ, представленный в разделе 6.2 применительно к решению Шварцшильда. Однако имеются и некоторые различия. Во-первых, имеющее место в решении Шварцшильда противоречие между равенствами (62) и (63), определяющими массу сферы в евклидовом и римановом пространствах, в полученном решении не про-

является. Внутреннее пространство сферы в координатах r, φ, θ является евклидовым и равенство (70) не существует. Во-вторых, соотношение (100) позволяет найти метрический коэффициент g_{14} , т.е.

$$g_{14} = \pm \frac{1}{2} \left(3\sqrt{1-\bar{r}_g} - \sqrt{1-\bar{r}_g\bar{r}^2} \right) \frac{\bar{r}\sqrt{\bar{r}_g}}{\sqrt{1-\bar{r}_g\bar{r}^2}}.$$

При $\bar{r} = 1$ имеем $g_{14} = \pm\sqrt{\bar{r}_g}$ и граничное условие на поверхности сферы выполняется. И, наконец, равенство (98) позволяет найти скорость

$$v_1 = \pm \frac{4c\bar{r}\sqrt{\bar{r}_g(1-\bar{r}_g)}}{\sqrt{1-\bar{r}_g\bar{r}^2} (3\sqrt{1-\bar{r}_g} - \sqrt{1-\bar{r}_g\bar{r}^2})^2}. \quad (104)$$

Как следует из уравнения (97), эта скорость существует, если $g'_{44} \neq 0$. Таким образом, если традиционная скорость связана с зависимостью радиальной координаты от времени, то скорость v_1 связана с зависимостью временного метрического коэффициента от радиальной координаты. Эта скорость исследуется в работе [45]. Из соотношения (104) можно заключить, что любая точка пространства обладает равными по величине и противоположно направленными скоростями. Это позволяет предположить, что скорость v_1 не связана с каким-либо реальным движением.

7.4. Решение внутренней задачи для идеальной сжимаемой жидкости

Предположим, что плотность связана с давлением линейной зависимостью (72). В обозначениях раздела 6.4 разрешающая система уравнений, аналогичная уравнениям (74) для метрики Шварцшильда, может быть представлена в виде [42]

$$\bar{r}g'_{44} - g_{14}^2 = 3\bar{r}_g^0 g\bar{p}\bar{r}^2, \quad \frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{\bar{r}g_{14}^2}{g} \right) = 3\bar{r}_g^0 \bar{r}^2 (1 + k\bar{p}),$$

$$\bar{p}' + \frac{g'_{44}}{2g_{44}} [1 + (1+k)\bar{p}] = 0.$$

Эта система интегрируется численно при граничных условиях

$$g_{14}(1) = \sqrt{\bar{r}_g}, \quad \bar{p}(1) = 0, \quad g_{44}(1) = 1 - \bar{r}_g.$$

Процедура решения описана в разделе 6.4. Результаты расчёта полностью совпадают с результатами, приведёнными в разделе 6.4, что представляется естественным в связи с наличием равенств (90) и (91).

7.5. Решение для линейно упругой среды

Для сферического тела радиуса R , состоящего из линейно упругого изотропного материала, справедливо равенство (102), а соотношение (103) принимает вид

$$\frac{g'_{44}}{g_{44}} = \frac{1}{r} (f-1) - \chi f r \sigma_r. \quad (105)$$

Определим напряжения. Подставляя v_1 из уравнения (97) в уравнение (96), получаем уравнение равновесия

$$\sigma_r' + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{g'_{44}}{2g_{44}} (\sigma_r - \rho c^2) = 0.$$

Подставляя сюда равенство (102) и переходя к безразмерным параметрам (67), имеем

$$\bar{\sigma}_r' + \frac{2}{r} (\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta) - \frac{\bar{r}_g\bar{r}}{2(1-\bar{r}_g\bar{r}^2)} (1-3\bar{\sigma}_r)(1-\bar{\sigma}_r) = 0, \quad (106)$$

где $\bar{\sigma}_{r,\theta} = \sigma_{r,\theta}/\rho_0 c^2$. В традиционном для ОТО псевдоримановом пространстве второго уравнения для напряжений нет и задача не имеет решения. Однако, согласно используемой модели, псевдориманово пространство является плоским в отношении координат r, θ, φ . В этом пространстве напряжения должны удовлетворять уравнению совместности деформаций (25), которое при $v = 0$ принимает вид

$$\bar{\sigma}_r = (\bar{r}\bar{\sigma}_\theta)'. \quad (107)$$

Исключая с помощью этого уравнения $\bar{\sigma}_r$ из уравнения (106), окончательно имеем

$$\varphi'' + \frac{2\varphi'}{\bar{r}(1-\bar{r}_g\bar{r}^2)} - \frac{3\bar{r}_g\bar{r}}{2(1-\bar{r}_g\bar{r}^2)} (\varphi')^2 - \frac{2\varphi}{\bar{r}^2} = \frac{\bar{r}_g\bar{r}}{2(1-\bar{r}_g\bar{r}^2)},$$

где $\varphi = \bar{r}\bar{\sigma}_\theta$ и $\bar{\sigma}_r = \varphi'$. Для малых отношений $\bar{r}_g = r_g/R$ можно пренебречь членом $\bar{r}_g\bar{r}^2$ по сравнению с единицей. Отбрасывая нелинейный член, получаем

$$\varphi'' + \frac{2}{r} \varphi' - \frac{2}{r^2} \varphi = \frac{1}{2} \bar{r}_g \bar{r}.$$

При граничных условиях

$$\bar{\sigma}_r(0) = \bar{\sigma}_\theta(0), \quad \bar{\sigma}_r(1) = 0 \quad (108)$$

решение этого уравнения совпадает с равенствами (26) (при $v = 0$).

Уравнение (107) решается численно при граничных условиях (108) для различных значений \bar{r}_g . Зависимости напряжений $\bar{\sigma}_r(\bar{r})$ и $\bar{\sigma}_\theta(\bar{r})$ для $\bar{r}_g = 0,05; 0,1; 0,25; 0,5; 0,75; 0,9$ показаны на рис. 5–7 сплошными линиями. Пунктирные линии соответствуют классическому решению (26). На рисунке 8 показана зависимость относительного напряжения в центре сферы от параметра \bar{r}_g . Можно заметить, что это напряжение стремится к бесконечности при $\bar{r}_g \rightarrow 1$.

Интегрирование уравнения (105) при граничном условии $g_{44}(1) = 1 - \bar{r}_g$ позволяет найти g_{44} , т.е.

$$g_{44} = \sqrt{\frac{(1-\bar{r}_g)^3}{1-\bar{r}_g\bar{r}^2}} \exp \left(-3\bar{r} \int_1^{\bar{r}} \frac{\bar{r}\bar{\sigma}_r d\bar{r}}{1-\bar{r}_g\bar{r}^2} \right).$$

Тогда коэффициент g_{14} может быть определён из равенства (100). Зависимости $g_{44}(\bar{r})$ и $g_{14}(\bar{r})$ показаны на рис. 9 и 10 соответственно.

При $\bar{r}_g = 1$ описанное выше сферическое тело обладает всеми существенными признаками чёрной дыры [31] — свет не распространяется с его поверхности, а напряжения в центре оказываются бесконечно большими. Отличие состоит в отсутствии горизонта событий и сингулярности Шварцшильда. Принципиальная возможность достижения величины $\bar{r}_g = 1$ следует из соотношений

$$\bar{r}_g = \frac{2m\gamma}{Rc^2}, \quad m = \frac{4}{3} \pi \rho_0 R^3. \quad (109)$$

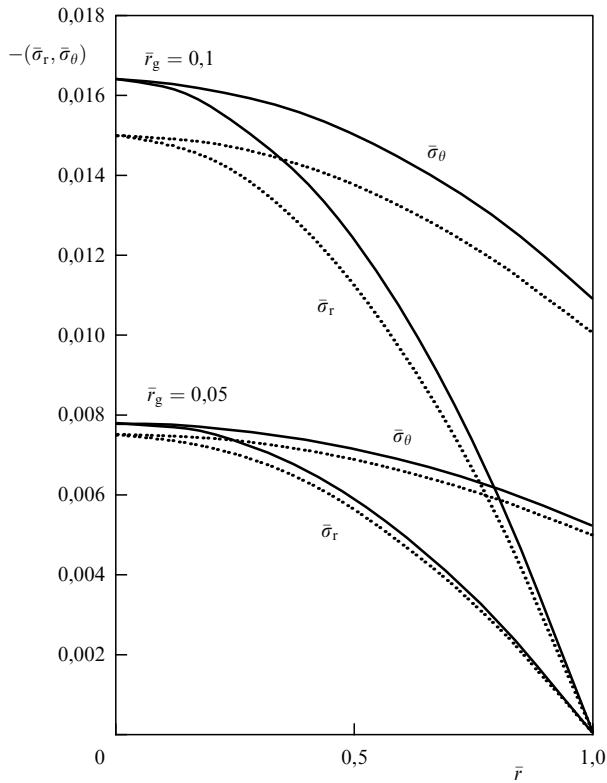


Рис. 5. Зависимости напряжений от радиальной координаты для $\bar{r}_g = 0,05$ и $\bar{r}_g = 0,1$. Сплошная линия — численное решение ОТО, пунктирная линия — классическое решение.

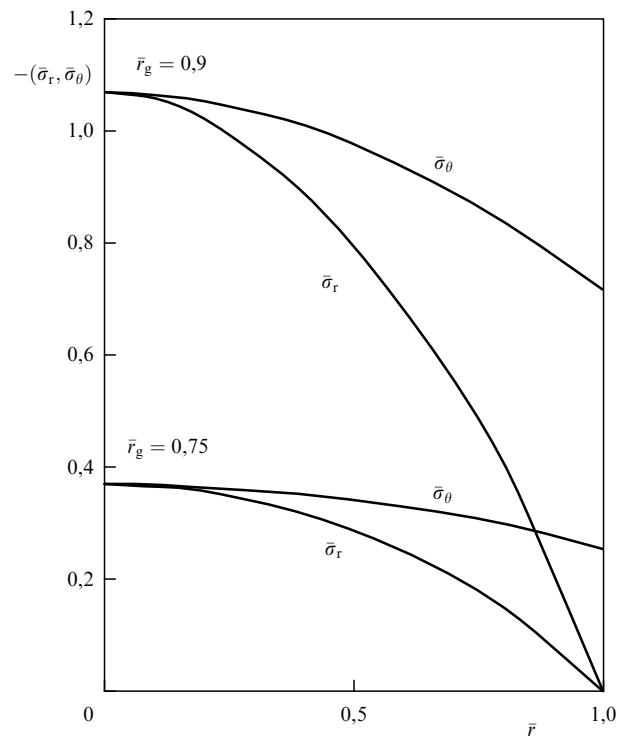


Рис. 7. Зависимость напряжений от радиальной координаты для $\bar{r}_g = 0,75$ и $\bar{r}_g = 0,9$.

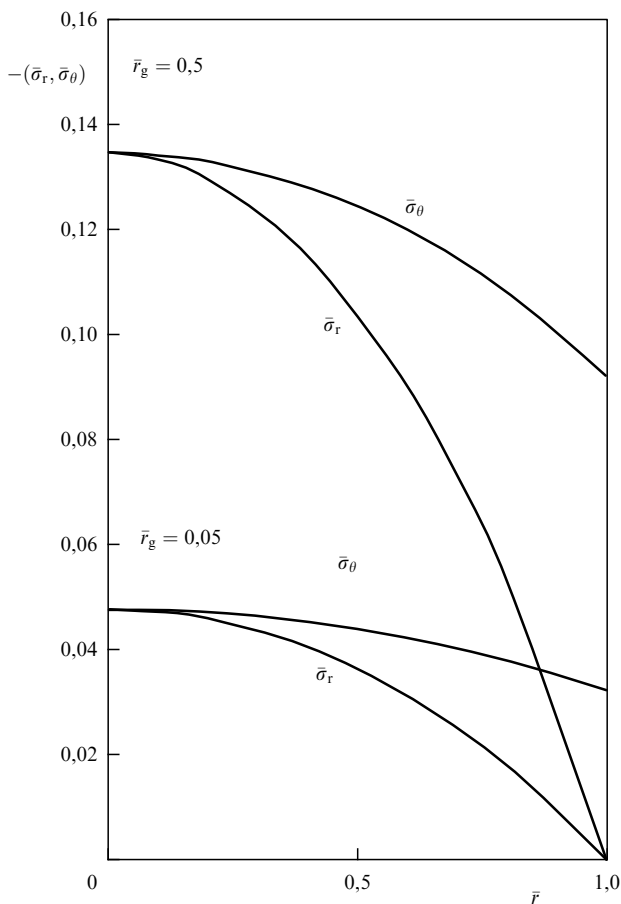


Рис. 6. Зависимость напряжений от радиальной координаты для $\bar{r}_g = 0,25$ и $\bar{r}_g = 0,5$.

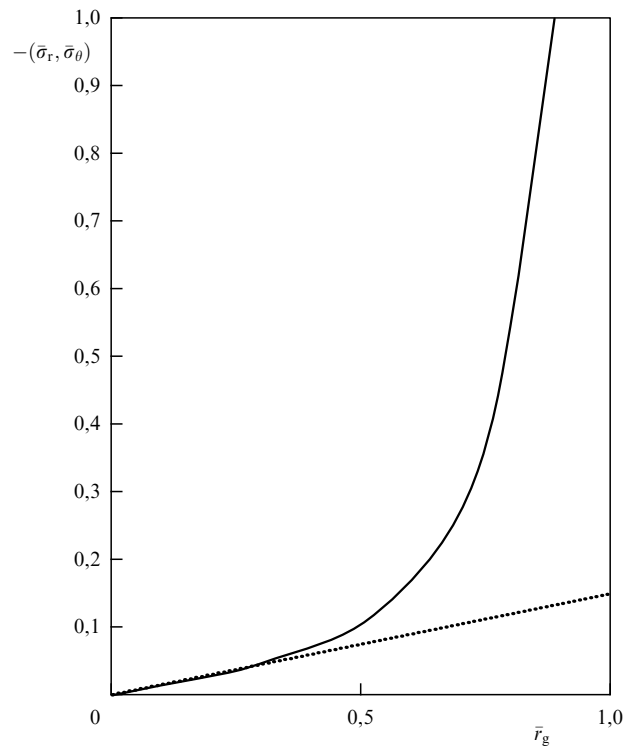


Рис. 8. Зависимость напряжений в центре сферы от \bar{r}_g . Сплошная линия — численное решение ОТО, пунктирная линия — классическое решение.

Предположим, что тело поглощает из окружающего его пространства материю с плотностью ρ_0 . Из первого равенства (109) следует, что \bar{r}_g увеличивается, если

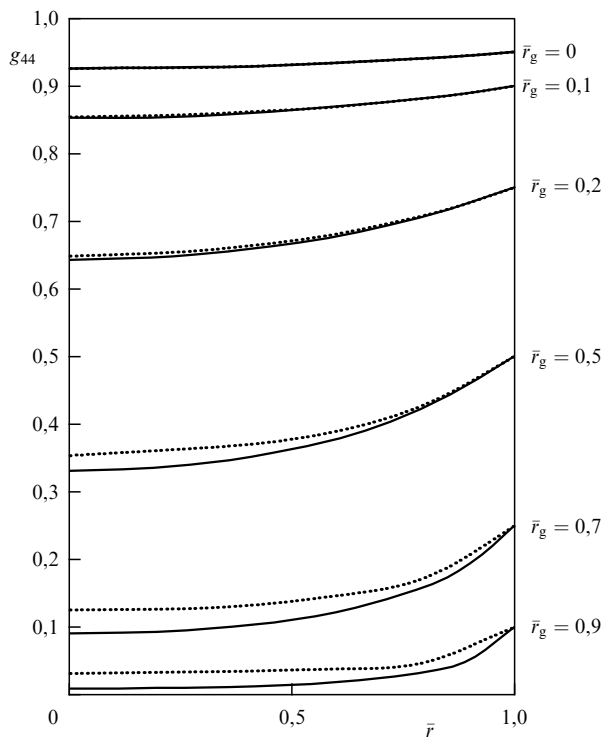


Рис. 9. Зависимости g_{44} от радиальной координаты.

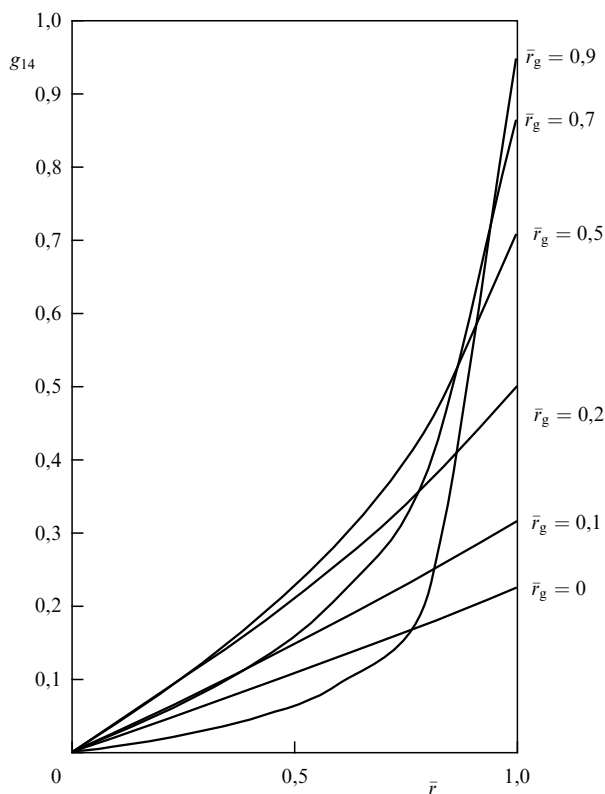


Рис. 10. Зависимости g_{14} от радиальной координаты.

масса тела возрастает быстрее его радиуса. Второе равенство показывает, что именно такая ситуация имеет место, поскольку радиус изменяется пропорционально $m^{1/3}$.

Заметим, что приведённые результаты относятся к механистической интерпретации ОТО и не учитывают повышения температуры при сжатии и другие физические эффекты.

8. Заключение

Представлен аналитический обзор результатов, полученных применительно к сферически симметричной статической задаче релятивистской механики. Обсуждаются решения внешней задачи для вакуума и внутренних задач для идеальной несжимаемой и сжимаемой жидкости и линейно упругого тела. Наряду с классическими решениями, основанными на традиционной модели псевдориманова пространства с метрической формой для ортогональных радиальной и временной координат, рассматриваются задачи в псевдоримановом пространстве, которое является плоским в отношении пространственных координат и искривлённым только в отношении времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-11-00275, выданный Институту прикладной механики РАН).

Список литературы

1. Кильчевский Н А *Основы тензорного исчисления с приложениями к механике* (Киев: Наукова думка, 1972)
2. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1987)
3. Weinberg S *Gravitation and Cosmology. Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (New York: Wiley, 1972); Пер. на русск. яз.: Вейнберг С *Гравитация и космология. Принципы и приложения общей теории относительности* (М.: Мир, 1975)
4. Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A *Gravitation* (San Francisco, CA: W. H. Freeman, 1973); Пер. на русск. яз.: Мизнер Ч, Торн К, Уилер Дж *Гравитация* (М.: Мир, 1977)
5. Hawking S W, Ellis G F R *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge: Univ. Press, 1973); Пер. на русск. яз.: Хокинг С, Эллис Дж *Крупномасштабная структура пространства-времени* (М.: Мир, 1977)
6. Fourès-Bruhat Y *Acta Math.* **88** 141 (1952)
7. Фок В А *Теория пространства, времени и тяготения* (М.: ЛКИ, 2007); Пер. на англ. яз.: Fok V A *The Theory of Space, Time and Gravitation* (New York: Macmillan, 1964)
8. Логунов А А *Релятивистская теория гравитации* (М.: Наука, 2006)
9. Васильев В В, Федоров Л В *Изв. РАН. Механика твердого тела* (3) 143 (2021); Vasiliev V V, Fedorov L V *Mech. Solids* **56** 404 (2021)
10. Васильев В В, Федоров Л В *Изв. РАН. Механика твердого тела* (6) 125 (2023); Vasiliev V V, Fedorov L V *Mech. Solids* **58** 2034 (2023)
11. Блох В И *Теория упругости* (Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1964)
12. Крутков Ю А *Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости* (М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1949)
13. Власов В З *Избранные труды Т. 1* (М.: Изд-во АН СССР, 1962)
14. Argoño-Torres B et al. *Astron. Astrophys.* **554** A76 (2013)
15. Vasiliev V V *J. Mod. Phys.* **8** 1087 (2017)
16. Vasiliev V V, Fedorov L V *J. Mod. Phys.* **11** 221 (2020)
17. Synge J L *Relativity: the General Theory* (Amsterdam: North-Holland, 1960); Пер. на русск. яз.: Синг Д Л *Общая теория относительности* (М.: ИЛ, 1963)
18. Vasiliev V V, Fedorov L V *J. Mod. Phys.* **10** 1401 (2019)
19. Васильев В В, Федоров Л В *Изв. РАН. Механика твердого тела* (4) 15 (2014); Vasiliev V V, Fedorov L V *Mech. Solids* **49** 370 (2014)
20. Vasiliev V V, Fedorov L V *J. Mod. Phys.* **9** 2482 (2018)

21. Eisenstaedt J "Histoire et singularités de la solution de Schwarzschild (1915–1923)" *Archive History Exact Sci.* **27** 157 (1982); Пер. на русск. яз.: Эйзенштетдт Ж "История решения Шварцшильда и его сингулярности (1915–1923)", в сб. *Эйнштейновский сборник 1984–1985* (Отв. ред. И Ю Кобзарев) (М.: Наука, 1988) с. 148
22. Рашевский П К *Риманова геометрия и тензорный анализ* (М.: Наука, 1967)
23. Васильев В В, Федоров Л В *Докл. РАН* **462** 408 (2015); Vasiliev V V, Fedorov L V *Dokl. Phys.* **60** 241 (2015)
24. Vasiliev V V, Fedorov L V *Appl. Phys. Res.* **7** 84 (2015)
25. Васильев В В *Изв. РАН. Механика твердого тела* (4) 48 (2018); Vasiliev V V *Mech. Solids* **53** 397 (2018)
26. Фридман А А, в сб. *Альберт Эйнштейн и теория гравитации* (М.: Мир, 1979) с. 320; Friedman A Z. *Phys.* **10** 377 (1922)
27. Владимиров Ю С *Классическая теория гравитации* (М.: URSS, 2009)
28. Чермянин С И *УФН* **160** (5) 127 (1990); Chermnyanin S I *Sov. Phys. Usp.* **33** 385 (1990)
29. Vasiliev V, Fedorov L *Appl. Phys. Res.* **7** (3) 10 (2015) <https://doi.org/10.5539/apr.v7n3p10>
30. Vasiliev V V *Appl. Phys. Res.* **9** (5) 29 (2017) <https://doi.org/10.5539/apr.v9n5p29>
31. Thorne K S *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy* (New York: W.W. Norton, 1994); Пер. на русск. яз.: Торн К *Черные дыры и складки времени. Дерзкое наследие Эйнштейна* (М.: Физматлит, 2009)
32. Einstein A *Ann. Math.* **40** (4) 922 (1939)
33. Tolman R C *Relativity, Thermodynamics and Cosmology* (Oxford: The Clarendon Press, 1934); Пер. на русск. яз.: Толмен Р *Относительность, термодинамика и космология* (М.: Наука, 1974)
34. Adler R J *J. Math. Phys.* **15** (6) 727 (1974)
35. Fodor G, gr-qc/0011040
36. Oppenheimer J R, Snyder H *Phys. Rev.* **56** 455 (1939)
37. Tolman R C *Phys. Rev.* **55** 364 (1939)
38. Oppenheimer J R, Volkoff G M *Phys. Rev.* **55** 374 (1939)
39. Vasiliev V, Fedorov L *Appl. Phys. Res.* **4** (2) 166 (2012) <https://doi.org/10.5539/apr.v4n2p166>
40. Vasiliev V V, Fedorov L V *J. Mod. Phys.* **14** 147 (2023)
41. Vasiliev V V, Fedorov L V *J. Mod. Phys.* **14** 818 (2023)
42. Vasiliev V, Fedorov L J. *Mod. Phys.* **15** 401 (2024) <https://doi.org/10.4236/jmp.2024.154017>
43. Painlevé P C. R. *Acad. Sci.* **173** 677 (1921)
44. Gullstrand A *Arkiv Mat. Astron. Fysik* **16** (8) 1 (1922)
45. Hamilton A J S, Lisle J P *Am. J. Phys.* **76** 519 (2008); gr-qc/0411060
46. Brannen C *Int. J. Mod. Phys. D* **18** 2289 (2009); arXiv:0907.0660

Spherically symmetric static problem of General Relativity for a continuum

V.V. Vasiliev^(*), L.V. Fedorov^(**)

*Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences,
Leningradskii prosp. 7, str. 1, 125040 Moscow, Russian Federation
E-mail: ^(*)vvvas@dol.ru, ^(**)lfff@mail.ru*

The paper is an analytical review devoted to the spherically symmetric problem of General Relativity (GR). This problem is of special interest in GR, since it is reducible to ordinary differential equations that allow an analytical solution, used to describe cosmological models. The formulation of the mechanics problem associated with the issues of completeness and solvability of GR equations is analyzed. Solutions to the spherically symmetric static problem for a vacuum, ideal fluid, and elastic medium are considered within the framework of classical mechanics, the linearized system of GR equations, the Schwarzschild metric, and a pseudo-Riemannian space of a special type that is flat with respect to spatial coordinates and curved with respect to time.

Keywords: General Relativity, fluid and gas mechanics, mechanics of a deformable solid, spherically symmetric static problem

PACS numbers: **04.20. – q, 04.40. – b, 46.25. – y**

Bibliography — 46 references

Received 1 April 2024, revised 13 August 2024

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **195** (2) 199–215 (2025)

Physics – Uspekhi **68** (2) (2025)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.11.039800>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2024.11.039800>