

## Физика и феноменология больших дополнительных измерений

Э.Э. Боос, В.Е. Буничев, И.П. Волобуев, В.О. Егоров,  
С.И. Кейзеров, Э.Р. Рахметов, М.Н. Смоляков

*В обзоре излагается история моделей взаимодействий элементарных частиц в пространстве – времени с большими дополнительными измерениями, обсуждаются современное состояние данного подхода и его феноменологические следствия. Основное внимание уделяется наиболее интересной с этой точки зрения стабилизированной модели Рэндалл–Сундрума с двумя бранами и наиболее важным полученным в ней результатам. Для этой модели подробно обсуждаются связь фундаментального пятимерного энергетического масштаба с массой Планка и выделение физических степеней свободы. Рассмотрено взаимодействие низшей скалярной моды, радиона, и низших тензорных мод с полями Стандартной модели. Обсуждается устойчивость модели относительно квантовых поправок.*

**Ключевые слова:** дополнительные измерения пространства – времени, большие дополнительные измерения, теория поля, модель Рэндалл–Сундрума, мир на бране

PACS numbers: 03.70. + k, 04.50. – h

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.12.039820>

## Содержание

1. Введение: краткая история гипотезы о существовании дополнительных измерений пространства – времени (116).
2. Модель Рэндалл – Сундрума (120).
3. Стабилизированная модель Рэндалл – Сундрума (123).
4. Феноменология калуга-клейновских возбуждений (126).
5. Сравнение процессов с участием радиона с аналогичными процессами с участием бозона Хиггса (129).  
5.1. Процессы с участием одного скалярного бозона. 5.2. Процессы с ассоциативным рождением радиона и бозонов Хиггса.
6. Нелинейные самодействие и взаимодействие радиона с полями Стандартной модели (135).  
6.1. Эффективный четырёхмерный лагранжиан радиона четвёртой степени.
7. Смешивание полей Хиггса и радиона (139).  
7.1. Состояние с доминированием бозона Хиггса с массой 125 ГэВ.  
7.2. Состояние с доминированием радиона с массой 125 ГэВ.

8. Устойчивость модели Рэндалл–Сундрума относительно квантовых поправок (147).

8.1. Квантовые поправки от скалярных мод к тензору энергии – импульса и к уравнениям движения модели Рэндалл – Сундрума.  
8.2. Регуляризация и перенормировка плотности энергии Казимира скалярных мод. 8.3. Изменение параметров модели вследствие эффекта Казимира.

9. Заключение (150).

Список литературы (151).

### 1. Введение: краткая история гипотезы о существовании дополнительных измерений пространства – времени

Идея о том, что наше пространство может иметь более трёх измерений, появилась давно. Ещё в XIX в. учёные высказывали предположение о том, что, вероятно, не следует ограничивать измерения пространства лишь длиной, шириной и высотой. В конце XX века эта гипотеза прочно обосновалась в теоретической физике высоких энергий как одна из наиболее важных.

Значительный вклад в развитие теорий с дополнительными измерениями пространства – времени внёс В. Рубаков. Он вместе с М. Шапошниковым впервые высказал общепринятую ныне идею о локализации полей Стандартной модели (СМ) на четырёхмерной гиперповерхности в многомерном пространстве – времени, которая лежит в основе всех современных моделей мира на бране. Такой подход позволяет объяснить макроскопическую ненаблюдаемость больших дополнительных измерений и получить фундаментальный многомерный

Э.Э. Боос<sup>(а)</sup>, В.Е. Буничев<sup>(б)</sup>, И.П. Волобуев<sup>(в)</sup>, В.О. Егоров<sup>(д)</sup>,  
С.И. Кейзеров<sup>(е)</sup>, Э.Р. Рахметов<sup>(ф)</sup>, М.Н. Смоляков<sup>(г)</sup>  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
Научно-исследовательский институт ядерной физики  
им. Д.В. Скобельцына  
Ленинские горы 1, стр. 2, 119991 Москва, Российская Федерация  
E-mail: <sup>(а)</sup>boos@theory.sinp.msu.ru, <sup>(б)</sup>bunichev@theory.sinp.msu.ru,  
<sup>(в)</sup>volobuev@theory.sinp.msu.ru, <sup>(д)</sup>egorov@theory.sinp.msu.ru,  
<sup>(е)</sup>errar@mail.ru, <sup>(ф)</sup>rahmetov@theory.sinp.msu.ru,  
<sup>(г)</sup>smolyakov@theory.sinp.msu.ru

Статья поступила 29 октября 2024 г.  
после доработки 26 ноября 2024 г.

энергетический масштаб много меньше планковского. Ему также принадлежит ряд важнейших результатов в теории моделей мира на бране.

Первой физической теорией с дополнительным измерением была единая теория гравитации и электромагнетизма, предложенная в 1914 г. финским физиком Гуннаром Нордстремом [1]. В этой релятивистской теории гравитация описывалась скалярным полем, которое вместе с четырёхмерным вектор-потенциалом электромагнитного поля образовывало 5-вектор в пятимерном пространстве – времени. Однако создание в следующем году общей теории относительности Эйнштейна и её последующее экспериментальное подтверждение показали, что такая теория физически неадекватна. Поэтому рождением многомерного подхода принято считать работу Т. Калуцы 1921 г. [2]. В ней была предпринята попытка объединить электромагнетизм уже с четырёхмерной теорией гравитации Эйнштейна в рамках единой пятимерной теории. Теория Калуцы опиралась на три предположения. Во-первых, постулировалось наличие одного дополнительного пространственного измерения. Во-вторых, выдвигалось предположение о том, что пятое измерение существенно отличается от привычных нам четырёх. Это проявлялось, в частности, в том, что метрика пятимерного пространства – времени не зависит от пятой координаты (условие цилиндричности). И, в-третьих, уравнения Эйнштейна получались из геометрического обобщения действия для четырёхмерной теории на случай пяти измерений, т.е. действие имеет вид скалярной кривизны пятимерного пространства – времени, проинтегрированной по этому пространству – времени.

Интересным следствием предположений Калуцы стало то, что 15 уравнений гравитационного поля в многомерном пространстве распадались на 10 обычных уравнений Эйнштейна в четырёхмерном пространстве – времени, 4 уравнения Максвелла и ещё одно уравнение для скалярного поля. При этом автоматически получался тензор энергии – импульса электромагнитного поля, который в четырёхмерную теорию Эйнштейна приходилось вводить "извне".

Казалось бы, идеи Калуцы не согласуются с очевидной ненаблюдаемостью четвёртого пространственного измерения в повседневной жизни. Это несоответствие в 1926 г. разрешил О. Клейн [3, 4], явно показав, что структура нашей Вселенной может допускать существование не только бесконечных, но и так называемых компактных, или свёрнутых, измерений. Такие измерения недоступны нашим органам чувств из-за их малого размера. Кроме того, Клейн привлёк квантовую механику и показал с её помощью, что размер дополнительного циклического измерения должен быть порядка планковской длины  $l_{\text{Pl}} = 1/M_{\text{Pl}}$ , а это далеко выходит за рамки современных возможностей эксперимента. С тех пор теориями Калуцы – Клейна принято называть целый класс теорий, основанных на предположении о существовании дополнительных компактных пространственных измерений.

Однако теория Калуцы и Клейна столкнулась с проблемой, которую сразу преодолеть не удалось: как было отмечено в работе А. Эйнштейна, В. Баргмана и П. Бергмана [5], в этой теории "невозможно объяснить тот эмпирический факт, что электростатические силы, действующие между частицами, намного превышают гравитационные". Поэтому интерес к такому подходу на время угас.

Новый всплеск интереса к теориям Калуцы – Клейна начался в 1960-е годы в связи с развитием неабелевых калибровочных теорий взаимодействия элементарных частиц. В середине 1970-х годов гипотеза о многомерном пространстве стала фактически общепринятой, что обусловлено совершенствованием теории поля. Многие схемы объединения, например теории супергравитации или суперструн, имели смысл и могли быть последовательно математически сформулированы только в определённом числе измерений, большем привычных четырёх [6–10] (эти размерности называются критическими). Таким образом, идеи Калуцы – Клейна обрели новую жизнь.

Совершенно новый подход в рамках теорий Калуцы – Клейна в 1983 г. предложили В. Рубаков и М. Шапошников [11]. В отличие от предыдущих теорий, их сценарий объяснял ненаблюдаемость дополнительных измерений пространства – времени не их малым, планковским, размером, а локализацией полей СМ на доменной стенке. В данном случае дополнительные измерения могут иметь большой и даже бесконечный размер, оставаясь ненаблюдаемыми в области достаточно низких энергий, и при этом приводить к экспериментально наблюдаемым явлениям в области высоких энергий [12]. В пределе бесконечно тонкой доменной стенки мы получаем объект, который принято называть мембраной, или просто браной. Теории с локализацией полей на бесконечно тонкой стенке, основанные на идеях Рубакова и Шапошникова, получили название моделей мира на бране.

Необходимо отметить, что в работе [11] был предложен теоретико-полевой механизм локализации только спинорных полей. Вопрос локализации калибровочных полей оказывается более сложным. Действительно, любой такой механизм должен обеспечивать универсальность заряда, т.е. гарантировать независимость калибровочных зарядов четырёхмерных частиц от формы волновых функций соответствующих мод в дополнительном измерении [12]. Один из вариантов обеспечения универсальности заряда — локализовать плотность энергии нулевой моды калибровочного поля в определённой области в дополнительном измерении, например, на доменной стенке, при не зависящем от координаты дополнительного измерения решении для данной нулевой моды. Это может быть сделано с помощью теоретико-полевого механизма, различные вариации которого предложены в работах [13–15] (в работе [13] для локализации калибровочного поля используется именно решение для доменной стенки). Более того, механизм локализации полей фермионов на доменной стенке [11] можно объединить с немного модифицированным механизмом локализации калибровочных полей [13] в рамках единой теории, что позволяет на уровне нулевых мод полностью воспроизвести стандартную четырёхмерную квантовую электродинамику [16]. Однако из-за наличия башен Калуца-Клейновских (КК) мод сечения некоторых процессов в такой модели оказываются бесконечными, причём эти бесконечности являются физическими и не могут быть устранены с помощью обычной процедуры перенормировки [16] (позже было показано, что аналогичные расходимости возникают и в определённого типа моделях мира на бране [17]). Таким образом, вопрос построения непротиворечивого теоретико-полевого механизма локализации полей на бране всё ещё остаётся открытым.

Дальнейшее развитие теории с дополнительными измерениями пространства – времени получили в так называемом сценарии АДД (по именам авторов: Аркани – Хамед, Димопулос, Двали) [18, 19]. Было показано, что в предположении о локализации полей СМ на бране в многомерном пространстве и при том, что дополнительные измерения имеют большой размер, формула связи многомерного гравитационного энергетического масштаба  $M_{\text{ADD}}$  и массы Планка  $M_{\text{Pl}}$  (энергетический масштаб гравитации в четырёхмерном пространстве – времени) остаётся такой же, как в обычной теории Калуцы – Клейна, и имеет вид

$$M_{\text{Pl}}^2 = M_{\text{ADD}}^{n+2} V_n, \quad (1)$$

где  $V_n$  — совокупный объём  $n$  дополнительных пространственных измерений. Отсюда следует, что в многомерном пространстве фундаментальный энергетический масштаб гравитационного взаимодействия может равняться примерно 1 ТэВ, что соответствует масштабу электрослабого взаимодействия, в то время как эффективная константа взаимодействия на бране принимает привычное нам значение порядка  $10^{19}$  ГэВ. Таким образом легко и изящно решалась проблема иерархии гравитационного взаимодействия. Также сценарий предсказывал возможность экспериментального обнаружения дополнительных измерений уже в скором времени, что и представляло интерес.

Однако, давая простое и понятное объяснение слабости гравитационного взаимодействия в четырёхмерном пространстве – времени, сценарий АДД имеет существенный недостаток. В рамках этой теории предполагается, что брана не имеет плотности энергии — натяжения — и в соответствии со специальной теорией относительности Эйнштейна с ней не может быть связана физическая система отсчёта. Если же в сценарии АДД рассмотреть браны с натяжением, то сразу становится ясно, что гравитационное поле браны не может быть учтено по теории возмущений, а это представляет серьёзную проблему.

Проблема непертурбативного учёта натяжения браны была решена в модели Рэндалл – Сундрума (модели РС) [20]. В ней было найдено точное решение для системы двух бран, одна из которых имеет положительное натяжение, а другая — отрицательное, взаимодействующих с гравитацией в пятимерном пространстве – времени. Метрика фонового решения в модели РС имеет вид

$$ds^2 = \exp(C - 2k|y|) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (2)$$

где  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  обозначает метрику Минковского,  $y$  — координату дополнительного измерения, а константа  $C$  выбирается в зависимости от того, на какой бране находится наш мир. Дополнительное измерение представляет собой так называемый орбифолд, что накладывает некоторую симметрию на все поля модели, а две браны находятся в его неподвижных точках, не являясь, таким образом, динамическими элементами модели, — брана с положительным натяжением в точке  $y = 0$ , а брана с отрицательным натяжением в точке  $y = L$ .

Очевидно, что при ненулевом значении константы  $k$  метрика (2) является не плоской, а содержит экспоненциальный конформный фактор, "варп-фактор", благо-

даря которому и решается проблема иерархии гравитационного взаимодействия. Если константа  $C = 0$ , то метрика на бране в  $y = 0$ , индуцированная из такой пятимерной метрики, совпадает с метрикой Минковского и отвечающие ей координаты  $\{x^\mu\}$  являются галилеевыми на этой бране (определение галилеевых координат см. в [21]). Если константа  $C = 2kL$ , то координаты  $\{x^\mu\}$  в формуле (2) являются галилеевыми на бране в  $y = L$ .

Как и в случае сценария АДД, связь четырёхмерного планковского масштаба с фундаментальным пятимерным энергетическим масштабом может быть получена интегрированием действия для четырёхмерных полей по координате дополнительного измерения  $y$ , однако результаты получаются разными для разных бран. Чтобы найти эту связь между четырёхмерным и пятимерным энергетическими масштабами, рассмотрим пятимерную метрику вида

$$ds^2 = \exp(C - 2k|y|) g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (3)$$

Если константа  $C = 0$ , то эта пятимерная метрика индуцирует метрику  $g_{\mu\nu}(x)$  на бране в  $y = 0$ , а если  $C = 2kL$ , то метрика  $g_{\mu\nu}(x)$  индуцируется на бране в  $y = L$ . Если подставить пятимерную метрику (3) в действие модели РС (см. раздел 2), то получится следующий результат:

$$S = -2M^3 \int_{-L}^L \exp(C - 2k|y|) dy \int R_4(g) \sqrt{-g} d^4x, \quad (4)$$

где  $M$  — фундаментальный пятимерный энергетический масштаб, а  $R_4(g)$  — отвечающая метрике  $g_{\mu\nu}(x)$  четырёхмерная скалярная кривизна. Интегрируя в (4) по дополнительному измерению, получаем эффективное действие для тензорного поля  $g_{\mu\nu}(x)$  [22]:

$$S_{\text{eff}} = -2M^3 \exp(C) \frac{1 - \exp(-2kL)}{k} \int R_4(g) \sqrt{-g} d^4x. \quad (5)$$

Таким образом, мы видим, что приведённое действие — стандартное гравитационное действие, и, следовательно, поле  $g_{\mu\nu}(x)$  — действительно гравитационное поле, а выражение перед этим действием определяет гравитационные постоянные на бранах.

Если наш мир находится на бране в  $y = 0$ , то мы должны положить  $C = 0$  и в результате получим выражение для массы Планка через фундаментальный пятимерный энергетический масштаб

$$M_{\text{Pl}}^2 = \frac{1 - \exp(-2kL)}{k} M^3. \quad (6)$$

Поскольку  $\exp(-2kL) < 1$ , из данного соотношения следует, что в этом случае должно быть  $k \sim M \sim M_{\text{Pl}}$ , т.е. модель не даёт решения проблемы иерархии гравитационного взаимодействия. Если же наш мир находится на бране в  $y = L$ , то мы должны положить  $C = 2kL$ , и в таком случае выражение для массы Планка через фундаментальный пятимерный энергетический масштаб будет следующим:

$$M_{\text{Pl}}^2 = \frac{\exp(2kL) - 1}{k} M^3. \quad (7)$$

Если теперь  $k \sim M$  и  $kL \simeq 35$ , то благодаря экспоненциальному фактору в выражении (7) мы можем получить

правильное значение массы Планка при значениях параметров модели порядка нескольких ТэВ. Таким образом, в этом случае модель РС даёт решение проблемы иерархии гравитационного взаимодействия.

Следует отметить, что в оригинальной работе Л. Рэндалл и Р. Сундрума [20] для описания взаимодействия материи с КК-модами гравитационного поля на бране в точке  $y = L$  использовались координаты, галилеевы на бране в  $y = 0$ . В результате в действии для полей появлялся происходящий из индуцированной метрики дополнительный экспоненциальный фактор  $\exp(-2kL)$ , который просто убирался с помощью переопределения полей и масс. При этом получалось, что фундаментальным энергетическим масштабом теории является масса Планка, как и должно быть на бране в  $y = 0$ , а массы низших КК-мод могут быть порядка нескольких ТэВ благодаря режущему экспоненциальному фактору. В работе В. Рубакова [12] впервые было замечено, что такой подход является некорректным, потому что любая теория должна описываться в координатах, галилеевых на бране наблюдателя (в этой работе такие координаты назывались физическими). Последовательное описание теории на бране в точке  $y = L$  впоследствии было развито в работе [23], где было показано, что фундаментальным энергетическим масштабом на этой бране является масштаб порядка нескольких ТэВ, а планковский масштаб является производным и появляется вследствие экспоненциального фактора в метрике.

Необходимо отметить, что в абсолютном большинстве работ по модели РС используется некорректная физическая интерпретация этой модели, следующая работе [20]. Феноменологии нестабилизированной модели РС посвящено огромное число работ, причём в большинстве из них на бране с отрицательным натяжением используется планковский энергетический масштаб.

Однако модель РС даже при правильной физической интерпретации не лишена недостатков. Она предсказывает существование безмассовой четырёхмерной скалярной моды — радиона, впервые идентифицированной в работе В. Рубакова, Р. Грегори и Х. Хармусиса [24]. Эта мода соответствует флуктуациям расстояния между бранами, которое может быть любым, что и означает её безмассовость. В таком случае говорят о нестабилизированном расстоянии между бранами и в целом о нестабилизированной модели РС. В ней радион должен взаимодействовать с материей на бране примерно так же сильно, как гравитация. Наличие такой безмассовой скалярной частицы, "сильно" взаимодействующей с полями СМ, противоречит экспериментальным данным уже на уровне классической гравитации.

Для решения указанной проблемы в модель было введено пятимерное скалярное поле с потенциалом во всём пространстве и дополнительными потенциалами на бранах [25, 26]. Это позволяет стабилизировать расстояние между бранами, что ведёт к появлению массы у радиона. Стабилизация размера дополнительного измерения достигается с помощью граничных условий для скалярного поля на бранах, а масса радиона определяется величиной отклонения фоновой метрики от решения РС. В работах [27, 28] поднимался вопрос о том, чтобы отождествить стабилизирующее поле модели РС с полем Хиггса СМ. Такое единое поле распространяется во всём пятимерном пространстве — времени, а на бране, где предположительно расположен наш мир, оно может

выполнять роль поля Хиггса. А именно, все остальные поля СМ, которые считаются локализованными на бране, получают массы за счёт взаимодействия с граничным значением этого пятимерного хиггсовского поля. Однако такой подход столкнулся с серьёзными трудностями [27, 28], поэтому вопрос о возможной роли поля Хиггса в теориях с дополнительными измерениями остаётся открытым.

Таким образом, физически адекватной может быть только стабилизированная модель РС, и только для такой модели имеет смысл рассматривать феноменологические следствия. Тем не менее в некоторых случаях феноменологические результаты, полученные в рамках нестабилизированной модели, могут иметь физический смысл. Это относится и к часто используемому в феноменологии варианту стабилизированной модели РС, в которой, при сохранении всех констант модели неизменными, требуемая масса для поля радиона просто добавляется "руками". Данный вариант стабилизации представляется непоследовательным, поскольку он не учитывает существование бесконечной башни скалярных возбуждений, а произвольный выбор в его рамках констант связи и масс может оказаться противоречивым, так как они являются функциями параметров стабилизирующего скалярного поля. Поэтому, на наш взгляд, единственной последовательной моделью РС является стабилизированная с помощью пятимерного скалярного поля модель с фундаментальным пятимерным масштабом порядка 5–10 ТэВ для наблюдателя на бране с отрицательным натяжением. Тем не менее результаты работ, где используется планковский фундаментальный масштаб на этой бране, как правило, совпадают с результатами, полученными в рамках физически корректной интерпретации модели, хотя последнее каждый раз необходимо проверять.

Наиболее известным феноменологическим следствием модели РС, как и любой модели с дополнительными измерениями, является существование КК-башен гравитационного поля и полей СМ, если предполагается, что они тоже могут распространяться в дополнительном измерении. Возможное влияние таких башен на процессы взаимодействия частиц СМ обсуждалось в очень большом числе работ, например, в работах [29–47]. В настоящем обзоре мы кратко изложим первоначальный вариант модели РС с корректной физической интерпретацией, в котором поля СМ локализованы на одной из бран, а во всём многомерном пространстве может распространяться только гравитация. Затем мы обсудим вариант этой модели со стабилизированным расстоянием между бранами, который является феноменологически приемлемым. В рамках такой стабилизированной модели мы рассмотрим ряд важных физических результатов, включающий влияние КК-башен гравитона и радиона на взаимодействие частиц СМ, подобие взаимодействий радиона и бозона Хиггса и самодействие радиона до четвертой степени включительно. Мы также обсудим смешивание полей радиона и Хиггса в рамках стабилизированной модели РС со спонтанным нарушением калибровочной симметрии СМ вследствие динамической гравитационной стабилизации вакуума пятимерной теории и феноменологию состояний с доминированием радиона и бозона Хиггса. Наконец, мы изучим устойчивость стабилизированной модели РС относительно квантовых поправок.

## 2. Модель Рэндалл–Сундрума

В 1999 г. была опубликована работа Л. Рэндалл и Р. Сундрума [20], где было предложено новое решение проблемы иерархии. Модель РС можно кратко описать следующим образом: в пятимерном пространстве–времени, представляющем собой прямое произведение четырёхмерного псевдоевклидова пространства–времени и одномерного пространства дополнительного измерения  $S^1/Z_2$ , рассматривается теория гравитации, взаимодействующей с двумя четырёхмерными гиперповерхностями — бранами, на одной из которых локализованы поля СМ, т.е. наша наблюдаемая Вселенная. Таким образом, в модели РС пятое (дополнительное) измерение представляет собой орбифолд, в неподвижных точках которого находятся браны, имеющие равные по модулю и противоположные по знаку собственные напряжения, обозначаемые соответственно  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Будем обозначать координаты пятимерного пространства–времени  $\{x^M\} \equiv \{x^\mu, y\}$ ,  $M=0, 1, 2, 3, 4$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , и полагать, что координата дополнительного измерения  $x^4 \equiv y$  принимает значения на интервале  $-L \leq y < L$ , при этом, вследствие симметрии орбифолда, точки пятимерного пространства–времени  $(x, -y)$  и  $(x, y)$  должны быть отождествлены. Компоненты пятимерной метрики удовлетворяют следующим условиям симметрии:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x, -y) &= g_{\mu\nu}(x, y), \\ g_{4\nu}(x, -y) &= -g_{4\nu}(x, y), \\ g_{44}(x, -y) &= g_{44}(x, y). \end{aligned}$$

Действие модели РС записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2, \\ S_1 &= - \int_{M_4} \int_{-L}^L 2M^3 (R - \Lambda) \sqrt{g} d^5 x, \\ S_2 &= - \int_{M_4} \int_{-L}^L [\lambda_1 \delta(y) + \lambda_2 \delta(y - L)] \sqrt{-\tilde{g}} d^5 x, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $R$  — пятимерная скалярная кривизна, отвечающая метрике  $g_{MN}$ ,  $\Lambda$  — пятимерная космологическая постоянная, а  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  — метрический тензор, индуцированный на четырёхмерных гиперповерхностях, задаваемых уравнением  $y = \text{const}$ .

Уравнения движения являются уравнениями Эйлера–Лагранжа для функционала действия (8) и могут быть получены вариацией по метрическому тензору пятимерного пространства–времени  $g_{MN}$ :

$$\begin{aligned} R_{MN} - \frac{1}{2} (R - \Lambda) g_{MN} + \\ + \frac{1}{4M^3} [\lambda_1 \delta(y) + \lambda_2 \delta(y - L)] \tilde{g}_{\mu\nu} \delta_M^\mu \delta_N^\nu = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (9) имеет решение, инвариантное относительно преобразований группы Пуанкаре четырёхмерных координат  $x^\mu$ :

$$\begin{aligned} g_{MN} &= \gamma_{MN}, \quad \gamma_{\mu\nu} = \exp(C - 2k|y|) \eta_{\mu\nu}, \\ \gamma_{\mu 4} &= 0, \quad \gamma_{44} = -1, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\eta_{\mu\nu}$  — метрический тензор Минковского,  $C$  и  $k$  — некоторые константы. Между константой  $k$  и параметрами

рами  $M$ ,  $\Lambda$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеют место следующие соотношения [20]:

$$k = \sqrt{-\frac{\Lambda}{12}}, \quad \lambda_1 = -\lambda_2 = 24M^3 \sqrt{-\frac{\Lambda}{12}}. \quad (11)$$

Константа  $C$  является постоянной интегрирования и определяется из следующих соображений. Метрика, индуцированная на гиперповерхностях  $y = \text{const}$ , имеет вид

$$ds^2 = \exp(C - 2k|y|) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (12)$$

Фактически выбор той или иной константы  $C$  эквивалентен выбору некоторого масштаба для координат  $\{x^\mu\}$ . Каноническая нормировка полей материи предполагает, что их лагранжиан записан в галилеевых координатах, т.е. метрика имеет вид  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ . Таким образом, если предположить, что материя сосредоточена исключительно на бране с координатой  $y = 0$ , следует выбрать константу  $C = 0$ . Однако если материя локализована на второй бране, имеющей координату  $y = L$ , то константу  $C$  нужно выбирать следующим образом:

$$C = 2kL. \quad (13)$$

Далее решение (10) считается фоновым и рассматриваются малые флуктуации метрики над ним [23, 48]. Параметризуем метрику следующим образом:

$$g_{MN} = \gamma_{MN} + \kappa h_{MN}, \quad \kappa \equiv \frac{1}{\sqrt{2}M^3}. \quad (14)$$

В работе [48] показано, что лагранжиан нулевого порядка по  $\kappa$  (т.е. квадратичный по  $h$ ), получаемый после подстановки (14) в (8), после некоторых преобразований можно привести к виду

$$\begin{aligned} L_h &= \frac{1}{4} \nabla_M h_{PQ} \nabla^M h^{PQ} + \frac{1}{4} \nabla_M h \nabla^M h - \frac{1}{2} \nabla_M h^{MP} \nabla_P h + \\ &+ \frac{1}{2} \nabla_M h^{MP} \nabla^Q h_{PQ} - \frac{k^2}{2} (h_{PQ} h^{PQ} + h^2) + \\ &+ \left[ 2kh_{PQ} h^{PQ} - kh\tilde{h} + kh_{P^\nu} h^{P^\nu} - 3k \left( h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{h}^2 \right) \right] \times \\ &\times [\delta(y) - \delta(y - L)], \end{aligned} \quad (15)$$

где ковариантная производная  $\nabla_P$  берётся по фоновой метрике  $\gamma$ , подъём и опускание индексов также производится с помощью фоновой метрики  $\gamma$ , а  $h$  и  $\tilde{h}$  суть свёртки вида

$$h \equiv h_{MN} \gamma^{MN}, \quad \tilde{h} \equiv h_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu}. \quad (16)$$

В работе [48] также показано, что действие с лагранжианом (15) инвариантно относительно калибровочных преобразований, которые позволяют наложить на  $h$  дополнительные условия:

$$h_{4\nu} = 0, \quad h_{44}(x, y) = N_r r(x), \quad (17)$$

где поле  $r(x)$  называется полем радиона, а  $N_r$  — некоторая нормировочная константа. Кроме того, предста-

вив компоненты  $h_{\mu\nu}$  в виде

$$h_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + (k|y| - c)\gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{2k^2} \left( k|y| - c + \frac{1}{2} + \frac{c}{2} \exp(-2k|y|) \right) \partial_\mu \partial_\nu r, \quad (18)$$

$$c \equiv \frac{kL}{\exp(2kL) - 1}, \quad (19)$$

на поля  $b_{\mu\nu}$  можно наложить калибровочные условия

$$\eta^{\mu\nu} b_{\mu\nu} \equiv b = 0, \quad \gamma^{\mu\nu} b_{\mu\nu} \equiv \tilde{b} = 0, \quad \partial^\mu b_{\mu\nu} = 0. \quad (20)$$

В такой калибровке компоненты уравнений движения с индексами  $4\nu$  превращаются в тождества, а компоненты с индексами  $\mu\nu$  и  $44$  приобретают соответственно вид

$$\frac{1}{2} \exp(-2k|y|) \square b_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b_{\mu\nu}}{\partial y^2} - 2k^2 b_{\mu\nu} + 2k[\delta(y) - \delta(y-L)] b_{\mu\nu} = 0, \quad (21)$$

$$\square r = 0, \quad (22)$$

где  $\square$  — четырёхмерный оператор Даламбера, построенный с помощью плоской метрики  $\eta_{\mu\nu}$ .

Уравнение (22) означает, что в рассматриваемой модели после проведения процедуры размерной редукции появляется одно безмассовое скалярное поле. Тяжёлых скалярных мод (КК-башни скалярных полей) при этом не возникает.

Уравнение (21) решается методом разделения переменных. Представив пятимерное поле  $b_{\mu\nu}(x, y)$  в виде разложения по базису волновых функций тензорных мод  $\Omega_n(y)$

$$b_{\mu\nu}(x, y) = \sum_n b_{\mu\nu}^n(x) \Omega_n(y), \quad (23)$$

получим уравнения на моды  $b_{\mu\nu}^n(x)$  и их волновые функции  $\Omega_n(y)$ :

$$\square b_{\mu\nu}^n + M_n^2 b_{\mu\nu}^n = 0, \quad (24)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2k[\delta(y) - \delta(y-L)] - 2k^2 + \frac{M_n^2}{2} \exp(2k|y|) \right\} \Omega_n(y) = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) при  $M_n = 0$  имеет простое решение

$$\Omega_0 = N_0 \exp(-2k|y|), \quad (26)$$

где  $N_0$  — константа, которую можно определить из условия нормировки, потребовав, чтобы кинетический член имел канонический вид. Решения с  $M_n \neq 0$  можно выразить через линейную комбинацию функций Бесселя и Неймана

$$\Omega_n(y) = a_n J_2\left(\frac{M_n}{k} \exp(k|y|)\right) + b_n Y_2\left(\frac{M_n}{k} \exp(k|y|)\right). \quad (27)$$

Условия симметрии в точках  $y = 0$  и  $y = L$  дают нам соотношение между параметрами  $a_n$  и  $b_n$ , а также связь между  $M_n$  и нулями линейной комбинации

$$Y_1\left(\frac{M_n}{k}\right) J_1\left(\frac{M_n}{k} \exp(kL)\right) - J_1\left(\frac{M_n}{k}\right) Y_1\left(\frac{M_n}{k} \exp(kL)\right) = 0. \quad (28)$$

А именно, представив  $M_n$  в виде

$$M_n = \beta_n k \exp(-kL) \quad (29)$$

и учитывая, что  $\exp(-kL)$  — малая величина (во многих работах по рассматриваемой тематике  $kL$  полагается равной примерно 30–35, см., например, [48]), произведём в (28) разложение по малому аргументу. Тогда для  $\beta_n$  получим приближённое уравнение

$$J_1(\beta_n) \approx 0. \quad (30)$$

Условие нормировки кинетических членов полей даёт ещё одно соотношение для параметров  $a_n$  и  $b_n$ . И в итоге для волновых функций и нормировочных констант получаем следующие выражения:

$$\Omega_n(y) = N_n \left[ Y_1(\beta_n k \exp(-kL)) J_2(\beta_n k \exp(k|y| - kL)) - J_1(\beta_n k \exp(-kL)) Y_2(\beta_n k \exp(k|y| - kL)) \right], \quad (31)$$

$$N_0 = \sqrt{\frac{k}{1 - \exp(-2kL)}}, \quad N_r = \sqrt{\frac{\exp(2kL) - 1}{3kL^2}}, \quad (32)$$

$$N_n = \sqrt{\frac{k}{\exp(2kL) f^2(\beta_n) - f^2(\beta_n \exp(-kL))}}, \quad (33)$$

где

$$f(x) \equiv Y_1\left(\frac{M_n}{k}\right) J_2(x) - J_1\left(\frac{M_n}{k}\right) Y_2(x).$$

После интегрирования по пятой координате  $y$  эффективное четырёхмерное действие в квадратичном приближении по полям  $b$  и  $r$  приобретает вид

$$S_{\text{eff}} = \int_{M_4} d^4x \left( \frac{1}{2} \eta^{\lambda\tau} \partial_\lambda r \partial_\tau r + \frac{1}{4} \sum_n \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \times \right. \\ \left. \times [\eta^{\lambda\tau} (\partial_\lambda b_{\alpha\mu}^n) (\partial_\tau b_{\beta\nu}^n) + M_n^2 b_{\alpha\mu}^n b_{\beta\nu}^n] \right). \quad (34)$$

Теперь учтём тот факт, что в рассматриваемой модели материя может находиться только на бранах. Взаимодействие флуктуаций метрики с полями материи имеет стандартный вид

$$S_{\text{int}} = \frac{\kappa}{2} \int_{M_4, y=0} h^{\mu\nu}(x, 0) T_{\mu\nu}^0 \sqrt{-\gamma_1} d^4x + \\ + \frac{\kappa}{2} \int_{M_4, y=L} h^{\mu\nu}(x, L) T_{\mu\nu}^L \sqrt{-\gamma_2} d^4x, \quad (35)$$

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — определители фоновой метрики на первой и второй бранах, а  $T_{\mu\nu}^{0,L}$  — тензор энергии – импульса (ТЭИ) материи на бранах в точках  $y = 0$  и  $y = L$  соответственно.

Предположим, что наша Вселенная расположена на первой бране, и рассмотрим взаимодействие на ней. Выберем координаты, галилеевы на этой бране [23, 48], т.е. у нас  $\sqrt{-\gamma_1} = 1$ . Подставив в (35) выражения (18) и (23), получаем для первого слагаемого в (35), описывающего действие для браны, расположенной в точке  $y = 0$ , следующее выражение:

$$S_{\text{int}0} = \frac{1}{2} \int_{M_4} \left[ \kappa_0 b^{0\mu\nu} T_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n b^{n\mu\nu} T_{\mu\nu} - \kappa_r r T_{\mu}^{\mu} \right] d^4x, \quad (36)$$

где

$$\kappa_0 \equiv N_0 \kappa, \quad \kappa_n \equiv \Omega_n(0) \kappa \approx \frac{\exp(-kL)}{|J_2(\beta_n)|} N_0 \kappa, \quad (37)$$

$$\kappa_r \equiv \frac{\exp(-kL)}{\sqrt{3}} N_0 \kappa. \quad (38)$$

Отождествим теперь безмассовую тензорную моду  $b_{\mu\nu}^0$  с гравитоном. Поскольку наша Вселенная находится именно на первой бране, то, чтобы получить на ней наблюдаемую гравитационную постоянную (постоянную Ньютона), константа  $\kappa_0$  должна быть выбрана равной  $1/(2M_{\text{Pl}}^2)^{1/2}$ . Таким образом, получаем связь между фундаментальной пятимерной массой  $M$  и эффективной четырёхмерной массой Планка

$$M_{\text{Pl}}^2 = \frac{1 - \exp(-2kL)}{k} M^3. \quad (39)$$

Как видим, при  $k \sim M$  величины  $M_{\text{Pl}}$  и  $M$  должны быть также одного порядка. Кроме того, масштабы взаимодействия безмассового скаляра и массивных тензорных мод с полями материи на этой бране подавлены фактором  $\exp(-kL)$  по сравнению с гравитационным. Такой вариант хоть и возможен, но не является удовлетворительным, поскольку не позволяет решить проблему иерархии.

Рассмотрим теперь взаимодействие на второй бране, расположенной в точке с координатой  $y = L$ . Так как мы выбрали координаты, галилеевы на первой бране, т.е. в которых в метрике (12) константа  $C$  положена равной 0, то на второй бране они негалилеевы. Переход к галилеевым координатам  $\{z^\mu\}$  на второй бране осуществляется с помощью подстановки  $x^\mu = \exp(kL) z^\mu$ . В этих координатах метрика (12) будет отвечать значению константы  $C = 2kL$ . Взаимодействие с материей на второй бране тогда примет вид

$$S_{\text{int}L} = \frac{\kappa}{2} \int_{M_4, y=L} \exp(-2kL) h^{\mu\nu}(x, L) T_{\mu\nu}^L d^4z, \quad (40)$$

где индексы поднимаются с помощью плоской метрики Минковского. Таким образом, видно, что для нахождения взаимодействия пятимерной гравитации с материей на бране 2 необходимо перейти к галилеевым координатам  $\{z^\mu\}$  также и в эффективном действии (34). Для этого также переопределим поля и массы тензорных мод следующим образом:

$$r' = \exp(kL)r, \quad b_{\alpha\beta}^n = \exp(-kL) b_{\alpha\beta}^n, \quad M'_n = \exp(kL)M_n. \quad (41)$$

Это нужно для того, чтобы привести кинетические члены полей в действии (34) к каноническому виду. В новых координатах второе слагаемое в формуле (35), описывающее действие для второй браны, приобретает вид

$$S_{\text{int}L} = \frac{1}{2} \int_{M_4} \left[ \kappa'_0 b_{\mu\nu}^{'0} T^{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa'_n b_{\mu\nu}^{'n} T_{\mu\nu} - \kappa'_r r' T_{\mu}^{\mu} \right] d^4z, \quad (42)$$

где

$$\kappa'_0 = \exp(-kL) N_0 \kappa, \quad \kappa'_n = \exp(kL) \Omega_n(L) \kappa \approx -N_0 \kappa, \quad (43)$$

$$\kappa'_r = \frac{1}{\sqrt{3}} N_0 \kappa.$$

Как было сделано ранее в случае с первой браной, отождествим безмассовую тензорную моду  $b_{\mu\nu}^{'0}$  с гравитоном и предположим, что наша Вселенная находится теперь на второй бране. Потребовав, чтобы гравитационная постоянная на ней совпадала с экспериментально наблюдаемой, получим, что на второй бране связь между фундаментальным пятимерным масштабом  $M$  и эффективным четырёхмерным масштабом  $M_{\text{Pl}}$  даётся уравнением (7):

$$M_{\text{Pl}}^2 = \frac{\exp(2kL) - 1}{k} M^3. \quad (44)$$

В данном случае при  $k \sim M$  величина  $M_{\text{Pl}}$  оказывается примерно в  $\exp(kL)$  раз больше величины  $M$ . Таким образом, если выполняется условие  $kL \sim 30-35$ , то наблюдаемое чрезвычайно слабое гравитационное взаимодействие возникает при значении фундаментального пятимерного масштаба  $M$  порядка нескольких ТэВ. При этом величины  $\kappa'_n$  и  $\kappa'_r$  при таких же предположениях оказываются порядка  $M^{-1}$ , т.е. порядка ТэВ $^{-1}$ . Массы низших тензорных мод  $M'_n = \beta_n k$  также будут лежать в диапазоне порядка нескольких ТэВ.

Наконец, отметим здесь ещё, что в работах [49, 50] рассматривался сценарий, когда параметр  $k$  много меньше многомерного фундаментального масштаба  $M$ . Такой подход приводит к существенно иной феноменологии и в настоящей работе рассматриваться не будет.

Как мы уже отмечали во введении, в оригинальной работе Л. Рэндалл и Р. Сундрума [20] для описания взаимодействия материи с КК-модами гравитационного поля на бране в точке  $y = L$  использовались координаты, галилеевы на бране в  $y = 0$ . В результате получалось, что фундаментальным энергетическим масштабом теории является масса Планка, как и должно быть на бране в  $y = 0$ , а массы низших КК-мод могут быть порядка нескольких ТэВ благодаря режущему экспоненциальному фактору. В работе В. Рубакова [12] впервые было замечено, что такой подход является некорректным, потому что любая теория должна описываться в координатах, галилеевых на бране наблюдателя. Впоследствии в работе [23] было показано, что фундаментальным энергетическим масштабом на бране в точке  $y = L$  является масштаб порядка нескольких ТэВ, а планковский масштаб является производным и появляется вследствие экспоненциального фактора в метрике. В абсолютном большинстве работ по модели РС авторы, следуя работе [20], используют некорректную физическую интерпретацию этой модели. Тем не менее результаты таких работ, как правило, совпадают с результа-

тами, полученными в рамках физически корректной интерпретации модели.

Таким образом, в нестабилизированной модели РС иерархия между калибровочным и гравитационным масштабами взаимодействий возникает естественным образом. Тем не менее такая модель не может считаться физически адекватной, поскольку возникающая в ней четырёхмерная скалярная мода — радион, — которая описывает относительное движение бран [24], является безмассовой. Действительно, легко показать, что

$$\int_0^L ds = \int_0^L \sqrt{-g_{44}} dy \approx \left(1 - \frac{N_r}{\sqrt{2M^3}} r\right) L = L - \sqrt{\frac{M_{\text{Pl}}^2}{6M^6}} r. \quad (45)$$

Из соотношения (45) очевидно, что поле радиона  $r(x)$  определяет физическое расстояние между бранами. Но отсутствие у радиона массы приводит к тому, что, по крайней мере в низшем порядке, система должна быть неустойчивой относительно малых флуктуаций, т.е., другими словами, расстояние между бранами оказывается нефиксированным. Этот факт, а также то обстоятельство, что безмассовое поле, взаимодействующее с полями СМ на ТэВном масштабе, было бы уже обнаружено экспериментально, делает данную модель феноменологически неприемлемой.

### 3. Стабилизированная модель Рэндалл – Сундрума

Указанные выше недостатки были преодолены в так называемой стабилизированной модели мира на бране (стабилизированная модель РС) [25, 26]. В ней, как и в нестабилизированной модели РС, пространство–время имеет пять измерений, причём топологически пятое измерение представляет собой орбифолд. В четырёхмерном пространстве между двумя бранами, расположенными в точках 0 и  $L$ , помимо гравитационного поля распространяется также скалярное поле Гольдбергера – Вайза  $\phi$ , минимальным образом взаимодействующее с гравитационным полем и обладающее некоторым пятимерным потенциалом самодействия, а также различными четырёхмерными потенциалами на бранах. На бране, расположенной в точке  $y = L$ , локализованы поля СМ. Пятимерное действие такой модели имеет вид

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2, \\ S_1 &= \int_{M_4} \int_{-L}^L \left( -2M^3 R + \frac{1}{2} g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi - V(\phi) \right) \sqrt{g} d^5 x, \\ S_2 &= \int_{M_4} \int_{-L}^L \left[ -\lambda_1(\phi) \delta(y) + (L_{\text{SM}} - \lambda_2(\phi)) \delta(y-L) \right] \sqrt{-g} d^5 x, \end{aligned} \quad (46)$$

где  $V(\phi)$  — пятимерный потенциал скалярного поля,  $\lambda_1(\phi)$  и  $\lambda_2(\phi)$  — дополнительные потенциалы скалярного поля на бранах,  $L_{\text{SM}}$  — лагранжиан полей СМ. Для гравитационного поля учёт симметрии орбифолда, как и в случае нестабилизированной модели РС, налагает условия вида (8), а для скалярного поля — условие

$$\phi(x, -y) = \phi(x, y). \quad (47)$$

Из действия (46) получаются следующие уравнения движения:

$$-\frac{1}{2M^3} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{MN}} = G_{MN} - \frac{1}{4M^3} T_{MN} = 0, \quad (48)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta \phi} = \square \phi + \frac{dV}{d\phi} + \left[ \frac{d\lambda_1}{d\phi} \delta(y) + \frac{d\lambda_2}{d\phi} \delta(y-L) \right] = 0, \quad (49)$$

где  $G_{MN}$  есть пятимерный тензор Эйнштейна, а  $T_{MN}$  — тензор энергии–импульса скалярного поля, определяемый следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{MN} &\equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{MN}} = \partial_M \phi \partial_N \phi - g_{MN} \left( \frac{1}{2} g^{PQ} \partial_P \phi \partial_Q \phi - V(\phi) \right) + \\ &+ [\lambda_1(\phi) \delta(y) + \lambda_2(\phi) \delta(y-L)] g_{\mu\nu} \delta_M^\mu \delta_N^\nu. \end{aligned} \quad (50)$$

В работе [26] показано, что фоновые решения уравнений движения (48), (49) с тензором энергии–импульса (50) следует искать в виде

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x, y) &\equiv \bar{g}_{\mu\nu}(y) = \exp(-2A(y)) \eta_{\mu\nu}, \\ g_{4\mu} &= 0, \quad g_{44} = -1, \quad \phi(x, y) = \bar{\phi}(y). \end{aligned} \quad (51)$$

В этом случае для функций  $A(y)$ ,  $\bar{\phi}(y)$  получаются следующие уравнения:

$$\frac{dV(\bar{\phi})}{d\bar{\phi}} + \frac{d\lambda_1}{d\bar{\phi}} \delta(y) + \frac{d\lambda_2}{d\bar{\phi}} \delta(y-L) = -4A' \bar{\phi}' + \bar{\phi}'', \quad (52)$$

$$12M^3 (A')^2 + \frac{1}{2} \left( V - \frac{1}{2} (\bar{\phi}')^2 \right) = 0, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} (\bar{\phi}')^2 + V(\bar{\phi}) + \lambda_1 \delta(y) + \lambda_2 \delta(y-L) \right) = \\ = -2M^3 (-3A'' + 6(A')^2). \end{aligned} \quad (54)$$

В работе [51] также показано, что при определённом выборе потенциалов фоновые решения для функций  $A(y)$ ,  $\bar{\phi}(y)$  имеют вид

$$\bar{\phi}(y) = \phi_0 \exp(-2u|y|), \quad (55)$$

$$A(y) = k|y| + \frac{\phi_0^2}{48M^3} \exp(-2u|y|) - \left( kL + \frac{\phi_0^2}{48M^3} \exp(-2uL) \right). \quad (56)$$

В формуле (56) слагаемое в круглых скобках есть просто константа интегрирования, которая сразу выбрана таким образом, чтобы четырёхмерные координаты  $x^\mu$  на бране, расположенной в точке  $y = L$ , были галилеевыми. Фигурирующие в решении, заданном формулами (51), (55), (56), константы  $k$ ,  $u$  и  $\phi_0$  однозначно выражаются через параметры потенциалов  $V$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , однако для дальнейших построений удобнее выразить потенциалы через эти константы:

$$V(\phi) = -24M^3 k^2 + \frac{(u+4k)u}{2} \phi^2 - \frac{u^2}{24M^3} \phi^4, \quad (57)$$

$$\lambda_1 = 24M^3 k - u\phi_0^2 - 2u\phi_0(\phi - \phi_0) + \beta_1^2(\phi - \phi_0)^2, \quad (58)$$

$$\lambda_2 = 24M^3 k - u\phi_L^2 - 2u\phi_L(\phi - \phi_L) + \beta_2^2(\phi - \phi_L)^2, \quad (59)$$

где

$$\phi_L \equiv \phi_0 \exp(-uL).$$

Полагая теперь, что решение (51), (55), (56) является фоновым, рассмотрим малые флуктуации  $h_{MN}(x, y)$  и  $f(x, y)$  гравитационного и скалярного полей соответственно над таким фоном. Запишем гравитационное и скалярное поля в низшем порядке по пятимерной гравитационной константе связи в виде следующего разложения:

$$g_{MN}(x, y) = \bar{g}_{MN}(y) + \kappa h_{MN}(x, y), \quad (60)$$

$$\phi(x, y) = \bar{\phi}(y) + \kappa f(x, y). \quad (61)$$

В работе [51] приводится квадратичный по малым флуктуациям  $h$  и  $f$  лагранжиан, а также следующие из него уравнения движения. Кроме того, в [51] показано, что существует такая калибровка, в которой уравнения движения расцепляются, так что в итоге получаются независимые уравнения для тензорных, векторных и скалярных компонент, причём тензорные и скалярные компоненты являются физическими степенями свободы, а векторные могут быть обращены в нуль, т.е. являются чистой калибровкой. В такой калибровке поля можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= b_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \varphi, \quad h_{44} = \exp(2A) \varphi, \quad h_{4\mu} = 0, \\ f &= \frac{3}{2} \frac{\exp(2A)}{\kappa^2 \bar{\phi}'} \varphi', \end{aligned} \quad (62)$$

где тензорное поле  $b_{\mu\nu}$  — поперечно-бесследовое, а штрих здесь означает производную по пятой координате  $y$ . Уравнения для тензорного поля  $b_{\mu\nu}$  и скалярного поля  $\varphi$  имеют следующий вид:

$$\frac{1}{2} (\square b_{\mu\nu} + b_{\mu\nu}'' - (2A'^2 - A'') b_{\mu\nu}) = 0, \quad (63)$$

$$\varphi'' + 2 \left( A' - \frac{\bar{\phi}''}{\bar{\phi}'} \right) \varphi' - \frac{\kappa^2 (\bar{\phi}')^2}{3} \varphi - \square \varphi = 0. \quad (64)$$

Разлагая поля  $b_{\mu\nu}(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$  по базисам из волновых функций  $\Omega_n(y)$  и  $\Psi_n(y)$  соответственно, получаем так называемые башни Калуцы – Клейна:

$$b_{\mu\nu}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{\mu\nu}^n(x) \Omega_n(y), \quad (65)$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \Psi_n(y). \quad (66)$$

В разложении (65) суммирование начинается с  $n = 0$ , чтобы подчеркнуть наличие нулевой (безмассовой) моды с  $\Omega_0 = N_0 \exp(-2A)$  (под  $N_0$  подразумевается нормировочный множитель). Видно, что слагаемое с нулевой модой  $b_{\mu\nu}^0 \Omega_0 = b_{\mu\nu}^0 N_0 \exp(-2A)$  имеет ту же структуру, что и фоновая метрика  $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \exp(-2A)$ , поэтому можно объединить эти два слагаемых, что эквивалентно переходу от плоского четырёхмерного фона к искривлённому. Эффективное четырёхмерное действие, описывающее такой фон, в точности совпадает с четырёхмерной скалярной кривизной [52], поэтому эффективная четырёхмерная гравитация в стабилизированной модели РС совпадает с гравитацией общей теории относительности.

Несмотря на то что все скалярные моды являются массивными, самая лёгкая из них может иметь массу порядка энергетического масштаба СМ (т.е. много меньшую по сравнению с массами остальных мод). Уравнение для волновых функций скалярных мод  $\Psi_n$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\exp(2A)}{(\bar{\phi}')^2} \Psi_n' \right)' - \frac{\kappa^2 \exp(2A)}{3} \Psi_n + m_n^2 \frac{\exp(4A)}{(\bar{\phi}')^2} \times \\ & \times \left( 1 + \frac{2}{\beta_1^2 + u} \delta(y) + \frac{2}{\beta_2^2 - u} \delta(y - L) \right) \Psi_n = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Решения уравнения (67) — функции  $\Psi_n(y)$  — образуют полную ортогональную систему, которую можно нормировать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{9m_n^2}{4\kappa^2} \int_{-L}^L dy \frac{\exp(4A)}{(\bar{\phi}')^2} \left( 1 + \frac{2}{\beta_1^2 + u} \delta(y) + \frac{2}{\beta_2^2 - u} \delta(y - L) \right) \times \\ & \times \Psi_n \Psi_m = \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (68)$$

В приближении малых  $uL$  в выражениях (55) и (56) для величин  $A(y)$  и  $\bar{\phi}(y)$  можно разложить в ряд экспоненты  $\exp(-2u|y|)$  и  $\exp(-2uL)$ , сохранив в разложении только линейные по  $|y|$  и  $L$  члены:

$$A(y) \approx \tilde{k}(|y| - L), \quad \bar{\phi}(y) \approx \phi_0(1 - u|y|), \quad (69)$$

где

$$\tilde{k} \equiv k - \frac{u}{12} \kappa^2 \phi_0^2.$$

Для волновых функций тензорных мод  $\Omega_n$  после такого разложения получается уравнение, аналогичное уравнению (25) в нестабилизированной модели РС, в котором символ  $k$  заменён символом  $\tilde{k}$ :

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\tilde{k} [\delta(y) - \delta(y - L)] - 2\tilde{k}^2 + \frac{M_n^2}{2} \exp(2\tilde{k}|y|) \right\} \times \\ & \times \Omega_n = 0. \end{aligned} \quad (70)$$

Чтобы получить аналогичное уравнение для волновых функций скалярных мод  $\Psi_n$ , подставим приближённые выражения (69) для величин  $A(y)$  и  $\bar{\phi}(y)$  в уравнение (67) и перейдём к переменной  $z = \exp(-k(L - y)) m_n / \tilde{k}$ . В результате получим на интервале  $z \in (m_n \exp(-kL) / \tilde{k}, m_n / \tilde{k})$  уравнение вида

$$\frac{d^2 \Psi_n}{dz^2} + \left( 3 + \frac{2u}{\tilde{k}} \right) \frac{1}{z} \frac{d\Psi_n}{dz} + \left( 1 - \frac{b^2}{z^2} \right) \Psi_n = 0, \quad (71)$$

где

$$b^2 \equiv \frac{\kappa^2 \phi_0^2}{3} \frac{u^2}{\tilde{k}^2}.$$

Условия симметрии на концах интервала  $z \in (m_n \exp(-kL) / \tilde{k}, m_n / \tilde{k})$ , т.е. в точках расположения бран  $y = 0$  и  $y = L$ , дают нам граничные условия, которым должны подчиняться решения уравнения (71)

$$\begin{aligned} & \left( \tilde{k} z^2 \Psi_n + (\beta_0^2 + u) z \frac{d\Psi_n}{dz} \right) \Big|_{z=m_n \exp(-kL)/\tilde{k}} = 0, \\ & \left( \tilde{k} z^2 \Psi_n - (\beta_L^2 - u) z \frac{d\Psi_n}{dz} \right) \Big|_{z=m_n/\tilde{k}} = 0. \end{aligned} \quad (72)$$

При этом само решение уравнения (71) может быть выражено через линейную комбинацию функций Бесселя:

$$\Psi_n = z^{-1-u/\tilde{k}} (B_n J_\alpha(z) + C_n J_{-\alpha}(z)), \quad (73)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\left(1 + \frac{u}{\tilde{k}}\right)^2 + b^2}.$$

Если теперь предположить, что фундаментальный пятимерный параметр  $M$  имеет величину порядка нескольких ТэВ, то, как и в нестабилизированной модели РС, получим наблюдаемую эффективную четырёхмерную константу гравитационного взаимодействия при условии  $\tilde{k} \sim M$  и  $\tilde{k}L \sim 35$ . Поэтому, в силу того что  $m_n/\tilde{k} \ll \exp(\tilde{k}L) \sim 10^{15}$ , первое граничное условие из системы (72) даёт нам соотношение

$$\begin{aligned} C_n &\approx \frac{\alpha - 1 - u/\tilde{k}}{\alpha + 1 + u/\tilde{k}} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{2\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{m_n}{2\tilde{k}} \exp(-\tilde{k}L)\right)^{2\alpha} B_n \sim \\ &\sim 4 \times 10^{-31} \exp[-70(\alpha-1)] \frac{\alpha-1-u/\tilde{k}}{\alpha+1+u/\tilde{k}} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{2\Gamma(1+\alpha)} \times \\ &\times \left(\frac{m_n}{2\tilde{k}}\right)^{2\alpha} B_n. \end{aligned} \quad (74)$$

Из формулы (74) видно, что константы  $C_n$  сильно подавлены по сравнению с константами  $B_n$ , поэтому вкладом второго слагаемого в формуле (73) можно пренебречь. Действительно, даже на правой границе интервала, где  $J_{-\alpha}$  растёт как  $z^{-\alpha}$ , для функций  $\Psi_n$  можно записать приближённое выражение

$$\Psi_n \approx B_n \frac{z^{\alpha-1-u/\tilde{k}}}{2^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \left[ 1 + \frac{1}{2} \exp(-2\alpha\tilde{k}L) \frac{\alpha-1-u/\tilde{k}}{\alpha+1+u/\tilde{k}} \right]. \quad (75)$$

Второе слагаемое в квадратных скобках в формуле (75) есть вклад от  $C_n J_{-\alpha}$ . Очевидно, что он много меньше вклада от первого слагаемого, поэтому вторым слагаемым в выражении (73) можно пренебречь на всём интервале. Значение параметра  $B_n$  может быть определено из условия нормировки (см., например, [52]).

Второе граничное условие в (72) позволяет получить спектр масс скалярных мод:

$$\left(1 + \alpha + \frac{u}{\tilde{k}} + \frac{1}{\beta_2^2 - u} \frac{m_n^2}{\tilde{k}}\right) J_\alpha\left(\frac{m_n}{\tilde{k}}\right) - \frac{m_n}{\tilde{k}} J_{\alpha-1}\left(\frac{m_n}{\tilde{k}}\right) = 0. \quad (76)$$

В зависимости от значений остальных параметров, это уравнение может иметь одно сколь угодно близкое к нулю решение, очевидно соответствующее лёгкой моде. Если её масса удовлетворяет условию  $m_1^2 \ll \tilde{k}^2$ , то в формуле (76) можно разложить в ряд функции Бесселя и получить для массы радиона, т.е. самой лёгкой моды, приближённое выражение

$$m_1^2 = m_1^2 \approx \frac{2}{3} \frac{(\beta_L^2 - u)u^2}{\beta_L^2 + 4\tilde{k}} \kappa^2 \phi_0^2. \quad (77)$$

Следующие нули выражения (76) дают для остальных скалярных мод массы порядка  $\tilde{k}$ , причём при достаточно

больших  $n$  получаем для масс скалярных мод приближённую формулу

$$m_n^2 \approx \pi^2 \tilde{k}^2 n^2. \quad (78)$$

Таким образом, аналогично нестабилизированной модели РС, получаем редуцированное действие стабилизированной модели в линейном приближении в виде

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} = & -\frac{1}{4} \sum_k \int dx (\partial^\sigma b^{k\mu\nu} \partial_\sigma b_{\mu\nu}^k + M_k^2 b^{k\mu\nu} b_{\mu\nu}^k) - \\ & -\frac{1}{2} \sum_k \int dx (\partial_\nu \varphi_k \partial^\nu \varphi_k + m_k^2 \varphi_k \varphi_k). \end{aligned} \quad (79)$$

В стабилизированной модели РС анализ взаимодействия тензорных и скалярных мод с материей на бранах в целом аналогичен анализу в нестабилизированной модели РС. В первом порядке по гравитационной постоянной  $\kappa$  для браны, расположенной в точке  $y = L$ , получается выражение

$$S_{\text{int}L} = \frac{1}{2} \int_{M_4} \left[ \kappa_0 b^{0\mu\nu} T_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n b^{n\mu\nu} T_{\mu\nu} - \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_{rn} \varphi_n T_\mu^\mu \right] d^4x, \quad (80)$$

где для каждой тензорной и скалярной моды получаем свою константу взаимодействия:

$$\kappa_0 = \Omega_0(L)\kappa, \quad \kappa_n = \Omega_n(L)\kappa, \quad (81)$$

$$\kappa_{rn} = \Psi_n(L)\kappa. \quad (82)$$

Если на бране, расположенной в точке  $y = L$ , выбраны галилеевы координаты, то нормированные тензорные волновые функции выглядят как  $\Omega_0(L) \approx \sqrt{\tilde{k}} \exp(-\tilde{k}L)$  и  $\Omega_n(L) \approx -\sqrt{\tilde{k}}$ . И тогда, как это было и в нестабилизированной модели РС, получаем для констант взаимодействия следующее выражение:

$$\kappa_0 \approx \exp(-\tilde{k}L) \sqrt{\tilde{k}} \kappa, \quad \kappa_n \approx -\exp(\tilde{k}L) \kappa_0. \quad (83)$$

Совершенно аналогичным способом получается формула для значений волновых функций скалярных мод на бране:

$$\Psi_n(L) \approx \frac{1}{2} B_n \left(\frac{m_n}{\tilde{k}}\right)^{-1-u/\tilde{k}} J_\alpha\left(\frac{m_n}{\tilde{k}}\right). \quad (84)$$

Что касается выражения для константы взаимодействия лёгкой скалярной моды с полями СМ, то оно рассмотрено в разделе 6, посвящённом нелинейным взаимодействиям радиона. Здесь же заметим, что при выбранном в настоящей работе диапазоне параметров модели величина  $\Lambda \equiv \kappa_{r1}^{-1}$  вполне может принимать значения в диапазоне нескольких ТэВ.

Таким образом, в модели РС естественным образом возникает иерархия между масштабами четырёхмерных гравитационного и калибровочного взаимодействий. Нестабилизованный вариант модели помимо безмассового гравитона и бесконечного числа тяжёлых тензорных мод, взаимодействующих с ТЭИ материи с константами взаимодействий порядка четырёхмерной постоянной Планка, содержит одну безмассовую скалярную моду, называемую радионом, взаимодействующую со следом ТЭИ материи с константой взаимодействия порядка

фундаментального многомерного масштаба. Данный фундаментальный масштаб задаёт также масштаб взаимодействия четырёхмерных калибровочных полей и может лежать в диапазоне нескольких ТэВ. В стабилизированной модели РС иерархия между гравитационным и калибровочным энергетическими масштабами получается аналогично нестабилизированному варианту модели РС. Однако эффективный четырёхмерный скалярный сектор стабилизированной модели РС вместо одного безмассового поля содержит бесконечное число массивных мод. Массы таких полей (кроме, возможно, самого лёгкого) начинаются с величин порядка многомерного фундаментального масштаба. При этом самая лёгкая мода может иметь массу, на порядок меньшую (сотни ГэВ), а её взаимодействие с полями материи имеет форму, аналогичную той, что возникает в нестабилизированной модели РС. Также следует отметить, что константа взаимодействия радиона с материей в стабилизированной модели РС в несколько раз меньше аналогичной константы в нестабилизированной модели РС.

#### 4. Феноменология калуца-клейновских возбуждений

Как уже было отмечено во введении, наиболее заметным феноменологическим следствием стабилизированной модели РС является существование бесконечных КК-башен тензорных и скалярных частиц, обладающих нулевыми квантовыми числами СМ и универсально взаимодействующих со всеми полями этой модели с константами связи порядка нескольких обратных ТэВ. Такие частицы могли бы рождаться с заметным сечением в рр-столкновениях на коллайдере LHC, если бы энергия этого коллайдера была выше порога рождения КК-возбуждений. Если же энергия коллайдера находится ниже порога рождения даже низшего КК-возбуждения, то взаимодействия, порождаемые обменом виртуальными КК-возбуждениями, с большой точностью будут сводиться к дополнительным контактными взаимодействиям полей СМ и давать поправки к коллайдерным процессам. В данном случае экспериментальная ситуация может напоминать ситуацию со слабыми взаимодействиями в то время, когда достижимые на ускорителях энергии были намного ниже порога рождения промежуточных векторных бозонов, и слабые взаимодействия описывались четырёхфермионным взаимодействием Ферми. Сначала мы рассмотрим именно такую возможность.

Использование контактных взаимодействий или эффективных операторов высших размерностей является хорошо известным модельно независимым способом параметризации возможных отклонений от СМ, который был предложен в работах [58–61] и в настоящее время широко используется в эффективных теориях поля. Такие операторы вводятся достаточно произвольным образом в феноменологических расширениях СМ, причём единственным ограничением на их вид обычно выступает требование сохранения симметрий последней. Экспериментальная проверка присутствия вклада от таких операторов в сечения различных процессов на адронных и лептонных коллайдерах может дать либо указания на проявление физики за рамками СМ, либо только ограничения на параметры эффективных лагранжианов (см., например, [62–65]). Однако при этом воз-

никает большое число допустимых эффективных операторов, каждый из которых имеет собственную константу связи, что приводит к очень сложной задаче извлечения большого количества параметров из экспериментальных данных.

В то же время модели с дополнительными измерениями, рассматриваемые в области энергий ниже порога рождения КК-возбуждений, приводят к эффективным операторам определённой структуры. В частности, возникающие в таких моделях контактные взаимодействия универсальны в том смысле, что они характеризуются только одной размерной константой. Экспериментальное наблюдение таких контактных взаимодействий могло бы быть сильным аргументом в пользу моделей с большими дополнительными измерениями. Следуя работе [100], мы изложим такой подход в рамках стабилизированной модели РС, которая позволяет учесть также и скалярную компоненту многомерной гравитации.

Для этого рассмотрим теорию с действием

$$S = S_{\text{eff}} + S_{\text{intL}} + S_{\text{SM}}, \quad (85)$$

где  $S_{\text{eff}}$  определено в (79),  $S_{\text{intL}}$  определено в (80), а  $S_{\text{SM}}$  обозначает действие СМ, причём  $T^{\mu\nu}$  в (80) есть тензор энергии – импульса СМ. Нетрудно понять, что данная теория фактически представляет собой линейное приближение для модели РС, в котором также пренебрегается взаимодействием КК-мод между собой, считающимся более слабым, чем их взаимодействие с полями СМ.

Свободные поля в такой теории могут быть проквантованы стандартным способом, при этом пропагаторы КК-мод имеют вид

$$D_{\mu\nu,\rho\sigma}^k(p) = -\frac{b_{\mu\nu,\rho\sigma}^k(p)}{p^2 + M_k^2 - i\epsilon}, \quad (86)$$

$$\begin{aligned} b_{\mu\nu,\rho\sigma}^k(p) = & \left( \eta_{\mu\rho} + \frac{p_\mu p_\rho}{M_k^2} \right) \left( \eta_{\nu\sigma} + \frac{p_\nu p_\sigma}{M_k^2} \right) + \left( \eta_{\mu\sigma} + \frac{p_\mu p_\sigma}{M_k^2} \right) \times \\ & \times \left( \eta_{\nu\rho} + \frac{p_\nu p_\rho}{M_k^2} \right) - \frac{2}{3} \left( \eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M_k^2} \right) \left( \eta_{\rho\sigma} + \frac{p_\rho p_\sigma}{M_k^2} \right), \\ D^k(p) = & -\frac{1}{p^2 + m_k^2 - i\epsilon}. \end{aligned} \quad (87)$$

Если мы рассматриваем теорию с действием (85) в области энергий или передач импульса, намного меньших, чем массы КК-возбуждений  $M_k$ ,  $m_k$ , то мы можем перейти к эффективной "низкоэнергетической" теории, которая может быть получена с помощью стандартной процедуры. А именно, мы можем опустить в пропагаторах тяжёлых мод зависимость от импульса и проинтегрировать по этим модам в функциональном интеграле, построенном на основе действия (85). В результате мы получим лагранжианы контактных взаимодействий, порождённые тензорными степенями свободы,

$$L_T = \frac{1}{8M^3} \left( \sum_{n>0} \frac{\Omega_n^2(L)}{M_n^2} \right) T^{\mu\nu} A_{\mu\nu,\rho\sigma} T^{\rho\sigma}, \quad (88)$$

$$A_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2} b_{\mu\nu,\rho\sigma}^k(p)|_{p=0} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}, \quad (89)$$

и скалярными степенями свободы

$$L_S = \frac{1}{64M^3} \left( \sum_n \frac{\Psi_n^2(L)}{m_n^2} \right) T_\mu^\mu T_\nu^\nu, \quad (90)$$

где  $M$  есть фундаментальный пятимерный энергетический масштаб.

Эффективные константы связи

$$\frac{1}{8M^3} \left( \sum_n \frac{\Omega_n^2(L)}{M_n^2} \right), \quad \frac{1}{64M^3} \left( \sum_n \frac{\Psi_n^2(L)}{m_n^2} \right)$$

в этой модели могут быть оценены следующим образом. В работе [51] было показано, что в стабилизированной модели РС удобнее использовать параметры  $\tilde{k}$  (69),  $b$  (71) и  $L$  вместо  $\phi_0$ ,  $\phi_L$  и  $k$ . Также в разделе 3 настоящего обзора показано, что при  $uL \ll 1$  метрика стабилизированной модели практически совпадает с метрикой нестабилизированной модели с обратным антидеситтеровским радиусом  $\tilde{k}$  вместо  $k$ , и можно найти аналитические решения для волновых функций тензорных и скалярных мод и их спектры масс.

В указанной области значений параметров модели спектр тензорных возбудений достаточно точно даётся решениями уравнения

$$J_1\left(\frac{M_n}{\tilde{k}}\right) = 0,$$

и в приближении бесконечно жёсткого потенциала на бране в  $y = L$  получается  $\Omega_n|_{y=L} = \sqrt{\tilde{k}}$  (см. [23, 51]). В этом случае сумма по тензорным модам в (88) может быть оценена как

$$\frac{1}{8M^3} \sum_{n>0} \frac{\Omega_n^2(L)}{M_n^2} \approx \frac{1,82}{\Lambda_\pi^2 M_1^2},$$

где мы ввели константу связи первого КК-резонанса  $\Lambda_\pi$  и его массу  $M_1$ :

$$\frac{1}{\Lambda_\pi} = -\frac{\Omega_1(L)}{\sqrt{8M^3}}, \quad M_1 = 3,83\tilde{k}.$$

Следует отметить, что вклад первого КК-резонанса в данную сумму в точности равен  $1/\Lambda_\pi^2 M_1^2$ , а число 1,82 определяется нефакторизуемой геометрией пятимерного пространства–времени модели РС. Например, для факторизуемой геометрии с пространством дополнительного измерения  $S^1$  вместо него получилось бы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \equiv \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Также нетрудно убедиться, что

$$-\frac{\Omega_n(L)}{\sqrt{8M^3}} \approx \frac{1}{\Lambda_\pi}$$

для достаточно малых  $n$ .

В этой параметризации, часто используемой в модели РС, эффективный лагранжиан принимает вид

$$L_{\text{eff}} = L_T + L_S = \frac{1,82}{\Lambda_\pi^2 M_1^2} T^{\mu\nu} \tilde{\Delta}_{\mu\nu, \rho\sigma} T^{\rho\sigma}, \quad (91)$$

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu, \rho\sigma} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \left(\frac{1}{3} - \frac{\delta}{2}\right) \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}, \quad (92)$$

где константа  $\delta$  учитывает вклад скалярных мод и в соответствии с результатами раздела 3 получается равной примерно 0,7 [100].

Как мы уже отмечали, такой лагранжиан взаимодействия порождает вполне определённые процессы с полями СМ, которые определяются структурой её тензора энергии–импульса  $T^{\mu\nu}$ . Последний представляет собой сумму тензоров энергии–импульса свободных полей СМ и вклада членов с взаимодействием, пропорциональных константам связи СМ. Тензоры энергии–импульса свободных полей СМ квадратичны по полям и в явном виде приведены в работе [100].

Для свободных безмассовых полей след тензора энергии–импульса равен нулю, и скалярные степени свободы не дают вклада в эффективное взаимодействие. Они могут давать вклад в такое взаимодействие, только если учесть конформную аномалию безмассовых полей. Аномальная часть тензора энергии–импульса оказывается равной

$$\Delta T_{\mu\nu} = \frac{\beta(g)}{6g} \left( \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma},$$

что приводит к хорошо известному выражению для аномального следа данного тензора

$$\Delta T_\mu^\mu = \frac{\beta(g)}{2g} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma},$$

где  $\beta(g)$  есть бета-функция. Структура этого аномального вклада в тензор энергии–импульса такова, что взаимодействие посредством обмена тензорными частицами в (88) исчезает, и остаётся только взаимодействие посредством обмена скалярными частицами (90). Однако это аномальное взаимодействие оказывается подавленным по сравнению с взаимодействием посредством обмена тензорными частицами, потому что след тензора энергии–импульса пропорционален массе частицы, которая значительно меньше и  $M_1$ , и  $\Lambda_\pi$ . Поэтому наблюдение скалярной компоненты эффективного взаимодействия, скорее всего, возможно только вследствие смешивания полей Хиггса и радиона [72, 73, 85] (обсуждение последнего см. ниже в разделе 7).

Таким образом, в низшем не исчезающем порядке по константам связи СМ эффективный лагранжиан (91) представляет собой сумму четырёхчастичных эффективных операторов (не только четырёхфермионных, но также отвечающих взаимодействию двух фермионов и двух векторных частиц, четырёх векторных частиц и т.д.). Экспериментальное наблюдение процессов рождения, следующих из эффективного лагранжиана (91), или ограничений на их сечения позволяет оценить многомерный фундаментальный энергетический масштаб  $M$ , если удастся получить теоретические оценки для произведения параметров  $M_1$  и  $\Lambda_\pi$  в (91). Их отношение можно оценить исходя из того факта, что ширина первого КК-резонанса должна быть меньше его массы.

Как было отмечено, в низшем порядке по константам связи СМ эффективный лагранжиан включает в себя сумму различных четырёхчастичных эффективных операторов (не только четырёхфермионных, но также и двухфермионных–двухбозонных и четырёхбозонных), которые инвариантны относительно калибровочной группы СМ и приводят к хорошо определённой феноменологии. Такой лагранжиан содержит только три свободных

параметра  $A_\pi$ ,  $M_1$  и  $\delta$ , причём  $A_\pi$  и  $M_1$  параметризуют общую константу связи, а  $\delta$  характеризует относительный вклад скалярного поля радиона (или набора скалярных полей, как это имеет место в стабилизированной модели РС). Отметим некоторые интересные моменты.

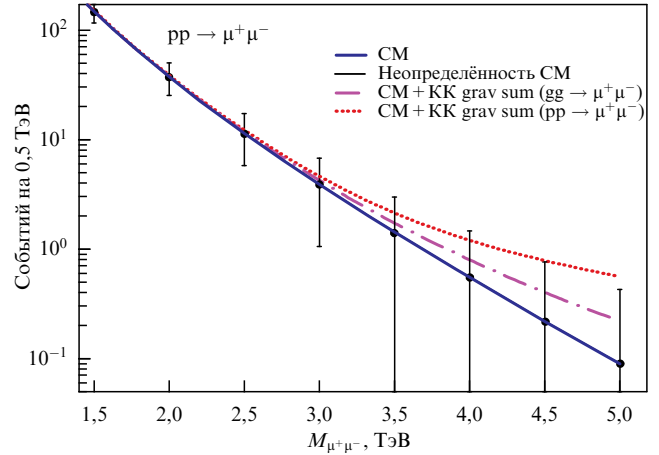
Прежде всего, в низшем порядке присутствуют нейтральные токи частиц только из одного и того же поколения СМ. Такие новые взаимодействия не приводят к дополнительным модам распада. Новые возможные распады частиц СМ, вытекающие из данного эффективного лагранжиана, могут возникнуть только в следующем порядке по константам связи СМ, когда в тензоре энергии – импульса появятся заряженные токи. Новые эффективные четырёхчастичные операторы, получающиеся из тензора энергии – импульса, также не приводят к меняющимся ароматам нейтральным токам. В древесном приближении эффективный лагранжиан приводит к ряду процессов, которые появляются в СМ только на петлевом уровне:  $gg \rightarrow l^+l^-$ ,  $gg \rightarrow ZZ (W^+W^-)$ ,  $e^+e^- \rightarrow gg$ ,  $\gamma\gamma \rightarrow gg$  и т.д. В работе [100] приведены аналитические выражения для дифференциальных сечений указанных процессов, учитывающие ненулевые массы частиц в конечном состоянии. В случае безмассовых фермионов эти формулы для полных и дифференциальных сечений процессов Дрелла – Яна  $gg \rightarrow l^+l^-$  и  $q\bar{q} \rightarrow l^+l^-$  находятся в полном согласии с формулами работ [101 – 103].

В процессы рождения массивных частиц сталкивающимися глюонами также даёт вклад скалярный радион. Вычисление этого вклада производится с использованием формул (91), (92), и он получается пропорциональным параметру  $\delta^2$  порядка 1 и коэффициенту аномального следа  $(b(g_s)/2g_s)^2$ , а численно оказывается примерно в 100 раз меньше, чем вклад от тензорных мод.

Ниже, опять следуя работе [100], мы приведём результаты численных расчётов процессов Дрелла – Яна, потому что данный канал наиболее чувствителен к новой физике. Такие аналитические и численные расчёты, в том числе и моделирование фона СМ в мысленном эксперименте для LHC, были проведены с помощью версии пакета CompHEP [89], реализованного на основе пакета программ для символьных вычислений FORM [104]. В эту версию пакета CompHEP были встроены правила Фейнмана, получающиеся из найденного эффективного лагранжиана, что позволяет использовать код для генерации событий и в дальнейшем для анализа данных в условиях реальных экспериментов.

Используя стандартный критерий  $\chi^2$ , в котором учитываются систематические ошибки (характерное разрешение детектора, неопределённости, связанные с масштабами факторизации/нормировки КХД и функций распределения PDF, ошибки измерения электрослабых параметров и светимости) и статистические неопределённости распределения дилептонов СМ по инвариантной массе, мы оценили экспериментальные ограничения на параметр константы связи с достоверностью 95 %, которые могут быть достигнуты на LHC при двух значениях интегральной светимости:

$$\begin{aligned} 50 \text{ фб}^{-1} : \frac{0,91}{A_\pi^2 M_1^2} &< 0,00164 \text{ ТэВ}^{-4}, \\ 100 \text{ фб}^{-1} : \frac{0,91}{A_\pi^2 M_1^2} &< 0,0014 \text{ ТэВ}^{-4}. \end{aligned} \quad (93)$$



**Рис. 1.** Распределение по инвариантной массе дилептонов на уровне достоверности 95 % для параметра  $0,91/(A_\pi^2 M_1^2) = 0,0014 \text{ ТэВ}^{-4}$  для ускорителя LHC ( $L = 100 \text{ фб}^{-1}$ ). Штрихпунктирная линия отвечает сумме СМ + КК для процесса  $gg \rightarrow \mu^+\mu^-$ , пунктирная линия отвечает сумме СМ + КК для процесса  $pp \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

Видно, что эти ограничения медленно уменьшаются с ростом светимости.

На рисунке 1 показаны распределения для СМ и СМ с учётом вклада КК-гравитонов, отвечающие максимальному значению светимости в формуле (93) и учитывающие также подпроцесс  $gg \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Мы видим, что в модели РС обмен башней КК-гравитонов в области энергий ниже порога их рождения приводит к поднятию хвоста распределения по инвариантной массе рождённых частиц, на это было указано в работе [67]. Особо следует подчеркнуть характерную особенность при поисках КК-резонансов ниже порога рождения первой моды, которая состоит в заметном увеличении эффективной константы связи по сравнению с вкладом только первой моды, что является следствием суммирования вкладов КК-мод. Как было показано выше, для рассмотренного случая стабилизированной модели получается следующий фактор усиления:

$$\sum_{n \neq 0} \frac{(\Omega_n(L))^2}{M_n^2} \approx 1,82 \frac{(\Omega_1(L))^2}{M_1^2}.$$

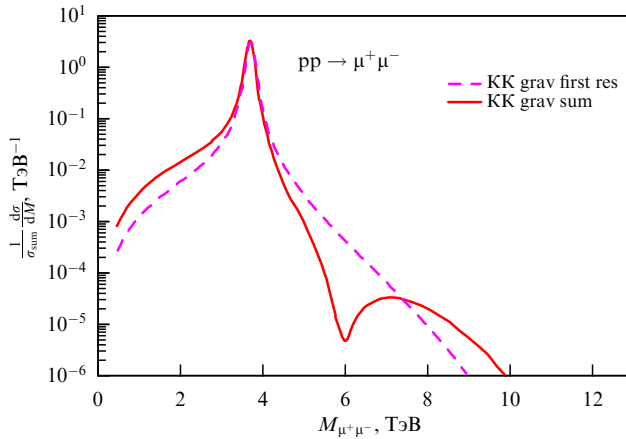
Это приводит к увеличению в  $(1,82)^2 \approx 3,3$  раза сечений рождения (в случае одного плоского дополнительного измерения данный фактор равен

$$(1,64)^2 \Rightarrow \left( \sum_n \frac{1}{n^2} \right)^2 = \left( \frac{\pi^2}{6} \right)^2 \approx 2,7,$$

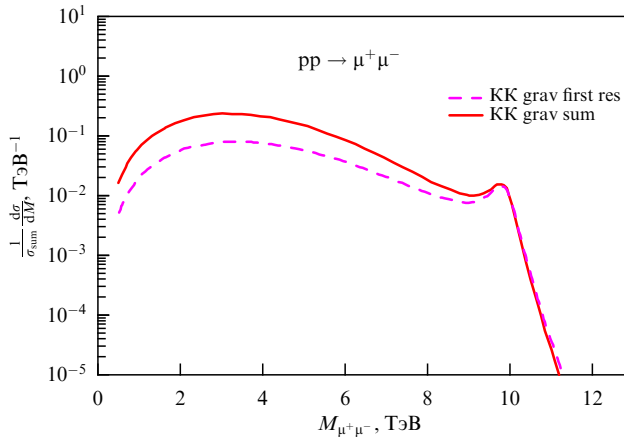
что по величине близко к случаю неплюского измерения).

Ограничения из формулы (93) можно также использовать для оценки нижнего значения параметра  $A_\pi$  исходя из требования, что ширина резонанса меньше его массы,  $\Gamma_1 < M_1$ , что приводит к ограничению  $A_\pi > 2,82 \text{ ТэВ}$  [100].

На коллайдере LHC также проводились поиски резонансов в процессах Дрелла – Яна, и в настоящее время максимальная набранная в этих экспериментах интегральная светимость равна  $139 \text{ фб}^{-1}$  [53], а найденные ограничения снизу на массу первого КК-гравитона составляют от примерно 2,5 ТэВ до 5 ТэВ в зависимости от величины отношения параметров  $\tilde{k}/M$ , которое опреде-



**Рис. 2.** Нормированное распределение по инвариантной массе дилептонов для первого КК-резонанса плюс сумма состояний КК-башни начиная со второй моды (сплошная линия) и только для первого КК-резонанса (штриховая линия) при  $M_{\text{res}} = 3,83$  ТэВ,  $\Gamma_{\text{res}} = 0,08$  ТэВ,  $A_\pi = 8$  ТэВ для ускорителя LHC.



**Рис. 3.** Нормированное распределение по инвариантной массе дилептонов для суммы состояний КК-башни начиная с первой моды (сплошная линия) и только для первого КК-резонанса (штриховая линия) при  $M_{\text{res}} = 10$  ТэВ,  $\Gamma_{\text{res}} = 0,5$  ТэВ,  $A_\pi = 14$  ТэВ для ускорителя LHC.

ляет величину константы связи резонанса [53, 54]. Чтобы проиллюстрировать изменения в распределениях вследствие вкладов башен КК-гравитонов для случая, когда массы резонансов меньше максимальной энергии коллайдера, мы провели моделирование для двух точек в пространстве параметров, таких что для одной первый КК-резонанс находится в области прямого наблюдения, а для другой — вне её.

Первая точка отвечает значениям параметров модели  $M_1 = 3,83$  ТэВ,  $A_\pi = 8$  ТэВ,  $\Gamma_1 = 0,08$  ТэВ. Такой резонанс в модели РС лежит близко к границе прямого наблюдения коллайдера LHC. Для второй точки с  $M_1 = 10$  ТэВ,  $A_\pi = 14$  ТэВ,  $\Gamma_1 = 0,5$  ТэВ масса первого КК-резонанса близка к максимальной энергии коллайдера, и он непосредственно ненаблюдаем. Для обеих точек мы можем использовать метод низкоэнергетических эффективных лагранжианов. Для этого мы должны просуммировать либо вклады всех КК-мод, либо всех мод, кроме первой, и таким образом учесть их влияние на хвост распределения. На рисунке 2 и 3 видно, что дополнительный вклад от КК-башни увеличивает сечение рождения более

чем в три раза в области инвариантных масс, меньших массы первого КК-резонанса. Однако поведение сечения коренным образом меняется в области выше массы первого резонанса, где наряду с резонансным пиком появляется провал вследствие деструктивной интерференции между вкладом первого КК-резонанса и вкладом остальной КК-башни. Этот локальный минимум находится в точке  $M_{\text{min}} \approx 1,5M_1$ . Рост сечения после этого минимума сильно подавлен партонными структурными функциями, что приводит к дополнительному горбу в распределении по инвариантной массе. Но экспериментальное наблюдение такого горба на фоне сечения СМ представляется крайне затруднительным. Следовательно, для корректного поиска КК-резонансов при расчётах и моделировании сигнальных процессов необходимо учитывать не только интерференцию с амплитудой СМ (если она не исчезает) и вычислить NLO поправки КХД, но также учесть вклад в амплитуду процесса тех КК-мод, которые недоступны для прямого наблюдения, и интерференцию с ним.

Как мы упоминали во введении, рассматривается также вариант модели РС, когда в четырёхмерном пространстве между бранами распространяются также и калибровочные поля СМ. Поводом для такого расширения модели РС служит тот факт, что в исходном подходе Рубакова и Шапошникова не существует последовательного механизма локализации калибровочных полей на доменной стенке. В данном случае у калибровочных полей СМ тоже должны существовать КК-моды, которые искали в экспериментах на LHC [55, 56]. В настоящее время ограничения снизу на массы таких возбуждений составляют примерно 3,7 ТэВ. Влияние этих КК-мод на процессы СМ подробно рассмотрено, например, в работах [43–47, 57].

## 5. Сравнение процессов с участием радиона с аналогичными процессами с участием бозона Хиггса

В предыдущих разделах было показано, что эффективное четырёхмерное взаимодействие радиона с полями СМ в низшем порядке описывается лагранжианом вида [51, 66]

$$L_{\text{int}} = -\frac{1}{\Lambda} r T_\mu^\mu, \quad (94)$$

где  $T_\mu^\mu$  — след ТЭИ полей СМ,  $r$  — поле радиона, а  $\Lambda$  — константа, имеющая размерность энергии. Поскольку в данном случае радион фактически играет роль дилатона, то он взаимодействует также и с безмассовыми векторными полями СМ (фотоном и глюоном) посредством конформной аномалии, которая должна быть включена в след ТЭИ. С учётом последнего замечания след ТЭИ записывается в виде

$$T_\mu^\mu = \sum_f \left\{ \frac{3i}{2} [(D_\mu \bar{f}) \gamma^\mu f - \bar{f} \gamma^\mu (D_\mu f)] + 4m_f \bar{f} f \left( 1 + \frac{h}{v} \right) \right\} - \\ - (\partial_\mu h)(\partial^\mu h) + 2m_h^2 h^2 \left( 1 + \frac{h}{2v} \right)^2 - \\ - (m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + 2m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu}) \left( 1 + \frac{h}{v} \right)^2 + \\ + \frac{\beta(g_s)}{2g_s} G_{\mu\nu}^{ab} G^{\mu\nu}_{ab} + \frac{\beta(e)}{2e} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (95)$$

где суммирование в первом слагаемом ведётся по всем фермионам СМ, а  $D_\mu$  есть ковариантная производная СМ. Последние два слагаемых в формуле (95) описывают глюонную и фотонную аномалии, а множители  $\beta(g_s)$  и  $\beta(e)$  суть бета-функции квантовой хромодинамики и квантовой электродинамики соответственно. Во многих работах при рассмотрении конкретных процессов с участием радиона предполагается, что поля находятся на массовой поверхности (т.е. подчиняются уравнениям движения). В данном случае след тензора энергии–импульса для спинорных и векторных полей принимает особенно простой вид:

$$T_\mu^\mu = \frac{\beta(g_s)}{2g_s} G_{\mu\nu}^{ab} G_{ab}^{\mu\nu} + \frac{\beta(e)}{2e} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - m_Z^2 Z_\mu Z^\mu - 2m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \sum_f m_f \bar{f} f. \quad (96)$$

Если при этом по каким-либо соображениям оказывается возможным пренебречь аномальными членами в формуле (96), то очевидно, что на массовой поверхности взаимодействие спинорных и векторных полей с радионом принимает тот же самый вид, что и взаимодействие таких полей с бозоном Хиггса (с заменой константы связи вида  $\Lambda \rightarrow v$ ).

Иная картина имеет место вне массовой поверхности. Взаимодействие радиона с фермионами содержит члены с производными по координатам, и, следовательно, соответствующие вершины в импульсном представлении имеют зависимость от импульсов фермионов. Поэтому естественно было бы ожидать, что процессы с участием фермионов, калибровочных бозонов и радиона должны в принципе отличаться от аналогичных процессов, где вместо радиона возникает бозон Хиггса. Однако, как показано в работах [68, 69], амплитуды любых процессов рассеяния с участием одного радиона и произвольного количества фермионов и векторных бозонов имеют ту же самую структуру, что и амплитуды аналогичных процессов с участием хиггсовского бозона. Дополнительные (по сравнению с процессами с участием бозона Хиггса) вклады сокращаются при суммировании амплитуд как в древесном, так и в однопетлевом приближении. В частности, процессы рождения одиночного радиона совпадают с аналогичными процессами рождения бозона Хиггса с точностью до замены массы бозона Хиггса массой радиона, а также замены вакуумного среднего  $v$  константой  $\Lambda$ . Более того, в работах [70, 71] показано, что похожее сокращение имеет место и в случае ассоциативного рождения радиона и бозона Хиггса в сравнении с парным рождением хиггсовского бозона — различие сводится к замене масс, констант взаимодействия и перешкалированию константы взаимодействия третьей степени для бозона Хиггса, при этом константа не меняется для равных масс скаляров. В настоящем разделе для различных процессов подробно рассматривается, как возникает такое сокращение дополнительных вкладов в амплитуду рассеяния радиона, приводящее к потенциальной неразличимости процессов с участием таких, казалось бы, по-разному взаимодействующих скаляров, как радион и бозон Хиггса.

### 5.1. Процессы с участием одного скалярного бозона

**5.1.1. Процесс рождения радиона.** Простейшим примером, на котором можно продемонстрировать сокращение дополнительных "кинетических" вкладов в полную ампли-

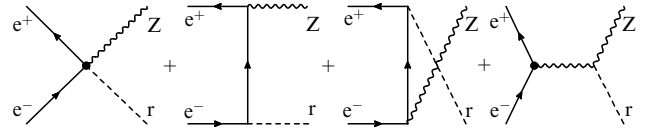


Рис. 4. Фейнмановские диаграммы, дающие вклад в процесс  $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$ .

туду рассеяния, может быть процесс рождения радиона в паре с Z-бозоном в  $e^+e^-$ -столкновениях. В низшем порядке этот процесс описывается четырьмя фейнмановскими диаграммами, приведёнными на рис. 4.

Сравним четыре приведённые на рис. 4 амплитуды для процесса  $e^+e^- \rightarrow Z\gamma$  с аналогичными амплитудами процесса излучения бозона Хиггса. Четвёртая диаграмма на рис. 4 имеет ту же самую структуру (с точностью до замены радиона хиггсовским бозоном), что и аналогичная диаграмма для процесса с рождением бозона Хиггса. Аналоги второй и третьей диаграмм, приведённых на рис. 4, в принципе, также дают вклад в полную амплитуду этого процесса, но обычно они не рассматриваются в силу пренебрежимо малой массы электрона, которой пропорциональна вершинная функция  $e^+e^-h$ . При рассмотрении процесса излучения радиона невозможно сразу же пренебречь аналогичной амплитудой, поскольку помимо масс фермионов в неё явно дают вклад импульсы входящих фермионов. Первая же диаграмма на рис. 4, содержащая вершину, происходящую из слагаемого с произведением радиона на ковариантную производную фермиона, не имеет аналога для процесса излучения бозона Хиггса.

Если использовать для пропагатора калибровочного бозона выражение в калибровке  $\tau'$  Хофта–Фейнмана и пренебречь массой электрона, то четырём диаграммам, изображённым на рис. 4, описывающим процесс излучения радиона, соответствуют следующие аналитические выражения:

$$M_1 = i3C\bar{e}(p_+) \Gamma^\mu e(p_-) \varepsilon_\mu(q_Z) r(q_r), \quad (97)$$

$$M_2 = -iC\bar{e}(p_+) \Gamma^\mu \frac{\hat{l}}{l^2} \left[ \frac{3}{2} (\hat{l} + \hat{p}_-) \right] e(p_-) \varepsilon_\mu(q_Z) r(q_r), \quad (98)$$

$$M_3 = -iC\bar{e}(p_+) \left[ \frac{3}{2} (\hat{p}_+ + \hat{l}') \right] \frac{\hat{l}'}{l'^2} \Gamma^\mu e(p_-) \varepsilon_\mu(q_Z) r(q_r), \quad (99)$$

$$M_4 = -i2C\bar{e}(p_+) \Gamma^\mu e(p_-) \frac{1}{k^2 - m_Z^2} m_Z^2 \varepsilon_\mu(q_Z) r(q_r), \quad (100)$$

где введены обозначения:

$$C \equiv \frac{1}{\Lambda} \frac{e}{2 \sin \theta_W \cos \theta_W}, \quad \Gamma^\mu = \gamma^\mu \left( 2 \sin^2 \theta_W - \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \right), \quad (101)$$

$\hat{l} = l_\mu \gamma^\mu$ , а для импульсов выполняются следующие соотношения:

$$k = p_+ + p_- = q_r + q_Z, \quad l = q_Z - p_+ = p_- - q_r, \quad l' = q_r - p_+ = p_- - q_Z. \quad (102)$$

Используя уравнение Дирака для безмассовой частицы в импульсном представлении  $\hat{p}_- e(p_-) = 0$ ,  $\bar{e}(p_+) \hat{p}_+ = 0$ ,

а также очевидное тождество  $\hat{l}(\hat{l}/l^2) = 1$ , легко убедиться, что сумма второй и третьей диаграмм в точности равна первой диаграмме с обратным знаком и, следовательно,

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0. \quad (103)$$

Поэтому для квадрата модуля матричного элемента процесса излучения радиона  $|M|^2$  выполняется равенство  $|M|^2 = |M_4|^2$ , т.е.  $|M|^2$  имеет структуру, в точности совпадающую с таковой для процесса рождения бозона Хиггса, и, таким образом, сечение имеет хорошо известный вид (с соответствующей заменой  $A \leftrightarrow v$  и  $m_f \leftrightarrow m_h$ ):

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow rZ) = \frac{m_Z^2}{A^2} \frac{\alpha(8 \sin^4 \theta_W - 4 \sin^2 \theta_W + 1)}{24 \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W} \times \frac{\sqrt{\lambda_r} \lambda_r + 12 m_Z^2 s}{4s^2 (s - m_Z^2)^2}, \quad (104)$$

где, по определению,  $\lambda_r \equiv (m_Z^2 + m_r^2 - s)^2 - 4m_Z^2 m_r^2$ .

Как видно из формулы (103), все вклады от дополнительных диаграмм, представленных на рис. 4, взаимно сократились, и поэтому сечение процесса излучения радиона описывается той же самой формулой, что и сечение процесса излучения бозона Хиггса (с точностью до перешкалирования массы скалярного бозона и константы взаимодействия). С помощью аналогичных рассуждений легко продемонстрировать, что подобное сокращение амплитуд имеет место и для ассоциативного рождения радиона и  $W^\pm$ -бозонов, например в процессе  $ud \rightarrow rW^+$ .

**5.1.2. Сокращение дополнительных вкладов в полную амплитуду для процессов с участием одиночного радиона на древесном уровне.** В этом разделе на древесном уровне рассматриваются процессы с участием одиночного радиона и произвольного количества калибровочных бозонов в начальных и конечных состояниях. Для таких процессов заявленное сокращение дополнительных вкладов в полную амплитуду рассеяния вытекает из структуры фермионного тока, излучающего радион и калибровочные бозоны.

Для понимания того, как подобное сокращение происходит в общем случае, полезно сначала детально рассмотреть простейший пример с излучением фермионным током одного калибровочного бозона и одного радиона, которому соответствуют три диаграммы, приведённые на рис. 5.

Перепишем вершину

$$\frac{i}{A} \left[ \frac{3}{2} (\hat{p} + \hat{q}) - 4m_f \right],$$

фермион-радионного взаимодействия в следующем виде:

$$\frac{i}{A} \left[ \frac{3}{2} (\hat{p} + \hat{q}) - 4m_f \right] = \frac{i}{A} \left[ \frac{3}{2} (\hat{p} - m_f) + \frac{3}{2} (\hat{q} - m_f) - m_f \right] = \frac{i}{A} \left[ \frac{3}{2} S^{-1}(p) + \frac{3}{2} S^{-1}(q) - m_f \right], \quad (105)$$

где  $p$  и  $q$  — импульсы входящих в вершину фермионов, а  $S^{-1}(p)$  — обратный фермионный пропагатор. Заметим,

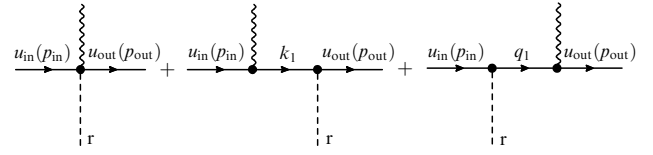


Рис. 5. Излучение фермионным током радиона и одного калибровочного бозона.

что в формуле (105), описывающей вершину взаимодействия, последнее слагаемое в квадратных скобках пропорционально массе фермиона  $m_f$ , так же как это имеет место для вершины взаимодействия бозона Хиггса с фермионами. С учётом преобразования (105) для вершин фермион-радионного взаимодействия можно записать аналитические выражения для диаграмм, изображённых на рис. 5, в следующем виде:

$$M_1 = +i3C\bar{u}_{out}(p_{out})\Gamma^\mu u_{in}(p_{in}), \quad (106)$$

$$M_2 = -iC\bar{u}_{out}(p_{out}) \left[ \frac{3}{2} S^{-1}(p_{out}) + \frac{3}{2} S^{-1}(q_1) - m_f \right] \times S(q_1) \Gamma^\mu u_{in}(p_{in}) = -i \frac{3}{2} C\bar{u}_{out}(p_{out}) \Gamma^\mu u_{in}(p_{in}) + i m_f C\bar{u}_{out}(p_{out}) S(q_1) \Gamma^\mu u_{in}(p_{in}), \quad (107)$$

$$M_3 = -iC\bar{u}_{out}(p_{out}) \Gamma^\mu S(k_1) \left[ \frac{3}{2} S^{-1}(k_1) + \frac{3}{2} S^{-1}(p_{in}) - m_f \right] \times u_{in}(p_{in}) = -i \frac{3}{2} C\bar{u}_{out}(p_{out}) \Gamma^\mu u_{in}(p_{in}) + i m_f C\bar{u}_{out}(p_{out}) \Gamma^\mu S(k_1) u_{in}(p_{in}), \quad (108)$$

где символом  $C$  обозначено произведение констант при всех вершинах, входящих в амплитуду, а выражением  $\Gamma^\mu$  — одинаковая лоренцева структура для вершин фермион–бозон и фермион–бозон–радион. Начальный и конечный фермионы совпадают в случае Z-бозона (нейтральный ток) и различны в случае W-бозона (заряженный ток). Как видно из формул (106)–(108), после суммирования всех трёх диаграмм вклад в полную амплитуду процесса с участием одиночного радиона в конечном итоге дают только два слагаемых, пропорциональных массам фермионов,

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = i m_f C\bar{u}_{out}(p_{out}) \times [\Gamma^\mu S(k_1) + S(q_1) \Gamma^\mu] u_{in}(p_{in}). \quad (109)$$

Сравнивая (109) с аналогичным выражением для полной амплитуды процесса с участием одиночного бозона Хиггса, обнаруживаем, что полные амплитуды этих двух процессов совпадают, если произвести замену констант взаимодействия  $A \leftrightarrow v$ .

В процессах с участием радиона аналогичное сокращение дополнительных (если сравнивать с процессами с участием бозона Хиггса) вкладов имеет место и при излучении фермионным током произвольного числа  $N$  калибровочных бозонов и одиночного радиона. Два типа диаграмм, характерных для такого процесса, изображены на рис. 6, 7.

Глядя на рис. 7, можно сделать вывод, что существует всего  $N + 1$  диаграмма с испусканием одиночного радиона с трёххвостой вершиной, поскольку вершина, со-

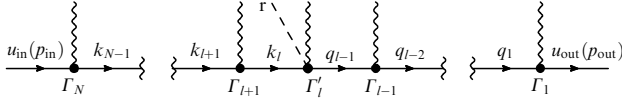


Рис. 6. Пример одного из  $N$  возможных вариантов излучения фермионным током одиночного радиона из вершины типа  $\Gamma'_l$  с четырьмя линиями и  $N$  калибровочных бозонов из вершин типа  $\Gamma_l$ .

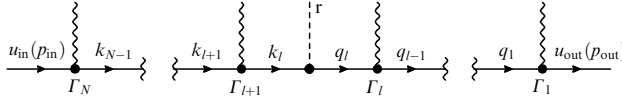


Рис. 7. Пример одного из  $N+1$  возможных вариантов излучения фермионным током одиночного радиона из вершины с тремя линиями и  $N$  калибровочных бозонов из вершин типа  $\Gamma_l$ .

держащая радион, может быть размещена на диаграмме, приведённой на рис. 7, ровно  $N+1$  способом. Аналогично, посмотрев на рис. 6, можно заключить, что существует всего  $N$  диаграмм с испусканием одиночного радиона, содержащих четырёххвостые вершины. В самом деле, на приведённой на рис. 6 диаграмме есть ровно  $N$  трёххвостых вершин типа  $\Gamma_l$ , которые можно было бы превратить в четырёххвостые вершины типа  $\Gamma'_l$ , где радион испускается из одной вершины совместно с калибровочным бозоном. Заметим, что четырёххвостая штрихованная вершина взаимодействия радиона с двумя фермионами и калибровочным бозоном на рис. 6 может быть выражена через трёххвостую (нештрихованную) вершину:  $\Gamma_j^{\mu} = -3\Gamma_j^{\mu}/\Lambda$ . Таким образом, сумму всех диаграмм для этого процесса можно записать в виде

$$M = M_0 + \sum_{l=1}^N (M_l + M'_l), \quad (110)$$

где амплитуды  $M_l$ , аналогичные амплитуде, приведённой на рис. 7, содержат вершину с испусканием радиона только трёххвостого типа:

$$M_l = i^{2N+1} C \bar{f}_{\text{out}}(p_{\text{out}}) \left[ \prod_{j=1}^l \Gamma_j^{\mu_j} S(q_j) \right] \left[ -\frac{3}{2} S^{-1}(q_l) - \frac{3}{2} S^{-1}(k_l) + m_{f_l} \right] \left[ \prod_{j=l+1}^N S(k_{j-1}) \Gamma_j^{\mu_j} \right] f_{\text{in}}(p_{\text{in}}) \quad (111)$$

при  $l = 0, \dots, N$ ,

а штрихованные амплитуды  $M'_l$ , аналогичные амплитуде, приведённой на рис. 6, содержат вершину с испусканием радиона только четвёртой степени:

$$M'_l = i^{2N-1} C \bar{f}_{\text{out}}(p_{\text{out}}) \left[ \prod_{j=1}^{l-1} \Gamma_j^{\mu_j} S(q_j) \right] [-3\Gamma_l^{\mu_l}] \times \left[ \prod_{j=l+1}^N S(k_{j-1}) \Gamma_j^{\mu_j} \right] f_{\text{in}}(p_{\text{in}}) \quad (112)$$

при  $l = 1, \dots, N$ ,

причём в формулах (111) и (112) подразумевается, что все произведения вида  $\prod_{j=l+1}^N$  и  $\prod_{j=1}^{l-1}$ , у которых номер первого сомножителя превышает номер последнего, тождественно равны единице. Кроме того, приняты следующие обозначения для импульсов и их линейных

комбинаций:

$$k_l = p_{\text{in}} - \sum_{j=1}^N p_{V_j}, \quad q_l = k_l - p_r = p_{\text{out}} + \sum_{j=1}^l p_{V_j}, \quad (113)$$

$$q_0 = p_{\text{out}},$$

где  $q_l$  и  $k_l$  — импульсы фермионов в промежуточных состояниях,  $p_r$  — импульс радиона, а  $m_{f_{\text{in}}}$ ,  $m_{f_{\text{out}}}$  и  $m_{f_l}$  — массы фермионов в начальном, конечном и промежуточных состояниях соответственно. Отметим, что в диаграммах (111) и в диаграммах (112) множители  $i^{2N+1}$  и  $i^{2N-1}$  отличаются, поскольку в диаграммах типа  $M$  и  $M'$  число пропагаторов и вершин отличается на единицу, что в конечном итоге приводит к противоположным знакам вкладов этих диаграмм.

Из формул (110)–(113), используя очевидные тождества  $S^{-1}(q_l) S(q_l) = 1$  и уравнение Дирака, которому подчиняются начальные  $f_{\text{in}}(p_{\text{in}})$  и конечные  $\bar{f}_{\text{out}}(p_{\text{out}})$  фермионные состояния, получаем:

$$M_0 = M_0^H - \frac{1}{2} M'_1, \quad M_N = M_N^H - \frac{1}{2} M'_N, \quad (114)$$

$$M_l = M_l^H - \frac{1}{2} M'_l - \frac{1}{2} M'_{l+1}, \quad l = 1, \dots, N-1. \quad (115)$$

Под  $M_l^H$  подразумеваются амплитуды, структура которых аналогична амплитудам процессов, где вместо радиона участвует хиггсовский бозон, т.е. вклады, пропорциональные массам фермионов:

$$M_l^H = i^{2N+1} \bar{f}_{\text{out}}(p_{\text{out}}) \left[ \prod_{j=1}^l \Gamma_j^{\mu_j} S(q_j) \right] [m_{f_l}] \times \left[ \prod_{j=l+1}^N S(k_{j-1}) \Gamma_j^{\mu_j} \right] f_{\text{in}}(p_{\text{in}}). \quad (116)$$

В формуле (116) предполагается, что индекс  $l$  изменяется от нуля до  $N$  и что все произведения  $\prod_{j=1}^l$ , у которых номер первого сомножителя превышает номер последнего, тождественно равны единице.

Подставляя (114) и (115) в выражение для полной амплитуды рассматриваемого процесса (110), получаем следующее равенство:

$$M = \sum_{l=0}^N M_l + \sum_{l=1}^N M'_l = \sum_{l=0}^N M_l^H. \quad (117)$$

Из формулы (117) становится очевидным, что помимо хиггсоподобных вкладов  $M_l^H$  все остальные вклады в полную амплитуду  $M$  процесса с участием одиночного радиона взаимно сокращаются и остаётся только хиггсоподобная часть  $\sum_{l=0}^N M_l^H$ .

**5.1.3. Сокращение дополнительных вкладов в полную амплитуду для процессов с участием одиночного радиона на петлевом уровне.** Сформулированный в предыдущем разделе для древесных диаграмм результат легко обобщается на случай фермионных петель, когда ни один из фермионов не находится на массовой поверхности. Тогда количество диаграмм типа  $M_l$  оказывается на единицу меньшим по сравнению с древесным случаем, поскольку, как видно из рис. 6, 7, для замкнутой петли излучение радиона правее первой калибровочной вершины тождественно излучению радиона левее  $N$ -й калиб-

ровочной вершины. То есть для полной амплитуды такого процесса можно записать

$$M = \sum_{l=1}^N M_l + \sum_{l=1}^N M'_l, \quad (118)$$

где, как и в древесном случае,  $M_l$  есть диаграммы, содержащие вершину взаимодействия радиона кубичного типа, а  $M'$  — диаграммы, содержащие вершину взаимодействия радиона четвёртого порядка.

Рассуждая так же, как и в древесном случае, получаем выражения, в которых отдельно выделены хиггсоподобные вклады:

$$M_l = M_l^H - \frac{1}{2} M'_l - \frac{1}{2} M'_{l+1}, \quad (119)$$

$$M_N = M_N^H - \frac{1}{2} M'_N - \frac{1}{2} M'_1. \quad (120)$$

Подставляя формулы (119), (120) в выражение для полной амплитуды процесса (118), аналогично древесному случаю получаем, что все дополнительные вклады в полную амплитуду процесса  $M$  сокращаются и остаются только вклады, похожие на вклады бозона Хиггса:

$$M = \sum_{l=1}^{N-1} M_l^H. \quad (121)$$

## 5.2. Процессы с ассоциативным рождением радиона и бозонов Хиггса

В предыдущем разделе было показано, что в процессах рождения одиночного фермиона в сопровождении произвольного числа любых калибровочных бозонов, несмотря на наличие в вершинах взаимодействия радиона и фермионов членов, зависящих от импульсов фермионов, а также четырёххвостых вершин типа фермионы–калибровочный бозон–радион, все дополнительные вклады сокращаются таким образом, что остаётся только часть, имеющая вид, такой же как и в аналогичных процессах с рождением бозона Хиггса. Данный результат имеет место как на древесном уровне, так и в случае фермионной петли, причём участвующие в процессе векторные бозоны могут находиться как на массовой поверхности, так и вне её. Амплитуды процессов с участием радиона могут быть получены из амплитуд аналогичных процессов с участием бозона Хиггса простой заменой массы бозона Хиггса  $m_h$  массой радиона  $m_r$  и хиггсовского вакуумного среднего  $v$  обратной константой взаимодействия радиона  $\Lambda$ . Теперь покажем, что в случае, если помимо калибровочных бозонов радион рождается в сопровождении произвольного числа бозонов Хиггса, похожее сокращение также имеет место, но теперь помимо указанных замен необходимо изменить также константу в трёххвостой вершине самодействия бозона Хиггса.

### 5.2.1. Аннигиляция фермион-антифермионной пары.

Начнём с простого примера ассоциативного рождения радиона и бозона Хиггса в процессе фермион-антифермионной аннигиляции. Диаграммы этого процесса изображены на рис. 8.

Последние три диаграммы аналогичны диаграммам процесса парного рождения бозонов Хиггса (если исхо-

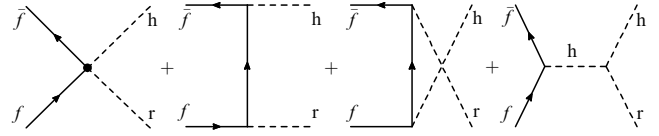


Рис. 8. Рождение радиона и бозона Хиггса при аннигиляции фермион-антифермионной пары.

дящий радион заменить хиггсовским бозоном, а вершины взаимодействия фермионов с радионом и бозона Хиггса с радионом заменить соответственно вершинами взаимодействия фермионов с хиггсовским бозоном и его вершиной самодействия третьей степени). Согласно правилам Фейнмана, каждому из четырёх графов, изображённых на рис. 8, можно сопоставить аналитические выражения, приведённые ниже в формулах (122)–(125). Для первой диаграммы на рис. 8 получаем

$$M_1 = -4 \frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1)[m_f]f(p_2)r(q_r)h(q_h). \quad (122)$$

Вторая и третья диаграммы, приведённые на рис. 8, описываются выражениями

$$M_2 = -\frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1) \left[ -\frac{3}{2} S^{-1}(p_1) - \frac{3}{2} S^{-1}(l) + m_f \right] \times \\ \times S(l)[m_f]f(p_2)r(q_r)h(q_h), \quad (123)$$

$$M_3 = -\frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1)[m_f]S(l') \left[ -\frac{3}{2} S^{-1}(l') - \frac{3}{2} S^{-1}(p_2) + m_f \right] \times \\ \times f(p_2)r(q_r)h(q_h). \quad (124)$$

И, наконец, четвёртой диаграмме на рис. 8 соответствует следующее аналитическое выражение:

$$M_4 = -\frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1)[m_f]f(p_2) \frac{1}{k^2 - m_h^2} \times \\ \times [-2(kq_h) + 4m_h^2]r(q_r)h(q_h), \quad (125)$$

где

$$k = p_1 + p_2 = q_h + q_r, \quad l = p_2 - q_r = q_h - p_1, \\ l' = p_2 - q_h = q_r - p_1. \quad (126)$$

Используя простые кинематические соотношения, а также уравнение Дирака в импульсном представлении, можно переписать аналитические выражения, соответствующие последним трём диаграммам, в следующем виде:

$$M_2 = \frac{3}{2} \frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1)[m_f]f(p_2)r(q_r)h(q_h) - \\ - \frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1)[m_f^2 S(l)]f(p_2)r(q_r)h(q_h), \quad (127)$$

$$M_3 = \frac{3}{2} \frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1)[m_f]f(p_2)r(q_r)h(q_h) - \\ - \frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1)[m_f^2 S(l')]f(p_2)r(q_r)h(q_h), \quad (128)$$

$$M_4 = \frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1)[m_f]f(p_2)r(q_r)h(q_h) - \\ - \frac{i}{v\Lambda} \bar{f}(p_1)[m_f]f(p_2) \frac{1}{k^2 - m_h^2} [m_r^2 + 2m_h^2]r(q_r)h(q_h). \quad (129)$$

Как видим, первые слагаемые в формулах (127)–(129), с точностью до коэффициентов, совпадают с первой диаграммой, причём коэффициенты у этих четырёх диаграмм таковы, что их сумма равна нулю ( $1 + 3/2 + 3/2 - 4 = 0$ ). Поэтому сумма всех четырёх диаграмм имеет вид

$$M \equiv M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = -\frac{im_f}{vA} \bar{f}(p_1) f(p_2) \frac{m_r^2 + 2m_h^2}{k^2 - m_h^2} \times \\ \times r(q_r) h(q_h) - \frac{im_f^2}{vA} \bar{f}(p_1) [S(l) + S(l')] f(p_2) r(q_r) h(q_h). \quad (130)$$

Сравним полученное выражение (130) с выражением для амплитуды парного рождения бозонов Хиггса при аннигиляции фермион-антифермионной пары, где диаграммы соответствующего процесса приведены на рис. 9. Аналитические выражения для этих диаграмм приведены ниже:

$$M_1^H = -\frac{im_f^2}{v^2} \bar{f}(p_1) S(l') f(p_2) h(q_1) h(q_2), \quad (131)$$

$$M_2^H = -\frac{im_f^2}{v^2} \bar{f}(p_1) S(l) f(p_2) h(q_1) h(q_2), \quad (132)$$

$$M_3^H = -\frac{im_f}{v^2} \bar{f}(p_1) f(p_2) \frac{3m_h^2}{k^2 - m_h^2} h(q_1) h(q_2), \quad (133)$$

а их сумма есть

$$M^H \equiv M_1^H + M_2^H + M_3^H = -\frac{im_f}{v^2} \bar{f}(p_1) f(p_2) \frac{3m_h^2}{k^2 - m_h^2} \times \\ \times r(q_r) h(q_h) - \frac{im_f^2}{v^2} \bar{f}(p_1) [S(l) + S(l')] f(p_2) r(q_r) h(q_h). \quad (134)$$

Как видим, выражение (130) можно получить из выражения (134) заменой одного вакуумного среднего  $v$  в факторе  $v^{-2}$  константой  $A$  и заменой константы самодействия бозона Хиггса  $3m_h^2/v$  новой константой следующего вида:

$$\frac{1}{A} (2m_h^2 + m_r^2) = (1 + \zeta) \frac{3m_h^2}{A}, \quad (135)$$

где

$$\zeta \equiv \frac{m_r^2 - m_h^2}{3m_h^2}.$$

Аналогичное свойство подобия имеет место и для процессов слияние двух глюонов с образованием пары скалярных частиц, в частности для процессов совместного рождения бозона Хиггса и радиона ( $gg \rightarrow hr$ ) и парного рождения бозонов Хиггса ( $gg \rightarrow hh$ ). Для описания таких процессов требуется намного больше диаграмм, чем для

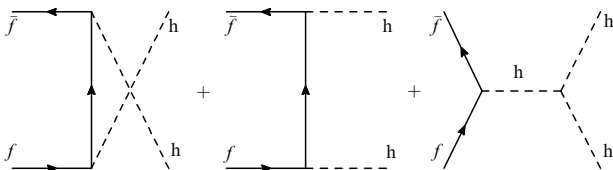


Рис. 9. Аннигиляция двух фермионов с рождением двух бозонов Хиггса.

описания ранее рассмотренных процессов, поэтому мы не будем приводить их здесь. Указанные процессы подробно рассмотрены в работе [68], в которой показано, что амплитуды этих двух процессов также совпадают с точностью до параметра  $\zeta$ , замены масс скаляров и констант связи. Другими словами, участие в процессе радиона может имитировать отклонение константы самодействия третьей степени бозона Хиггса от её значения в СМ.

**5.2.2. Общий случай сокращения дополнительных вкладов в процессах ассоциативного рождения радиона и хиггсовских бозонов.** Покажем теперь, что рассмотренное в предыдущих разделах сокращение вкладов радионного типа происходит и в общем случае рождения одиночного радиона в сопровождении произвольного числа калибровочных и хиггсовских бозонов. Рассмотрим фермионный ток (или фермионную петлю), испускающий некоторое число  $N$  бозонов (калибровочных бозонов  $V_j$  или бозонов Хиггса  $h_j$ , индекс  $j$  нумерует бозоны). Число калибровочных бозонов обозначим  $N_V$ , число бозонов Хиггса —  $N_h$ , так что  $N_V + N_h = N$ , процесс  $\bar{f}f \rightarrow h_1 \dots h_{N_h} V_1 \dots V_{N_V}$ . Добавим в произвольное возможное место диаграммы процесса либо ещё один хиггсовский бозон (превратив тем самым процесс в  $\bar{f}f \rightarrow h_1 \dots h_{N_h+1} V_1 \dots V_{N_V}$ ), либо радион (превратив процесс в  $\bar{f}f \rightarrow rh_1 \dots h_{N_h} V_1 \dots V_{N_V}$ ). Очевидно, что существует два возможных способа добавления одиночного бозона Хиггса:

- а) с испусканием от фермионной линии;
- б) с испусканием от бозонной линии ( $V$  или  $h$ );

для одиночного радиона к этим двум возможностям добавляется третья:

- в) с испусканием радиона из уже существующей фермион-бозонной вершины (таким образом трёххвостая вершина превращается в четырёххвостую).

Все три возможности изображены на рис. 10.

Выпишем аналитические выражения для вершин, соответствующих различным вариантам излучения радиона или хиггсовского бозона.

- а. Вершины испускания бозона Хиггса  $\Gamma_{hff}$  или радиона  $\Gamma_{rff}$  с фермионной линии:

$$\Gamma_{hff} = i \frac{m_f}{v}. \quad (136)$$

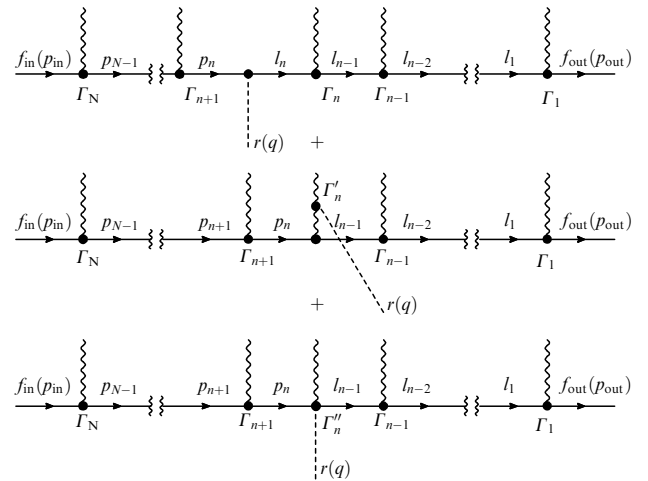


Рис. 10. Возможные варианты добавления радиона к фермионному току, излучающему  $N$  хиггсовских и калибровочных бозонов.

Вершина излучения радиона  $\Gamma_{\text{rf}}$  с фермионной линии является функцией входящих в неё фермионных импульсов, например,  $p$  и  $l$ , и может быть записана в терминах соответствующих пропагаторов:

$$\Gamma_{\text{rf}}(p, l) = \frac{i}{\Lambda} \left\{ \frac{3}{2} [S^{-1}(l) + S^{-1}(-p)] - m_f \right\} = \frac{v}{\Lambda} \Gamma_{\text{h}} + \frac{i3}{2\Lambda} [S^{-1}(l) + S^{-1}(-p)]. \quad (137)$$

б. Вершины излучения бозона Хиггса  $\Gamma_{\text{hVV}}$  или радиона  $\Gamma_{\text{rVV}}$  с линии векторного бозона:

$$\Gamma_{\text{hVV}} = i \frac{2m_V^2}{v} \delta_\beta^\alpha. \quad (138)$$

Аналогичная вершина излучения радиона  $\Gamma_{\text{rVV}}$  совпадает с вершиной  $\Gamma_{\text{hVV}}$  с точностью до замены константы  $v$  константой  $\Lambda$ :

$$\Gamma_{\text{rVV}} = i \frac{2m_V^2}{\Lambda} \delta_\beta^\alpha. \quad (139)$$

в. Трёххвостые вершины излучения бозона Хиггса  $\Gamma'_{\text{hhh}}$  или радиона  $\Gamma'_{\text{rhh}}$  с линии бозона Хиггса:

$$\Gamma'_{\text{hhh}} = -i \frac{3m_h^2}{v}. \quad (140)$$

Аналогичная вершина излучения радиона с линии бозона Хиггса содержит зависимость от импульсов, её можно записать в виде суммы трёх пропагаторов и хиггсодобного вклада:

$$\Gamma'_{\text{rhh}} = \frac{i}{\Lambda} \{2(pq) + 4m_h^2\} = \frac{i}{\Lambda} \{D_r^{-1}(p - q) - D_h^{-1}(p) - D_h^{-1}(q)\} + \frac{v}{\Lambda} (1 + \zeta) \Gamma'_{\text{hhh}}. \quad (141)$$

г. Четырёххвостая вершина  $\Gamma''_{\text{ffV}}$ , из которой излучаются радион, векторный бозон и два фермиона:

$$\Gamma''_{\text{ffV}} = \frac{i3}{\Lambda} \gamma_\mu (a_f + b_f \gamma_5) = \frac{3}{\Lambda} \Gamma_{\text{ffV}}. \quad (142)$$

д. Четырёххвостая вершина  $\Gamma''_{\text{ffh}}$ , из которой излучаются радион, хиггсовский бозон и два фермиона:

$$\Gamma''_{\text{ffh}} = -\frac{i}{\Lambda} \frac{4m_f}{v} = \frac{4}{\Lambda} \Gamma_{\text{hff}}. \quad (143)$$

Рассмотрим теперь некоторую вершину  $\Gamma_n$  на фермионной линии, из которой испускается векторный бозон и которую для удобства будем называть "центральной". Выделим теперь из всего множества диаграмм, соответствующих рассматриваемому процессу, отдельно четыре диаграммы, в которых радион испускается в непосредственной близости от центральной вершины. Первая диаграмма — когда радион испускается от фермионной линии левее центральной вершины. Вторая диаграмма — когда радион излучается с фермионной линии правее центральной вершины. Третья диаграмма — когда радион излучается с линии испускаемого векторного бозона. Четвёртая диаграмма — когда радион излучается непосредственно из центральной вершины. Амплитуды таких диаграмм обозначим  $M[r]_j$ , где  $j = 1, 2, 3, 4$ . С помощью формулы (137) для вершины  $\Gamma_{\text{rf}}$

амплитуду первой диаграммы  $M[r]_1$  можно переписать в виде суммы трёх слагаемых, первое из которых с точностью до замены  $v$  константой  $\Lambda$  совпадает с аналогичной диаграммой с излучением бозона Хиггса, а в двух других обратные пропагаторы взаимно уничтожаются с пропагаторами слева или справа, "съедая" таким образом фермионную линию либо между вершиной испускания радиона и центральной вершиной, либо вершиной, находящейся ещё левее (если такой вершины нет, то такое слагаемое равно нулю, потому что обратный пропагатор действует на фермион на массовой поверхности). В результате подобной редукции возникает дополнительное слагаемое типа  $-1/2 M[r]_4$ , где фактор  $-1/2$  возникает из-за учёта множителей при обратных пропагаторах и в вершине  $\Gamma''_{\text{ffV}}$ . Поэтому получаем, что

$$M[r]_1 = \dots + \frac{v}{\Lambda} M[h]_1 - \frac{1}{2} M[r]_4, \quad (144)$$

где под многоточием подразумевается третье слагаемое, которое нас в данном случае не интересует, поскольку если оно ненулевое, то должно быть отнесено к блоку диаграмм, относящихся к следующей центральной вершине  $\Gamma_{n+1}$ .  $M[h]_j$  здесь означает амплитуду, аналогичную  $M[r]_j$ , но с испусканием бозона Хиггса вместо радиона. Аналогичная редукция для амплитуды второй диаграммы даёт

$$M[r]_2 = -\frac{1}{2} M[r]_4 + \frac{v}{\Lambda} M[h]_1 + \dots \quad (145)$$

Амплитуда третьей диаграммы с точностью до фактора  $v/\Lambda$  совпадает с  $M[h]_3$ , и, таким образом, для этой группы из четырёх диаграмм получаем:

$$M[r]_1 + M[r]_2 + M[r]_3 + M[r]_4 = \frac{v}{\Lambda} M[h]_1 + \frac{v}{\Lambda} M[h]_2 + \frac{v}{\Lambda} M[h]_3 + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) M[r]_4.$$

Поскольку выражение в круглых скобках равно нулю, то очевидно, что остаются только вклады амплитуд диаграмм хиггсовского типа. Фермионная линия на рис. 10 может быть как незамкнутой, когда начальный и конечный фермион находятся на массовой поверхности, так и петлём, поэтому результат, полученный для древесных диаграмм, легко обобщается на случай фермионных петель [70, 71].

## 6. Нелинейные самодействие и взаимодействие радиона с полями Стандартной модели

В разделе 5 было показано, что процессы рождения одиночного радиона в сопровождении произвольного количества векторных бозонов как на древесном, так и на петлевом уровне с точностью до замены масс и константы взаимодействия совпадают с аналогичными процессами с рождением бозона Хиггса. Более того, для процессов с ассоциативным рождением радиона и бозона Хиггса имеет место аналогичный результат (с точностью до замены масс, константы взаимодействия и константы самодействия в трёххвостой вершине самодействия бозона Хиггса). Современные экспериментальные данные исключают существование скалярных частиц с массами меньше 1 ТэВ и с константами взаимодействия

с полями СМ порядка константы связи бозона Хиггса, но не исключают существования скалярных частиц с массами порядка бозона Хиггса с константами связи, много меньшими, чем у бозона Хиггса. Следовательно, если масса радиона близка к массе бозона Хиггса, имеет место проблема идентификации участвующих в процессах скалярных частиц. Последнее, в свою очередь, делает актуальным более подробное изучение возможных свойств радиона, в частности, получение потенциала самодействия радиона более высоких степеней, чем вторая, а также нелинейных членов взаимодействия радиона с полями СМ, как это сделано нами в работе [52].

### 6.1. Эффективный четырёхмерный лагранжиан радиона четвёртой степени

Оставим в разложениях (65) и (66) тензорного и скалярного полей только нулевую моду гравитационного поля и поле радиона. Таким образом, с точностью до членов порядка  $1/M^3$  поля  $g_{\mu\nu}$  и  $\phi$  представляются в виде

$$g_{\mu\nu}(x, y) = \exp(-2A(y))(1 - \chi(y)r(x))g_{\mu\nu}^{(0)}(x),$$

$$g_{\mu\nu}^{(0)}(x) = \eta_{\mu\nu} + N_0 b_{\mu\nu}^{(0)}(x), \quad (146)$$

$$g_{4\mu} = 0, \quad g_{44}(x, y) = 1 + 2\chi(y)r(x), \quad (147)$$

$$\phi(x, y) = \bar{\phi}(y) + \Phi(y)r(x), \quad (148)$$

где

$$\chi(y) \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}M^3} \exp(2A(y)) \Psi_1(y),$$

$$\Phi(y) \equiv \frac{3}{2} \frac{\sqrt{2}M^3 \exp(2A(y))}{\bar{\phi}'(y)} \Psi_1'(y). \quad (149)$$

Зависящие от пятой координаты функции  $A$ ,  $\bar{\phi}$  и  $\Psi_1$  имеют вид (55), (56) и (73). Подставив в гравитационную часть многомерного лагранжиана (46) выражения (146)–(148), получим

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}R[g] = & \partial^\mu \left[ \exp(-2A) \sqrt{-g^{(0)}} g_{\mu\nu}^{(0)} \frac{(1+8\chi r)\chi}{\sqrt{1+2\chi r}} \partial^\nu r \right] - \\ & - \partial_4 \left[ \exp(-2A) \sqrt{-g^{(0)}} \frac{4(1-\chi r)\chi}{\sqrt{1+2\chi r}} \partial_4 (\exp(-2A)(1-\chi r)) \right] + \\ & + \sqrt{-g^{(0)}} \left\{ \frac{3}{\sqrt{1+2\chi r}} (\exp(-2A)(1-\chi r))^2 - \exp(-2A) \times \right. \\ & \times \left. \frac{3(1-4\chi r)\chi^2}{2\sqrt{1+2\chi r}(1-\chi r)} g_{\mu\nu}^{(0)} \partial^\mu r \partial^\nu r \right\} + \\ & + \exp(-2A)(1-\chi r)\sqrt{1+2\chi r} \sqrt{-g^{(0)}} R[g^{(0)}]. \quad (150) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в формуле (150) представляет собой полную четырёхмерную дивергенцию, поэтому в получаемом после редукции эффективном четырёхмерном действии отбрасывается. Второе слагаемое представляет собой производную по пятой координате от некоторой функции, периодической по этой координате (так как дополнительное измерение представляет собой орбиформ  $S^1/Z_2$ , т.е. окружность длиной  $2L$  с дополнительными условиями симметрии, см. раздел 2 настоящего обзора). Поэтому интеграл от него по пятой координате на интервале  $(-L, L]$  будет равен нулю, а значит, в

эффективное действие он вклада не даёт. Третье и четвёртое слагаемые в (150) описывают нелинейное самодействие радиона.

Последнее слагаемое в формуле (150) представляет собой произведение кривизны четырёхмерного пространства  $R[g^{(0)}]$  с метрическим тензором  $g_{\mu\nu}^{(0)}$  и некоторой функции от поля радиона  $r$ . После интегрирования по пятой координате это слагаемое будет описывать неминимальное взаимодействие поля радиона с четырёхмерной гравитацией, и в низшем приближении оно будет иметь вид  $\lambda r^2 R$ , с некоторой константой  $\lambda$  порядка единицы. Такие члены несущественны в настоящую эпоху для процессов с участием полей СМ на масштабах порядка ТэВ. Поскольку процесс эволюции ранней Вселенной не является предметом настоящего обзора, то подобные взаимодействия мы здесь не рассматриваем и ограничиваемся только не зависящей от радиона частью  $\exp(-2A)\sqrt{-g^{(0)}}R[g^{(0)}]$ . Отметим, что интегрирование данного слагаемого по пятой координате позволяет ввести четырёхмерную гравитационную постоянную способом [52], альтернативным тому, который был представлен в разделе 2 настоящего обзора (см. также обсуждение и цитируемую литературу в [51, 66]).

Подставив в скалярную часть пятимерного лагранжиана (46) формулы (146)–(148) и сложив полученное выражение с (150), получим эффективное четырёхмерное действие радиона в форме

$$S_{\text{eff}} = \int [-P(r) g^{(0)\mu\nu} \partial_\mu r \partial_\nu r - U(r)] d^4x, \quad (151)$$

где  $P(r)$  и  $U(r)$  являются неполиномиальными функциями от  $r$  и имеют следующие неявные представления:

$$P(r) = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left\{ 2M^3 \frac{3(1-4\chi r)\chi^2}{\sqrt{1+2\chi r}(1-\chi r)} + (1-\chi r)\sqrt{1+2\chi r} \Phi^2 \right\} \times$$

$$\times \exp(-2A) dy, \quad (152)$$

$$\begin{aligned} U(r) = & \int_{-L}^L \left\{ \frac{6M^3}{\sqrt{1+2\chi r}} (\exp(-2A)(1-\chi r))^2 - \right. \\ & - \exp(-4A)(1-\chi r)^2 \sqrt{1+2\chi r} \left[ \frac{(\varphi + \Phi r)^2}{2(1+2\chi r)} + \right. \\ & + V(\varphi + \Phi r) \left. \right] - \exp(-4A)(1-\chi r)^2 [\lambda_0(\varphi + \Phi r) \delta(y) + \\ & + \lambda_L(\varphi + \Phi r) \delta(y-L)] \left. \right\} dy. \quad (153) \end{aligned}$$

Так как  $\chi$  и  $\Phi$  представляют собой некоторые сложные функции от пятой координаты, точное аналитическое выражение для  $P(r)$  и  $U(r)$  получить невозможно. Поэтому будем искать разложения для  $P(r)$  и  $U(r)$  в степенные ряды по  $r$ , приведённые к безразмерному виду с помощью некоторых размерных параметров. Для этого в (152) и (153) разложим в подынтегральных выражениях неполиномиальные функции от  $1+2\chi r$  и  $1-\chi r$  в ряды по  $\chi r$ , полагая  $|2\chi r| < 1$ . Поскольку  $\chi$  принимает максимальное значение при  $y = L$ , а из (149) и (76) следует

$$2\chi(L) = \frac{1}{\sqrt{2}M^3} \Psi_1(L) = \frac{4}{A},$$

то получаем следующее ограничение для амплитуды поля радиона:

$$|r| < \frac{4}{A}. \quad (154)$$

Ниже будет показано, что минимум потенциала радиона реализуется при  $r = 0$ , а значит, отсутствуют условия для существенного отклонения поля радиона от нулевого значения, поэтому использованное приближение справедливо.

В разделе 2 (см. также [51, 66]) было выписано эффективное действие в квадратичном по  $r$  приближении с линейными по  $r$  членами взаимодействия с полями СМ и константой взаимодействия  $\Lambda^{-1}$ . Следующий член взаимодействия с полями СМ, квадратичный по  $r$ , имеет порядок  $\Lambda^{-2}$ . Именно этим порядком мы ограничимся в настоящем обзоре. Слагаемые самодействия четвёртой степени по  $r$  в кинетическом члене имеют порядок  $\Lambda^{-2}$ , а в потенциальном —  $\tilde{k}^2 \Lambda^{-2}$ . Таким образом, обобщая результаты работ [51, 66], выпишем эффективное действие для радиона с точностью до четвёртой степени по  $r$  для самодействия радиона и второй степени для взаимодействия радиона с полями СМ. С учётом сказанного функции  $P(r)$  и  $U(r)$  представим в виде

$$P(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2, \quad (155)$$

$$U(r) = \beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \beta_3 r^3 + \beta_4 r^4, \quad (156)$$

где коэффициенты  $\alpha_j$  определяются следующими выражениями:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \{6M^3 \chi^2 + \Phi^2\} \exp(-2A) dy, \quad (157)$$

$$\alpha_1 = -12M^3 \int_{-L}^L \chi^3 \exp(-2A) dy, \quad (158)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4} \int_{-L}^L \{18M^3 \chi^4 - 3\Phi^2 \chi^2\} \exp(-2A) dy, \quad (159)$$

а коэффициенты  $\beta_j$  имеют похожую, но несколько более громоздкую структуру и приведены в [52].

Теперь рассмотрим, как выглядит взаимодействие поля радиона с полями СМ с точностью до второго порядка. Взаимодействие первого порядка по флуктуациям метрики было выписано в разделе 3 настоящего обзора (см. формулу (80)); перепишем здесь это выражение только для поля радиона:

$$\begin{aligned} L_r &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \chi r \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \delta(y - L) dy = \\ &= \frac{1}{2} \chi(L) r \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{A} r T_\mu^\mu, \end{aligned} \quad (160)$$

откуда следует  $\Lambda^{-1} = \chi(L)/2$ , что совпадает с общим выражением (82) для  $\kappa_m$  при  $n = 1$ , выписанным в разделе 2.

Следующий порядок взаимодействия поля радиона с полями СМ можно было бы получить, варьируя  $\sqrt{-g} T_\mu^\mu$  по метрике ещё раз. Однако можно поступить проще и разложить исходное выражение для  $\sqrt{-g} L_{\text{СМ}}$  непосредственно по входящему в него полю  $r$ . Для этого выпишем лагранжианы на бране в точке  $y = L$  для скалярного ( $h$ ),

векторного ( $V_\mu$ ) и спинорного ( $\psi$ ) полей для случая метрики  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ , индуцированной из метрики (146) с  $b_{\mu\nu}^0 = 0$ . Для скалярного поля получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{-\tilde{g}} L_{h,\tilde{g}} &= \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ -\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} h_{,\mu} h_{,\nu} - V(h) \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \exp(-2A) (1 - \chi r) \eta^{\mu\nu} h_{,\mu} h_{,\nu} - \\ &- \exp(-4A) (1 - \chi r)^2 V(h) = L_{h,\eta} + \\ &+ r \chi \left[ \frac{1}{2} \exp(-2A) \eta^{\mu\nu} h_{,\mu} h_{,\nu} + 2 \exp(-4A) V(h) \right] - \\ &- \chi^2 r^2 \exp(-4A) V(h), \end{aligned} \quad (161)$$

где  $L_{h,\tilde{g}}$  — лагранжиан с метрикой  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ ,  $L_{h,\eta}$  — тот же лагранжиан с плоской метрикой  $\eta^{\mu\nu}$ , а  $V(h)$  — скалярный потенциал. Поскольку на бране  $y = L$  функция  $A(L) = 0$ , то экспоненты в (161) исчезают, и лагранжиан взаимодействия радиона со скалярным полем имеет вид

$$L_{rh} = -\frac{r}{A} T_\mu^\mu(h) - \frac{4r^2}{A^2} V(h). \quad (162)$$

Аналогичным образом для векторного поля имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{-\tilde{g}} L_{V,\tilde{g}} &= \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ -\frac{1}{4} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \frac{\mu_V^2}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} V_\mu V_\nu \right\} = \\ &= -\frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \exp(-2A) (1 - \chi r) \frac{\mu_V^2}{2} \eta^{\mu\nu} V_\mu V_\nu. \end{aligned} \quad (163)$$

Как видим, точное взаимодействие радиона с векторным полем ограничивается одним лишь линейным членом (члены аномального типа, аналогичные тем, что были выписаны в (95), здесь не рассматриваются):

$$L_{rV} = -\frac{r}{A} T_\mu^\mu(V). \quad (164)$$

Наконец, для лагранжиана спинорного поля имеет место следующее выражение:

$$\sqrt{-\tilde{g}} L_{\psi,\tilde{g}} = \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (\nabla_\mu \psi) - \frac{i}{2} (\nabla_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + m_\psi \bar{\psi} \psi \right], \quad (165)$$

где под  $\nabla_\mu \psi$  подразумевается полная ковариантная производная спинорного поля (включающая как метрическую (реперную), так и калибровочную части). Однако для метрики, отличающейся от метрики пространства — времени Минковского лишь на некоторый конформный множитель, имеет место равенство

$$\bar{\psi} \gamma^\mu (\nabla_\mu \psi) - (\nabla_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi = \frac{\exp(A)}{\sqrt{1 - \chi r}} (\bar{\psi} \gamma^\mu (D_\mu \psi) - (D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi), \quad (166)$$

где  $D_\mu \psi$  — обычная ковариантная производная (без реперной части). В результате получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt{-\tilde{g}} L_{\psi,\tilde{g}} &= \exp(-3A) (1 - \chi r)^{3/2} \left( \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (D_\mu \psi) - \frac{i}{2} (D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right) + \\ &+ \exp(-4A) (1 - \chi r)^2 m_\psi \bar{\psi} \psi. \end{aligned} \quad (167)$$

Как видим, точное выражение для взаимодействия радиона со спинорным полем имеет неполиномиальный вид. Разлагая по  $r$  и удерживая члены до второй степени по  $r$  включительно, получаем

$$L_{r\psi} = -\frac{r}{A} T_\mu^\mu(\psi) + \frac{r^2}{A^2} \left[ \frac{3}{4} (i\bar{\psi} \gamma^\mu (D_\mu \psi) - i(D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) + 4m_\psi \bar{\psi} \psi \right]. \quad (168)$$

Вернёмся теперь к параметрам самодействия радиона. Рассмотрим определение (157) для параметра  $\alpha_0$ . Подставив в него из уравнений (149) выражения для  $\chi$  и  $\Phi$ , получим

$$\alpha_0 = \frac{9}{4} M^3 \int_{-L}^L \left\{ \frac{\exp(4A)}{\bar{\phi}^2} m_r^2 \left( 1 - \frac{2}{\beta_1^2 + u} \delta(y) - \frac{2}{\beta_2^2 - u} \delta(y - L) \right) \Psi^2 \right\} dy. \quad (169)$$

Поскольку  $\alpha_0 \eta^{\mu\nu} \partial_\mu r \partial_\nu r$  — кинетический член свободного скалярного поля, то  $\alpha_0$  должно равняться  $1/2$ , что с учётом (169) даёт нам условие нормировки для функции  $\Psi$ .

Далее, подставив в выражение для  $\beta_0$  (см. [52]) формулы (55) и (56) для  $\phi$  и  $A$  соответственно, можно убедиться, что  $\beta_0 = 0$ , т.е. эффективная четырёхмерная космологическая постоянная в этой модели равна нулю. Аналогичным образом можно убедиться в том, что  $\beta_1 = 1$ , как и должно быть для лагранжиана флуктуации над фоном, являющимся решением уравнений движения. Наконец, выражение для  $\beta_2$  с точностью до множителя  $-m_r^2$  совпадает с  $\alpha_0$  (см. [52]), поэтому

$$\beta_2 = -\frac{m_r^2}{2}, \quad (170)$$

как и должно быть для квадратичной части потенциала скалярного поля массы  $m_r$ .

К сожалению, выражения для  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_3$  и  $\beta_4$  нельзя представить в виде известных элементарных или специальных функций от параметров многомерной теории. Поэтому представим их приближённые выражения в виде первых членов разложений в ряды по следующим малым безразмерным комбинациям параметров модели:

$$\xi = \frac{m_r}{k}, \quad \sigma = \frac{u}{k}, \quad \rho = \frac{\phi_0}{2M^3}. \quad (171)$$

Поскольку константы  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  размерные, имеет смысл перейти к некоторым безразмерным выражениям, полученным из исходных с помощью подходящего размерного фактора. Такими факторами являются константа  $A^{-1}$  взаимодействия радиона с полями СМ, а также масса  $m_r$  самого радиона. Константы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  имеют порядок  $A^{-1}$  и  $A^{-2}$  соответственно, поэтому для них естественным нормировочным параметром является  $A$ . Константа  $\beta_2$  естественным образом нормируется на  $m_r$  (см. (170)). Для константы  $\beta_3$  естественная нормировка должна быть иной, поскольку она имеет порядок  $m_r^2 A^{-1}$ , а константа  $\beta_4$  вообще является безразмерной. С другой стороны, для сравнения потенциала самодействия радиона с потенциалом бозона Хиггса удобно вынести в

нём за скобки фактор  $m_r^2$ . В результате с учётом (155) и (156) приходим к следующей форме эффективного лагранжиана самодействия радиона с безразмерными константами  $\bar{\alpha}_1$ ,  $\bar{\alpha}_2$ ,  $\bar{\beta}_3$  и  $\bar{\beta}_4$ :

$$L_r = -\left( \frac{1}{2} + \frac{\bar{\alpha}_1}{A} r + \frac{\bar{\alpha}_2}{A^2} r^2 \right) \eta^{\mu\nu} r_{,\mu} r_{,\nu} - m_r^2 \left( \frac{1}{2} r^2 + \frac{\bar{\beta}_3}{A} r^3 + \frac{\bar{\beta}_4}{A^2} r^4 \right), \quad (172)$$

где

$$\alpha_1 \equiv \frac{1}{A} \bar{\alpha}_1, \quad \alpha_2 \equiv \frac{1}{A^2} \bar{\alpha}_2, \quad \beta_3 \equiv \frac{m_r^2}{A} \bar{\beta}_3, \quad \beta_4 \equiv \frac{m_r^2}{A^2} \bar{\beta}_4.$$

Аналитические формулы для безразмерных констант  $\bar{\alpha}_1$ ,  $\bar{\alpha}_2$ ,  $\bar{\beta}_3$  и  $\bar{\beta}_4$  даже в низших порядках разложений по малым параметрам (171) имеют довольно громоздкий вид. В работе [52] представлены выражения для этих коэффициентов, а также для эффективной константы взаимодействия радиона с полями СМ  $A^{-1}$  с точностью до  $O(\sigma^3)$  и  $O(\xi^3)$ . Здесь же приведём выражение для эффективного четырёхмерного лагранжиана радиона с точностью до нулевого порядка по указанным комбинациям параметров модели:

$$L_r = -\left( \frac{1}{2} - \frac{2}{A} r + \frac{1}{A^2} r^2 \right) \eta^{\mu\nu} r_{,\mu} r_{,\nu} - \frac{m_r^2}{2} r^2 - \frac{5m_r^2}{2A} r^3 - \frac{1}{A^2} \left( 18\tilde{k}^2 - \frac{5}{3} m_r^2 \right) r^4. \quad (173)$$

Как видно из последней формулы, при учёте нелинейных взаимодействий поля радиона его кинетический член имеет нестандартный вид. Существует нелинейное преобразование поля радиона  $r \rightarrow \tilde{r}$ , приводящее кинетический член к каноническому виду [52]. К сожалению, выразить  $r$  через  $\tilde{r}$  через известные элементарные или специальные функции не удаётся. Тем не менее с точностью до  $\tilde{r}^3$  легко получить следующее разложение в ряд по  $\tilde{r}$ :

$$r = \tilde{r} - \frac{\alpha_1}{2} \tilde{r}^2 + \frac{1}{3} (2\alpha_1^2 - \alpha_2) \tilde{r}^3 + \dots \quad (174)$$

Третьего порядка в разложении (174) достаточно, чтобы получить выражение для потенциала  $U$  с точностью до четвёртой степени по  $\tilde{r}$ :

$$U(\tilde{r}) = \frac{m_r^2}{2} \tilde{r}^2 + \lambda_3 \tilde{r}^3 + \lambda_4 \tilde{r}^4 + O(\tilde{r}^5), \quad (175)$$

где

$$\lambda_3 \equiv \frac{m_r^2}{A} \left( \bar{\beta}_3 - \frac{\bar{\alpha}_1}{2} \right), \quad \lambda_4 \equiv \frac{m_r^2}{A^2} \left( \bar{\beta}_4 - \frac{3\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_3}{2} + \frac{19\bar{\alpha}_1^2 - 8\bar{\alpha}_2}{24} \right).$$

Согласно [52] с точностью до нулевого порядка по малым параметрам модели  $\xi$  и  $\sigma$  (см. (171)) для  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$  можно получить следующие приближённые выражения:

$$\lambda_3 \approx \frac{m_r^2}{A} \left( \frac{5}{2} + \exp(2Lu) \right) \approx \frac{7}{2} \frac{m_r^2}{A}, \quad (176)$$

$$\lambda_4 \approx \frac{m_r^2}{A^2} \left( \frac{47}{12} \exp(2Lu) + \frac{19}{4} \right) + \frac{18\tilde{k}^2}{A^2} \approx \frac{18\tilde{k}^2}{A^2}. \quad (177)$$

Заметим, что фактор  $\tilde{k}^2/\Lambda^2$  во втором слагаемом в правой части выражения для  $\lambda_4$  больше фактора  $m_\tau^2/\Lambda^2$  в первом слагаемом на 2–4 порядка (в  $\xi^{-2}$  раз). Тогда с учётом соотношения (7) между массой Планка и фундаментальным энергетическим масштабом получаем, что  $\tilde{k} \sim L^{-1}$ :

$$\frac{18\tilde{k}^2}{\Lambda^2} \approx \frac{18}{\Lambda^2 L^2} \ln^2 \left( \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{M_{\text{Pl}}}{\Lambda} \right). \quad (178)$$

Отсюда, например, при  $\Lambda \sim 10$  ТэВ и  $L \sim 10$  ТэВ<sup>-1</sup> получаем оценку  $\tilde{k} \sim 3,3$  ТэВ,  $18\tilde{k}^2/\Lambda^2 \sim 1,9$ ; а при  $\Lambda \sim 20$  ТэВ и  $L \sim 20$  ТэВ<sup>-1</sup> имеем  $\tilde{k} \sim 1,6$  ТэВ,  $18\tilde{k}^2/\Lambda^2 \sim 0,11$ .

До настоящего момента предполагалось, что значения параметров  $\tilde{k}$  и  $\Lambda$  находятся в интервале от нескольких единиц до нескольких десятков ТэВ. Если дополнительно предположить, что полученная эффективная теория должна быть пертурбативной, то значение  $\beta_4$  не должно превосходить некоторой максимальной величины  $\beta_{4\text{max}}$ , что даёт дополнительное ограничение на соотношение параметров  $\tilde{k}$  и  $\Lambda$ :

$$\tilde{k} < \Lambda \sqrt{\frac{\beta_{4\text{max}}}{18}}. \quad (179)$$

Параметр самодействия

$$\lambda_3 \approx \frac{7}{2} \frac{m_\tau^2}{\Lambda}$$

при кубическом члене  $\tilde{r}^3$  имеет размерность массы, а параметр

$$\lambda_4 \approx \frac{18\tilde{k}^2}{\Lambda^2}$$

при члене четвёртой степени  $\tilde{r}^4$  является безразмерным, поэтому непосредственное сравнение данных величин некорректно. Тем не менее в определённом смысле значение второго параметра намного больше, чем первого. Например, в амплитудах процессов, описываемых диаграммами с четырьмя внешними радионными линиями, в низкоэнергетическом пределе вклад от древесной диаграммы с двумя трёххвостыми вершинами будет пропорционален  $\lambda_3^2/m_\tau^2$ , а вклад диаграммы с одной четырёххвостой вершиной будет пропорционален  $\lambda_4$ , т.е. будет больше в  $72\tilde{k}^2/49m_\tau^2$  раз. Большое (по сравнению с  $\lambda_3^2/m_\tau^2$ ) значение  $\lambda_4$  гарантирует также, что в полученной после редукции эффективной модели радион находится в истинном минимуме. В самом деле, выписанный потенциал четвёртой степени мог бы иметь помимо минимума, находящегося в нуле, ещё пару минимумов, если бы уравнение

$$\frac{dU}{d\tilde{r}} = \{m_\tau^2 + 3\lambda_3\tilde{r} + 4\lambda_4\tilde{r}^2\}\tilde{r} = 0 \quad (180)$$

имело более одного решения. Для этого должен быть положительным дискриминант соответствующего квадратного уравнения. Однако это не так:

$$D = 9\lambda_3^2 - 16\lambda_4m_\tau^2 = 16m_\tau^2\lambda_4 \left( \frac{49m_\tau^2}{128\tilde{k}^2} - 1 \right) < 0. \quad (181)$$

Нелинейное преобразование  $r \rightarrow \tilde{r}$  позволяет сформулировать всю полученную после редукции модель в терминах поля  $\tilde{r}$  — скалярного поля со стандартным кинетическим членом, полиномиальным потенциалом и полиномиальными членами взаимодействия с полями СМ. Однако в этом нет особой необходимости, так как анализ взаимодействий с полями СМ и полученные результаты о сходстве процессов с участием радиона и бозона Хиггса лучше всего видны при использовании стандартного определения поля радиона, которое применяется во всех работах по данной тематике.

Таким образом, полная теория скалярного поля (радиона), возникающего в стабилизированной модели РС, включает в себя члены самодействия как в потенциальном, так и в кинетическом членах. Взаимодействие с полями СМ также содержит дополнительные члены, и только взаимодействие с векторными полями ограничивается одним лишь линейным (по радиону) слагаемым, при этом самодействие радиона имеет неполиномиальный характер, так же как и его взаимодействие со спинорными полями (но не с векторными и скалярными).

Отметим также, что полученный в рассматриваемом приближении потенциал имеет устойчивый минимум в нуле, т.е. дополнительного спонтанного сдвига поля радиона не происходит. Это говорит о корректности полиномиального разложения вблизи нулевого значения поля радиона.

## 7. Смешивание полей Хиггса и радиона

Как мы уже отмечали, поле радиона и поля его КК-башни имеют те же квантовые числа, что и нейтральное поле Хиггса. Таким образом, поле радиона и его возбуждения могут смешиваться с полем Хиггса, если между ними существует взаимодействие. Первоначально билинейное взаимодействие полей Хиггса и радиона в нестабилизированной модели РС, возникающее из-за члена взаимодействия поля Хиггса с кривизной на бране, было предложено в работе [72]. Затем такое взаимодействие и результирующее смешивание Хиггса и радиона в случае стабилизированной модели обсуждались в статье [73] без учёта КК-башни высших скалярных возбуждений. Феноменология смешивания полей Хиггса и радиона, возникающая из члена взаимодействия поля Хиггса с кривизной, также обсуждалась в связи с неподтверждённым наблюдением скалярного бозона типа Хиггса на LHC [74, 75], различные предположения о массах и смешиваниях скалярных состояний были проанализированы в статьях [76–83]. В частности, было показано, что лёгкое состояние с доминированием радиона с массой ниже или выше наблюдаемого бозона Хиггса с массой 125 ГэВ всё ещё не полностью исключено всеми имеющимися строгими ограничениями на электрослабые параметры и данными LHC.

Хотя член взаимодействия поля Хиггса с кривизной даёт билинейное взаимодействие поля Хиггса с полем радиона, после спонтанного нарушения симметрии на бране он также приводит к локализованному на бране члену кривизны, который сильно влияет на спектр масс и взаимодействие с материей КК-мод гравитона [84]. Даже для довольно больших значений параметров модели в диапазоне нескольких ТэВ это может привести к довольно малым массам КК-возбуждений гравитона, что плохо согласуется или даже находится в противоречии с со-

временными экспериментальными ограничениями на такие массы.

Далее, следуя работе [85], мы обсудим модель, в которой билинейное взаимодействие полей Хиггса и радиона естественно возникает из-за механизма спонтанного нарушения симметрии на бране, включающего стабилизирующее скалярное поле. Такой подход учитывает влияние КК-башни высших скалярных возбуждений на параметры смешивания Хиггса и радиона, что оказывается существенным. Он также имеет то преимущество, что изменяет только скалярный сектор модели и оставляет неизменными массы и константы связи КК-возбуждений гравитона. А именно, мы получим связь полей Хиггса и радиона с помощью объединения механизмов стабилизации размера дополнительного измерения и спонтанного нарушения симметрии в СМ. В наших рассуждениях мы, по существу, будем использовать результаты работы [51] для флуктуаций скалярного поля Гольдбергера–Вайза в стабилизированных моделях мира на бране.

Для действия (46) стабилизированной модели РС вакуумное решение для гравитации и стабилизирующего скалярного поля и вакуумное решение для полей СМ независимы. Если мы считаем данную модель мира на бране единой теорией, то разумно полагать, что должно быть общее взаимосвязанное вакуумное решение для всех указанных полей. Для этого изменим в (46) действие поля Гольдбергера–Вайза и СМ таким образом, чтобы оно содержало взаимодействие стабилизирующего скалярного поля и поля Хиггса четвертой степени, которое одновременно приводило бы к стабилизации размера дополнительного измерения и спонтанному нарушению симметрии СМ:

$$S_{\phi+SM} = \int d^4x \int_{-L}^L dy \left( \frac{1}{2} g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi - V(\phi) \right) \sqrt{g} - \int_{y=0} \sqrt{-\bar{g}} \lambda_1(\phi) d^4x + \int_{y=L} \sqrt{-\bar{g}} (-\lambda_2(\phi) + L_{SM-HP} + L_{int}(\phi, H)) d^4x, \quad (182)$$

где лагранжиан  $L_{SM-HP}$  — лагранжиан СМ без потенциала Хиггса, который заменён лагранжианом взаимодействия

$$L_{int}(\phi, H) = -\lambda \left( |H|^2 - \frac{\xi}{M} \phi^2 \right)^2, \quad (183)$$

в котором  $\xi$  — положительный безразмерный параметр. Похожий лагранжиан взаимодействия, квадратичный по стабилизирующему скалярному полю, обсуждался в работе [86].

Фоновые решения для метрики и скалярного поля, сохраняющие Пуанкаре-инвариантность в любом четырёхмерном подпространстве  $y = \text{const}$ , имеют прежний вид (55), (56), фоновое (вакуумное) решение для поля Хиггса является стандартным

$$H_{vac} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (184)$$

и все остальные поля СМ равны нулю.

Если подставить этот анзац в уравнения, соответствующие действию (182), то получится соотношение

между вакуумным значением поля Хиггса и значением поля  $\phi$  на бране при  $y = L$

$$\phi^2(L) = \frac{Mv^2}{2\xi}. \quad (185)$$

Это означает, что в таком сценарии вакуумное значение поля Хиггса, будучи пропорциональным значению стабилизирующего скалярного поля на ТЭВной бране, возникает динамически в результате гравитационной стабилизации размера дополнительного измерения.

Гравитационное фоновое решение получается из системы нелинейных дифференциальных уравнений (52)–(54) для функций  $A(y)$ ,  $\bar{\phi}(y)$ . Предположим, что у нас есть решение  $A(y)$ ,  $\bar{\phi}(y)$  этой системы для соответствующего выбора параметров потенциалов, таких что расстояние между бранами стабилизировано и равно  $L$ . Тогда вакуумная энергия скалярного поля имеет минимум для данного значения расстояния.

Теперь, аналогично (60), (61), линеаризованная теория получается путём представления метрики, скаляра и поля Хиггса в унитарной калибровке в виде

$$g_{MN}(x, y) = \bar{g}_{MN}(y) + \frac{1}{\sqrt{2M^3}} h_{MN}(x, y), \quad (186)$$

$$\phi(x, y) = \bar{\phi}(y) + \frac{1}{\sqrt{2M^3}} f(x, y), \quad (187)$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + \sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (188)$$

подстановки данного представления в действие (182) и сохранения членов второго порядка по  $h_{MN}$ ,  $f$  и  $\sigma$ . Лагранжиан этого действия является стандартным свободным лагранжианом СМ (т.е. массы всех полей СМ, кроме поля Хиггса, выражаются так же, как обычно, через вакуумное значение поля Хиггса и константы связи) вместе со стандартным лагранжианом второй вариации стабилизированной модели РС [51], дополненным членом взаимодействия полей  $f$  и  $\sigma$ . Часть лагранжиана, относящаяся к смешиванию полей Хиггса и радиона, равна

$$\left[ -\frac{1}{2M^3} \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda_2}{dy^2} + \frac{2\lambda v^2 \xi}{M} \right) f^2 + \frac{2\lambda v^2 \sqrt{\xi}}{M^2} f\sigma - \frac{1}{2} 2\lambda v^2 \sigma^2 \right] \delta(y-L). \quad (189)$$

Пятимерное скалярное поле  $f$  можно разложить по модам Калуцы–Клейна. В рассматриваемом случае мы можем стандартным образом найти уравнения для спектра масс и волновых функций КК-возбуждений скалярных полей, просто заменив

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda_2}{dy^2} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda_2}{d\phi^2} + \frac{2\lambda v^2 \xi}{M}$$

в формулах статьи [51] (отметим, что в указанной статье использовалась сигнатура метрики  $(-, +, +, +, +)$ , и поэтому некоторые формулы статьи [51] могут отличаться знаком от соответствующих формул в настоящей работе). А именно, в этой работе было показано, что скалярные степени свободы стабилизированных моделей

мира на бране удобнее всего описывать полем  $\varphi = \exp(-2A(y)) h_{44}(x, y)$ , связанным с полем  $f$  калибровочным условием (62). Уравнения движения и граничные условия на бранах для поля  $\varphi$  определяют волновые функции  $\Psi_n(y)$ , отвечающие собственным значениям масс  $m_n^2$ . Разлагая поле  $f$  по таким модам, подставляя полученное разложение в лагранжиан второй вариации и интегрируя по координате дополнительного измерения  $y$ , получаем четырёхмерный лагранжиан, в котором имеется билинейное взаимодействие между модами поля  $f$  и полем Хиггса, возникающее из члена

$$\frac{2\lambda v^2 \sqrt{\xi}}{M^2} f \sigma.$$

Используя калибровочное условие (62), разложение по модам поля  $\varphi(x, y)$ ,

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \Psi_n(y),$$

и граничное условие для волновой функции моды  $\Psi_n(y)$  при  $y = L$  [51], записанное в терминах уравнения (189),

$$\left( \frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda_2}{d\phi^2} + \frac{\bar{\phi}''}{\bar{\phi}'} + \frac{2\lambda v^2 \xi}{M} \right) \Psi_n' - m_n^2 \exp(2A) \Psi_n|_{y=L} = 0,$$

мы можем выразить поле  $f$  через  $\Psi_n(y)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{f(x, L)}{3M^3} &= - \frac{\varphi' \exp(2A)}{\bar{\phi}'} \Big|_{y=L} = - \frac{\varphi'}{\bar{\phi}'} \Big|_{y=L} = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n^2}{[(1/2)(d^2 \lambda_2 / d\phi^2) + (\bar{\phi}'' / \bar{\phi}') + (2\lambda v^2 \xi / M)] \bar{\phi}'} \times \\ &\times \Psi_n(L) \varphi_n(x), \end{aligned}$$

где мы учли, что  $A(L) = 0$ , для того чтобы координаты на бране в точке  $y = L$  были галилеевыми [22].

Таким образом, взаимодействие мод с полем Хиггса можно записать как

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n^2 a_n \varphi_n(x) \sigma(x),$$

где мы ввели безразмерные величины

$$- \frac{6\lambda M v^2 \sqrt{\xi}}{[(1/2)(d^2 \lambda_2 / d\phi^2) + (\bar{\phi}'' / \bar{\phi}') + (2\lambda v^2 \xi / M)] \bar{\phi}'} \Psi_n(L) = a_n, \quad (190)$$

которые предполагаются положительными.

Эти члены взаимодействия пропорциональны квадратам масс мод и могут быть довольно большими при больших  $n$ . Ниже мы увидим, что важны именно безразмерные величины  $a_n$ . Они пропорциональны значениям волновых функций мод на бране, и их удобно выразить через отношения последних и  $a_1$ :

$$a_n = a_1 \alpha_n, \quad \alpha_n = \frac{\Psi_n(L)}{\Psi_1(L)}. \quad (191)$$

Последние отношения должны стремиться к нулю при больших  $n$ , чтобы совокупный эффект КК-башни радиона был конечным. В работе [51] скалярные волновые функции  $\Psi_n(y)$  были найдены явно в стабилизирован-

ной модели мира на бране, где конформный фактор примерно равен таковому в нестабилизированной модели РС, и можно проверить, что величины  $a_n$  действительно положительны, а отношения  $\alpha_n$  в данном случае действительно довольно быстро падают для больших  $n$ . Найти их в явном виде в стабилизированных моделях мира на бране, где конформный фактор отличается от экспоненты линейной функции, как в модели РС, достаточно трудно. Исследование таких стабилизированных моделей мира на бране было проведено в статьях [22, 51], и было обнаружено, что они также могут решать проблему иерархии гравитационного взаимодействия, давать массы КК-возбуждений в энергетическом диапазоне ТэВ, но соответствующие уравнения не могут быть решены точно и должны изучаться численно для каждого набора фундаментальных параметров модели, а это является очень сложной и трудоёмкой задачей.

Здесь мы не будем проводить такие вычисления для конкретной стабилизированной модели мира на бране, а скорее, дадим качественное описание явлений, обусловленных взаимодействием поля Хиггса с радионом и его КК-башней, выбирая массы и константы связи согласованным образом и принимая во внимание современные теоретические и экспериментальные ограничения на их значения.

**Эффективный лагранжиан модели со смешиванием.** Часть расширенного лагранжиана СМ, содержащая скалярные поля линейно или квадратично, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{\text{part}} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} 2\lambda v^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \partial_\mu \phi_n \partial^\mu \phi_n - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} m_n^2 \phi_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n^2 a_n \phi_n \sigma - \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{\psi}_f \psi_f \sigma - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n (T_\mu^\mu + \Delta T_\mu^\mu) + \frac{2M_W^2}{v} W_\mu^- W^{\mu+} \sigma + \\ &+ \frac{M_Z^2}{v} Z_\mu Z^\mu \sigma + \frac{M_W^2}{v^2} W_\mu^- W^{\mu+} \sigma^2 + \frac{M_Z^2}{2v^2} Z_\mu Z^\mu \sigma^2, \end{aligned} \quad (192)$$

где  $T_\mu^\mu$  — след ТЭИ СМ, а  $\Delta T_\mu^\mu$  — конформная аномалия безмассовых векторных полей, явно задаваемая уравнением

$$\Delta T_\mu^\mu = \frac{\beta(e)}{2e} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} + \frac{\beta(g_s)}{2g_s} G_{\rho\sigma}^{ab} G^{ab\rho\sigma}, \quad (193)$$

где  $\beta$  — известные  $\beta$ -функции КЭД и КХД.

Взаимодействие скалярных мод со следом ТЭИ описывается стандартным лагранжианом взаимодействия для флуктуаций метрики [51], что приводит к выражению для параметров  $b_n$  в терминах волновых функций скалярных мод:

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{8}M^3} \Psi_n(L). \quad (194)$$

В случае низшей скалярной моды, радиона, этот параметр обычно обозначается как

$$b_1 = \frac{1}{\Lambda}, \quad (195)$$

где  $\Lambda$ , как предполагается, имеет порядок фундаментального энергетического масштаба  $M$ . Ниже мы будем использовать  $\Lambda$  как естественный масштаб для взаимодействий радиона и взаимодействий, порождённых его КК-башней. По указанной причине также удобно выразить  $b_n$  через  $\Lambda$  и  $\alpha_n$ , определённые в (191), как

$$b_n = \frac{\alpha_n}{\Lambda}. \quad (196)$$

В дальнейшем мы рассмотрим феноменологию бозона Хиггса и радиона в диапазоне энергий, значительно меньших, чем массы возбуждений радиона. В таком случае мы можем перейти к низкоэнергетическому приближению для этого лагранжиана, отбросив кинетические члены полей возбуждения радиона и проинтегрировав их, что даёт следующий эффективный лагранжиан для взаимодействий полей Хиггса и радиона с полями СМ:

$$\begin{aligned} L_{\text{part-eff}} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} (2\lambda v^2 - d^2) \sigma^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 - \\ & - \frac{1}{2} m_1^2 \varphi_1^2 + m_1^2 a_1 \varphi_1 \sigma - \frac{1}{\Lambda} \varphi_1 (T_\mu^\mu + \Delta T_\mu^\mu) - \\ & - \frac{c}{\Lambda} \sigma (T_\mu^\mu + \Delta T_\mu^\mu) - \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{\psi}_f \psi_f \sigma + \\ & + \frac{2M_W^2}{v} W_\mu^- W^{\mu+} \sigma + \frac{M_Z^2}{v} Z_\mu Z^\mu \sigma + \\ & + \frac{M_W^2}{v^2} W_\mu^- W^{\mu+} \sigma^2 + \frac{M_Z^2}{2v^2} Z_\mu Z^\mu \sigma^2, \end{aligned} \quad (197)$$

где новые параметры определяются через старые следующим образом:

$$c = a_1 \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n^2, \quad d^2 = a_1^2 \sum_{n=2}^{\infty} m_n^2 \alpha_n^2. \quad (198)$$

Мы уже упоминали, что эти ряды должны сходиться. Положительный параметр  $d^2$  может быть порядка  $v^2$ , потому что массовый член  $2\lambda v^2 - d^2$  должен быть положительным, и в рамках рассматриваемого подхода константа связи самодействия бозона Хиггса  $\lambda$  может быть больше, чем в обычном случае СМ. Возможные ограничения на параметр  $c$  будут рассмотрены ниже.

Далее обратимся к массовой матрице полей  $\sigma$  и  $\varphi_1$ , которая выглядит как

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2\lambda v^2 - d^2 & -\frac{1}{2} m_1^2 a_1 \\ -\frac{1}{2} m_1^2 a_1 & m_1^2 \end{pmatrix}. \quad (199)$$

Эту матрицу можно диагонализировать с помощью матрицы вращения

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}^T \mathcal{M} \mathcal{R} = \text{diag}(m_h^2, m_r^2),$$

где угол поворота  $\theta$  определяется соотношением

$$\tan(2\theta) = \frac{m_1^2 a_1}{m_1^2 - 2\lambda v^2 + d^2}. \quad (200)$$

Нетрудно видеть, что достаточно рассматривать данный угол только в интервале  $-\pi/4 < \theta < \pi/4$ , что составляет один полный период функции  $\tan(2\theta)$ .

Наблюдаемые массы собственных массовых состояний задаются выражениями

$$\begin{aligned} m_h^2 &= 2\lambda v^2 - d^2 - \frac{m_1^2 - 2\lambda v^2 + d^2}{2} \times \\ &\times \left( \sqrt{1 + \frac{4a_1^2}{(m_1^2 - 2\lambda v^2 + d^2)^2}} - 1 \right), \\ m_r^2 &= m_1^2 + \frac{m_1^2 - 2\lambda v^2 + d^2}{2} \times \\ &\times \left( \sqrt{1 + \frac{4a_1^2}{(m_1^2 - 2\lambda v^2 + d^2)^2}} - 1 \right), \end{aligned}$$

которые записаны в форме, явно показывающей, что меньшая масса становится меньше, а большая становится больше из-за смешивания. Последнее, в частности, означает, что наблюдаемые массы  $m_r^2$  и  $m_h^2$  не могут быть точно равны в присутствии смешивания, а угол смешивания  $\theta$  отрицателен для  $m_r^2 < m_h^2$  в соответствии с наблюдением в статье [73].

Мы также хотели бы отметить, что матрица масс в уравнении (199) и соответствующее смешивание с матрицей вращения  $\mathcal{R}$  очень похожи на те, которые появляются в СМ, расширенной дополнительным синглетным скаляром [87, 88].

Исходные ненаблюдаемые параметры матрицы  $\mathcal{M}$  можно выразить через наблюдаемые параметры  $m_h^2$ ,  $m_r^2$  и  $\theta$ , причём соответствие будет однозначным при условии, что для  $m_h^2 = m_r^2$  угол смешивания  $\theta = 0$ , и тогда можно легко получить следующие формулы для параметров  $a_1$  и  $c$  в терминах физических масс и угла смешивания:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(m_r^2 - m_h^2) \sin(2\theta)}{m_r^2 \cos^2 \theta + m_h^2 \sin^2 \theta}, \\ c &= \frac{(m_r^2 - m_h^2) \sin(2\theta)}{m_r^2 \cos^2 \theta + m_h^2 \sin^2 \theta} \left( \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n^2 \right), \end{aligned}$$

причём последний также зависит от суммы отношений волновых функций  $\alpha_n^2$ . Такие отношения, конечно, зависят от модели, и, хотя они должны уменьшаться с  $n$  для того, чтобы сумма была сходящейся, нельзя исключать, что в некоторых моделях несколько первых соотношений могут быть порядка единицы. Таким образом, можно оценить эту сумму также как имеющую порядок единицы, потому что, например, в стабилизированной модели, обсуждаемой в статье [51], приближённые волновые функции скалярных мод дают довольно грубые оценки для значения данной суммы в интервале (0,02, 0,2) для массы радиона в интервале  $100 < m_r < 500$  ГэВ и массы его первого КК-возбуждения порядка 1–2 ТэВ. В результате получаем оценку для параметра  $c$

$$0 < c < \frac{(m_r^2 - m_h^2) \sin(2\theta)}{m_r^2 \cos^2 \theta + m_h^2 \sin^2 \theta}, \quad (201)$$

которая будет использоваться в последующих расчётах.

Физические поля состояний с определённой массой  $h(x), r(x)$  легко выражаются через матрицу  $\mathcal{R}$  и исходные поля как

$$\begin{aligned} h(x) &= \cos \theta \sigma(x) + \sin \theta \varphi_1(x), \\ r(x) &= -\sin \theta \sigma(x) + \cos \theta \varphi_1(x). \end{aligned} \quad (202)$$

Поле  $h(x)$  будем называть полем с доминированием бозона Хиггса, а поле  $r(x)$  будем называть полем с доминированием радиона, потому что  $\cos \theta > |\sin \theta|$  в интервале  $-\pi/4 < \theta < \pi/4$  (напомним, что  $\theta < 0$  для  $m_r^2 < m_h^2$ ). Взаимодействие этих полей с полями СМ задаётся следующим эффективным лагранжианом:

$$\begin{aligned}
 L_{h-r} = & \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} m_h^2 h^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu r \partial^\mu r - \frac{1}{2} m_r^2 r^2 - \\
 & - \frac{(c \cos \theta + \sin \theta)}{\Lambda} h (T_\mu^\mu + \Delta T_\mu^\mu) + \frac{(c \sin \theta - \cos \theta)}{\Lambda} \times \\
 & \times r (T_\mu^\mu + \Delta T_\mu^\mu) - \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{\psi}_f \psi_f (h \cos \theta - r \sin \theta) + \\
 & + \frac{2M_W^2}{v} W_\mu^- W^{\mu+} (h \cos \theta - r \sin \theta) + \frac{M_Z^2}{v} Z_\mu Z^\mu \times \\
 & \times (h \cos \theta - r \sin \theta) + \frac{M_W^2}{v^2} W_\mu^- W^{\mu+} (h \cos \theta - r \sin \theta)^2 + \\
 & + \frac{M_Z^2}{2v^2} Z_\mu Z^\mu (h \cos \theta - r \sin \theta)^2. \quad (203)
 \end{aligned}$$

Эффективный четырёхмерный лагранжиан взаимодействия (203), выраженный в терминах физических полей с доминированием бозона Хиггса  $h(x)$  и доминированием радиона  $r(x)$ , содержит их взаимодействия с полями СМ и включает только пять параметров в дополнение к параметрам СМ: массы полей с доминированием бозона Хиггса и доминированием радиона  $m_h$  и  $m_r$ , угол смешивания  $\theta$ , (обратная) константа связи радиона со следом ТЭИ полей СМ  $\Lambda$  и параметр  $c$ , который учитывает вклады проинтегрированных тяжёлых скалярных мод. Заметим, что мы не предполагаем априори, какому состоянию: с доминированием бозона Хиггса или с доминированием радиона — отвечает наблюдаемый на LHC бозон с массой 125 ГэВ.

Интересно посмотреть, что происходит с лагранжианом (203), если фундаментальный энергетический масштаб  $M$  стремится к бесконечности. В рассматриваемой модели невозможно просто взять предел  $M \rightarrow \infty$ , поскольку существует соотношение (185) для параметров модели, которое включает вакуумное значение поля Хиггса. В стабилизированной модели мира на бране, обсуждаемой в [51], масса радиона оказывается пропорциональной  $\phi^2(L)/M^3$ . Таким образом, чтобы сохранить эту массу фиксированной, мы должны взять предел  $M \rightarrow \infty$  и  $\xi \rightarrow 0$ , так что  $M^2 \xi = \text{const}$ . Нетрудно увидеть, что в данном случае  $a_1$ , пропорциональный  $M\sqrt{\xi}$ , не обращается в нуль, тогда как параметр  $\Lambda$ , определённый в (194) и (195), стремится к бесконечности. В результате в лагранжиане (203) члены с тензором энергии — импульса, пропорциональные  $1/\Lambda$ , исчезают, но все остальные члены остаются прежними, поскольку угол смешивания не должен быть равен нулю.

Если формально положить параметры  $a_1$ ,  $c$  и  $\theta$  равными нулю, т.е. рассмотреть случай нулевого смешивания, то лагранжиан (203) становится просто лагранжианом Хиггса СМ плюс обычный лагранжиан взаимодействия радиона с полями СМ через след ТЭИ СМ. В случае ненулевого смешивания в этом лагранжиане появляются дополнительные члены, которые могут привести к определённым изменениям в коллайдерной феноменологии бозона Хиггса и радиона.

**Некоторые феноменологические следствия модели.** Эффективный лагранжиан (203) описывает взаимодействия полей с доминированием бозона Хиггса  $h(x)$  и с доминированием радиона  $r(x)$  с полями СМ и друг с другом. Возникает несколько естественных вопросов. Какие области параметров модели разрешены имеющимися экспериментальными данными LEP и Tevatron, открытием бозона Хиггса с массой 125 ГэВ и измерением силы сигнала Хиггса для различных сигнатур на LHC, пределами от поисков второго бозона Хиггса на LHC? Возможна ли интерпретация наблюдаемого бозона как состояния с доминированием радиона для некоторых значений параметров модели?

Здесь мы представляем феноменологическую иллюстрацию, включающую только два основных канала открытия на LHC, в которых скалярные частицы рождаются в слиянии глюонов и распадаются на два фотона ( $\gamma\gamma$ -мода) или на четыре лептона ( $ZZ^*$ -мода).

Правила Фейнмана, необходимые для нашего исследования, могут быть легко выведены из лагранжиана (203) и приведены в работе [85]. В них опущены члены, происходящие от фермионов вне массовой поверхности, поскольку соответствующие вклады в физические процессы точно компенсируются дополнительными диаграммами с контактными четырёххвостыми вершинами, происходящими из разложений следующего порядка следа тензора энергии — импульса СМ, как было показано в [68].

Правила Фейнмана были реализованы как "новая модель" в специальной версии пакета CompHEP [89–91], также включающей процедуру для  $\chi^2$ -анализа силы сигнала бозона Хиггса способом, аналогичным тем, которые используются в статьях [92, 93]. Поправки NLO учитываются в вычислениях CompHEP путём введения соответствующих формфакторов. Поправки NNLO учитываются в соответствующем анализе путём умножения участвующих вершин на поправочные коэффициенты для каждой точки пространства параметров модели таким образом, чтобы парциальные и полные ширины распада бозона Хиггса СМ и сечения рождения Хиггса в процессе слияния глюонов были точно такими же, как представленные рабочей группой LHC Higgs Cross Section Working Group [94, 95]. Из-за сходства амплитуд рождения и распада бозона Хиггса и радиона, включая и петлевые диаграммы [68], для состояний с доминированием бозона Хиггса и радиона использовались те же поправочные коэффициенты.

Мы рассматриваем два возможных сценария, где наблюдаемый бозон с массой 125 ГэВ является либо состоянием с доминированием бозона Хиггса, либо состоянием с доминированием радиона.

### 7.1. Состояние с доминированием бозона Хиггса с массой 125 ГэВ

Чтобы выяснить, какая область масс допустима в данном случае для состояния с доминированием радиона, мы сначала продемонстрируем различные свойства рождения и распада этого состояния. На рисунке 11 показаны парциальные ширины распада для бозона с доминированием радиона в зависимости от его массы.

Рисунок 11а показывает хорошо известное поведение парциальных ширин распада радиона без смешивания с бозоном Хиггса и с взаимодействием с полями СМ

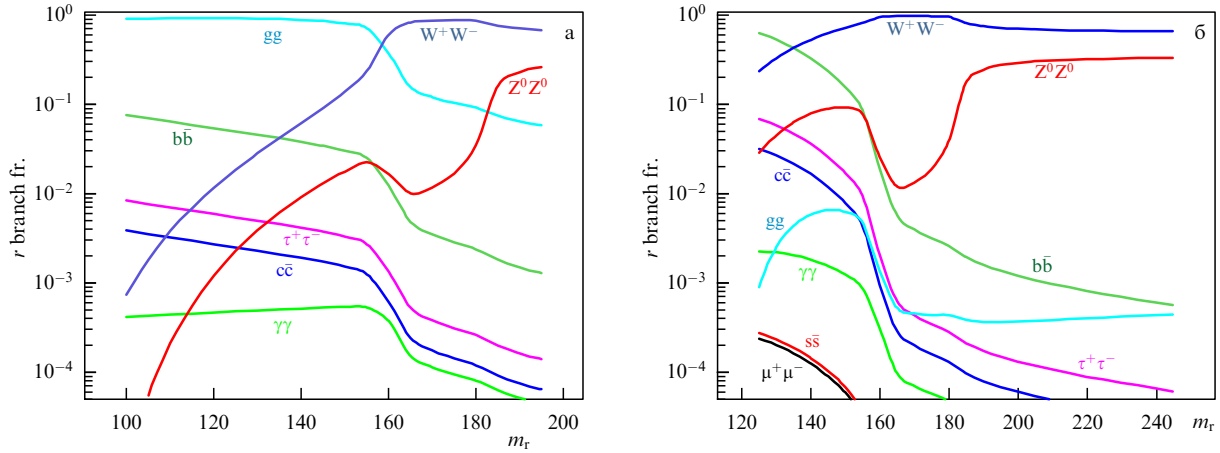


Рис. 11. Парциальные ширины распада для состояния с доминированием радиона как функции  $m_r$  ( $m_h = 125$  ГэВ,  $A = 3$  ТэВ): (а)  $\sin \theta = 0$ , (б)  $\sin \theta = 0,7$ ,  $c$  равен своему максимальному значению  $a_1$ .

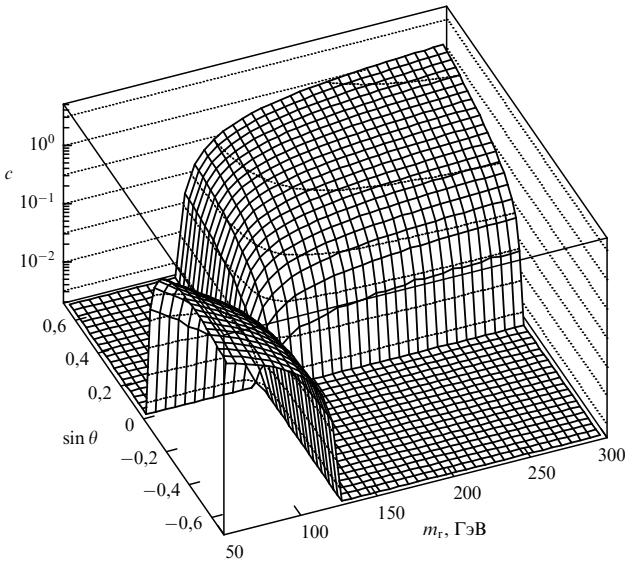


Рис. 12. Двумерный график верхнего уровня  $c_{\max} = a_1$  параметра  $c$  как функция от  $(m_r, \sin \theta)$ .

только через след ТЭИ. Как известно, основной режим распада лёгкого радиона — это распад на два глюона из-за усиления вследствие аномалии. Однако как только смешивание с бозоном Хиггса включается, картина радикально меняется из-за появления у состояния, в котором доминирует радион, пропорциональных  $\sin \theta$  взаимодействий, подобных взаимодействиям бозона Хиггса, а также из-за влияния высших скалярных мод, закодированных в параметре  $c$ .

На рисунке 12 показано поведение максимально возможного значения этого параметра в зависимости от массы радиона и угла смешивания. Напомним, что для  $\theta > 0$  состояние с доминированием радиона тяжелее, чем состояние с доминированием бозона Хиггса,  $m_r > m_h$ , и наоборот ( $\theta < 0$  для  $m_r < m_h$ ), и поэтому для  $\theta < 0$ ,  $m_r > m_h$  и для  $\theta > 0$ ,  $m_r < m_h$  области на плоскости  $c = 0$  недопустимы.

Если взять довольно большой угол смешивания, например  $\sin \theta = 0,7$ , то режим распада в  $b\bar{b}$  будет доминировать, как показано на рис. 11б. Из-за компенсации в вершине глюон – глюон – радион между частью аномального члена, пропорциональной  $1/A$ , и частью с упомяну-

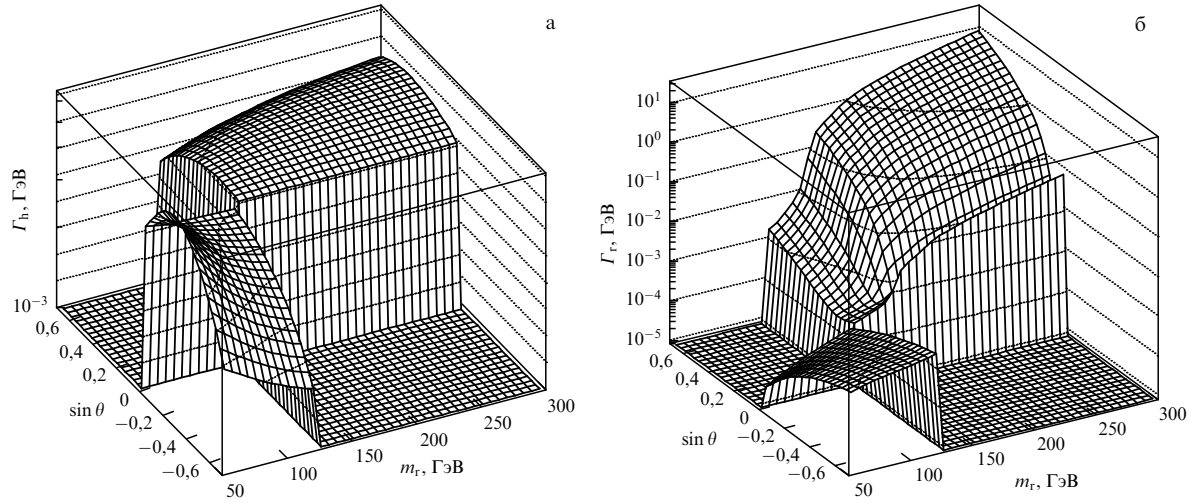
тым выше взаимодействием типа Хиггса, пропорциональным  $\sin \theta/v$ , вершина может быть очень мала для некоторых конкретных областей пространства параметров. Это приводит к интересной особенности, показанной на рис. 11, состоящей в том, что парциальная ширина распада состояния с доминированием радиона в два глюона может быть меньше, чем парциальная ширина распада в два фотона.

Из-за таких компенсаций между различными частями вершины взаимодействия состояния с доминированием радиона с глюонами поведение полной ширины и сечений рождения для мод  $\gamma\gamma$  и  $ZZ^*$  в глюон-глюонном слиянии также имеет некоторые минимумы, как можно видеть из рис. 13 и 14. Из сечений можно получить соответствующие силы сигнала для состояния с доминированием радиона, отнесённые к сечениям бозона Хиггса СМ.

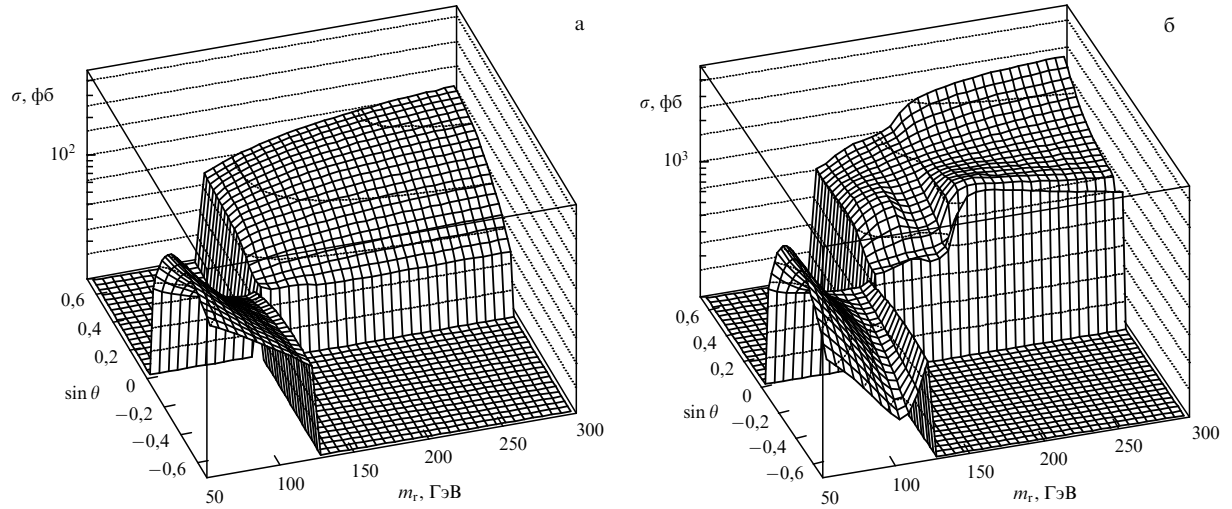
В нашем анализе для целей иллюстрации мы используем уровни сигнала бозона Хиггса для каналов  $\gamma\gamma$  и  $ZZ^*$ , как они были представлены коллаборацией CMS [96]:  $\mu_{\gamma\gamma} = 1,12 \pm 0,24$  и  $\mu_{ZZ^*} = 1,00 \pm 0,29$ . В результате стандартного анализа  $\chi^2$  получаются области в пространстве параметров (масса состояния с доминированием радиона и угол смешивания с бозоном Хиггса), которые всё ещё разрешены. Области, разрешённые либо при рассмотрении только моды  $\gamma\gamma$ , либо только моды  $ZZ^*$ , приведены на рис. 15а и б соответственно. Контуры на всех рисунках соответствуют областям с уровнем достоверности 65 %, 90 % и 99 % с наилучшим соответствием  $\Delta\chi^2$  менее 2,10, 4,61 и 9,21 соответственно, что является стандартным представлением двухпараметрических фитов и использовалось в более ранних работах (см., например, [92, 97]).

Таким образом, на рис. 15 синяя область соответствует уровню достоверности фита 65 %, зелёная область соответствует уровню достоверности фита 90 %, а жёлтая область соответствует уровню достоверности фита 99 %. Нетрудно видеть, что только мода  $\gamma\gamma$  допускает наличие состояния с доминированием радиона для масс как ниже, так и выше 125 ГэВ.

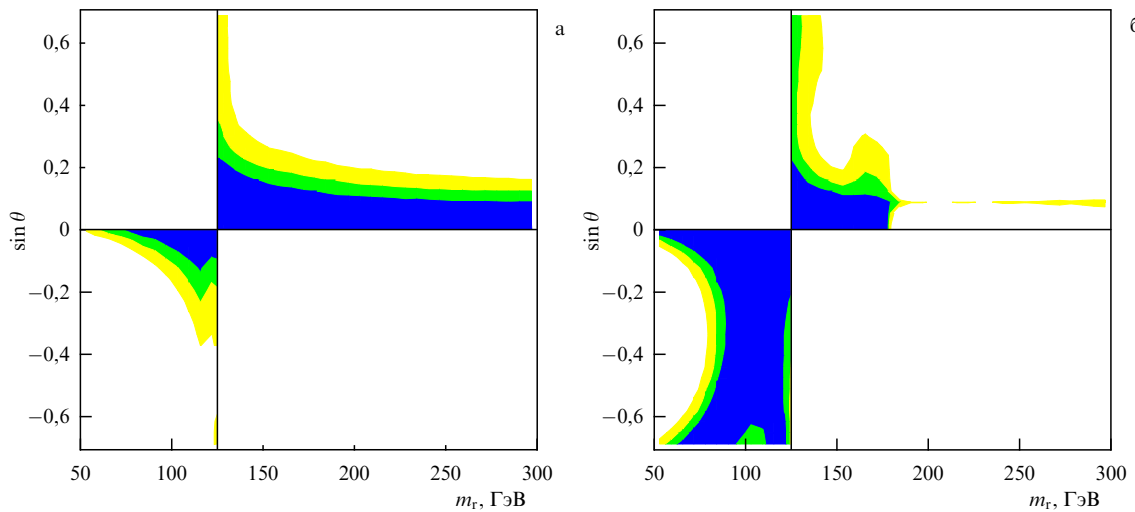
Мода распада  $ZZ^*$  накладывает ограничения на область масс радиона выше порога пары Z-бозонов, где поперечное сечение увеличивается. Узкая разрешённая область на рис. 15б появляется из-за упомянутой выше компенсации в вершинах взаимодействия, приводящей к



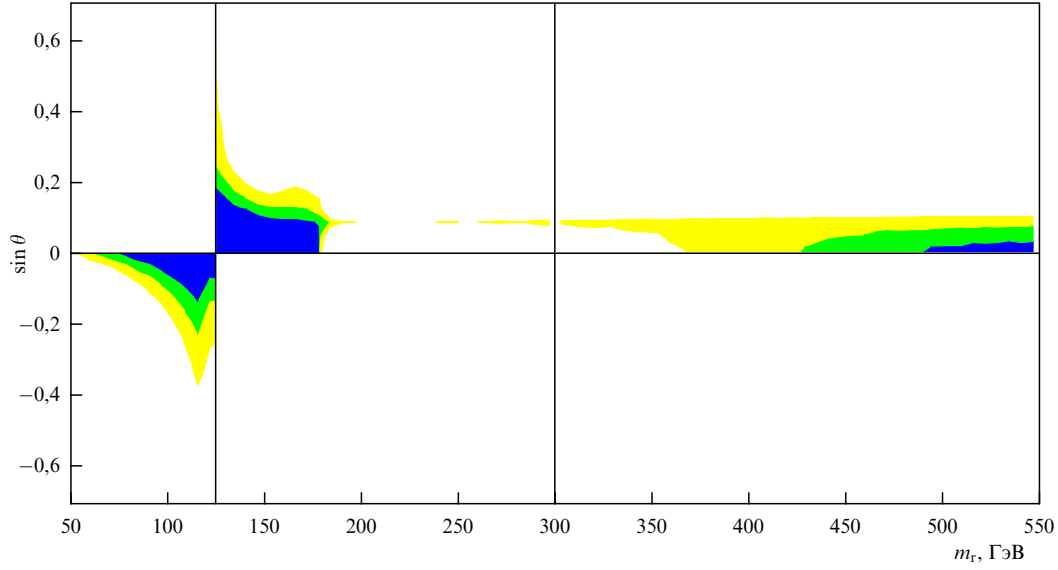
**Рис. 13.** Трёхмерные графики полной ширины как функции  $(m_r, \sin \theta)$  для LHC при  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ и  $m_h = 125$  ГэВ,  $A = 3$  ТэВ,  $c = c_{\max}$ . (а) Состояние с доминированием бозона Хиггса,  $h(x)$ , (б) состояние с доминированием радиона,  $r(x)$ .



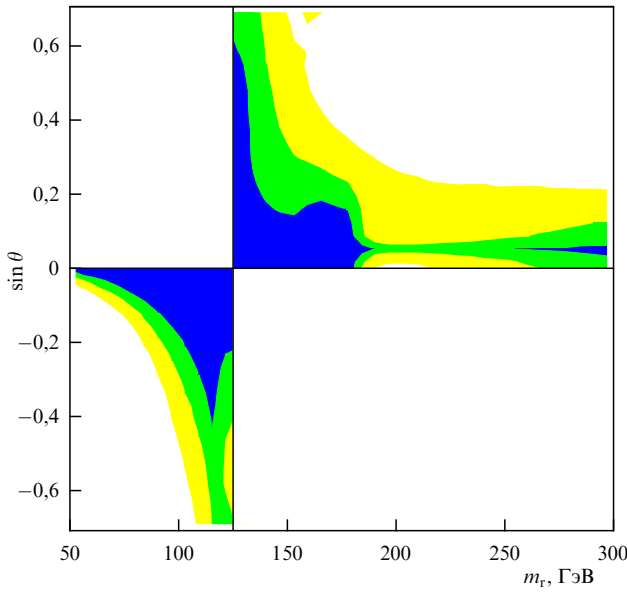
**Рис. 14.** Трёхмерные графики парциального сечения как функции  $(m_r, \sin \theta)$  для LHC при  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ и  $m_h = 125$  ГэВ,  $A = 3$  ТэВ,  $c = c_{\max}$ . (а) Канал  $gg \rightarrow \gamma\gamma$ , (б) канал  $gg \rightarrow ZZ^*$ .



**Рис. 15.** Контуры исключения для частичного фита  $\chi^2$  в плоскости  $(m_r, \sin \theta)$  для LHC при  $\sqrt{s} = 7$  и 8 ТэВ и  $m_h = 125$  ГэВ,  $A = 3$  ТэВ,  $c = c_{\max}$ . Синие, зелёные и жёлтые области соответствуют уровню достоверности 65 %, 90 % и 99 % соответственно. (а) Канал  $gg \rightarrow \gamma\gamma$ , (б) канал  $gg \rightarrow ZZ^*$ .



**Рис. 16.** Контуры исключения для комбинированного фита  $\chi^2$  в плоскости  $(m_t, \sin \theta)$ , который включает оба канала  $gg \rightarrow \gamma\gamma$  и  $gg \rightarrow ZZ^*$  для ЛНС при  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ и  $m_h = 125$  ГэВ,  $A = 3$  ТэВ,  $c = c_{\max}$ . Синие, зелёные и жёлтые области соответствуют уровню достоверности фита 65 %, 90 % и 99 % соответственно.



**Рис. 17.** Контуры исключения для комбинированного фита  $\chi^2$  в плоскости  $(m_t, \sin \theta)$ , который включает оба канала  $gg \rightarrow \gamma\gamma$  и  $gg \rightarrow ZZ^*$  для ЛНС при  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ и  $m_h = 125$  ГэВ,  $A = 5$  ТэВ,  $c = c_{\max}$ . Синие, зелёные и жёлтые области соответствуют уровню достоверности фита 65 %, 90 % и 99 % соответственно.

меньшему сечению рождения. Комбинированный фит  $\chi^2$  для двух мод, взятых одновременно, ещё больше сокращает разрешённую область, как показано на рис. 16. Здесь присутствует разрешённая область более тяжёлых масс состояния с доминированием радиона, где вероятность его рождения уменьшается, так что соответствующее состояние может быть снова разрешено. Очевидно, что если рассматривать большие значения параметра  $A$ , сечение рождения состояния с доминированием радиона становится меньше, а разрешённая область масс для такого состояния увеличивается. Это показано на рис. 17, где параметр  $A$  выбран равным 5 ТэВ, а все остальные параметры такие же, как для случая  $A = 3$  ТэВ. Экспери-

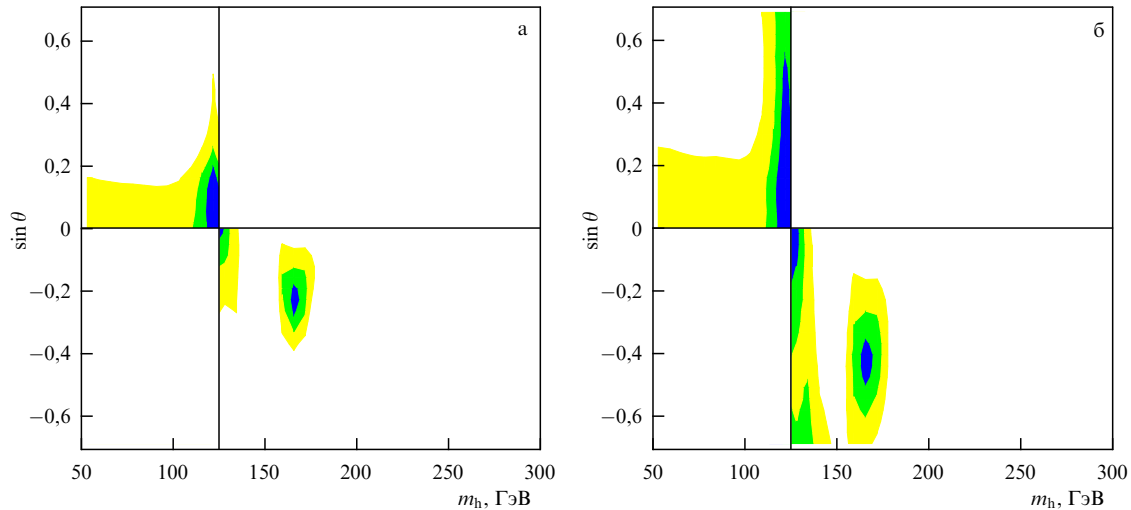
ментальные ограничения снизу на массу такого тяжёлого скалярного состояния в настоящее время составляют примерно 3 ТэВ [98, 99].

## 7.2. Состояние с доминированием радиона с массой 125 ГэВ

Теперь кратко рассмотрим случай, когда состояние с доминированием радиона имеет массу 125 ГэВ и, используя ту же стратегию анализа, найдём области для массы состояния с доминированием бозона Хиггса и угла смешивания, допускаемого двумя силами сигнала. Для этого случая мы провели все соответствующие вычисления и построили графики, подобные графикам на рис. 12–17, которые мы не будем здесь приводить ради краткости. Мы остановимся только на результате анализа  $\chi^2$ , представленном на рис. 18.

Как можно видеть, такой сценарий менее предпочтителен по сравнению с предыдущим случаем. Однако масса состояния с доминированием бозона Хиггса может быть всё ещё очень близка к массе состояния с доминированием радиона. Такая возможность существует в обоих сценариях. Можно также увидеть, что из-за специфических сокращений между аномалией и подобными СМ частями во взаимодействиях с глюонами и фотонами появляется небольшая разрешённая область для синуса угла смешивания около  $\sin \theta \simeq -0,2$  и массы сразу над двумя массами W-бозона.

Рассмотренное в данном разделе смешивание полей Хиггса и радиона, конечно, во многих аспектах похоже на то, которое возникает из-за члена взаимодействия поля Хиггса с кривизной на бране. Однако важным отличием является наличие при низких энергиях дополнительного взаимодействия поля с доминированием бозона Хиггса со следом ТЭИ СМ, возникающего из взаимодействия такого поля с тяжёлыми скалярными состояниями КК-башни радиона. Оказалось, что, хотя взаимодействие отдельно взятого высшего возбуждённого скалярного состояния с полем Хиггса может быть слабым, их кумулятивный эффект на смешивание бозона Хиггса и



**Рис. 18.** Контуры исключения для комбинированного фита  $\chi^2$  в плоскости  $(m_h, \sin \theta)$ , который включает оба канала  $gg \rightarrow \gamma\gamma$  и  $gg \rightarrow ZZ^*$  для ЛНС при  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ и  $m_t = 125$  ГэВ,  $c = c_{\max}$ . Синие, зелёные и жёлтые области соответствуют уровню достоверности фита 65 %, 90 % и 99 % соответственно. (а)  $\Lambda = 3$  ТэВ, (б)  $\Lambda = 5$  ТэВ.

радиона может быть наблюдаемым. Если они дают заметные вклады в параметр  $c$ , то это приводит к определённым изменениям в коллайдерной феноменологии бозона Хиггса. Похожий вклад непосредственно не наблюдаемых высших тензорных КК-мод в процессы рассеяния обсуждался в [100].

В рамках данной модели мы изучили два априори возможных сценария, согласно которым скалярное состояние, обнаруженное при 125 ГэВ, является либо состоянием с доминированием бозона Хиггса, либо состоянием с доминированием радиона. В нашем анализе для простоты и краткости мы использовали только две силы сигнала, соответствующие каналам  $gg \rightarrow \gamma\gamma$  и  $gg \rightarrow ZZ^*$ . Наши результаты показывают, что интерпретация скалярного состояния 125 ГэВ как состояния с доминированием бозона Хиггса является предпочтительной, хотя компонент радиона в этом состоянии может быть довольно большой. В зависимости от значения константы связи радиона  $\Lambda$  были найдены разрешённые области для массы состояния с доминированием радиона. Оказалось, что состояние с доминированием радиона может либо иметь массу, близкую к 125 ГэВ, либо массу выше 300 ГэВ, причём разрешённые области растут с ростом константы связи радиона  $\Lambda$ .

Мы также показали, что интерпретация скалярного состояния 125 ГэВ как состояния с доминированием радиона не полностью исключена двумя ведущими измерениями силы сигнала, хотя в данном случае ограничения на разрешённые массы состояния с доминированием бозона Хиггса очень строгие. Масса такого состояния может быть либо близка к 125 ГэВ, что согласуется с нашим анализом этого состояния при 125 ГэВ, либо иметь значение несколько выше 160 ГэВ для ненулевого значения угла смешивания.

## 8. Устойчивость модели Рэндалл–Сундрума относительно квантовых поправок

В уже упоминавшейся выше работе В. Рубакова [12] было отмечено, что в контексте мира на бране проблема космологической постоянной должна так или иначе

сводиться к вопросу, почему плотность энергии вакуума не влияет на кривизну, индуцированную на бранах. Другими словами, предполагалось, что даже если вакуумная плотность энергии как-то и влияет на геометрию многомерного пространства – времени в целом, то только таким образом, что четырёхмерная метрика на нашей бране остаётся плоской. В качестве явного примера такой возможности приводились модели с одной браной и распространяющимся во всём многомерном пространстве скалярным полем, конформно связанным с материей на бране [12, 105, 106]. В подобных моделях в силу симметрии задачи при некоторых значениях конформного фактора действительно существуют только плоские браны, обладающие четырёхмерной Пуанкаре-инвариантностью [105]. Тем не менее рассмотренные модели с одной браной и конформным скалярным полем обладают рядом проблем, одной из которых является возникновение "голой" сингулярности в многомерном пространстве на конечном расстоянии  $r_{\text{sing}}$  от браны [12].

Попытки избавиться от голой сингулярности вновь приводят к проблеме космологической постоянной в той или иной форме [107–110]. Например, если поместить вторую брану на расстоянии, меньшем  $r_{\text{sing}}$ , от первой браны, предположив, что модель обладает симметрией орбифлекса, то очевидно, что в пределах самого орбифлекса сингулярность не возникает. Однако при таком подходе необходима тонкая настройка натяжения второй браны, чтобы метрика модели была решением уравнений Эйнштейна. Таким образом, мы снова возвращаемся к проблеме космологической постоянной, поскольку указанная тонкая настройка не имеет никаких методологических преимуществ перед подгонкой космологической постоянной, которая обычно осуществляется в четырёхмерных космологических моделях [12]. Дальнейший анализ показывает, что как минимум в некоторых моделях с двумя бранами "плоские" браны или браны с индуцированной на них неплоской метрикой появляются в зависимости от тонкой настройки параметров потенциалов на самих бранах [111]. Отсюда возникает закономерный вопрос, насколько полученные

в результате тонкой настройки "плоские" решения устойчивы по отношению к различным поправкам в вакуумную энергию (например, по отношению к эффекту Казимира).

Оказывается, что стабилизированная РС-модель устойчива по отношению к эффекту Казимира. Другими словами, вакуумные квантовые поправки не меняют формы фонового решения, оказывая лишь пренебрежимо малое влияние на параметры модели. Подчеркнём, что поскольку такое малое изменение параметров является следствием перенормировки, то оно вряд ли может быть получено из других общих соображений с помощью какой-либо классической оценки. Ниже мы рассмотрим эту задачу более подробно.

### 8.1. Квантовые поправки от скалярных мод к тензору энергии–импульса

и к уравнениям движения модели Рэндалл–Сундрума Согласно (66) пятимерное скалярное поле  $\phi(x, y)$  может быть разложено по базису из четырёхмерных мод  $\phi_n(x)$ , подчиняющихся уравнению Клейна–Гордона, а волновые функции  $\Psi_n(y)$  можно выбрать таким образом, чтобы они были ортонормированными по отношению к скалярному произведению вида (68). Согласно [51] после подстановки разложения (66) в действие стабилизированной модели РС (46) в конечном итоге для квадратичной по скалярным модам  $\phi_n(x)$  части действия, обозначенной как  $S^{(2)}$ , получаем:

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \int_{-L}^L \left\{ \frac{3}{4} \Psi_n \Psi_m - \frac{9M^3}{(\bar{\phi}')^2} \bar{g}^{44} (\partial_4 \Psi_n) (\partial_4 \Psi_m) \right\} \times \\ \times \exp(2A) dy \int \left[ \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_n \partial_\nu \phi_m - \frac{1}{2} (m_n^2 + m_m^2) \phi_n \phi_m \right] d^4x. \quad (204)$$

Для четырёхмерных скалярных мод можно провести стандартную процедуру канонического квантования, записав для каждой моды разложение по плоским волнам и объявив соответствующие коэффициенты этого разложения операторами рождения и уничтожения, для которых постулируются стандартные коммутационные соотношения.

Варируя действие (204) по фоновой метрике  $\bar{g}_{MN}$  и усредняя полученное выражение по вакууму, после разложения мод по плоским волнам получим низшую квантовую вакуумную поправку от скалярных мод в ТЭИ стабилизированной модели РС:

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu}(\phi) = \left\langle \frac{\delta S^{(2)}}{\delta \bar{g}^{\mu\nu}} \right\rangle = \exp(-2A) \left\langle \frac{\delta S^{(2)}}{\delta \eta^{\mu\nu}} \right\rangle = \\ = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} F_n^+(y) \int \frac{1}{2\omega_n} \left[ p_{n\mu} p_{n\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (p_n^2 - m_n^2) \right] d^3p_n, \quad (205)$$

$$\mathfrak{T}_{44}(\phi) = \left\langle \frac{\delta S^{(2)}}{\delta \bar{g}^{44}} \right\rangle = \frac{\exp(2A)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} F_n^-(y) \times \\ \times \int \frac{1}{2\omega_n} (p_n^2 - m_n^2) d^3p_n \equiv 0, \quad (206)$$

где

$$F_n^\pm(y) \equiv \frac{3\Psi_n^2}{4} \pm 9M^3 \frac{(\partial_4 \Psi_n)^2}{(\bar{\phi}')^2},$$

$$\omega_n = \sqrt{\mathbf{p}_n^2 + m_n^2}.$$

Вследствие равенства нулю квантовой поправки  $\mathfrak{T}_{44}(\phi)$  уравнение (53), вытекающее из уравнения (48) при  $M = N = 4$ , не меняется при учёте квантовых вакуумных поправок. Сходным образом можно показать, что такие поправки не меняют и уравнение (52), не считая изменения потенциалов на бранах. Отсюда мы можем заключить, что в рассматриваемом случае при учёте квантовых вакуумных поправок форма решений  $A(y)$ ,  $\bar{\phi}(y)$  остаётся неизменной, а могут измениться только входящие в решения параметры модели. Эти изменения можно оценить, вычислив вклад от квантовых поправок в такую интегральную характеристику модели, как, например, плотность энергии. Мы вычислим плотность энергии Казимира скалярных мод — низшую квантовую вакуумную поправку, которую дают скалярные моды в плотность энергии, определяемую как нулевая компонента четырёхмерного вектора следующего вида:

$$P^\mu \equiv 2 \int_0^L \mathfrak{T}^{\mu 0}(\phi) \sqrt{\bar{g}} dy = \\ = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{1}{\omega_n} \left[ p_n^\mu p_n^0 - \frac{1}{2} \eta^{\mu 0} (p_n^2 - m_n^2) \right] d^3p_n. \quad (207)$$

Очевидно, что его временная компонента — это просто плотность энергии нулевых колебаний скалярных мод,

$$P^0 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int \omega_n d^3p, \quad (208)$$

что является стандартным результатом в теории эффекта Казимира: плотность энергии Казимира есть сумма плотностей энергий нулевых колебаний [112].

### 8.2. Регуляризация и перенормировка плотности энергии Казимира скалярных мод

Полученное выражение для плотности энергии Казимира скалярных мод расходится, если размерность пространства–времени  $d$  равна четырём. Чтобы его регуляризовать и выделить конечную часть, зависящую от расстояния между бранами, можно воспользоваться методом размерной регуляризации, вычислив соответствующие интегралы в  $d$ -мерном пространстве–времени, а получившиеся расходящиеся ряды просуммировать с помощью дзета-функции Гурвица. С точностью до нулевого порядка по параметру  $\varepsilon = 4 - d$  полученный результат имеет вид

$$P^0 = \mu^{4-d} I_d \sum_{n=1}^{\infty} m_n^d = \mu^{4-d} I_d m_\Gamma^d + \mu^{4-d} I_d v^d \sum_{n=2}^{\infty} (n + \theta)^d = \\ = \mu^{4-d} I_d m_\Gamma^d + \mu^{4-d} I_d v^d \zeta(-d, 2 + \theta) = \\ = -\frac{\pi}{2} X \varepsilon^{-1} + \frac{\pi}{8} (3 - 2\gamma - 2 \ln \pi) X - \frac{\pi}{2} Y + O(\varepsilon), \quad (209)$$

где  $\zeta(-d, 2 + \theta)$  — дзета-функция Гурвица, аналитически продолженная в область  $d > -1$ ,  $\zeta'$  — её производная по первому аргументу, а  $\mu$  — масштабный фактор размерной регуляризации. Масса легчайшей моды (радиона)  $m_1 \equiv m_r$  задаётся формулой (77), а массы остальных мод, согласно [113], есть  $m_n \approx v(n + \theta)$ , причём  $v = \pi k$ , а параметр  $\theta$  близок к  $1/4$ . Фактор  $I_d$  в выражении (209) равен

$$I_d \equiv S_{d-2} \int_0^\infty \sqrt{q^2 + 1} q^{d-2} dq = \frac{\pi}{2\varepsilon} - \frac{\pi}{8} (3 - 2\gamma - 2 \ln \pi) + \frac{\pi}{96} (21 - 18\gamma + 6\gamma^2 + \pi^2 + (-18 + 12\gamma + 6 \ln \pi) \ln \pi) \varepsilon + O(\varepsilon). \quad (210)$$

Для коэффициентов  $X$  и  $Y$  в разложении (209) по степеням  $\varepsilon$  имеют место следующие выражения:

$$X \equiv m_r^4 + v^4 \zeta(-4, 2 + \theta), \quad (211)$$

$$Y \equiv m_r^4 \ln \left( \frac{m_r}{\mu} \right) + v^4 \zeta(-4, 2 + \theta) \ln \left( \frac{v}{\mu} \right) - v^4 \zeta'(-4, 2 + \theta). \quad (212)$$

При получении выражения (209) для вычисления расходящихся интегралов было использовано аналитическое продолжение по размерности пространства–времени, что соответствует отбрасыванию вклада, который дают в плотность энергии скалярные моды в пространстве Минковского. Такая процедура, в свою очередь, эквивалентна перенормировке плотности энергии посредством нормального упорядочения операторов поля [114]. Тем не менее получившееся выражение всё ещё является расходящимся при стремлении размерности пространства–времени  $d$  к четырём. Расходимостью такого вида полученное выражение для плотности энергии Казимира обязано наличию границ (бран) в пространстве–времени модели РС. Отметим, что возникновение таких "поверхностных расходимостей" в ТЭИ моделей с границами является типичным явлением, и для их устранения требуется уточнение процедуры перенормировки [112, 115].

Заметим, что в формуле (209) вклад от первой моды (радиона)

$$\mu^{4-d} I_d m_r^d = -\frac{\pi}{2} m_r^4 \varepsilon^{-1} + \frac{\pi}{8} \left( 3 - 2\gamma - 2 \ln \pi - \ln \left( \frac{m_r}{\mu} \right) \right) m_r^4$$

в точности совпадает с вкладом, который давало бы в плотность энергии Казимира скалярное поле с массой  $m_r$  в  $d$ -мерном пространстве Минковского. Поэтому перенормировка вклада радиона в плотность энергии Казимира  $P^0$  может быть произведена путём отбрасывания такого вклада, как обычно делается в теории эффекта Казимира, когда из выражения для плотности энергии Казимира некоторого поля в рассматриваемом пространстве–времени вычитается вклад, который давало бы это поле в пространстве Минковского.

Вклад, который даёт КК-башня в выражение для плотности энергии Казимира (209), может быть с учётом формул (210)–(212) формально представлен в виде вклада от некоторой одиночной моды с массой  $m_\Phi \equiv$

$$\equiv v \sqrt[4]{\zeta(-4, 2 + \theta)}:$$

$$\begin{aligned} \mu^{4-d} I_d v^d \sum_{n=2}^\infty (n + \theta)^d &= \\ &= -\frac{\pi}{2} m_\Phi^4 \varepsilon^{-1} + \frac{\pi}{8} \left[ 3 - 2\gamma - 2 \ln \pi - \ln \left( \frac{m_\Phi}{\mu} \right) \right] m_\Phi^4 - \\ &- v^4 \left[ \frac{1}{4} \zeta(-4, 2 + \theta) \ln \zeta(-4, 2 + \theta) + \zeta'(-4, 2 + \theta) \right]. \end{aligned} \quad (213)$$

Поэтому такой вклад может быть перенормирован аналогично вкладу радиона отбрасыванием выражения

$$\mu^{4-d} I_d m_\Phi^d = -\frac{\pi}{2} m_\Phi^4 \varepsilon^{-1} + \frac{\pi}{8} \left[ 3 - 2\gamma - 2 \ln \pi - \ln \left( \frac{m_\Phi}{\mu} \right) \right] m_\Phi^4, \quad (214)$$

которое давала бы в плотность энергии Казимира в  $d$ -мерном пространстве Минковского скалярная мода с массой  $m_\Phi$ .

Таким образом, для суммарного вклада всех скалярных мод в энергию Казимира получаем конечное перенормированное выражение:

$$P_{\text{ren}}^0 = -\frac{\pi}{2} v^4 \left[ \frac{1}{4} \zeta(-4, 2 + \theta) \ln \zeta(-4, 2 + \theta) + \zeta'(-4, 2 + \theta) \right], \quad (215)$$

которое численно находится в очень хорошем согласии с выражением для энергии Казимира скалярных полей, полученной для этой модели другим способом [113]. Отметим, что рассмотренная схема перенормировки плотности энергии Казимира удовлетворяет набору условий [112, 116], обеспечивающих однозначность процедуры перенормировки.

При значениях параметров модели  $M = 5$  ТэВ,  $\tilde{k}L = 35$ ,  $\beta_2^2 = \tilde{k} = 53$  ТэВ,  $m_r = 1$  ТэВ и  $\theta = 0,2518$ , выбранных согласно современным экспериментальным ограничениям на модели с дополнительными измерениями пространства–времени [117], численные расчёты дают для плотности энергии Казимира величину:

$$P_{\text{ren}}^0 \sim -1,98 \times 10^9 \text{ ТэВ}^4. \quad (216)$$

Расчёты для других значений параметров модели подтверждают эту оценку и показывают, что перенормированная плотность энергии Казимира  $P_{\text{ren}}^0$  отрицательна. Таким образом, в данном случае эффект Казимира приводит к притяжению бран, что в рассматриваемой стабилизированной модели РС должно приводить к уменьшению физического расстояния между ними.

### 8.3. Изменение параметров модели вследствие эффекта Казимира

Для того чтобы оценить уменьшение расстояния между бранами за счёт квантовых эффектов, следует сравнить плотность энергии Казимира  $P_{\text{ren}}^0$  скалярных мод с аналогичной классической величиной, полученной из ТЭИ классического фонового скалярного поля и определяемой следующим интегралом:

$$P_{\text{cl}}^0 \equiv \int_0^L T^{00} \sqrt{g} dy. \quad (217)$$

В соответствии с современными экспериментальными ограничениями на модели с дополнительными измерениями пространства–времени [117] выберем фундаментальный пятимерный энергетический масштаб  $M$  равным 5 ТэВ и будем считать, что масса радиона имеет величину порядка 1 ТэВ. При этом должно удовлетворяться условие  $uL \sim 0,1$ ,  $k \approx \tilde{k}$ . Данные условия оказываются согласованными, если  $\tilde{k}L \sim 35$ ,  $\tilde{k} \sim 53$  ТэВ. Тогда, подставив в (217) выражение (50) для ТЭИ поля Гольдбергера–Вайза и используя формулы (51)–(56) для уравнений движения и фоновых решений стабилизированной модели РС, можно записать приближённое выражение для  $P_{cl}^0$  в следующей форме:

$$P_{cl}^0 \approx \left( \frac{3\tilde{k}}{\kappa^2} - \frac{u}{2} \phi_0^2 + \frac{3\kappa^2 u^2}{16\tilde{k}} \phi_0^4 \right) \exp(2\tilde{k}L). \quad (218)$$

Численное значение классической плотности энергии скалярных мод при таком выборе параметров стабилизированной модели РС оказывается следующим:

$$P_{cl}^0 \sim 4,15 \times 10^{34} \text{ ТэВ}^4. \quad (219)$$

Для сравнения классической плотности энергии  $P_{cl}^0$  с квантовой поправкой, возникающей из-за эффекта Казимира, для последней следует учесть вклад тензорных мод. Вычисление этого вклада проводится совершенно аналогично вычислению вклада в плотность энергии Казимира скалярных мод и приводит к результату того же порядка для каждой из пяти поляризаций тензорного поля [113]. Поэтому с учётом (216) общий вклад тензорных и скалярных мод в плотность энергии Казимира может быть оценён как

$$P_{ren}^0 \sim -1,2 \times 10^{10} \text{ ТэВ}^4. \quad (220)$$

Используя формулу (218) для  $P_{cl}^0$ , можно приближённо оценить величину  $\delta P_{cl}^0$  с учётом формулы для вариации  $\delta\phi_0 = u\phi_0\delta L$  и малости отношения  $u/k$ :

$$\delta P_{cl}^0 \approx 2\tilde{k}P_{cl}^0 \delta L. \quad (221)$$

Исходя из того что  $P_{ren}^0 \sim \delta P_{cl}^0$ , получаем следующую оценку для относительного изменения расстояния между бранами  $\delta L/L$ :

$$\frac{P_{ren}^0}{P_{cl}^0} \approx 2\tilde{k}L \frac{\delta L}{L}. \quad (222)$$

Учитывая численные оценки (219) и (220), а также что  $2\tilde{k}L \approx 70$ , из формулы (221) можно легко оценить относительное уменьшение расстояния между бранами, которое оказывается порядка  $\delta L/L \sim 10^{-26}$ , т.е. пренебрежимо малым.

Совершенно аналогично можно оценить изменение параметра фонового поля  $\delta\phi_0$  вследствие эффекта Казимира. С учётом  $\delta\phi_0 = u\phi_0\delta L$  и формулы (221) получим

$$\delta\phi_0 = u\phi_0\delta L \approx \frac{u\phi_0}{2\tilde{k}} \frac{\delta P_{cl}^0}{P_{cl}^0}.$$

Остальные параметры модели либо не меняются при учёте эффекта Казимира, поскольку входят в уравнения (52) и (53), неизменные относительно низших квантовых

поправок, либо не являются независимыми и выражаются через параметры  $\phi_0$  и  $L$ . Действительно, параметры потенциалов модели РС подобраны таким образом, чтобы определяемое ими фоновое решение представляло собой статические плоские браны на расстоянии  $L$  друг от друга, т.е. на параметры модели наложены определённые связи. При произвольных же значениях параметров фоновое решение модели в общем случае не являлось бы однородным и изотропным, а браны обладали бы ненулевой постоянной кривизной.

Таким образом, рассмотренные квантовые поправки не меняют вид фонового решения модели, а изменение её параметров фактически сводится к пренебрежимо малому изменению физического расстояния между бранами и такого же незначительного изменения параметра фонового поля. Тем самым показано, что стабилизированная модель РС устойчива относительно квантовых поправок, приводящих к эффекту Казимира. Следует отметить, что полученный результат хорошо согласуется с выводами классических работ Гольдбергера с соавторами [25, 118] о невозможности стабилизировать модель РС только с помощью квантовых поправок и, наоборот, противоречит выводам работ [119–121], в которых допускалась возможность стабилизации расстояния между бранами за счёт эффекта Казимира в нестабилизированной модели РС. Действительно, в рассматриваемом приближении для конформного фактора (56) метрика стабилизированной модели РС имеет тот же вид, что и метрика обычно обсуждаемой нестабилизированной модели. Поэтому энергия Казимира скалярных и тензорных полей для обеих моделей должна иметь примерно одинаковый порядок величины и тот же самый аналитический вид. То же самое можно сказать и о силе Казимира, приводящей к притяжению бран. Но, в отличие от стабилизированной модели РС, в нестабилизированной модели отсутствуют какие-либо силы, которые могли бы зафиксировать браны на определённом расстоянии друг от друга. Поэтому в такой модели для стабилизации расстояния между бранами обязательно нужно дополнительно рассматривать нелинейные взаимодействия скалярных полей, как это сделано, например, в [52], и квантовые поправки к описывающим данные взаимодействия потенциалам. Возможно, что в таком случае расстояние между бранами в нестабилизированной модели РС могло бы быть стабилизировано за счёт квантовых поправок.

## 9. Заключение

В настоящем обзоре мы рассмотрели историю развития теорий с дополнительными измерениями пространства–времени, обсудили разные варианты теорий с большими дополнительными измерениями и остановились на вкладе В. Рубакова в развитие таких теорий. Мы также изложили основные моменты модели РС: выделение физических степеней свободы этой модели и определение её энергетических масштабов, механизмы стабилизации размера дополнительного измерения и некоторые феноменологические следствия стабилизированной модели. В основе нашего изложения модели РС лежит лагранжево описание линеаризованной гравитации, которое представляется наиболее последовательным подходом. Такое описание позволяет достаточно просто выделить физические степени свободы модели,

оказывается естественным образом связанным с наблюдателем на бране и поэтому даёт возможность легко найти канонически нормированные четырёхмерные поля на каждой из бран, а также определить их константы связи с полями СМ.

Причём очень важным моментом, который игнорируется в абсолютном большинстве работ по модели РС, является то, что для наблюдателей на разных бранах пятимерная гравитация выглядит по-разному. Это, в частности, находит своё отражение в формулах (6), (7) для связи четырёхмерной гравитационной постоянной с фундаментальными энергетическими масштабами на разных бранах. Следует особо отметить, что почти во всех работах формула (6), справедливая для браны с положительным натяжением, используется для браны с отрицательным натяжением, а последнее приводит к ошибочному выводу о планковском энергетическом масштабе на этой бране.

Мы рассмотрели некоторые феноменологические следствия стабилизированной модели РС, в которой пятимерный энергетический масштаб порядка  $M \sim 5 - 10$  ТэВ, а остальные параметры таковы, что метрика данной стабилизированной модели при массе радиона порядка нескольких ТэВ близка к метрике нестабилизированной модели. А именно, мы разобрали вопрос о поиске КК-возбуждений гравитационного поля, обсудили подобие бозона Хиггса и радиона в процессах их ассоциативного рождения и показали, что аналитические выражения для полных амплитуд процессов ассоциативного рождения бозона Хиггса и радиона и процессов парного рождения бозона Хиггса совпадают с точностью до замены масс и вакуумного среднего поля Хиггса константой связи радиона и перемасштабирования константы тройного самодействия поля Хиггса. Вследствие этого вклад радиона может имитировать отклонение константы тройного самодействия Хиггса от предсказания СМ в случае близких масс радиона и бозона Хиггса, что следует учитывать при экспериментальном изучении указанной константы.

Также были обсуждены нелинейные самодействие радиона и его взаимодействия с полями СМ. При этом было показано, что взаимодействие радиона с векторными полями всегда является линейным по полю радиона. Ещё одним важным моментом является то, что потенциал самодействия радиона до четвёртой степени включительно имеет устойчивый минимум в нуле, что указывает на классическую стабильность вакуума модели РС.

Кроме того, мы рассмотрели смешивание полей Хиггса и радиона, возникающее в стабилизированных моделях мира на бране вследствие объединения механизма стабилизации размера дополнительного измерения и механизма Хиггса спонтанного нарушения симметрии на ТэВ-ной бране, и обсудили его феноменологические следствия. Такое смешивание, конечно же, во многих отношениях похоже на то, которое возникает в стандартном подходе из члена взаимодействия кривизны на бране с полем Хиггса. Однако важным отличием является наличие при низких энергиях дополнительного взаимодействия состояния с доминированием бозона Хиггса со следом ТЭИ СМ, возникающего вследствие взаимодействия этого поля с тяжёлыми скалярными модами КК-башни радиона, что может приводить к существенной модификации взаимодействий данного состояния по сравнению с бозоном Хиггса СМ.

Ещё мы обсудили вопрос о стабильности модели РС относительно низших квантовых поправок, приводящих к эффекту Казимира в четырёхмерном пространстве между бранами, и показали, что модель устойчива относительно таких поправок.

Наконец, следует отметить, что интерес к теориям с дополнительными измерениями, так же как и к суперсимметричным теориям, носит волнообразный характер, то спадая, то возрастая вновь. Последний всплеск интереса к таким теориям был связан с идеей о локализации полей на доменной стенке, впервые высказанной в работе В. Рубакова и М. Шапошникова, и моделями мира на бране с большими дополнительными измерениями в духе модели Рэндалл–Сундрума. Однако многочисленные экспериментальные поиски на ЛНС предсказываемых этими моделями частиц и эффектов пока не дали никаких положительных результатов, отодвигая масштаб возможных проявлений дополнительных измерений в область энергий порядка 10 ТэВ или больше. Данное обстоятельство привело к заметному спаду интереса к таким моделям. Но их развитие продолжается, появляются новые интересные направления исследований, например, калуца-клейновский портал в мир тёмной материи [122], основанный на свойстве универсальности взаимодействия тензорных и скалярных КК-мод модели РС с полями материи. Продолжается и поиск физических следствий моделей с дополнительными измерениями в ускорительных и неускорительных экспериментах, обсуждаются новые возможности поиска на будущих коллайдерах с большими энергиями, в частности, в проекте FCC.

**Благодарности.** Авторы благодарны Ю.В. Грацу за полезные обсуждения изложенных в обзоре вопросов. Работа выполнена в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление № 5 "Физика частиц и космология".

## Список литературы

1. Nordström G *Phys. Z.* **15** 504 (1914); physics/0702221
2. Kaluza Th *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin Math. Phys. Kl.* 966 (1921); Пер. на англ. яз.: *Int. J. Mod. Phys. D* **27** 1870001 (2018); arXiv:1803.08616; Пер. на русск. яз.: Калуца Т, в сб. *Альберт Эйнштейн и теория гравитации* (Пер. под ред. Е С Куранского) (М.: Мир, 1979) с. 529
3. Klein O *Z. Phys.* **37** 895 (1926); *Surv. High Energy Phys.* **5** 241 (1986)
4. Klein O *Nature* **118** 516 (1926)
5. Einstein A, Bargmann V, Bergmann P G, in *Theodore von Kármán Anniversary Volume. Contributions to Applied Mechanics and Related Subjects* (Pasadena, CA: California Institute of Technology, 1941) p. 212; Пер. на русск. яз.: Эйнштейн А, Баргман В, Бергман П, в сб. *Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов Т. 2 Работы по теории относительности 1921–1955* (Под ред. И Е Тамма, Я А Смородинского, Б Г Кузнецова) (М.: Наука, 1966) с. 543
6. Wess J, Bagger J *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1983); Пер. на русск. яз.: Бесс Ю, Бергер Дж *Суперсимметрия и супергравитация* (М.: Мир, 1986)
7. Schwarz J H *Phys. Rep.* **89** 223 (1982)
8. Hořava P, Witten E *Nucl. Phys. B* **460** 506 (1996); hep-th/9510209
9. Lukas A et al. *Phys. Rev. D* **59** 086001 (1999); hep-th/9803235
10. Witten E *Nucl. Phys. B* **471** 135 (1996)
11. Rubakov V A, Shaposhnikov M E *Phys. Lett. B* **125** 136 (1983)
12. Рубаков В А *УФН* **171** 913 (2001); Rubakov V A *Phys. Usp.* **44** 871 (2001)
13. Барнавели А Т, Канчели О В *Ядерная физика* **52** 905 (1990); Barnaveli A T, Kancheli O V *Sov. J. Nucl. Phys.* **52** 576 (1990)

14. Kehagias A, Tamvakis K *Phys. Lett. B* **504** 38 (2001)
15. Shaposhnikov M, Tinyakov P *Phys. Lett. B* **515** 442 (2001)
16. Smolyakov M N *Phys. Rev. D* **85** 045036 (2012); *Phys. Rev. D* **87** 029901 (2013) erratum; arXiv:1111.1366
17. Smolyakov M N *Phys. Rev. D* **87** 104035 (2013); arXiv:1210.7978
18. Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G *Phys. Lett. B* **429** 263 (1998)
19. Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G *Phys. Rev. D* **59** 086004 (1999)
20. Randall L, Sundrum R *Phys. Rev. Lett.* **83** 3370 (1999)
21. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1975)
22. Boos E E et al. *Nucl. Phys. B* **717** 19 (2005); hep-th/0412204
23. Boos E E et al. *Class. Quantum Grav.* **19** 4591 (2002)
24. Charmousis C, Gregory R, Rubakov V A *Phys. Rev. D* **62** 067505 (2000); hep-th/9912160
25. Goldberger W D, Wise M B *Phys. Rev. Lett.* **83** 4922 (1999)
26. DeWolfe O et al. *Phys. Rev. D* **62** 046008 (2000)
27. Vecchi L J *High Energy Phys.* **2011** (11) 102 (2011); arXiv:1012.3742
28. Geller M, Bar-Shalom S, Soni A *Phys. Rev. D* **89** 095015 (2014); arXiv:1312.3331
29. Pomarol A *Phys. Lett. B* **486** 153 (2000); hep-ph/9911294
30. Davoudiasl H, Hewett J L, Rizzo T G *Phys. Lett. B* **473** 43 (2000); hep-ph/9911262
31. Chang S et al. *Phys. Rev. D* **62** 084025 (2000); hep-ph/9912498
32. Gherghetta T, Pomarol A *Nucl. Phys. B* **586** 141 (2000); hep-ph/0003129
33. Djouadi A, Moreau G, Singh R K *Nucl. Phys. B* **797** 1 (2008); arXiv:0706.4191
34. Allanach B C et al. *J. High Energy Phys.* **2010** (03) 014 (2010); arXiv:0910.1350
35. Agashe K, Perez G, Soni A *Phys. Rev. D* **75** 015002 (2007); hep-ph/0606293
36. Agashe K et al. *Phys. Rev. D* **76** 036006 (2007); hep-ph/0701186
37. Fitzpatrick L et al. *J. High Energy Phys.* **2007** (09) 013 (2007); hep-ph/0701150
38. Lillie B, Randall L, Wang L T J *High Energy Phys.* **2007** (09) 074 (2007); hep-ph/0701166
39. Agashe K et al. *Phys. Rev. D* **77** 015003 (2008); hep-ph/0612015
40. Burdman G et al. *Phys. Rev. D* **79** 075026 (2009); arXiv:0812.0368
41. Agashe K et al., arXiv:1309.7847
42. Rizzo T G *J. High Energy Phys.* **2007** (05) 037 (2007)
43. Accomando E et al. *Phys. Rev. D* **79** 055020 (2009); arXiv:0807.5051
44. Accomando E et al. *Phys. Rev. D* **83** 015012 (2011); arXiv:1010.0171
45. Accomando E et al. *Phys. Rev. D* **84** 115014 (2011); arXiv:1107.4087
46. Accomando E et al. *Phys. Rev. D* **85** 115017 (2012); arXiv:1110.0713
47. Боос Э Э и др. *ЭЧАЯ* **43** 82 (2012); Boos E E et al. *Phys. Part. Nucl.* **43** 42 (2012)
48. Боос Э Э и др. *Теоретическая и математическая физика* **131** 216 (2002); Boos E E et al. *Theor. Math. Phys.* **131** 629 (2002)
49. Kisselev A V *Phys. Rev. D* **73** 024007 (2006)
50. Kisselev A V *Phys. Rev. D* **88** 095012 (2013)
51. Boos E E et al. *Mod. Phys. Lett. A* **21** 1431 (2006); hep-th/0511185
52. Волобуев И П, Кейзеров С И, Рахметов Э Р *Теоретическая и математическая физика* **205** 84 (2020); Volobuev I P, Keizerov S I, Rakhmetov E R *Theor. Math. Phys.* **205** 1318 (2020)
53. Sirunyan A M et al. (CMS Collab.) *J. High Energy Phys.* **2021** 208 (2021); arXiv:2103.02708
54. Aad G et al. (ATLAS Collab.) *Phys. Lett. B* **822** 136651 (2021); arXiv:2102.13405
55. Aad G et al. (ATLAS Collab.) *Phys. Rev. D* **102** 112008 (2020); arXiv:2007.05293
56. Sirunyan A M et al. (CMS Collab.) *Eur. Phys. J. C* **81** 688 (2021); arXiv:2102.08198
57. Boos E E et al. *J. High Energy Phys.* **2014** (06) 160 (2014); arXiv:1311.5968
58. Weinberg S *Physica A* **96** 327 (1979)
59. Buchmüller W, Wyler D *Nucl. Phys. B* **268** 621 (1986)
60. Burgess C P, London D *Phys. Rev. D* **48** 4337 (1993); hep-ph/9203216
61. Burgess C P et al. *Phys. Rev. D* **49** 6115 (1994); hep-ph/9312291
62. Whisnant K et al. *Phys. Rev. D* **56** 467 (1997); hep-ph/9702305
63. Yang J M, Young B-L *Phys. Rev. D* **56** 5907 (1997); hep-ph/9703463
64. Boos E, Dudko L, Ohl T *Eur. Phys. J. C* **11** 473 (1999); hep-ph/9903215
65. Ferreira P M, Santos R *Phys. Rev. D* **74** 014006 (2006); hep-ph/0604144
66. Боос Э Э и др. *Теоретическая и математическая физика* **149** 339 (2006); Boos E E et al. *Theor. Math. Phys.* **149** 1591 (2006)
67. Davoudiasl H, Hewett J L, Rizzo T G *Phys. Rev. Lett.* **84** 2080 (2000); hep-ph/9909255
68. Boos E et al. *Phys. Rev. D* **90** 095026 (2014); arXiv:1409.2796
69. Боос Э Э и др. *Ядерная физика и инжениринг* **5** 741 (2014); Пер. на англ. яз.: Boos E E et al. *Phys. Atom. Nucl.* **78** 1484 (2015)
70. Boos E et al. *Phys. Rev. D* **94** 024047 (2016)
71. Боос Э Э и др. *ЭЧАЯ* **48** 627 (2017); Boos E E et al. *Phys. Part. Nucl.* **48** 745 (2017)
72. Giudice G F, Rattazzi R, Wells J D *Nucl. Phys. B* **595** 250 (2001); hep-ph/0002178
73. Csáki C, Graesser M L, Kribs G D *Phys. Rev. D* **63** 065002 (2001); hep-th/0008151
74. Aad G et al. (ATLAS Collab.) *Phys. Lett. B* **716** 1 (2012); arXiv:1207.7214
75. Chatrchyan S et al. (CMS Collab.) *Phys. Lett. B* **716** 30 (2012); arXiv:1207.7235
76. Chacko Z, Franceschini R, Mishra R K *J. High Energy Phys.* **2013** (04) 015 (2013); arXiv:1209.3259
77. Chacko Z, Mishra R K, Stolarski D J *High Energy Phys.* **2013** 121 (2013); arXiv:1304.1795
78. Kubota H, Nojiri M *Phys. Rev. D* **87** 076011 (2013); arXiv:1207.0621
79. Cho G-C, Nomura D, Ohno Y *Mod. Phys. Lett. A* **28** 1350148 (2013); arXiv:1305.4431
80. Desai N, Maitra U, Mukhopadhyaya B *J. High Energy Phys.* **2013** (10) 093 (2013); arXiv:1307.3765
81. Cox P et al. *J. High Energy Phys.* **2014** (02) 032 (2014); arXiv:1311.3663
82. Jung D-W, Ko P *Phys. Lett. B* **732** 364 (2014); arXiv:1401.5586
83. Bhattacharya S et al. *Phys. Rev. D* **91** 016008 (2015); arXiv:1410.0396
84. Davoudiasl H, Hewett J L, Rizzo T G *J. High Energy Phys.* **2003** (08) 034 (2003); hep-ph/0305086
85. Boos E E et al. *Phys. Rev. D* **92** 095010 (2015); arXiv:1505.05892
86. Volobuev I *PoS QFTHEP2011* 054 (2012) <https://doi.org/10.22323/1.138.0054>
87. Godunov S I et al. *Eur. Phys. J. C* **76** 1 (2016); arXiv:1503.01618
88. Robens T, Stefaniak T *Eur. Phys. J. C* **75** 104 (2015); arXiv:1501.02234
89. Boos E et al. (CompHEP Collab.) *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **534** 250 (2004); hep-ph/0403113
90. Boos E E et al. *PoS ACAT2008* 008 (2008); arXiv:0901.4757
91. Boos E E, Bunichev V, Dubinin M *PoS QFTHEP2013* 015 (2013)
92. Boos E E et al. *Phys. Rev. D* **89** 035001 (2014); arXiv:1309.5410
93. Boos E et al. *Phys. Lett. B* **739** 410 (2014); arXiv:1402.4143
94. Dittmaier S et al. (LHC Higgs Cross Section Working Group), arXiv:1101.0593; CERN-2011-002, <http://dx.doi.org/10.5170/CERN-2011-002>
95. Heinemeyer S et al. (LHC Higgs Cross Section Working Group), arXiv:1307.1347; CERN-2013-004, <http://dx.doi.org/10.5170/CERN-2013-004>
96. Khachatryan V et al. (CMS Collab.) *Eur. Phys. J. C* **75** 212 (2015); arXiv:1412.8662
97. Espinosa J R et al. *J. High Energy Phys.* **2012** (05) 097 (2012); arXiv:1202.3697
98. Aad G et al. (ATLAS Collab.) *Eur. Phys. J. C* **80** 1165 (2020); arXiv:2004.14636
99. Tumasyan A et al. (CMS Collab.) *Phys. Rev. D* **105** 032008 (2022); arXiv:2109.06055
100. Boos E E et al. *Phys. Rev. D* **79** 104013 (2009); arXiv:0710.3100
101. Hewett J L *Phys. Rev. Lett.* **82** 4765 (1999)
102. Gupta A K, Mondal N K, Raychaudhuri S, hep-ph/9904234
103. Cheung K, Landsberg G *Phys. Rev. D* **62** 076003 (2000); hep-ph/9909218
104. Vermaseren J A M *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **559** 1 (2006); math-ph/0010025
105. Arkani-Hamed N et al. *Phys. Lett. B* **480** 193 (2000); hep-th/0001197

106. Kachru S, Schulz M, Silverstein E *Phys. Rev. D* **62** 085003 (2000); hep-th/0002121
107. de Alwis S P *Nucl. Phys. B* **597** 263 (2001); hep-th/0002174
108. de Alwis S P, Flournoy A T, Irges N J. *High Energy Phys.* **2001** (01) 027 (2001); hep-th/0004125
109. Förste S et al. *Phys. Lett. B* **481** 360 (2000); hep-th/0002164
110. Csáki C et al. *Nucl. Phys. B* **584** 359 (2000); hep-th/0004133
111. Smolyakov M N J. *High Energy Phys.* **2009** (11) 077 (2009)
112. Birrell N D, Davies P C W. *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982); Пер. на русск. яз.: Биррелл Н, Девис П *Квантованные поля в искривленном пространстве – времени* (М.: Мир, 1984)
113. Волобуев И П, Кейзеров С И, Рахметов Э Р *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* **79** (2) 2420103 (2024) <https://doi.org/10.55959/MSU0579-9392.79.2420103>; Volobuev I P, Keizerov S I, Rakhmetov E R. *Moscow Univ. Phys. Bull.* **79** 156 (2024) <https://doi.org/10.3103/S0027134924700358>
114. Гриб А А, Мамаев С Г, Мостепаненко В М *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях* (М.: Энергоатомиздат, 1988)
115. Bordag M et al. *Advances in the Casimir Effect* (International Ser. of Monographs on Physics, Vol. 145) (Oxford: Oxford Univ. Press, 2009)
116. Wald R M *Ann. Physics* **110** 472 (1978)
117. Sirunyan A M et al. (CMS Collab.) *J. High Energy Phys.* **2019** (04) 114 (2019)
118. Goldberger W D, Rothstein I Z *Phys. Lett. B* **491** 339 (2000)
119. Toms D J *Phys. Lett. B* **484** 149 (2000)
120. Garriga J, Pujolàs O, Tanaka T *Nucl. Phys. B* **605** 192 (2001)
121. Flachi A, Toms D J *Nucl. Phys. B* **610** 144 (2001)
122. Chivukula R S et al., arXiv:2411.02509

### Physics and phenomenology of large extra dimensions

E.E. Boos<sup>(a)</sup>, V.E. Bunichev<sup>(b)</sup>, I.P. Volobuev<sup>(c)</sup>, V.O. Egorov<sup>(d)</sup>, S.I. Keyzerov<sup>(e)</sup>, E.R. Rahmetov<sup>(f)</sup>, M.N. Smolyakov<sup>(g)</sup>

Lomonosov Moscow State University, Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics,

Leninskie gory 1, str. 2, 119991 Moscow, Russian Federation

E-mail: <sup>(a)</sup>boos@theory.sinp.msu.ru, <sup>(b)</sup>bunichev@theory.sinp.msu.ru, <sup>(c)</sup>volobuev@theory.sinp.msu.ru, <sup>(d)</sup>egorov@theory.sinp.msu.ru,

<sup>(e)</sup>errar@mail.ru, <sup>(f)</sup>rahmetov@theory.sinp.msu.ru, <sup>(g)</sup>smolyakov@theory.sinp.msu.ru

The history of models of elementary-particle interactions in a spacetime with large extra dimensions is reviewed, and the current state of this approach and its phenomenological implications are considered. The discussion is focused on the stabilized two-brane Randall–Sundrum model—the most interesting one from this perspective—and the most important results it yields. For this model, the connection between the fundamental 5D energy scale and the Planck mass is discussed in detail, as is the identification of physical degrees of freedom. The interaction of the lowest scalar mode, the radion, and the lowest tensor modes with Standard Model fields is analyzed. The stability of the model with respect to quantum corrections is discussed.

**Keywords:** extra spacetime dimensions, large extra dimensions, field theory, Randall–Sundrum model, brane world

PACS numbers: **03.70. + k**, **04.50. – h**

Bibliography — 122 references

Received 29 October 2024, revised 26 November 2024

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **195** (2) 116–153 (2025)

*Physics – Uspekhi* **68** (2) (2025)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.12.039820>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2024.12.039820>