

Космологические сценарии без начальной сингулярности в скалярно-тензорных теориях и их устойчивость

В.Е. Волкова, С.А. Миронов

Представлен краткий обзор развития и текущего состояния исследований моделей ранней Вселенной без начальной сингулярности, а именно, сценариев космологического отскока и генезиса, построенных в рамках широкого класса скалярно-тензорных теорий, в частности, в теории Хорндески и её обобщениях. Обзор сосредоточен на темах, связанных с линейной устойчивостью на уровне возмущений на фоне несингулярных космологических решений: 1) запрещающая теорема, справедливая для космологических моделей без начальной сингулярности в рамках теории Хорндески, 2) расширенный перечень возможных способов обхода указанной запрещающей теоремы, 3) роль дисформных преобразований, связывающих подклассы теории Хорндески с обобщёнными теориями, такими как DHOST-теории, 4) влияние на устойчивость дополнительных полей материи и потенциальное возникновение возмущений, распространяющихся со сверхсветовыми скоростями, в многокомпонентных системах.

Ключевые слова: скалярно-тензорные теории, космология без начальной сингулярности, устойчивость, сверхсветовые моды, космологический отскок, генезис

PACS numbers: 04.20.Dw, 04.50.Kd, 98.80.Bp

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.12.039826>

Содержание

1. Введение (172).
 - 1.1. Изотропное условие энергодоминантности и его нарушение.
 - 1.2. Теория Хорндески и нарушение NEC.
2. Устойчивость космологических сценариев в теории Хорндески и её расширениях (176).
3. Устойчивость космологических сценариев без начальной сингулярности: запрещающая теорема и способы её обойти (177).
 - 3.1. Запрещающая теорема в теории Хорндески. 3.2. Способы обойти запрещающую теорему: $\xi \neq 0$ и режим сильной связи.
 - 3.3. Способы обойти запрещающую теорему: расходящийся ξ - и γ -кроссинг. 3.4. Способы обойти запрещающую теорему: теория кускутона. 3.5. Способы обойти запрещающую теорему: расши-

ренная теория Хорндески. 3.6. Запрещающая теорема и дисформные преобразования.

4. Устойчивость космологических сценариев без начальной сингулярности в присутствии дополнительной материи (181).
 - 4.1. Дополнительная материя и возможное нарушение вырожденности теории. 4.2. Дополнительная материя и возможное возникновение сверхсветовых мод. 4.3. Теория DHOST Ia и дополнительное скалярное поле: индуцированная сверхсветовая мода.
5. Заключение (184).
6. Приложение (185).

Список литературы (185).

1. Введение

В физике ранней Вселенной многое известно и многое остаётся загадочным, и чем дальше в прошлое мы уходим, тем меньше мы можем сказать о Вселенной с какой-либо степенью уверенности. Хотя наши знания о различных стадиях горячего Большого взрыва, начиная с долей секунды от начала существования Вселенной, достаточно надёжны как с теоретической, так и с наблюдательной точки зрения, мы вступаем в область чистых гипотез, когда речь заходит о температурах порядка сотен МэВ.

Сегодня общепринятая точка зрения заключается в том, что стандартным стадиям горячего Большого взрыва предшествовали эпохи, которые должны разрешить характерный набор проблем теории Большого взрыва, а именно, проблемы горизонта, пространственной плоскостности, энтропии, а также проблему первичных неоднородностей. Концепция инфляции [1, 2] изящно

В.Е. Волкова^(1,3,a), С.А. Миронов^(1,2,4,b)

⁽¹⁾ Институт ядерных исследований РАН, просп. 60-летия Октября 7а, 117312 Москва, Российская Федерация

⁽²⁾ Институт теоретической и математической физики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Ломоносовский просп. 27, корп. 1, 119192 Москва, Российская Федерация

⁽³⁾ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы 1, стр. 2, 119991 Москва, Российская Федерация

⁽⁴⁾ Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", пл. Академика Курчатова 1, 123182 Москва, Российская Федерация
E-mail: ^(a)volkova.viktoriya@physics.msu.ru,
^(b)sa.mironov_1@physics.msu.ru

Статья поступила 24 сентября 2024 г.,
после доработки 11 декабря 2024 г.

решает эти вопросы, но сам инфляционный сценарий сталкивается, наряду с другими трудностями [3, 4], с серьёзной проблемой геодезической неполноты в прошлом, т.е. он не может решить проблему начальной сингулярности [5, 6]. Таким образом, инфляционная эпоха не может обеспечить полное описание Вселенной на самых ранних временах¹.

Одной из альтернативных или, возможно, дополняющих инфляционный механизм моделей, решающих проблему начальной сингулярности, является космологический отскок: предполагается, что изначально Вселенная проходит фазу сжатия, которая в некоторый момент "отскока", характеризующийся конечным значением масштабного фактора, переходит к текущей фазе расширения (см. обзоры [10–13]). Другой моделью без начальной сингулярности является сценарий космологического генезиса, в котором Вселенная начинает своё расширение из асимптотически пустого пространства Минковского [14, 15]. Оба этих сценария имеют общую черту, связанную с нетривиальной динамикой, характеризующейся ростом параметра Хаббла. Действительно, модель отскока предполагает, что параметр Хаббла переходит от убывания к росту в момент отскока; сценарий генезиса предполагает, что в начальный момент времени параметр Хаббла равен нулю и начинает расти с началом расширения. Такое поведение параметра Хаббла невозможно в рамках Общей теории относительности (ОТО) с обычной материей, удовлетворяющей всем энергетическим условиям, при условии пренебрежения кривизной трёхмерного пространства. Так, нестандартная динамика обоих сценариев возможна за счёт введения экзотической материи, которая нарушает изотропное условие энергодоминантности (англ. Null Energy Condition, NEC) и позволяет избежать начальной сингулярности, не выходя за рамки ОТО. Нарушение NEC обычно приводит к возникновению патологических степеней свободы на уровне возмущений над однородным фоном (см., например, обзор [16]), что затрудняет построение устойчивой модели с космологическим отскоком или генезисом.

В настоящем кратком обзоре мы сосредоточимся на теории Хорндески и её обобщениях, которые допускают нарушение NEC без возникновения характерных неустойчивостей, что делает этот класс скалярно-тензорных теорий перспективным с точки зрения построения полных космологических моделей без начальной сингулярности. Основное внимание уделяется анализу и проверке устойчивости решений без начальной сингулярности на линеаризованном уровне по возмущениям: подробно обсуждаются необходимые критерии, позволяющие убедиться в отсутствии всех типов неустойчивостей над космологическим фоном на протяжении всего времени эволюции модели. Кроме того, мы рассматриваем потенциальные проблемы устойчивости, связанные с возможностью добавления дополнительных компонент материи к скалярно-тензорной теории. Также мы затрагиваем ряд последних разработок в данной области,

например, кратко обсуждаем новые классы полевых теорий, которые являются наиболее широким обобщением семейства теорий типа Хорндески, существующим на сегодняшний день.

Данный краткий обзор имеет следующую структуру. В разделе 1.1 мы подробно обсуждаем NEC и его значение для космологических моделей без начальной сингулярности. В разделе 1.2 кратко рассматривается структура теории Хорндески и её обобщений. Подробный анализ поведения возмущений над космологическим фоном в расширенной теории Хорндески излагается в разделе 2 и служит основой для теоремы об отсутствии полной устойчивости, сформулированной и доказанной для теорий Хорндески далее в разделе 3.1. В разделах 3.2–3.5 мы обсуждаем различные способы обойти указанную запрещающую теорему, а также анализируем роль дисформных преобразований метрики в данном контексте в разделе 3.6. В разделе 4 рассматривается вопрос о том, вызывает ли добавление дополнительной материи проблемы с устойчивостью в обобщённой теории Хорндески, а также в разделе 4.2 отдельно исследуется потенциальная проблема возникновения мод, распространяющихся со скоростями выше скорости света, при добавлении дополнительного скалярного поля в систему. Краткое заключение приведено в разделе 5.

1.1. Изотропное условие энергодоминантности и его нарушение

Энергетические условия играют важную роль в ОТО, поскольку они обеспечивают естественные ограничения на тензор энергии – импульса $T_{\mu\nu}$ физической системы. Среди других энергетических условий изотропное условие энергодоминантности играет особую роль и сводится к неравенству

$$T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \geq 0 \quad (1)$$

для произвольного изотропного вектора n^μ , т.е. $g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 0$. Несмотря на то что NEC является самым слабым из всех энергетических условий, оно отличается особой устойчивостью, так как его невозможно нарушить, изменяя величину вклада вакуумной энергии. Следовательно, условие NEC однозначно связано со свойствами материи. Для изотропной жидкости с давлением p и положительной плотностью энергии ρ NEC сводится к следующему соотношению:

$$\omega = \frac{p}{\rho} \geq -1. \quad (2)$$

Кроме того, нарушение NEC тесно связано с катастрофическими последствиями с точки зрения устойчивости на уровне возмущений над фоном, так как указанное нарушение приводит к различным патологическим эффектам, включая появление духов и градиентных неустойчивостей (экспоненциально растущие моды с произвольно короткими длинами волн), сверхсветовых возмущений² и т.д. [17].

Ещё один аспект, который выделяет NEC, — теорема Пенроуза о сингулярности [18], условия которой предполагают выполнение NEC. В частности, теорема Пен-

¹ Однако в работах [7–9] исследуется инфляция в более широком понимании: в частности, рассматривается модель, в чём-то схожая с моделью генезиса, в которой в асимптотическом прошлом параметр Хаббла стремится к нулю. Такая динамика позволяет решить стандартную проблему геодезической неполноты в прошлом. Существенно, что в инфляции такого типа, так же как в моделях космологического отскока и генезиса, неизбежно нарушается условие изотропной энергодоминантности (см. обсуждение в разделе 1.1).

² Для краткости здесь и далее мы называем возмущения, скорость распространения которых превышает скорость света, сверхсветовыми.

проуза практически исключает возможность сценария несингулярного отскока в рамках ОТО. Это можно непосредственно увидеть из линейной комбинации (00) - и (ij) -компонент уравнений Эйнштейна, записанных для однородной изотропной Вселенной с метрикой Фридмана – Леметра – Робертсона – Уокера (Friedmann – Lemaître – Robertson – Walker, FLRW) [16]:

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p) + \frac{\kappa}{a^2}, \quad (3)$$

где a — масштабный фактор, $H \equiv \dot{a}/a$ — параметр Хаббла, κ — параметр кривизны ($\kappa = +1$ для замкнутой Вселенной, $\kappa = -1$ для открытой Вселенной и $\kappa = 0$ для плоского трёхмерного евклидова пространства). Действительно, $\dot{H} \leq 0$ в пространственно-плоской Вселенной ($\kappa = 0$) или в открытой Вселенной ($\kappa = -1$), поскольку NEC подразумевает, что $\rho + p \geq 0$ (см. (2)). Следовательно, фаза сжатия ($H < 0$) не может перейти в фазу расширения ($H > 0$), если NEC не нарушено. Однако существует лазейка для случая замкнутой Вселенной ($\kappa = +1$), где космологический отскок возможен при условии, что ρ и p растут медленнее чем a^{-2} во время фазы сжатия (т.е. $\omega = p/\rho < -1/3$) [19–22].

Что касается сценария генезиса, он также исключён в рамках ОТО теоремой Пенроуза и NEC. Действительно, расширение, начинающееся из асимптотического пространства Минковского, подразумевает эволюцию от $H = 0$ к положительным значениям, следовательно, $\dot{H} > 0$, что, согласно (3), требует нарушения NEC. С другой стороны, тот же вывод следует из ковариантного закона сохранения тензора энергии – импульса $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, записанного для однородной изотропной Вселенной:

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H(\rho + p). \quad (4)$$

Если NEC выполняется, уравнение (4) подразумевает, что фаза с увеличением плотности энергии ($\dot{\rho} > 0$), которая является ключевой для стадии генезиса, невозможна в расширяющейся Вселенной. Следовательно, теорема Пенроуза утверждает, что космологическое расширение началось из сингулярности с бесконечной плотностью энергии и бесконечной скоростью расширения.

Таким образом, нарушение NEC (1) без пагубных последствий для устойчивости является основной задачей для любого космологического сценария без начальной сингулярности, включающего либо фазу сжатия перед Большим взрывом, либо фазу расширения, начинающуюся из асимптотически статического пустого пространства. Хотя существуют различные подходы к нарушению NEC, в данном обзоре мы сосредоточимся на случае, когда это делается за счёт модификации ОТО, реализуемой в рамках скалярно-тензорных теорий, лагранжианы которых содержат старшие производные, а именно в теории Хорндески [23] и её обобщениях.

1.2. Теория Хорндески и нарушение NEC

Скалярно-тензорные теории, вероятно, представляют собой самое простое расширение ОТО, которое заключается во введении дополнительной скалярной степени свободы помимо двух тензорных мод, уже присутствующих в ОТО. Несмотря на то что поведение скалярно-тензорных теорий в ультрафиолетовой (УФ) области немногим лучше, чем у ОТО, этот класс теорий имеет

особое значение, поскольку большинство модификаций гравитации в инфракрасной (ИК) области могут быть описаны с помощью скалярно-тензорных теорий.

Наиболее общий вид скалярно-тензорной теории с уравнениями движения второго порядка был сформулирован Г. Хорндески [23]. Теории Хорндески параметризуются четырьмя произвольными функциями F , K , G_4 и G_5 ³ скалярного поля π и его кинетического члена $X = g^{\mu\nu}\partial_\mu\pi\partial_\nu\pi$ и описываются лагранжианом следующей формы (с сигнатурой метрики $(+, -, -, -)$):

$$S_H = \int d^4x \sqrt{-g}(\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5), \quad (5)$$

$$\mathcal{L}_2 = F(\pi, X), \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_3 = K(\pi, X)\square\pi, \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_4 = -G_4(\pi, X)R + 2G_{4X}(\pi, X)[(\square\pi)^2 - \pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu}], \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\pi, X)G^{\mu\nu}\pi_{;\mu\nu} + \frac{1}{3}G_{5X}[(\square\pi)^3 - 3\square\pi\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu} + 2\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\rho}\pi_{;\rho}{}^\nu], \quad (9)$$

где R в (8) и $G^{\mu\nu}$ в (9) — скаляр кривизны и тензор Эйнштейна соответственно, а $\pi_{;\mu\nu} = \nabla_\mu\nabla_\nu\pi$, $\square\pi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\pi$, $G_{iX} = \partial G_i/\partial X$. Следует отметить, что форма действия (5) отличается от первоначальной, сформулированной Г. Хорндески в работе [23], и была независимо получена в контексте исследований теории галилеонов [24] и её обобщений [25–27]. Однако было доказано, что обе формы эквивалентны и описывают одну и ту же теорию [66]. Одним из главных преимуществ теории Хорндески является тот факт, что по определению любая скалярно-тензорная теория, уравнения движения которой являются дифференциальными уравнениями второго порядка, принадлежит классу теорий Хорндески и может быть приведена к форме (5). В частности, при определённом выборе скалярных потенциалов F , K , G_4 и G_5 можно воспроизвести, например, действие Эйнштейна – Гильберта, теорию Бранса – Дикке [29], теорию $f(R)$ -гравитации [30, 31], модель k -эссенции [32, 33], теорию с кинетическим смешиванием (англ. braiding) с гравитацией [35, 36], теорию "Fab Four" [37, 38] (включающую член Гаусса – Бонне), теорию галилеонов Дирака – Борна – Инфельда (Dirac – Born – Infeld, DBI) [39, 40], любые инфляционные теории, основанные на скалярных полях, например, k -инфляцию [41] и G -инфляцию [42], и многие другие (см. подробный обзор, например, в [43, 44]).

Слагаемые со старшими производными в лагранжиане (5) являются характерной чертой теории Хорндески. Поскольку соответствующие уравнения движения, тем не менее, являются дифференциальными уравнениями второго порядка, в теориях Хорндески не возникает духов Остроградского. Однако уравнения движения второго порядка обеспечивают достаточные, но не необходимые условия отсутствия духов Остроградского. Действительно, если кинетическая матрица системы вырождена, то, несмотря на наличие производных по времени выше второго порядка в уравнении движения, новая степень свободы, связанная с наличием дополни-

³ В литературе нет полного согласия в вопросе используемых обозначений, поэтому функции F и K иногда также обозначают как G_2 и G_3 соответственно.

тельных начальных условий, устраняется. Данное наблюдение лежит в основе определения вырожденных скалярно-тензорных теорий со старшими производными (англ. Degenerate Higher Order Scalar–Tensor, DHOST) [45–48], которые являются обобщением теории Хорндески. Общая форма соответствующего лагранжиана как для квадратичных, так и кубических подклассов⁴ теорий DHOST представлена, например, в обзоре [49].

Важное отличие теорий DHOST от подкласса Хорндески состоит в том, что первые описываются уравнениями движения третьего порядка, описывая при этом $2 + 1$ динамические степени свободы. Другой весьма полезной особенностью является то, что различные физически интересные подклассы теорий DHOST связаны между собой дисформными преобразованиями [47, 49, 50]. Конформно-дисформное преобразование [51] метрики в общем случае зависит от двух произвольных функций $\Omega(\pi, X)$ и $\Gamma(\pi, X)$:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(\pi, X) g_{\mu\nu} + \Gamma(\pi, X) \partial_\mu \pi \partial_\nu \pi. \quad (10)$$

Применяя такое преобразование к метрике в теории Хорндески (5), в результате можно получить различные преобразованные теории в зависимости от конкретного выбора $\Omega(\pi, X)$ и $\Gamma(\pi, X)$. В частности, если обе функции зависят только от π , т.е. $\Omega = \Omega(\pi)$ и $\Gamma = \Gamma(\pi)$, то полученная теория по-прежнему является теорией Хорндески [52, 53]. Другая возможность — разрешить $\Gamma = \Gamma(\pi, X)$ с по-прежнему не зависящим от X конформным фактором $\Omega = \Omega(\pi)$. Тогда полученная теория является так называемой расширенной теорией Хорндески (англ. beyond Horndeski) или GLPV-теорией — это первый пример DHOST-теорий, который был сформулирован в результате применения дисформного преобразования (10) к действию Эйнштейна–Гильберта [56]. Расширенные теории Хорндески были также сформулированы независимо в [57–59]. Общая форма лагранжиана расширенных теорий Хорндески включает дополнительные вклады с двумя новыми функциями $F_4(\pi, X)$ и $F_5(\pi, X)$, наряду с теми, что входят в (5):

$$S_{\text{BH}} = \int d^4x \sqrt{-g} (F_4(\pi, X) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \pi_{,\mu} \pi_{,\mu'} \pi_{,\nu\nu'} \pi_{,\rho\rho'} + F_5(\pi, X) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \pi_{,\mu} \pi_{,\mu'} \pi_{,\nu\nu'} \pi_{,\rho\rho'} \pi_{,\sigma\sigma'}), \quad (11)$$

где $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ — полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты. Следует отметить, что вклады с функциями $F_4(\pi, X)$ и $F_5(\pi, X)$ нельзя произвольным образом добавить к слагаемым в действии (5), так как в некоторых случаях возникает дополнительная мода, что свидетельствует об отсутствии вырожденности соответствующей кинетической матрицы в такой теории. Требование вырожденности для полученной теории накладывает следующее ограничение на функции F_4 и F_5 в лагранжиане:

$$F_4 G_{5X} X = -3F_5 \left[G_4 - 2XG_{4X} + \frac{1}{2} G_{5\pi} X \right], \quad (12)$$

которое обсуждалось в [45, 48, 53], приводилось без вывода, например, в [54] и было явно получено, напри-

мер, в [55]. Это соотношение для функций F_4 и F_5 можно эквивалентно рассматривать следующим образом: при дисформном преобразовании теории Хорндески с $\Omega(\pi)$ и $\Gamma(\pi, X)$ полученная расширенная теория Хорндески имеет вклады F_4 и F_5 , удовлетворяющие ограничению (12).

Наконец, при дисформном преобразовании метрики с конформными и дисформными коэффициентами, зависящими от X , т.е. $\Omega(\pi, X)$ и $\Gamma(\pi, X)$, теория Хорндески преобразуется в так называемый подкласс Ia теории DHOST, который мы определим ниже. Общий вид действия для квадратичной теории DHOST имеет вид⁵:

$$S_{\text{DHOST}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(F(\pi, X) + K(\pi, X) \square \pi + F_2(\pi, X) R + \sum_{i=1}^5 A_i(\pi, X) L_i \right), \quad (13)$$

куда входят

$$L_1 = \pi_{;\mu\nu} \pi^{;\mu\nu}, \quad L_2 = (\square \pi)^2, \quad L_3 = \pi^{;\mu} \pi_{;\mu\nu} \pi^{;\nu} \square \pi, \quad (14)$$

$$L_4 = \pi^{;\mu} \pi_{;\mu\nu} \pi^{;\nu\rho} \pi_{;\rho}, \quad L_5 = (\pi^{;\mu} \pi_{;\mu\nu} \pi^{;\nu})^2,$$

где функции F , K , $F_2(\pi, X)$ и $A_i(\pi, X)$ являются аналогами функций G_i в (5), но при этом связаны тремя уравнениями, которые обеспечивают выполнение условий вырожденности теории, т.е. сохраняет $2 + 1$ степени свободы в системе (см., например, [45, 47]). Теории DHOST инвариантны под действием общих конформно-дисформных преобразований (10), что означает сохранение вырождения кинетической матрицы в результате таких преобразований метрики [50]. В данном обзоре мы будем обсуждать только подкласс DHOST Ia, характеризующийся следующими соотношениями между функциями $F_2(\pi, X)$ и $A_i(\pi, X)$ в лагранжиане (см., например, [49]):

$$A_2 = -A_1, \quad (15a)$$

$$A_4 = \frac{1}{8(F_2 - XA_1)^2} [-16XA_1^3 + 4(3F_2 + 16XF_{2X})A_1^2 - (16X^2F_{2X} - 12XF_2)A_3A_1 - X^2F_2A_3^2 - 16F_{2X}(3F_2 + 4XF_{2X})A_1 + 8F_2(XF_{2X} - F_2)A_3 + 48F_2F_{2X}^2], \quad (15b)$$

$$A_5 = \frac{(4F_{2X} - 2A_1 + XA_3)(-2A_1^2 - 3XA_1A_3 + 4F_{2X}A_1 + 4F_2A_3)}{8(F_2 - XA_1)^2}. \quad (15v)$$

Подкласс DHOST Ia включает в себя как теории Хорндески, так и расширенные теории Хорндески в качестве частных случаев. В пользу последнего говорит тот факт, что результат дисформного преобразования теории Хорндески с $\Omega(\pi, X)$ и $\Gamma(\pi, X)$ соответствует подклассу DHOST Ia. Это можно рассматривать как характерную особенность теорий DHOST Ia: лагранжиан (15) может быть преобразован в форму лагранжиана теории Хорндески с помощью конформно-дисформного преобразования [50].

⁴ Здесь мы используем стандартные названия для подклассов, которые отражают, какая старшая степень $\partial^2 \pi$ содержится в лагранжиане.

⁵ Для краткости мы не приводим явно действие для кубического подкласса DHOST. Как упоминалось ранее, полное действие можно найти, например, в [49].

Подкласс DHOST Ia имеет особое значение для космологии, поскольку остальные подклассы теории DHOST несостоятельны с точки зрения феноменологии: они либо неустойчивы, либо описывают нединамические тензорные моды [60, 61]). Таким образом, жизнеспособными являются только те теории DHOST, которые дисформно связаны с теорией Хорндески. Отметим, что две теории, связанные конформно-дисформным преобразованием (10), являются эквивалентными, если преобразование обратимо и в системе нет дополнительных полей материи. Тонкости, связанные с сохранением вырожденности при наличии дополнительной материи, взаимодействующей с полями DHOST-теории, и другие связанные с этим вопросы мы обсудим в разделе 4.

Как обсуждалось ранее и было явно показано, например, в [16, 43], в теории Хорндески и её расширениях возможно нарушение NEC⁶ с сохранением устойчивости на уровне возмущений, если рассматривать подклассы теории начиная с $\mathcal{L}_3$ (7) и выше. Однако, как мы увидим в разделе 3, не все подклассы теории Хорндески (5) подходят для построения несингулярных космологических моделей, в которых не возникало бы патологических степеней свободы на протяжении всей эволюции Вселенной.

2. Устойчивость космологических сценариев в теории Хорндески и её расширениях

Начнём с краткого обзора расширенной теории Хорндески на линейном уровне по возмущениям, фокусируясь на анализе поведения возмущений над космологическим фоном. Наша основная задача — вывести условия устойчивости для однородного, изотропного космологического фона. В дальнейшем мы придерживаемся ковариантного формализма, в то время как результаты этого раздела были также сформулированы в рамках эффективной теории поля (англ. Effective Field Theory, EFT) [63, 64].

Линейные возмущения над космологическим фоном Фридмана – Леметра – Робертсона – Уокера (FLRW) могут быть стандартным образом разделены на скалярные, векторные и тензорные моды в соответствии с их поведением при вращении (см., например, [65]). Далее мы сосредоточимся на скалярных и тензорных возмущениях, поскольку нетривиальные векторные моды отсутствуют в скалярно-тензорных теориях.

Введём следующие обозначения для малых возмущений метрики:

$$ds^2 = N^2 dt^2 - \gamma_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt), \quad (16)$$

где

$$N = 1 + \alpha, \quad N_i = \partial_i \beta, \quad \gamma_{ij} = a^2(t) e^{2\zeta} \left(\delta_{ij} + h_{ij}^T + \frac{1}{2} h_{ik}^T h_{jk}^T \right). \quad (17)$$

В (17) α , β и ζ относятся к скалярному сектору возмущений, а h_{ik}^T обозначают поперечные, бесследовые тензор-

ные моды ($h_{ii}^T = 0, \partial_i h_{ij}^T = 0$). Кроме этого, скалярный сектор включает в себя возмущения однородного скалярного поля $\pi(t)$, которые обозначаются $\delta\pi$. Заметим, что в уравнении (17) мы уже исключили продольную компоненту $\partial_i \partial_j E$ в γ_{ij} путём частичной фиксации калибровки. Остаточная калибровочная свобода соответствует следующим преобразованиям:

$$\alpha \rightarrow \alpha + \dot{\zeta}_0, \quad \beta \rightarrow \beta - \zeta_0, \quad \delta\pi \rightarrow \delta\pi + \dot{\zeta}_0 \pi, \quad \zeta \rightarrow \zeta + \dot{\zeta}_0 H, \quad (18)$$

где H — параметр Хаббла, ζ_0 — калибровочная функция, а точка обозначает производную по времени.

Подставляя метрику (16) в действие $S_H + S_{BH}$ (см. (5) и (11)) и раскладывая полученное действие до второго порядка по возмущениям, получим $S^{(2)} = S_{\text{tensor}}^{(2)} + S_{\text{scalar}}^{(2)}$, где

$$S_{\text{tensor}}^{(2)} = \frac{1}{8} \int dt d^3x a^3 \left[\mathcal{G}_T (\dot{h}_{ij}^T)^2 - \frac{\mathcal{F}_T}{a^2} (\nabla h_{ij}^T)^2 \right], \quad (19)$$

$$\mathcal{G}_T = 2G_4 - 4G_{4X}X + G_{5\pi}X - 2HG_{5X}X\dot{\pi} + 2F_4X^2 + 6HF_5X^2\dot{\pi}, \quad (20)$$

$$\mathcal{F}_T = 2G_4 - 2G_{5X}X\dot{\pi} - G_{5\pi}X. \quad (21)$$

Что касается скалярного сектора и соответствующего квадратичного действия $S_{\text{scalar}}^{(2)}$, то его явная форма зависит от способа фиксации остаточной калибровочной свободы в (18). Одним из стандартных способов полной фиксации калибровки является выбор унитарной калибровки, в которой отсутствуют возмущения скалярного поля $\delta\pi = 0$. Тогда квадратичное действие для скалярного сектора имеет вид⁷:

$$S_{\text{scalar}}^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left[-3\mathcal{G}_T \dot{\zeta}^2 + \mathcal{F}_T \frac{(\nabla \zeta)^2}{a^2} - 2(\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi})\alpha \frac{\Delta \zeta}{a^2} + 2\mathcal{G}_T \dot{\zeta} \frac{\Delta \beta}{a^2} + 6\Theta \alpha \dot{\zeta} - 2\Theta \alpha \frac{\Delta \beta}{a^2} + \Sigma \alpha^2 \right], \quad (22)$$

где $(\nabla \zeta)^2 = \delta^{ij} \partial_i \zeta \partial_j \zeta$, $\Delta = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$, а явные выражения для $\mathcal{G}_T$, $\mathcal{F}_T$ приведены в (20), (21) и

$$\mathcal{D} = -2F_4X\dot{\pi} - 6HF_5X^2, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Theta = & -K_X X \dot{\pi} + 2G_4 H - 8HG_{4X}X - 8HG_{4XX}X^2 + \\ & + G_{4\pi} \dot{\pi} + 2G_{4\pi X} X \dot{\pi} - 5H^2 G_{5X} X \dot{\pi} - 2H^2 G_{5XX} X^2 \dot{\pi} + \\ & + 3HG_{5\pi}X + 2HG_{5\pi X}X^2 + 10HF_4X^2 + 4HF_{4X}X^3 + \\ & + 21H^2 F_5 X^2 \dot{\pi}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Sigma = & F_X X + 2F_{XX}X^2 + 12HK_X X \dot{\pi} + 6HK_{XX}X^2 \dot{\pi} - K_\pi X - \\ & - K_{\pi X}X^2 - 6H^2 G_4 + 42H^2 G_{4X}X + 96H^2 G_{4XX}X^2 + \\ & + 24H^2 G_{4XXX}X^3 - 6HG_{4\pi} \dot{\pi} - 30HG_{4\pi X}X \dot{\pi} - \\ & - 12HG_{4\pi XX}X^2 \dot{\pi} + 30H^3 G_{5X}X \dot{\pi} + 26H^3 G_{5XX}X^2 \dot{\pi} + \\ & + 4H^3 G_{5XXX}X^3 \dot{\pi} - 18H^2 G_{5\pi}X - 27H^2 G_{5\pi X}X^2 - \\ & - 6H^2 G_{5\pi XX}X^3 - 90H^2 F_4X^2 - 78H^2 F_{4X}X^3 - \\ & - 12H^2 F_{4XX}X^4 - 168H^3 F_5X^2 \dot{\pi} - 102H^3 F_{5X}X^3 \dot{\pi} - \\ & - 12H^3 F_{5XX}X^4 \dot{\pi}. \end{aligned} \quad (25)$$

⁶ В общем случае в теориях с модифицированной гравитацией (именно так обстоит дело с теорией Хорндески и её расширениями) NEC (1) заменяется условием изотропной сходимости (англ. Null Convergence Condition, NCC) [62]: $R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu > 0$, где $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи.

⁷ Отметим, что здесь и далее мы используем фоновые уравнения движения, явную форму которых можно найти, например, в [67].

Действия (19) и (22) были получены для теории Хорндески в [66] и позднее обобщены на случай расширенной теории Хорндески, например, в [67].

Действие (22) не содержит производных по времени ни от α , ни от β , и, следовательно, вариация действия по α и β даёт два уравнения связи:

$$\frac{\Delta\beta}{a^2} = \frac{1}{\Theta} \left(3\Theta\dot{\zeta} - (\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\kappa}) \frac{\Delta\zeta}{a^2} + \Sigma\alpha \right), \quad (26a)$$

$$\alpha = \frac{\mathcal{G}_T \dot{\zeta}}{\Theta}. \quad (26b)$$

Используя эти связи, чтобы выразить α и $\Delta\beta$, представим действие (22) в терминах одной динамической степени свободы ζ , которая соответствует возмущению кривизны:

$$S_{\zeta}^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left[\mathcal{G}_S \dot{\zeta}^2 - \mathcal{F}_S \frac{(\nabla\zeta)^2}{a^2} \right], \quad (27)$$

где были введены следующие обозначения:

$$\mathcal{G}_S = \frac{\Sigma\mathcal{G}_T^2}{\Theta^2} + 3\mathcal{G}_T, \quad (28)$$

$$\mathcal{F}_S = \frac{1}{a} \frac{d\mathcal{F}}{dt} - \mathcal{F}_T, \quad (29)$$

$$\xi = \frac{a(\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\kappa}) \mathcal{G}_T}{\Theta}. \quad (30)$$

Квадратичные действия (19) и (27) описывают одну скалярную (ζ) и две тензорные (h_{ij}^T) степени свободы. Квадраты скоростей звука для скалярных и тензорных мод имеют следующий вид соответственно:

$$c_T^2 = \frac{\mathcal{F}_T}{\mathcal{G}_T}, \quad c_S^2 = \frac{\mathcal{F}_S}{\mathcal{G}_S}. \quad (31)$$

В рамках небольшого отступления кратко обсудим основные типы неустойчивостей, которые могут возникнуть на линеаризованном уровне возмущений (подробнее см. [16]). В случае однородного и изотропного фона коэффициенты $\mathcal{G}_T$, $\mathcal{F}_T$, $\mathcal{G}_S$ и $\mathcal{F}_S$ являются функциями времени. Наиболее опасными являются неустойчивости, возникающие при высоких энергиях, когда характерные масштабы временных и пространственных изменений полей ζ и h_{ij}^T значительно меньше, чем характерный временной масштаб изменения однородного фона. В высокоэнергетическом приближении коэффициенты $\mathcal{G}_{S,T}$ и $\mathcal{F}_{S,T}$ допустимо считать не зависящими от времени на соответствующих временных интервалах. Тогда возможны следующие ситуации (обозначения $\mathcal{G}_{S,T}$, $\mathcal{F}_{S,T}$ относятся к парам коэффициентов $\mathcal{G}_S$, $\mathcal{F}_S$ или $\mathcal{G}_T$, $\mathcal{F}_T$):

1. Решение с градиентными неустойчивостями (экспоненциальный рост возмущений):

$$\mathcal{G}_{S,T} > 0, \quad \mathcal{F}_{S,T} < 0, \quad \text{или} \quad \mathcal{G}_{S,T} < 0, \quad \mathcal{F}_{S,T} > 0. \quad (32)$$

2. Решение с духами (катастрофическая неустойчивость вакуума (см. обсуждение в [16])):

$$\mathcal{G}_{S,T} < 0, \quad \mathcal{F}_{S,T} < 0. \quad (33)$$

3. Устойчивое решение:

$$\mathcal{G}_{S,T} > 0, \quad \mathcal{F}_{S,T} > 0. \quad (34)$$

Отметим, что мы не рассматриваем неустойчивости типа тахионов, т.е. моды с отрицательной массой или мнимыми частотами при малых импульсах, поскольку этот случай обычно требует проведения полноценного анализа устойчивости.

Другая потенциальная проблема связана со сверхсветовыми модами. Здесь и далее мы накладываем дополнительные условия так, что появление мод, распространяющихся со скоростями, превышающими скорость света, исключено вовсе. Следует, однако, отметить, что проблема сверхсветовых скоростей и устойчивость не связаны друг с другом напрямую: сверхсветовые моды могут возникать в окрестности той области решения, где условия устойчивости выполнены (см., например, [15, 68]). Таким образом, проблема сверхсветового распространения требует отдельного анализа, и для того чтобы скорости тензорных и скалярной мод (31) не превышали скорость света, условия устойчивости (34) необходимо модифицировать следующим образом:

$$\mathcal{G}_T \geq \mathcal{F}_T > 0, \quad \mathcal{G}_S \geq \mathcal{F}_S > 0. \quad (35)$$

Так, выполнение условий (35) позволяет гарантировать, что космологическое решение в (расширенной) теории Хорндески устойчиво и не допускает возмущений, распространяющихся со скоростями больше скорости света. Более детально вопрос о сверхсветовых модах мы обсудим в разделе 4.2.

В результате в рамках различных подклассов теории Хорндески было предложено большое количество космологических решений без начальной сингулярности с фазой отскока, например, в [69–78], или начинающихся с эпохи генезиса [14, 15, 79–93]; данные решения удовлетворяют указанным выше условиям устойчивости как минимум на протяжении и вблизи фазы с нарушенным NEC.

Хотя в (расширенных) теориях Хорндески не возникает явных патологий на стадии нарушения NEC, обеспечение отсутствия неустойчивостей на протяжении всей эволюции космологического решения без начальной сингулярности оказалось нетривиальной задачей. Проблема глобальной, или "полной", устойчивости несингулярных космологических сценариев впервые обсуждалась в [94] в подклассе $\mathcal{L}_3$ теории Хорндески (7) и была сформулирована в виде теоремы, запрещающей существование полностью устойчивых несингулярных космологических решений типа отскока и генезиса. Позднее запрещающая теорема была обобщена на случай теории Хорндески, включающей все подклассы (5) в [95] (см. также [96]). В разделе 3 мы обратимся к формулировке и доказательству запрещающей теоремы для полностью устойчивых несингулярных решений с метрикой FLRW в теории Хорндески, а затем обсудим существующие способы обойти эту теорему.

3. Устойчивость космологических сценариев без начальной сингулярности: запрещающая теорема и способы её обойти

3.1. Запрещающая теорема в теории Хорндески

Начнём с определения терминов и уточним понятие полностью устойчивого решения на фоне метрики FLRW. Так, в дальнейшем под "полной устойчивостью"

подразумевается, что патологические возмущения не возникают вокруг фонового решения на протяжении всего времени эволюции системы. Согласно уравнению (34), отсутствие духов и градиентных неустойчивостей, а также (суб)световое распространение всех мод возмущений над однородным фоновым решением предполагает следующие ограничения на коэффициенты в квадратичных действиях (19) и (27):

$$\mathcal{G}_T \geq \mathcal{F}_T > \epsilon > 0, \quad \mathcal{G}_S \geq \mathcal{F}_S > \epsilon > 0. \quad (36)$$

Здесь и далее ϵ обозначает некоторую положительную константу, значение которой несущественно для наших рассуждений и может быть разным в различных формулах ниже. Целью введения этой константы в уравнение (36) является стремление избежать ситуаций, когда $\mathcal{G}_{S,T}, \mathcal{F}_{S,T} \rightarrow 0$ в асимптотическом прошлом и/или будущем. Указанные ситуации мы рассматриваем отдельно в разделе 3.2. Далее мы рассматриваем только космологические решения без начальной сингулярности, для которых $a > \epsilon > 0$, где ϵ обеспечивает ограничение масштабного фактора снизу и, следовательно, гарантирует геодезическую полноту (случай быстро стремящегося к нулю масштабного фактора в асимптотическом прошлом или будущем мы прокомментируем в разделе 3.2).

Запрещающая теорема утверждает, что в теории Хорндески не существует полностью устойчивых несингулярных космологических решений с $a > \epsilon > 0$, поскольку неустойчивость неизбежно проявляется в скалярном секторе возмущений, если рассматривать полное время эволюции решения.

Мы изложим доказательство теоремы методом от противного, т.е. будем исходить из предположения, что в теории Хорндески существует несингулярное космологическое решение, которое всегда удовлетворяет критериям устойчивости (36). Теперь обратимся к ограничению на градиентный коэффициент $\mathcal{F}_S$ в квадратичном действии для скалярных мод (см. (27) и (29), (30)):

$$\frac{d\xi}{dt} = a(\mathcal{F}_S + \mathcal{F}_T) > \epsilon > 0, \quad (37)$$

где

$$\xi = \frac{a\mathcal{G}_T^2}{\Theta}. \quad (38)$$

Напомним, что $\mathcal{D} = 0$ для теории Хорндески (см. (23)). Согласно критерию устойчивости (36) и определению (37) $d\xi/dt$ принимает строго положительные значения в любой момент времени, следовательно, ξ — монотонная функция времени. Покажем теперь, что эта монотонная функция ξ неизбежно пересекает нуль в некоторый момент времени, что прямо противоречит определению ξ в (38), поскольку $\mathcal{G}_T > \epsilon > 0$, $a > \epsilon > 0$, а Θ — гладкая функция времени, имеющая конечное значение во всех точках (определение см. в (24)).

Проинтегрируем (37) от некоторого момента времени t_i до $t_f > t_i$, и в результате получим:

$$\int_{t_i}^{t_f} a(\mathcal{F}_S + \mathcal{F}_T) dt = \xi(t_f) - \xi(t_i). \quad (39)$$

Естественно предположить, что интеграл в левой части расходится на временных бесконечностях, т.е. при $t_i \rightarrow -\infty$ и $t_f \rightarrow +\infty$ (для обратного потребовалось бы,

чтобы $\mathcal{F}_T$ и $\mathcal{F}_S$ достаточно быстро приближались к нулю в асимптотическом прошлом и/или будущем, что противоречит (36)). Теперь предположим, что $\xi(t_i) < 0$, тогда

$$\int_{t_i}^{t_f} a(\mathcal{F}_S + \mathcal{F}_T) dt - |\xi(t_i)| = \xi(t_f), \quad (40)$$

и поскольку интеграл расходится в асимптотическом будущем, существует достаточно большое t_f , для которого $\xi(t_f) > 0$. Следовательно, с учётом непрерывности монотонной функции, $\xi(t)$ пересекает нуль в некоторый момент между t_i и t_f . Однако, как мы указывали выше, согласно определению ξ (38) и ограничениям (36), последнее невозможно для несингулярных космологических решений с $a > \epsilon > 0$. Единственная возможность для ξ пересечь нуль — когда $\Theta \rightarrow \infty$, что соответствует сингулярности в классическом решении, поскольку Θ — это комбинация функций лагранжиана и фоновых величин (см. (24)). Поэтому мы приходим к выводу, что ξ должно быть положительным всегда. Но если переписать

$$\xi(t_i) = \xi(t_f) - \int_{t_i}^{t_f} a(\mathcal{F}_S + \mathcal{F}_T) dt, \quad (41)$$

мы видим, что правая часть становится отрицательной для $t_i \rightarrow -\infty$, следовательно, $\xi(t_i) < 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Было доказано, что запрещающая теорема справедлива даже при наличии дополнительной материи помимо скалярного поля теории Хорндески [95, 97, 98], а также в случае открытой модели Вселенной [99].

Далее мы обсудим существующие "лазейки" в запрещающей теореме и возможные способы обойти её. На практике все стратегии обхода запрещающей теоремы предлагают различные способы разрешения противоречия между тем, что по определению ξ (38) не может беспрепятственно пересечь нуль, но в то же время это пересечение нуля необходимо, чтобы избежать возникновения градиентных неустойчивостей (37).

3.2. Способы обойти запрещающую теорему:

$\xi \neq 0$ и режим сильной связи

Одним из способов разрешения указанного выше противоречия является запрет пересечения нулевого значения величиной ξ . Такая лазейка связана с ослаблением предположения, что центральный интеграл в (39) расходится при $t_i \rightarrow -\infty$ и/или $t_f \rightarrow +\infty$, что естественно следует из требования $\mathcal{F}_T, \mathcal{F}_S > \epsilon > 0$ в (36). Как уже было отмечено в [95], можно рассмотреть случай достаточно быстрого убывания $\mathcal{G}_{S,T}, \mathcal{F}_{S,T} \rightarrow 0$ в асимптотическом прошлом и/или будущем, так что интеграл в (39) сходится при $t_i \rightarrow -\infty$ и/или $t_f \rightarrow +\infty$ и, следовательно, функция ξ не обязательно пересекает нуль. Эта лазейка была использована в [77, 93, 95] при построении частных примеров сценариев с фазой генезиса и космологическим отскоком в теории Хорндески без очевидного возникновения градиентной неустойчивости.

Следует отметить, что у этого подхода есть свои тонкости, поскольку, по крайней мере на первый взгляд, $\mathcal{G}_{S,T}, \mathcal{F}_{S,T} \rightarrow 0$ указывает на то, что в асимптотическом прошлом и/или будущем имеет место режим сильной связи. Однако в [100–103] было явно показано, что в пространстве параметров лагранжиана Хорндески суще-

существует область, в которой проблема сильной связи не возникает, и в теории Хорндески можно построить полностью устойчивое решение без начальной сингулярности.

Другим способом добиться сходимости интеграла в (39) является отказ от требования, чтобы масштабный фактор был строго положительным, т.е. допускается асимптотика $a \rightarrow 0$. Именно такая стратегия была предложена в [94] в рамках модифицированного сценария генезиса. Следует отметить, что случай сходящегося интеграла сталкивается с проблемой геодезической неполноты [63], что не обязательно является патологией, но требует дополнительного изучения [104].

3.3. Способы обойти запрещающую теорему: расходящийся ξ - и γ -кроссинг

Альтернативный способ обойти запрещающую теорему состоит в том, чтобы, наоборот, сделать ξ в (38) равным нулю, изменив поведение коэффициента Θ . Возможна ситуация, в которой Θ и $\mathcal{G}_T$ равны нулю одновременно, т.е. $\Theta(t_*) = 0$ и $\mathcal{G}_T(t_*) = 0$, так что ξ может пересечь нуль в момент t_* . Однако такая ситуация подразумевает тонкую подстройку параметров и сталкивается с проблемой сильной связи, так как $\mathcal{G}_T$ стремится к нулю в конечный момент времени t_* .

Отметим, что случай $\Theta = 0$ в произвольный момент времени может в принципе показаться неприемлемым без использования тонкой настройки, из-за того что Θ стоит в знаменателях как $\mathcal{G}_S$, так и $\mathcal{F}_S$ (28), (29). Ещё хуже выглядит то, что Θ присутствует в знаменателях обоих ограничений (26), что ставит под сомнение справедливость полученного квадратичного действия для скалярной моды (27). Указанные проблемы, связанные с пересечением величиной Θ нуля, были рассмотрены в [105], где момент $\Theta = 0$ был назван γ -кроссингом (название является отсылкой к исходным работам [68, 77, 106], где данный вопрос первоначально рассматривался в других обозначениях и $\Theta \equiv \gamma$). Было явно показано, что все возмущения, включая нестационарные α и β в (26), на самом деле являются конечными даже при γ -кроссинге, и никаких других расходимостей не возникает, следовательно, $\Theta = 0$ вполне допустимо. Подчеркнём, что сам по себе γ -кроссинг не помогает обойти запрещающую теорему, однако это явление оказывается критически важным для построения космологических решений с отскоком и генезисом с простыми асимптотиками при $t \rightarrow \pm\infty$, где теория сводится к ОТО.

В [107] был предложен любопытный способ обойти запрещающую теорему, вдохновлённый γ -кроссингом: рассмотрим случай, когда Θ тождественно равно нулю, т.е. $\Theta \equiv 0$ в любой момент времени. Такая ситуация предполагает наложение особых ограничений на функции лагранжиана, т.е. выделяет специфический подкласс теории Хорндески, а также требует другого способа исключения нестационарных переменных α и β в квадратичном действии (22). Было показано, что в таком подклассе теории Хорндески с учётом наложенных ограничений нет динамических скалярных степеней свободы, следовательно, в теории распространяются только две степени свободы, как в ОТО. Однако если допустить наличие анизотропии пространства, то в данном специальном подклассе теории Хорндески скалярная степень свободы возникает вновь, и устойчивость решения немедленно нарушается [108].

3.4. Способы обойти запрещающую теорему: теория кускутона

Ещё одним специальным подклассом теории Хорндески, позволяющим обойти запрещающую теорему, является теория кускутона [109, 110] (англ. cuscuton), а также расширенная теория кускутона [111, 112]. Основная идея концептуально похожа на ситуацию с $\Theta \equiv 0$ и сводится к специальному выбору функций лагранжиана таким образом, чтобы скалярная степень свободы становилась нестационарной. Первоначально этот вариант был реализован в рамках некоторого подкласса теории k-эссенции, где на функции лагранжиана накладывается дополнительное соотношение (см. (5)): $F_X X + 2F_{XX} X^2 = 0$. Действительно, данное соотношение следует из требования

$$\Sigma = -\frac{3\Theta^2}{\mathcal{G}_T}, \quad (42)$$

что приводит к соотношению $\Sigma = -6H^2 G_4$, которое следует из определений Θ и $\mathcal{G}_T$ в (20) и (24) для случая k-эссенции. Сравнивая этот результат с определением Σ (25), мы приходим к ограничению на рассматриваемую функцию лагранжиана F . Центральным следствием является тот факт, что такой специфический выбор в (42) приводит к $\mathcal{G}_S = 0$ (см. (28)) и, следовательно, скалярная мода действительно является нестационарной [110]. Такой принцип ограничения на функции лагранжиана был далее обобщён на случай общей теории Хорндески и даже на случай расширенной теории Хорндески [112]. Теория кускутона, как и случай с $\Theta \equiv 0$ выше, является сингулярным случаем теории Хорндески. Однако теория кускутона и её дополнительное условие вырожденности (42) являются более устойчивыми по сравнению с теорией с $\Theta \equiv 0$, поскольку в данном случае, например, анизотропия пространства в случае космологического фона не влияет на число динамических степеней свободы. Более того, гамильтонов анализ для теорий такого типа показывает, что над любым космологическим фоном не существует распространяющейся скалярной моды [112, 113]. Этот результат опирается на выбор "унитарного расслоения" (т.е. скалярное поле $\pi(t)$ зависит только от времени), который всегда можно выбрать для всюду времениподобного градиента скалярного поля. Однако в случае произвольной конфигурации скалярного поля использование унитарного расслоения невозможно, и распространяющаяся мода возникает вновь и может иметь патологичный характер. Такая ситуация напоминает характерную особенность теорий U-DHOST [114]: эти теории кажутся вырожденными, когда записаны с использованием унитарного расслоения, но как только рассматривается их полностью ковариантная версия без специфического расслоения или выбора калибровки, появляется дополнительная степень свободы.

В результате было предложено несколько конкретных примеров решений с отскоком в рамках теории кускутона (см., например, [115–118]).

3.5. Способы обойти запрещающую теорему: расширенная теория Хорндески

Наконец, чтобы обойти запрещающую теорему, можно рассмотреть более общие скалярно-тензорные теории, включающие теорию Хорндески в качестве подкласса. В частности, можно рассмотреть более общую геометрию с динамическим кручением в теории Хорндески – Кар-

тана [119, 120, 123] или телепараллельную гравитацию Хорндески [121, 122]. Традиционным вариантом, однако, является рассмотрение расширенной теории Хорндески (11) или теории DHOST (13). Действительно, уже в расширенной теории Хорндески определение ξ модифицируется по сравнению со случаем общей теории Хорндески, поскольку коэффициент $\mathcal{D} \neq 0$ в (30) благодаря нетривиальным функциям $F_4(\pi, X)$ и $F_5(\pi, X)$. В то время как коэффициент $\mathcal{G}_T$ по-прежнему отвечает за устойчивость в тензорном секторе и должен быть всегда положительным, комбинация $(\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi})$ может принимать любые значения, включая нулевые и отрицательные. Следовательно, благодаря неограниченности значений $\mathcal{D}$ функция ξ может монотонно расти и в какой-то момент времени пересечь нуль. В этом случае запрещающая теорема больше не применима.

В контексте устойчивых космологических сценариев без начальной сингулярности расширенные теории Хорндески были исследованы как в рамках эффективной теории поля [63, 64, 124–127], так и в случае ковариантной теории [67, 105, 128–134], где были приведены явные примеры различных устойчивых решений с отскоком и генезисом.

3.6. Запрещающая теорема и дисформные преобразования

Описанный выше способ обойти запрещающую теорему путём обобщения теории до расширенной теории Хорндески (11) может показаться несколько противоречивым, поскольку, как было упомянуто выше, существует связь посредством дисформного преобразования метрики между теорией Хорндески и расширенной теорией Хорндески (см. подробное обсуждение, например, в [47, 53, 59]). Действительно, дисформное преобразование (10) является переопределением полей, и пока такое преобразование обратимо, оно не может изменить число степеней свободы [135–137] или повлиять на устойчивость решения.

В связи с этим возникает естественный вопрос: как становится возможным, что расширенная теория Хорндески допускает существование полностью устойчивых решений без начальной сингулярности, а общая теория Хорндески — нет? Ответ заключается в том, что расширенная теория Хорндески, допускающая устойчивое решение, и соответствующая ей общая теория Хорндески оказываются связаны дисформным преобразованием, которое становится сингулярным в некоторый момент времени. Такое свойство было впервые получено в рамках EFT-подхода в [63], а затем подтверждено в ковариантном формализме [55, 130]. Данное свойство можно обнаружить при анализе правил преобразования для X -производных функций лагранжиана $\bar{G}_4$ и $\bar{G}_5$ при дисформном преобразовании (10) с $\Omega(\pi, X) = 1$:

$$\begin{aligned}\bar{G}_{4\bar{X}} &\equiv \frac{\partial \bar{G}_4}{\partial \bar{X}} = \left(\hat{G}_4(1 + \Gamma X) - \frac{1}{2} \hat{G}_4(\Gamma + X\Gamma_X) \right) \frac{\sqrt{1 + \Gamma X}}{1 - \Gamma_X X^2}, \\ \bar{G}_{5\bar{X}} &\equiv \frac{\partial \bar{G}_5}{\partial \bar{X}} = G_{5X} \frac{(1 + \Gamma X)^{5/2}}{1 - \Gamma_X X^2},\end{aligned}\quad (43)$$

где функции $\bar{G}_{4\bar{X}}$ и $\bar{G}_{5\bar{X}}$ принадлежат теории Хорндески, а $\hat{G}_4$ ⁸ и G_{5X} являются их аналогами из лагранжиана

расширенной теории Хорндески. Оба правила преобразования содержат один и тот же знаменатель, который можно переписать следующим образом (подробнее см. [55]):

$$\frac{1}{1 - \Gamma_X X^2} = \frac{\mathcal{G}_T}{\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi}}, \quad (44)$$

где $\mathcal{G}_T$ и $\mathcal{D}$ совпадают с величинами, входящими в определение ξ в (30). Как обсуждалось в разделе 3.5, предполагается, что комбинация $(\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi})$ пересекает нуль в некоторый момент, а это позволяет величине ξ пересечь нуль без явных патологических последствий и в полном согласии с критерием устойчивости (37) в любой момент времени. Видно, что знаменатель преобразования (43) проходит через нуль в тот же момент, что и ξ . Последнее означает, что обе функции лагранжиана $\bar{G}_{4\bar{X}}$ и $\bar{G}_{5\bar{X}}$ имеют расхожимость в данный момент времени. Следовательно, если в расширенной теории Хорндески существует полностью устойчивая несингулярная космологическая модель, то такая теория не может быть дисформно преобразована в подкласс теории Хорндески из-за наличия сингулярности в соответствующих преобразованиях. Таким образом, в действительности никакого противоречия между запрещающей теоремой и существованием полностью устойчивых космологических сценариев без начальной сингулярности в, казалось бы, дисформно связанных теориях не возникает.

Как упоминалось в разделе 1.2, обратимое конформно-дисформное преобразование общего вида (10) связывает теории Хорндески, расширенные теории Хорндески и подкласс DHOST Ia. В последнее время это направление исследования получило определённое развитие, и в результате с помощью применения ещё более общих преобразований метрики были сформулированы новые классы скалярно-тензорных теорий. В частности, были предложены обобщённые дисформные теории Хорндески (англ. Generalized Disformal Horndeski, GDH), которые связаны с теорией Хорндески с помощью обратимого обобщённого дисформного преобразования [138–141] следующего вида:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{F}_0 g_{\mu\nu} + \bar{F}_1 \pi_\mu \pi_\nu + \bar{F}_2 (\pi_\mu X_\nu + \pi_\nu X_\mu) + \bar{F}_3 X_\mu X_\nu, \quad (45)$$

с функциями $\bar{F}_i = \bar{F}_i(\pi, X, Y, Z)$ ($i = 0, 1, 2, 3$), где $Y = \pi_\mu X_\mu$ и $Z = X_\mu X_\mu$, и которые ограничены требованием обратимости, наложенным на преобразование (45) (см., например, [140]). Лагранжиан GDH-теории явно содержит третьи производные скалярного поля, но теория всё ещё описывает 2 + 1 динамические степени свободы, так как данная теория может быть преобразована в теорию Хорндески с помощью обратимого переопределения полей. Теория GDH включает подкласс DHOST Ia как частный случай, но при этом теория GDH является более общей и также включает подклассы, не относящиеся к DHOST теории. Примечательно, что теория GDH не включает подклассы теории DHOST, не связанные дисформно с теорией Хорндески. Как упоминалось ранее, такие дополнительные подклассы DHOST не имеют феноменологически интересного применения в космологии, поэтому мы не будем обсуждать их в данном обзоре.

Оказывается, дисформные преобразования допускают дальнейшее обобщение, что позволяет построить ещё более общие скалярно-тензорные теории. Так, об-

⁸ Здесь мы придерживаемся обозначений в [55], где галочка над $\hat{G}_4$ подчёркивает, что этот вклад появляется за счёт дисформного преобразования $\bar{G}_4$, но не $\bar{G}_5$.

суждалась возможность включать в дисформные преобразования произвольно высокие производные скалярного поля [142] или даже производные метрики [143].

4. Устойчивость космологических сценариев без начальной сингулярности в присутствии дополнительной материи

Вся теоретико-полевая конструкция, связанная с дисформными преобразованиями и вырожденными теориями, прекрасно работает для скалярно-тензорных теорий без дополнительной материи. Однако в расширенных теориях Хорндески зачастую возникают различные сложности, когда в системе появляется связь с другими полями материи. При этом сама теория Хорндески в таком отношении безопасна, и никаких трудностей с появлением дополнительной материи не возникает.

В данном разделе мы обсудим два типа проблем, возникающих при добавлении полей материи. Первый связан с тем, что введение дополнительного набора полей может нарушить условия вырожденности для скалярного сектора, отвечающие за отсутствие в системе духов Остроградского. Второй тип проблем заключается в появлении сверхсветовой моды в скалярном секторе, которая возникает, когда материя со скоростью звука, близкой к скорости света, даже минимально взаимодействует с гравитационным сектором в рамках скалярно-тензорной теории.

4.1. Дополнительная материя и возможное нарушение вырожденности теории

Вопрос о нарушении вырожденности теории при наличии дополнительных полей материи может быть исследован двумя разными способами. Во-первых, можно изучить спектр объединённой теории, состоящей из общей скалярно-тензорной части и дополнительной материи, и выяснить, присутствуют ли в ней духи Остроградского. Альтернативный путь, лежащий в основе более распространённого подхода, заключается в анализе теории, дисформно связанной с исходной. В частности, поскольку все феноменологически интересные скалярно-тензорные теории связаны с теорией Хорндески посредством обратимых (общих) дисформных преобразований, можно воспользоваться этой особенностью и дисформно преобразовать любое обобщение теории Хорндески с дополнительной материей к подклассу Хорндески, где дополнительная материя связана с дисформно преобразованной метрикой, т.е. связь уже не минимальна в терминах исходной метрики.

Детальное исследование показало, что материя, связанная со стандартной дисформной метрикой (10), не нарушает вырожденность теории Хорндески [144, 145]. Другими словами, и теория Хорндески, и теория DHOST Ia допускают наличие дополнительной материи без ущерба для свойств исходной теории. Последнее справедливо, если лагранжиан дополнительной материи не содержит старших производных (т.е. не принадлежит к типу Хорндески), и если слагаемые, описывающие взаимодействие с этой материей, не включают производные. Так, например, допустимы члены взаимодействия со стандартным скалярным полем и с классическими фермионами. Контрпримерами служат 1) низшие подклассы теории Хорндески (7) (а также более старшие), которые можно рассматривать в роли материи, описываемой

лагранжианом со старшими производными, или 2) калибровочно неинвариантное векторное поле, члены взаимодействия которого содержат производные. В обоих случаях результирующая кинетическая матрица многокомпонентной теории уже не является вырожденной. В более общих теориях, таких как GDH-теории, ситуация усложняется: если не рассматривать унитарное расслоение, единственным подклассом, сохраняющим своё свойство вырожденности при взаимодействии со скалярами и фермионами, является теория DHOST Ia [146, 147].

Стоит отметить, что приведённые выше рассуждения сформулированы без выбора конкретного вида фона и подразумевают, что обратимые дисформные преобразования существуют при любых временах. Для полноты устойчивых космологических моделей без начальной сингулярности это не так. Действительно, в разделе 3.6 было показано, что расширенная теория Хорндески, допускающая полностью устойчивое несингулярное решение, не может быть дисформно сведена к подклассу Хорндески из-за существования сингулярной точки (точек) в соответствующих дисформных преобразованиях. Поэтому в данном случае анализ, основанный на дисформных преобразованиях, не может быть использован для проверки вырожденности расширенной теории Хорндески с дополнительной материей в конечном числе точек. Это указывает на то, что вырожденность теории в таких сингулярных точках должна быть изучена отдельно (например, путём анализа спектра линеаризованной теории).

Кроме того, приведённое выше обсуждение актуально для скалярно-тензорных теорий с $2 + 1$ степенями свободы, взаимодействующих с дополнительной материей. Однако отдельного рассмотрения требует случай "двойной вырожденности" в таких скалярно-тензорных теориях, где "первая" вырожденность связана с устранением духа Остроградского, а "вторая" делает скалярную моду нединамической, как, например, в теории кускутона (см. раздел 3.4). Подобные специальные подклассы скалярно-тензорных теорий более чувствительны к появлению новой динамической моды при добавлении полей материи, поскольку дополнительное условие вырожденности (как (42) в примере кускутона) разрушается даже в случае минимально связанной материи. Последнее было явно показано для случая "завуалированной" теории гравитации [144] (англ. "veiled" gravity), но другие случаи, подобные кускутону, также могут сталкиваться с проблемами такого характера.

4.2. Дополнительная материя и возможное возникновение сверхсветовых мод

Обратимся вновь к вопросу о распространении мод со сверхсветовыми скоростями, который был кратко упомянут при перечислении условий устойчивости в разделе 2 (см. (35)). Хотя, как обсуждалось выше, теории Хорндески и теории DHOST сохраняют своё свойство вырожденности при взаимодействии с дополнительными полями материи, а значит, защищены от духов Остроградского, свойства самой дополнительной материи могут претерпевать изменения: в частности, соответствующая скорость звука в дополнительной материи может превышать скорость света.

Следует отметить, что возможное появление сверхсветовых мод является характерной особенностью скалярно-тензорных теорий типа семейства Хорндески (см.,

например, [24, 148–156]). Обычно моды, распространяющиеся со сверхсветовой скоростью над произвольным фоновым решением, считаются нежелательными, поскольку их существование указывает на то, что данная теория, рассматриваемая как низкоэнергетическая эффективная теория поля, не может иметь лоренц-ковариантного УФ-пополнения [148]. Однако зачастую требование определить лагранжиан во всём фазовом пространстве отсутствует: обычно достаточно оставить в лагранжиане только те члены, которые достаточны для построения решения и анализа его устойчивости (т.е. те члены, которые нетривиальны на данном решении и в его ближайшей окрестности). В таком случае минимальным требованием является отсутствие сверхсветового распространения для возмущений на интересующем нас космологическом решении и в его окрестности. В частности, такой способ изучения сверхсветовых возмущений обсуждался как в сценариях генезиса, так и в сценариях отскока (см., например, [15, 68, 83, 157, 158]).

Ещё один тонкий момент связан с тем, как взаимодействие дополнительной материи с теорией Хорндески и её обобщениями влияет на скорость распространения возмущений над космологическим фоном. Например, для модели генезиса в теории Хорндески было явно показано [83], что при добавлении сколь угодно малого количества идеальной жидкости с нормальным уравнением состояния ($0 < w < 1$) в некоторой исходно устойчивой области фазового пространства возникает сверхсветовая мода [158]. Связь между возникающей сверхсветовой модой и добавлением дополнительной материи продиктована кинетическим смешиванием, или "переплетением" (англ. braiding), скаляра Хорндески с метрикой [36], приводящим к тому, что скорость звука скаляра Хорндески меняется в присутствии других компонент материи.

Было показано, что в расширенной теории Хорндески ситуация иная. Например, в [157] было доказано, что в расширенной теории Хорндески с лагранжианом специального вида, который сам по себе допускает устойчивое решение в виде отскока без проблемы сверхсветового распространения, не возникает сверхсветовых мод при добавлении дополнительной материи в виде идеальной жидкости с параметром уравнения состояния $w \leq 1/3$ (или даже с несколько большим значением w). Однако при анализе скоростей звука скалярных мод над космологическим фоном в общей постановке "расширенная теория Хорндески + идеальная жидкость" оказалось, что при w , равном или близком к 1, скорость распространения одной из скалярных мод неизбежно становится больше скорости света (это не обязательно так при w существенно меньше 1) [157]. Такой эффект связан с обсуждавшимся в [57, 59, 61, 159] фактом, что из-за специфической структуры лагранжиана теории Хорндески происходит кинетическое перемешивание между материей и возмущениями скалярного поля, и поэтому скорости звука обеих скалярных мод изменяются (причём сверхсветовой модой становится та, которая исходно появилась как возмущение дополнительной материи). Появление сверхсветовой моды было также подтверждено результатами аналогичного анализа для случая, когда вместо идеальной жидкости в космологическую среду добавляется обычное скалярное поле, минимально связанное с гравитацией (скорость распространения которой равна скорости света, $c_m = 1$) в рамках расши-

ренной теории Хорндески [160]. Данный анализ также был обобщён на случай DHOST Ia теории в [161].

В следующих разделах мы явно покажем, как связаны скорости распространения скалярных возмущений в DHOST Ia теории в присутствии дополнительного скалярного поля самого общего вида, минимально связанного с гравитацией.

4.3. Теория DHOST Ia и дополнительное скалярное поле: индуцированная сверхсветовая мода

Начнём с краткого обсуждения квадратичного действия для возмущений в подклассе DHOST Ia (13)–(15) без дополнительной материи, что является обобщением результатов для случая линеаризованной расширенной теории Хорндески, приведённых в разделе 2. Затем мы добавим дополнительное поле материи к теории DHOST Ia и обсудим влияние этого поля на устойчивость. Содержание данного раздела в существенной мере опирается на результаты, изложенные в [161].

Нашей отправной точкой является (возмущённый) пространственно-плоский фон FLRW (16) с однородным скалярным полем $\pi = \pi(t)$ теории DHOST. Аналогично тому как это было сделано в разделе 2, мы рассматриваем унитарную калибровку $\delta\pi = 0$, так что динамические возмущения, возникающие в теории DHOST, по-прежнему задаются тензорными модами h_{ij}^T и скалярной модой $\tilde{\zeta}$ (которая отличается от исходной ζ , обсуждавшейся в разделе 2, и определена явно ниже). В теории DHOST Ia соответствующее действие второго порядка по возмущениям в терминах динамических степеней свободы имеет следующий вид⁹:

$$S_\pi^{(2)} = \int dt d^3x a^3 \left[\left(\frac{\mathcal{G}_T}{8} \left(\dot{h}_{ik}^T \right)^2 - \frac{\mathcal{F}_T}{8a^2} (\partial_i h_{kl}^T)^2 \right) + \left(\mathcal{G}_S \dot{\tilde{\zeta}}^2 - \frac{1}{a^2} \mathcal{F}_S (\partial_i \tilde{\zeta})^2 \right) \right], \quad (46)$$

где присутствуют коэффициенты

$$\mathcal{G}_T = -2F_2 + 2A_1X, \quad (47a)$$

$$\mathcal{F}_T = -2F_2, \quad (47б)$$

$$\mathcal{G}_S = \frac{\tilde{\Sigma} \mathcal{G}_T^2}{\tilde{\Theta}^2} + 3\mathcal{G}_T, \quad (47в)$$

$$\mathcal{F}_S = \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left[\frac{a \mathcal{G}_T (\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\tilde{\pi} + \mathcal{F}_T \Gamma)}{\tilde{\Theta}} \right] - \mathcal{F}_T \quad (47г)$$

и введены обозначения

$$\mathcal{D} = -2A_1\dot{\pi} + 4F_{2X}\dot{\pi}, \quad (48a)$$

$$\Gamma = \frac{X}{2\mathcal{G}_T} (2A_1 - 4F_{2X} - A_3X), \quad (48б)$$

$$\tilde{\Theta} = \Theta - \mathcal{G}_T \dot{\Gamma}, \quad (48в)$$

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma + 3\mathcal{G}_T \dot{\Gamma}^2 + 6\tilde{\Theta} \dot{\Gamma} - \frac{3}{a^3} \frac{d}{dt} [a^3 (\tilde{\Theta} + \mathcal{G}_T \dot{\Gamma}) \Gamma]. \quad (48г)$$

Явные выражения для Σ и Θ в (48в) и (48г) имеют громоздкий вид и приведены для полноты изложения в

⁹ Здесь мы используем обозначения для коэффициентов, аналогичные тем, что используются при анализе расширенной теории Хорндески (см. (19) и (27)).

приложении. В данных обозначениях скалярное возмущение имеет вид $\tilde{\zeta} = \zeta - \alpha\Gamma$. Полученные ранее результаты для случая расширенной теории Хорндески восстанавливаются при следующем выборе функций лагранжиана [49]:

$$\begin{aligned} F_2 &= -G_4, & A_1 &= -A_2 = -(2G_{4X} - XF_4), \\ A_3 &= -A_4 = -2F_4, & A_5 &= 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Заметим, что Γ тождественно равно нулю при таком выборе функций, и мы возвращаемся к исходному возмущению кривизны $\tilde{\zeta} \equiv \zeta$. Также отметим, что здесь и далее мы не используем фоновые уравнения движения при выводе действия для возмущений.

Как и ранее для устойчивости фонового решения требуется $\mathcal{G}_T, \mathcal{F}_T, \mathcal{G}_S, \mathcal{F}_S > \epsilon > 0$ в (46), в то время как квадрат скоростей звука не должен превосходить квадрат скорости света

$$c_{S,0}^2 = \frac{\mathcal{F}_S}{\mathcal{G}_S} \leq 1, \quad c_T^2 = \frac{\mathcal{F}_T}{\mathcal{G}_T} \leq 1. \quad (50)$$

Теперь обратимся к анализу дополнительных полей материи и рассмотрим дополнительное скалярное поле χ в виде к-эссенции [34]:

$$S_\chi = \int d^4x \sqrt{-g} P(\chi, Y), \quad Y = g^{\mu\nu} \chi_{,\mu} \chi_{,\nu}. \quad (51)$$

Лагранжиан в (51) описывает скалярное поле χ , минимально взаимодействующее с гравитацией, самого общего вида (в предположении отсутствия в лагранжиане вторых производных). В этом контексте к-эссенция успешно имитирует идеальную жидкость. Уравнение движения для однородного скалярного поля $\chi = \chi(t)$ в плоском пространстве FLRW имеет вид

$$\ddot{\chi} + 3 \frac{P_Y}{Q} H \dot{\chi} - \frac{P_\chi - 2YP_{\chi Y}}{2Q} = 0, \quad (52)$$

где $Q = P_Y + 2YP_{YY}$. В случае пространственно-однородного фона (возможно, со скатыванием $Y = \dot{\chi}^2 \neq 0$) условия устойчивости для скалярного поля χ имеют стандартный вид

$$P_Y > 0, \quad Q > 0, \quad (53)$$

а скорости распространения возмущений равны

$$c_m^2 = \frac{P_Y}{Q}. \quad (54)$$

Наш основной результат о возникающей сверхсветовой моде, который мы обсуждаем далее, наиболее ярко проявляется в случае стандартного скалярного поля с

$$P(\chi, Y) = \frac{1}{2} Y - V(\chi) \quad (55)$$

и $c_m^2 = 1$, но пока, для сохранения общности рассуждений, мы не будем делать никаких предположений о форме функции $P(\chi, Y)$.

Теперь объединим две описанные теории и рассмотрим DHOST Ia в присутствии дополнительного скалярного поля (51) над фоном, где $\dot{\chi}$ и $\ddot{\chi}$ нетривиальны (в частности, $Y = \dot{\chi}^2 \neq 0$). Выражения для $\mathcal{G}_T$ и $\mathcal{F}_T$ в уравнениях (47а), (47б) не изменяются, поэтому тензорные возмущения распространяются с (суб)световыми скоростями в соответствии с нашим требованием в (50).

Напротив, ситуация в скалярном секторе кардинально меняется. Нетривиальный фон $\dot{\chi}$ приводит к смешиванию между скалярами $\tilde{\zeta}$ и $\delta\chi$ [61], поэтому квадратичное действие для динамических степеней свободы в совмещённом скалярном секторе принимает вид

$$S_{\pi+\chi}^{(2)\text{ scalar}} = \int dt d^3x a^3 \left[G_{AB} \dot{v}^A \dot{v}^B - \frac{1}{a^2} F_{AB} \partial_i v^A \partial_i v^B + \dots \right], \quad (56)$$

где $A, B = 1, 2$, $v^1 = \tilde{\zeta}$, $v^2 = \delta\chi$, а многоточием обозначены члены с менее чем двумя производными. Матрицы G_{AB} и F_{AB} имеют следующий вид:

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_S + \frac{\mathcal{G}_T^2}{\Theta^2} YQ & \dot{\chi} Qg \\ \dot{\chi} Qg & Q \end{pmatrix}, \quad F_{AB} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_S & \dot{\chi} P_Y f \\ \dot{\chi} P_Y f & P_Y \end{pmatrix}, \quad (57)$$

где

$$g = -\frac{\mathcal{G}_T}{\Theta} \left(1 - 3 \frac{P_Y}{Q} \Gamma \right), \quad (58a)$$

$$f = -\frac{(\mathcal{G}_T + D\dot{\pi} + \mathcal{F}_T \Gamma)}{\Theta}. \quad (58b)$$

Отметим, что эти выражения справедливы для любого Y . Оба квадрата скоростей звука $c_{S,\pm}^2$ задаются собственными значениями матрицы $G^{-1}F$, т.е. они удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\det(F_{AB} - c_m^2 G_{AB}) = 0. \quad (59)$$

Прежде чем перейти к рассмотрению случая теории DHOST Ia, обсудим результаты для (расширенной) теории Хорндески [160].

4.3.1. Случай расширенной теории Хорндески: сверхсветовая мода, индуцированная стандартным скалярным полем. В случае расширенной теории Хорндески обе матрицы G_{AB} и F_{AB} упрощаются, так как $\Gamma \equiv 0$ (см. (48б), (49) и (58)). Отсюда следует, что из уравнения (59) получаются следующие скорости распространения $\tilde{\zeta} \equiv \zeta$ и $\delta\chi$ (напомним, что $c_m^2 = P_Y/Q$):

$$c_{S,\pm}^2 = \frac{1}{2} (c_m^2 + \mathcal{A}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(c_m^2 - \mathcal{A})^2 + \mathcal{B}}, \quad (60)$$

где

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{F}_S}{\mathcal{G}_S} - \frac{YP_Y}{\mathcal{G}_S} \frac{\mathcal{G}_T(\mathcal{G}_T + 2D\dot{\pi})}{\Theta^2}, \quad \mathcal{B} = 4c_m^2 \frac{YP_Y}{\mathcal{G}_S} \frac{(D\dot{\pi})^2}{\Theta^2}.$$

Для устойчивого и однородного решения обе матрицы G_{AB} и F_{AB} должны быть положительно определёнными ($G_{11}, G_{22} > 0$, $\det G > 0$ и $F_{11}, F_{22} > 0$, $\det F > 0$):

$$\mathcal{G}_S > 0, \quad \mathcal{F}_S > 0, \quad P_Y > 0, \quad Q > 0, \quad (61)$$

$$\mathcal{F}_S - YP_Y \frac{(\mathcal{G}_T + D\dot{\pi})^2}{\Theta^2} > 0,$$

и, следовательно, при $Y > 0$ коэффициент $\mathcal{B}$ положителен. Отсюда немедленно следует

$$c_{S+}^2 > c_m^2 \quad \text{при } Y \neq 0. \quad (62)$$

В результате, если скалярное возмущение $\delta\chi$ распространяется со скоростью света, $c_m = 1$, то согласно (62) эта мода распространяется со скоростью выше скорости света в случае расширенной теории Хорндески, взаимодействующей со скалярным полем. отождествление $c_{S,+}^2$ со скоростью возмущений в дополнительной материи основано на том, как восстанавливается частный предел теории Хорндески в соответствующих формулах.

Действительно, в случае теории Хорндески (5) коэффициент $\mathcal{D}$ исчезает (см. (23)), так что $g = f$ в матрицах G_{AB} и F_{AB} в (57) и матрица $G^{-1}F$ становится треугольной. В результате скорость $\delta\chi$ восстанавливает своё стандартное значение c_m , а скорость распространения возмущения кривизны ζ изменяется. Действительно, при $\mathcal{D} = 0$ скорости распространения в (60) упрощаются следующим образом:

$$c_{S,-}^2 \Big|_{\mathcal{D}=0} = \frac{\mathcal{F}_S}{\mathcal{G}_S} - \frac{Y P_Y}{\mathcal{G}_S} \frac{\mathcal{G}_T^2}{\Theta^2}, \quad c_{S,+}^2 \Big|_{\mathcal{D}=0} = c_m^2, \quad (63)$$

откуда явно следует, что $c_{S,+}^2$ относится к $\delta\chi$.

В частности, результат (62) показывает, что в случае стандартного скалярного поля (55), где $c_m^2 = 1$ для любого Y , скалярный сектор системы расширенная теория Хорндески + $P(\chi, Y)$ содержит сверхсветовую моду даже при сколь угодно малом количестве кинетической энергии, связанной со скаляром $\chi(t)$. Таким образом, мы приходим к выводу, что в системе нескольких скалярных полей, где стандартное скалярное поле минимально связано с расширенной теорией Хорндески, неизбежно возникает сверхсветовая мода.

4.3.2. Случай теории DHOST Ia: сверхсветовая мода и исключительный подкласс теории. Вернёмся к случаю DHOST Ia и предположим, что фоновое решение устойчиво, а возмущения DHOST теории над этим решением распространяются со скоростями, не превышающими скорость света. Условия устойчивости для скалярного сектора в объединённой системе DHOST Ia + k-эссенция являются обобщением условий устойчивости для системы расширенная теория Хорндески + k-эссенция в (61) и выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_S > 0, \quad \mathcal{F}_S > 0, \quad P_Y > 0, \quad Q > 0, \\ \mathcal{F}_S - Y P_Y \frac{(\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi} + \mathcal{F}_T \Gamma)^2}{\Theta^2} > 0, \\ 1 + \frac{6\mathcal{G}_T^2}{\Theta^2} \frac{Y P_Y}{\mathcal{G}_S} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{P_Y}{Q} \Gamma\right) \Gamma > 0, \end{aligned} \quad (64)$$

где вторая и третья строки характерны для объединённой теории, а первая совпадает с условиями устойчивости для теории DHOST Ia и k-эссенции по отдельности. Заметим, что случай расширенной теории Хорндески (61) немедленно восстанавливается, если взять $\Gamma = 0$. На этом этапе мы не накладываем никаких дополнительных ограничений на фон и не предполагаем никаких соотношений, кроме (15), справедливых для функций лагранжиана в (13).

Рассмотрим общую ситуацию $sf \neq g$ и будем считать Y малым в (57), (58). Тогда необходимо различать два случая:

1. Если $c_m^2 \neq c_{S,0}^2$ (т.е. $P_Y/Q \neq \mathcal{F}_S/\mathcal{G}_S$), тогда из (59) следует, что одна из скоростей равна $c_{S,-} = c_{S,0} + \mathcal{O}(Y)$,

а вторая

$$c_{S,+}^2 = c_m^2 \left(1 + \frac{Y(f-g)^2}{\mathcal{G}_S(c_m^2 - c_{S,0}^2)}\right) + \mathcal{O}(Y^2). \quad (65)$$

Это означает, в частности, что в теории стандартного скалярного поля (55) с $c_m = 1$ и DHOST Ia с $c_{S,0} < 1$, мода, которая исходно соответствует $\delta\chi$, становится сверхсветовой при малых, но ненулевых фоновых значениях Y .

2. Для случая $c_m^2 = c_{S,0}^2$ скорости звука равны

$$c_{S,\pm}^2 = c_m^2 \left[1 \pm \left(\frac{Y P_Y (f-g)^2}{\mathcal{G}_S}\right)^{1/2}\right] + \mathcal{O}(Y), \quad (66)$$

это вновь доказывает, что в случае стандартного скалярного поля с $c_m = 1$ одна из мод становится сверхсветовой даже при малых Y .

Наконец, обратимся к частному случаю $f = g$. Используя (57), можно убедиться, что в этом случае матрица $G^{-1}F$ является треугольной для *любого* значения Y , так что одна из скоростей звука остаётся неизменной, $c_{S,+}^2 = c_m^2 = P_Y/Q$, а другая не обязательно превышает скорость света ($c_{S,-} = c_{S,0} + \mathcal{O}(Y)$ для малых Y). Для дополнительного скалярного поля с $c_m = 1$ условие $f = g$ даёт ограничение $\mathcal{D}\dot{\pi} = -(3\mathcal{G}_T + \mathcal{F}_T)\Gamma$ на лагранжиан DHOST, что в явном виде запишется как

$$A_3 = \frac{2(A_1 - 2F_{2X})(A_1 X - 2F_2)}{X(3A_1 X - 4F_2)}. \quad (67)$$

Это исключительный подкласс теории DHOST Ia, в котором добавление дополнительного скалярного поля с $c_m = 1$ не обязательно приводит к возникновению сверхсветовой моды. Отметим, что данный подкласс включает теорию с $A_1 = 2F_{2X}$ и $A_3 = 0$, которая является теорией Хорндески, и не включает расширенную теорию Хорндески (GLPV) с $XA_3 = 2A_1 - 4F_{2X}$ (последнее соотношение несовместимо с (67) для $\mathcal{G}_T \neq 0$ (см. (47a))). Такое наблюдение согласуется с результатом, полученным для расширенной теории Хорндески в разделе 4.3.1.

Таким образом, индуцированная сверхсветовая мода над космологическим фоном обычно появляется в классе DHOST Ia при добавлении в систему даже небольшого количества кинетической энергии $Y > 0$, связанной с дополнительным скалярным полем χ (55) с $c_m^2 = 1$. Существует, однако, исключительный подкласс теорий DHOST Ia, задаваемый соотношением (67), где сверхсветовое распространение возмущений в скалярном секторе не возникает.

5. Заключение

В настоящем обзоре мы кратко обсудили текущий статус исследований космологических сценариев без начальной сингулярности в рамках теории Хорндески и её обобщений. Существенная часть обзора сосредоточена на анализе устойчивости на линеаризованном уровне возмущений по отношению к духовым и градиентным неустойчивостям, существенно осложняющим построение полных космологических сценариев без начальной сингулярности, которые были бы устойчивы на протяжении всей эволюции модели. Мы обсудили запрещающую теорему, исключающую существование полностью устой-

чивых несингулярных решений в теории Хорндески, и подробно рассмотрели существующие способы обойти указанную теорему. Кроме этого, мы рассмотрели роль дисформных преобразований, связывающих различные подклассы теории Хорндески и её обобщения, такие как теории DHOST Ia, а также обсудили влияние дополнительной материи на условия вырожденности мультикомпонентной объединённой теории. Особое внимание было уделено потенциальному появлению сверхсветовых мод в системе теория DHOST Ia + дополнительная материя: было показано, что сверхсветовая скалярная мода, как правило, возникает над космологическим фоном в классе DHOST Ia при добавлении даже незначительного количества кинетической энергии, связанной с дополнительным скалярным полем, скорость звука в котором равна скорости света. Однако подобная сверхсветовая мода не возникает для некоторого выделенного подкласса DHOST Ia, который был определён явно и который включает в себя теорию Хорндески как частный случай, но не включает подкласс расширенных теорий Хорндески (GLPV).

Скалярно-тензорные теории, такие как теория Хорндески и её обобщения, представляют невероятно широкий класс теорий модифицированной гравитации, которые являются подходящей теоретико-полевой средой для построения и анализа различных космологических сценариев, описывающих как раннюю, так и современную Вселенную. Изучение конкретных примеров космологических моделей, таких как сценарии без начальной сингулярности, потенциально позволяет исследовать не только фундаментальные свойства полевых теорий, в которых эти сценарии реализуются, но также делает возможным более глубокое понимание теоретических аспектов теории гравитации и физики ранней Вселенной.

Благодарности. Существенная часть данного обзора содержит результаты исследований космологических моделей без начальной сингулярности, которые были получены Валерием Анатольевичем Рубаковым как в независимых работах, так и в совместных проектах с его студентами и коллегами. Также более поздние научные работы С. Миронова, В. Волковой, Ю. Агеевой, П. Петрова, А. Штенниковой и М. Валенсия-Виллегас во многом являются результатом плодотворного сотрудничества с Валерием Анатольевичем, и они обсуждались с ним при различных обстоятельствах в прошлом.

Данное исследование в разделах 2 и 4 выполнено за счёт средств гранта Российского научного фонда № 24-72-10110, <https://rscf.ru/project/24-72-10110/>. Работа над разделом 3 частично поддержана фондом развития теоретической физики и математики "БАЗИС".

6. Приложение

В данном приложении приведены явные выражения для Θ и Σ , которые входят в квадратичное действие для теорий DHOST Ia (см. (48в), (48г)):

$$\begin{aligned} \Theta = & (-A_{3X} + A_5)\dot{\pi}\dot{\pi}X^2 - \dot{\pi}(F_{2\pi} + \ddot{\pi}(-3A_1 + 6F_{2X})) - \\ & - 2F_2H + X(3A_1 + 2F_{2X})H + \\ & + X^2\left(-2A_{1X}H + \frac{3}{2}(4A_{1X} + A_3)H\right) - \\ & - \dot{\pi}X\left(\ddot{\pi}\left(-2A_{1X} + \frac{3}{2}A_3 - A_4 + 4F_{2XX}\right) + 2F_{2\pi X} + K_X\right), \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \Sigma = & 6F_2H^2 - 2\ddot{\pi}(A_{5\pi}X + A_{5XX}\ddot{\pi})\dot{\pi}^8 - \\ & - \dot{\pi}^7(2A_{5X}\ddot{\pi} + 3A_{3\pi X}H + 6A_{5X}\ddot{\pi}H) + \\ & + 6\dot{\pi}[F_{2\pi}H - 2\ddot{\pi}(A_1 - 2F_{2X})H] + \\ & + \dot{\pi}^6[-2(A_{3\pi X} + A_{4\pi X} + 4A_{5\pi})\ddot{\pi} - \\ & - (2A_{3XX} + 2A_{4XX} + 13A_5X)\dot{\pi}^2 - 3A_{3X}\dot{H} - \\ & - 3(4A_{1XX} + 3A_{3X})H^2] + \dot{\pi}^2[-3(A_3 + A_4)\dot{\pi}^2 - \\ & - 12\dot{H}(-A_1 + 2F_{2X}) + F_X - 42F_{2X}H^2 - K_\pi] + \\ & + \dot{\pi}^4[-6(A_{3\pi} + A_{4\pi})\ddot{\pi} - (9A_{3X} + 9A_{4X} + 12A_5)\dot{\pi}^2 - \\ & - 3\dot{H}(-2A_{1X} + 3A_3 + 4F_{2XX}) + 2F_{XX} - 36A_{1X}H^2 - \\ & - 27A_3H^2 - 24F_{2XX}H^2 - K_{\pi X}] - \dot{\pi}^3\ddot{\pi}[6(A_3 + A_4)\ddot{\pi} + \\ & + 3\ddot{\pi}(2A_{1X} + 3A_3 + 6A_4 - 4F_{2XX})H + \\ & + 6H(-2A_{1\pi} - F_{2\pi X} - 2K_X)] - \\ & - \dot{\pi}^5[2(A_{3X} + A_{4X} + 4A_5) + 3(A_{3X} + 2A_{4X} + 8A_5)\ddot{\pi}H + \\ & + 3H(-2A_{1\pi X} + 3A_{3\pi} - 2K_{XX})], \end{aligned} \quad (69)$$

где функции A_4 и A_5 приведены в (15б) и (15в) соответственно.

Список литературы

1. Starobinsky A A *Phys. Lett. B* **91** 99 (1980)
2. Guth A H *Phys. Rev. D* **23** 347 (1981)
3. Brandenberger R H, hep-ph/9910410
4. Turok N *Class. Quantum Grav.* **19** 3449 (2002)
5. Borde A, Vilenkin A *Int. J. Mod. Phys. D* **5** 813 (1996); gr-qc/9612036
6. Borde A, Guth A H, Vilenkin A *Phys. Rev. Lett.* **90** 151301 (2003); gr-qc/0110012
7. Lesnefsky J E, Easson D A, Davies P C W *Phys. Rev. D* **107** 044024 (2023); arXiv:2207.00955
8. Easson D A, Lesnefsky J E, arXiv:2402.13031
9. Easson D A, Lesnefsky J E, arXiv:2404.03016
10. Lehnert J-L *Phys. Rep.* **465** 223 (2008); arXiv:0806.1245
11. Novello M, Perez Bergliaffa S E *Phys. Rep.* **463** 127 (2008); arXiv:0802.1634
12. Cai Y-F *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **57** 1414 (2014); arXiv:1405.1369
13. Battefeld D, Peter P *Phys. Rep.* **571** 1 (2015); arXiv:1406.2790
14. Creminelli P et al. *J. High Energy Phys.* **2006** (12) 080 (2006); hep-th/0606090
15. Creminelli P, Nicolis A, Trincherini E *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2010** (11) 021 (2010); arXiv:1007.0027
16. Рубаков В А *УФН* **184** 137 (2014); Rubakov V A *Phys. Usp.* **57** 128 (2014)
17. Dubovsky S et al. *J. High Energy Phys.* **2006** (03) 025 (2006); hep-th/0512260
18. Penrose R *Phys. Rev. Lett.* **14** 57 (1965)
19. Murphy G L *Phys. Rev. D* **8** 4231 (1973)
20. Старобинский А А *Письма в Астрон. журн.* **4** 155 (1978); Starobinskii A A *Sov. Astron. Lett.* **4** 82 (1978)
21. Durrer R, Laukenmann J *Class. Quantum Grav.* **13** 1069 (1996); gr-qc/9510041
22. Falciano F T, Lilley M, Peter P *Phys. Rev. D* **77** 083513 (2008); arXiv:0802.1196
23. Horndeski G W *Int. J. Theor. Phys.* **10** 363 (1974)
24. Nicolis A, Rattazzi R, Trincherini E *Phys. Rev. D* **79** 064036 (2009); arXiv:0811.2197
25. Deffayet C, Esposito-Farèse G, Vikman A *Phys. Rev. D* **79** 084003 (2009); arXiv:0901.1314
26. Deffayet C, Deser S, Esposito-Farèse G *Phys. Rev. D* **80** 064015 (2009); arXiv:0906.1967
27. Deffayet C et al. *Phys. Rev. D* **84** 064039 (2011); arXiv:1103.3260
28. Kobayashi T, Yamaguchi M, Yokoyama J *Prog. Theor. Phys.* **126** 511 (2011)

29. Brans C, Dicke R H *Phys. Rev.* **124** 925 (1961)
30. Sotiriou T P, Faraoni V *Rev. Mod. Phys.* **82** 451 (2010); arXiv:0805.1726
31. De Felice A, Tsujikawa S *Living Rev. Relat.* **13** 3 (2010); arXiv:1002.4928
32. Chiba T, Okabe T, Yamaguchi M *Phys. Rev. D* **62** 023511 (2000); astro-ph/9912463
33. Armendariz-Picon C, Mukhanov V, Steinhardt P J *Phys. Rev. Lett.* **85** 4438 (2000); astro-ph/0004134
34. Armendariz-Picon C, Mukhanov V, Steinhardt P J *Phys. Rev. D* **63** 103510 (2001); astro-ph/0006373
35. Deffayet C et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2010** (10) 026 (2010); arXiv:1008.0048
36. Pujolàs O, Sawicki I, Vikman A J. *High Energy Phys.* **2011** (11) 156 (2011); arXiv:1103.5360
37. Charmousis C et al. *Phys. Rev. D* **85** 104040 (2012); arXiv:1112.4866
38. Charmousis C et al. *Phys. Rev. Lett.* **108** 051101 (2012); arXiv:1106.2000
39. de Rham C, Tolley A J *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2010** (05) 015 (2010); arXiv:1003.5917
40. Goon G, Hinterbichler K, Trodden M J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2011** (07) 017 (2011); arXiv:1103.5745
41. Armendáriz-Picón C, Damour T, Mukhanov V *Phys. Lett. B* **458** 209 (1999); hep-th/9904075
42. Kobayashi T, Yamaguchi M, Yokoyama J *Phys. Rev. Lett.* **105** 231302 (2010); arXiv:1008.0603
43. Kobayashi T *Rep. Prog. Phys.* **82** 086901 (2019); arXiv:1901.07183
44. Heisenberg L *Phys. Rep.* **796** 1 (2019); arXiv:1807.01725
45. Langlois D, Noui K J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2016** (02) 034 (2016); arXiv:1510.06930
46. Langlois D, Noui K J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2016** (07) 016 (2016); arXiv:1512.06820
47. Crisostomi M, Koyama K, Tasinato G J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2016** (04) 044 (2016); arXiv:1602.03119
48. Ben Achour J et al. *J. High Energy Phys.* **2016** (12) 100 (2016); arXiv:1608.08135
49. Langlois D *Int. J. Mod. Phys. D* **28** (05) 1942006 (2019); arXiv:1811.06271
50. Ben Achour J, Langlois D, Noui K *Phys. Rev. D* **93** 124005 (2016); arXiv:1602.08398
51. Bekenstein J D *Phys. Rev. D* **48** 3641 (1993); gr-qc/9211017
52. Bettoni D, Liberati S *Phys. Rev. D* **88** 084020 (2013); arXiv:1306.6724
53. Crisostomi M et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2016** (03) 038 (2016); arXiv:1601.04658
54. Creminelli P, Vernizzi F *Phys. Rev. Lett.* **119** 251302 (2017); arXiv:1710.05877
55. Mironov S, Volkova V *Int. J. Mod. Phys. A* **37** (14) 2250088 (2022); arXiv:2204.05889
56. Zumalacárregui M, García-Bellido J *Phys. Rev. D* **89** 064046 (2014); arXiv:1308.4685
57. Gleyzes J et al. *Phys. Rev. Lett.* **114** 211101 (2015); arXiv:1404.6495
58. Gao X *Phys. Rev. D* **90** 081501 (2014); arXiv:1406.0822
59. Gleyzes J et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2015** (02) 018 (2015); arXiv:1408.1952
60. de Rham C, Matas A J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2016** (06) 041 (2016); arXiv:1604.08638
61. Langlois D et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2017** (05) 033 (2017); arXiv:1703.03797
62. Tipler F J *Phys. Rev. D* **17** 2521 (1978)
63. Creminelli P et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2016** (11) 047 (2016); arXiv:1610.04207
64. Cai Y et al. *J. High Energy Phys.* **2017** (01) 090 (2017); arXiv:1610.03400
65. Горбунов Д С, Рубаков В А *Введение в теорию ранней Вселенной. Космологические возмущения. Инфляционная теория* (М.: КРАСАНД, 2010); Пер. на англ. яз.: Gorbunov DS, Rubakov V A *Introduction to the Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory* (Singapore: World Scientific, 2011) <https://doi.org/10.1142/7873>
66. Kobayashi T, Yamaguchi M, Yokoyama J, arXiv:1105.5723
67. Kolevatov R, Mironov S, Sukhov N, Volkova V J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2017** (08) 038 (2017); arXiv:1705.06626
68. Dobre D A et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2018** (03) 020 (2018); arXiv:1712.10272
69. Qiu T et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2011** (10) 036 (2011); arXiv:1108.0593
70. Easson D A, Sawicki I, Vikman A J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2011** (11) 021 (2011); arXiv:1109.1047
71. Cai Y-F, Easson D A, Brandenberger R J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2012** (08) 020 (2012); arXiv:1206.2382
72. Osipov M, Rubakov V J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2013** (11) 031 (2013); arXiv:1303.1221
73. Koehn M, Lehnert J-L, Ovrut B A *Phys. Rev. D* **90** 025005 (2014); arXiv:1310.7577
74. Battarra L et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2014** (07) 007 (2014); arXiv:1404.5067
75. Qiu T, Wang Y-T J. *High Energy Phys.* **2015** (04) 130 (2015); arXiv:1501.03568
76. Ijjas A, Steinhardt P J *Phys. Rev. Lett.* **117** 121304 (2016); arXiv:1606.08880
77. Ijjas A, Steinhardt P J *Phys. Lett. B* **764** 289 (2017); arXiv:1609.01253
78. Sberna L, Pani P *Phys. Rev. D* **96** 124022 (2017); arXiv:1708.06371
79. Liu Z-G, Zhang J, Piao Y-S *Phys. Rev. D* **84** 063508 (2011); arXiv:1105.5713
80. Hinterbichler K, Joyce A, Khoury J J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2012** (06) 043 (2012); arXiv:1202.6056
81. Liu Z-G, Piao Y-S *Phys. Lett. B* **718** 734 (2013); arXiv:1207.2568
82. Hinterbichler K et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2012** (12) 030 (2012); arXiv:1209.5742
83. Creminelli P et al. *J. High Energy Phys.* **2013** (02) 006 (2013); arXiv:1209.3768
84. Hinterbichler K et al. *Phys. Rev. Lett.* **110** 241303 (2013); arXiv:1212.3607
85. Liu Z-G, Piao Y-S *Phys. Rev. D* **88** 043520 (2013); arXiv:1301.6833
86. Rubakov V A *Phys. Rev. D* **88** 044015 (2013); arXiv:1305.2614
87. Elder B, Joyce A, Khoury J *Phys. Rev. D* **89** 044027 (2014); arXiv:1311.5889
88. Nishi S et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2014** (03) 008 (2014); arXiv:1401.1045
89. Pirtskhalava D et al. *J. High Energy Phys.* **2014** (12) 151 (2014); arXiv:1410.0882
90. Nishi S, Kobayashi T J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2015** (03) 057 (2015); arXiv:1501.02553
91. Kobayashi T, Yamaguchi M, Yokoyama J J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2015** (07) 017 (2015); arXiv:1504.05710
92. Nishi S, Kobayashi T J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2016** (04) 018 (2016); arXiv:1601.06561
93. Nishi S, Kobayashi T *Phys. Rev. D* **95** 064001 (2017); arXiv:1611.01906
94. Libanov M, Mironov S, Rubakov V J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2016** (08) 037 (2016); arXiv:1605.05992
95. Kobayashi T *Phys. Rev. D* **94** 043511 (2016); arXiv:1606.05831
96. Mironov S *Universe* **5** (2) 52 (2019)
97. Kolevatov R, Mironov S *Phys. Rev. D* **94** 123516 (2016); arXiv:1607.04099
98. Akama S, Kobayashi T *Phys. Rev. D* **95** 064011 (2017); arXiv:1701.02926
99. Akama S, Kobayashi T *Phys. Rev. D* **99** 043522 (2019); arXiv:1810.01863
100. Ageeva Yu, Evseev O, Melichev O, Rubakov V *EPJ Web Conf.* **191** 07010 (2018); arXiv:1810.00465
101. Ageeva Y, Evseev O, Melichev O, Rubakov V *Phys. Rev. D* **102** 023519 (2020); arXiv:2003.01202
102. Ageeva Y, Petrov P, Rubakov V *Phys. Rev. D* **104** 063530 (2021); arXiv:2104.13412
103. Akama S, Hirano S *Phys. Rev. D* **107** 063504 (2023); arXiv:2211.00388
104. Rubakov V A, Wetterich C *Symmetry* **14** 2557 (2022); arXiv:2210.11198
105. Mironov S, Rubakov V, Volkova V J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2018** (10) 050 (2018); arXiv:1807.08361
106. Ijjas A J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2018** (02) 007 (2018); arXiv:1710.05990
107. Mironov S, Shtennikova A J. *Cosmol. Astropart. Phys.* **2023** (06) 037 (2023); arXiv:2212.03285

108. Миронов С А, Штенникова А М *Письма в ЖЭТФ* **119** 330 (2024); Mironov S A, Shtennikova A M *JETP Lett.* **119** 339 (2024); arXiv:2305.19171
109. Afshordi N, Chung D J H, Geshnizjani G *Phys. Rev. D* **75** 083513 (2007); hep-th/0609150
110. Afshordi N et al. *Phys. Rev. D* **75** 123509 (2007); astro-ph/0702002
111. Afshordi N *Phys. Rev. D* **80** 081502 (2009); arXiv:0907.5201
112. Iyonaga A, Takahashi K, Kobayashi T *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2018** (12) 002 (2018); arXiv:1809.10935
113. Gomes H, Guariento D C *Phys. Rev. D* **95** 104049 (2017); arXiv:1703.08226
114. De Felice A et al. *Phys. Rev. D* **98** 084024 (2018); arXiv:1803.06241
115. Boruah S S et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2018** (08) 031 (2018); arXiv:1802.06818
116. Kim J L, Geshnizjani G *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2021** (03) 104 (2021); arXiv:2010.06645
117. Hosseini Mansoori S A, Molaei Z *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2023** (01) 022 (2023); arXiv:2207.06720
118. Ganz A et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2023** (04) 060 (2023); arXiv:2212.13561
119. Mironov S, Valencia-Villegas M *Phys. Rev. D* **108** 024057 (2023); arXiv:2304.04722
120. Mironov S, Valencia-Villegas M *Phys. Rev. D* **109** 044073 (2024); arXiv:2307.06929
121. Ahmedov B et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2023** (08) 074 (2023); arXiv:2306.13473
122. Ahmedov B et al., arXiv:2311.11977
123. Mironov S, Valencia-Villegas M *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2024** (07) 030 (2024); arXiv:2405.08673
124. Cai Y et al. *Eur. Phys. J. C* **77** 369 (2017); arXiv:1701.04330
125. Cai Y, Piao Y-S *Phys. Rev. D* **96** 124028 (2017); arXiv:1707.01017
126. Ye G, Piao Y-S *Commun. Theor. Phys.* **71** 427 (2019); arXiv:1901.02202
127. Ye G, Piao Y S *Phys. Rev. D* **99** 084019 (2019); arXiv:1901.08283
128. Cai Y, Piao Y S *J. High Energy Phys.* **2017** (09) 027 (2017); arXiv:1705.03401
129. Mironov S, Rubakov V, Volkova V *Phys. Rev. D* **100** 083521 (2019); arXiv:1905.06249
130. Mironov S, Rubakov V, Volkova V, arXiv:1906.12139; Волкова В Е, Миронов С А, Рубаков В А *ЖЭТФ* **156** 651 (2019); Volkova V E, Mironov S A, Rubakov V A *J. Exp. Theor. Phys.* **129** 553 (2019)
131. Ilyas A et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2020** (09) 002 (2020); arXiv:2002.08269
132. Ilyas A et al. *J. High Energy Phys.* **2021** (01) 141 (2021); arXiv:2009.10351
133. Zhu M et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2021** (11) 045 (2021); arXiv:2108.01339
134. Zhu M, Zheng Y *J. High Energy Phys.* **2021** (11) 163 (2021); arXiv:2109.05277
135. Arroja F et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2015** (09) 051 (2015); arXiv:1506.08575
136. Domènech G et al. *Phys. Rev. D* **92** 084027 (2015); arXiv:1507.05390
137. Takahashi K et al. *Phys. Rev. D* **95** 084053 (2017); arXiv:1702.01849
138. Babichev E et al. *Adv. Theor. Math. Phys.* **25** 309 (2021); arXiv:1907.12333
139. Babichev E et al. *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2022** 013A01 (2022); arXiv:2109.00912
140. Takahashi K, Motohashi H, Minamitsuji M *Phys. Rev. D* **105** 024015 (2022); arXiv:2111.11634
141. Takahashi K, Minamitsuji M, Motohashi H *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2023** 013E01 (2023); arXiv:2209.02176
142. Takahashi K *Phys. Rev. D* **108** 084031 (2023); arXiv:2307.08814
143. Babichev E et al., arXiv:2405.13126
144. Deffayet C, Garcia-Saenz S *Phys. Rev. D* **102** 064037 (2020); arXiv:2004.11619
145. Garcia-Saenz S, Deffayet C *Phys. Sci. Forum* **2** (1) 46 (2021) <https://doi.org/10.3390/ECU2021-09309>
146. Takahashi K, Kimura R, Motohashi H *Phys. Rev. D* **107** 044018 (2023); arXiv:2212.13391
147. Ikeda T, Takahashi K, Kobayashi T *Phys. Rev. D* **108** 044006 (2023); arXiv:2302.03418
148. Adams A et al. *J. High Energy Phys.* **2006** (10) 014 (2006); hep-th/0602178
149. Bruneton J-P *Phys. Rev. D* **75** 085013 (2007); gr-qc/0607055
150. Kang J U, Vanchurin V, Winitzki S *Phys. Rev. D* **76** 083511 (2007); arXiv:0706.3994
151. Babichev E, Mukhanov V, Vikman A *J. High Energy Phys.* **2008** (02) 101 (2008); arXiv:0708.0561
152. Burrage C et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2012** (07) 004 (2012); arXiv:1111.5549
153. Evslin J J. *High Energy Phys.* **2012** (03) 009 (2012); arXiv:1112.1349
154. Hinterbichler K, Nicolis A, Porrati M *J. High Energy Phys.* **2009** (09) 089 (2009); arXiv:0905.2359
155. de Fromont P et al. *J. High Energy Phys.* **2013** (07) 067 (2013); arXiv:1303.0274
156. Kolevaton R S *Phys. Rev. D* **92** 123532 (2015); arXiv:1508.00046
157. Mironov S, Rubakov V, Volkova V *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2020** (05) 024 (2020); arXiv:1910.07019
158. Easson D A, Sawicki I, Vikman A *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2013** (07) 014 (2013); arXiv:1304.3903
159. Crisostomi M et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2019** (01) 030 (2019); arXiv:1810.12070
160. Mironov S, Rubakov V, Volkova V *Phys. Scr.* **95** 084002 (2020); arXiv:2005.12626
161. Mironov S, Rubakov V, Volkova V *J. High Energy Phys.* **2021** (04) 035 (2021); arXiv:2011.14912

Nonsingular cosmological scenarios in scalar-tensor theories and their stability

V.E. Volkova^(1,3,a), S.A. Mironov^(1,2,4,b)

⁽¹⁾ Institute for Nuclear Research, Russian Academy of Sciences, prosp. 60-letiya Oktyabrya 7a, 117312 Moscow, Russian Federation

⁽²⁾ Institute of Theoretical and Mathematical Physics, Lomonosov Moscow State University,

Lomonosovskii prosp. 27, korp. 1, 119192 Moscow, Russian Federation

⁽³⁾ Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Leninskie gory 1, str. 2, 119991 Moscow, Russian Federation

⁽⁴⁾ National Research Centre Kurchatov Institute, pl. Akademika Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russian Federation

E-mail: ^(a)volkova.viktoria@physics.msu.ru, ^(b)sa.mironov_1@physics.msu.ru

This article gives a concise overview of the development and current status of studies on models of the early Universe without an initial singularity, namely the cosmological bounce and genesis scenarios, constructed within a broad class of scalar-tensor theories, specifically Horndeski theories and their generalizations. The review focuses on topics related to linear stability at the perturbation level against the background of nonsingular cosmological solutions: 1) the no-go theorem, valid for nonsingular cosmologies within the Horndeski theory, 2) updates on possible approaches to evade the no-go theorem, 3) the role of disformal transformations relating the Horndeski subclasses in generalized theories like DHOST, 4) effects on stability caused by additional matter coupling and the potential emergence of superluminal perturbation modes in the multi-component setting.

Keywords: scalar-tensor theories, nonsingular cosmology, stability, superluminality, cosmological bounce, genesis

PACS numbers: 04.20.Dw, 04.50.Kd, 98.80.Bp

Bibliography — 161 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **195** (2) 172–187 (2025)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.12.039826>

Received 24 September 2024, revised 11 December 2024

Physics – Uspekhi **68** (2) (2025)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2024.12.039826>