

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Математические парадоксы представлений уравнения Дирака

В.П. Незнамов

Рассмотрены представления Фолди–Ваутхайзена и Фейнмана–Гелл-Манна для уравнения Дирака. Анализ проведён для электронов и позитронов, взаимодействующих с электромагнитными полями. Версии квантовой электродинамики рассмотрены как в области применимости теории возмущений, так и в непертурбативной области с сильными электромагнитными полями. В описанных представлениях уравнения Дирака выявлены математические артефакты, противоречащие физическим предпосылкам теории. Математические парадоксы устраняются, если в теории использовать только амплитуды состояний (реальных и виртуальных) с положительными энергиями.

Ключевые слова: представления уравнения Дирака, квантовая электродинамика, фермионный вакуум, положительные и отрицательные энергетические состояния, математические парадоксы теории

PACS numbers: 03.65.Pm, 11.10.St, 12.20. – m

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.11.040057>

Содержание

1. Введение (1356).
 2. Теория возмущений и представление Фолди–Ваутхайзена (1357).
 3. Непертурбативная квантовая электродинамика и представления уравнения Дирака (1358).
 - 3.1. Стандартная квантовая электродинамика в полях водородоподобных ионов с большим зарядовым номером Z .
 - 3.2. Представления Фейнмана–Гелл-Манна и Фолди–Ваутхайзена.
 - 3.3. Уравнение Дирака с нерелятивистским гамильтонианом в представлении Фолди–Ваутхайзена.
 4. Заключение (1360).
- Список литературы (1361).

1. Введение

В стандартной квантовой электродинамике (КЭД) используется уравнение Дирака с биспинорной волновой функцией. Уравнение Дирака для электрона с массой m и электрическим зарядом $e < 0$, взаимодействующего с электромагнитным полем $A^\mu(\mathbf{x}, t)$, можно записать в виде

$$p^0 \psi_D(\mathbf{x}, t) = H_D(\mathbf{x}, t) \psi_D(\mathbf{x}, t) = (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) + \beta m + eA^0(\mathbf{x}, t)) \psi_D(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

Здесь и далее используется система единиц $\hbar = c = 1$; $H_D(\mathbf{x}, t)$ — дираковский гамильтониан; $p^\mu = i(\partial/\partial x_\mu)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$; $A^\mu(\mathbf{x}, t)$ — электромагнитные потенциалы; α^i, β — четырёхмерные матрицы Дирака ($i = 1, 2, 3$). В стандартном представлении матрицы $\alpha^i, \beta, \Sigma^i, \gamma^5, \gamma^i$

имеют вид

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \\ \Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \gamma^0 \alpha^i. \quad (2)$$

Биспинор $\psi_D(\mathbf{x}, t)$ можно представить в виде

$$\psi_D(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{x}, t) \\ \chi(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В свободном случае (без взаимодействия) уравнение Дирака имеет следующие нормированные решения с положительными и отрицательными энергиями ε :

$$(\psi_D)_0^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{(|E| + m)^2} \right)^{-1/2} \begin{pmatrix} U_S \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{|E| + m} U_S \end{pmatrix} \times \\ \times \exp(-i|E|t + i\mathbf{p}\mathbf{x}), \quad \varepsilon = |E| > 0, \quad (4)$$

$$(\psi_D)_0^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{(|E| + m)^2} \right)^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{|E| + m} U_S \\ U_S \end{pmatrix} \times \\ \times \exp(+i|E|t - i\mathbf{p}\mathbf{x}), \quad \varepsilon = -|E| < 0.$$

Здесь U_S — нормированные спиноры Паули (для $S_z = 1/2$, $U_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, для $S_z = -1/2$, $U_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Для стационарных состояний в присутствии статических электромагнитных полей уравнение Дирака также имеет решения с положительными и отрицательными энергиями.

С одной стороны, совокупность решений с положительными и отрицательными энергиями обеспечивает математическую полноту. С другой стороны, решения с отрицательными энергиями напрямую не являются решениями уравнения Дирака для античастиц. Это прекрасно понимал автор уравнения — П.А.М. Дирак (см., например, [1]). Известны две наиболее распространённые интерпретации решений с отрицательными энергиями.

В.П. Незнамов

Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, просп. Мира 37, 607188 Саров, Нижегородская обл., Российская Федерация
E-mail: vpneznamov@vniief.ru, vpneznamov@mail.ru

Статья поступила 2 июня 2025 г.,
после доработки 6 ноября 2025 г.

1. Физический вакуум уравнения Дирака описывается на языке полностью заполненных состояний с отрицательными энергиями (море Дирака). Дырки в море Дирака интерпретируются как наличие античастиц [1].

2. В теории позитронов Штукельберга – Фейнмана [2–4] позитроны представляют собой электроны с отрицательными энергиями, движущиеся в обратном направлении в пространстве – времени.

Фермионный вакуум стандартной КЭД не пустой, в нём теоретически допускается виртуальное рождение и аннигиляция частиц и античастиц.

Существуют версии КЭД с пустым фермионным вакуумом. Они основаны на использовании некоторых представлений уравнения Дирака. Это представление Фолди – Ваутхайзена (FW) [5], представление Фейнмана – Гелл-Манна (FG) [6], представление с уравнением для фермионов типа Клейна – Гордона (KG) [7, 8].

Для этих представлений в рамках теории возмущений развиты формализмы (КЭД)_{FW} [9, 10], (КЭД)_{FG} [11], (КЭД)_{KG} [12, 13] и рассчитаны некоторые физические эффекты. Конечные физические результаты полностью совпадают с соответствующими результатами в стандартной КЭД с уравнением Дирака.

Замкнутые уравнения для фермионов в представлениях FW, FG сформулированы также для непертурбативной КЭД в сильных электромагнитных полях [14, 15].

Использование вышеуказанных представлений уравнения Дирака приводит к тому, что при вычислениях физических эффектов достаточно решений с положительными энергиями фермионов. Это относится как к реальным, так и к виртуальным промежуточным фермионным состояниям. При этом необходимо использовать два отдельных уравнения для фермионов и антифермионов. Эти уравнения отличаются друг от друга знаком электрического заряда.

Использование представлений уравнения Дирака в расчётах эффектов КЭД выявило ряд противоречий между физическими предположениями теории и математическими результатами. Все противоречия связаны с использованием в расчётах амплитуд состояний с отрицательными энергиями фермионов.

Целью настоящей работы является анализ причин выявленных математических парадоксов.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 проводится анализ использования (КЭД)_{FW} в области применимости теории возмущений. В разделе 3 анализ проводится для представлений непертурбативной КЭД с сильными электромагнитными полями. Рассмотрена стандартная КЭД и представления Фолди – Ваутхайзена и Фейнмана – Гелл-Манна. В разделе 4 обсуждаются полученные выводы из проведённого анализа.

2. Теория возмущений и представление Фолди – Ваутхайзена

В представлении Фолди – Ваутхайзена должны выполняться два условия (см., например, [16]):

1. Гамильтониан или оператор энергии диагональны относительно верхних и нижних спиноров преобразованной волновой функции $\psi_{FW}(\mathbf{x})$, т.е. эти операторы не смешивают верхние и нижние компоненты $\psi_{FW}(\mathbf{x})$.

2. При преобразовании Фолди – Ваутхайзена должно выполняться условие редукции волновой функции. Для случая, когда гамильтониан Дирака не зависит от времени (случай статических внешних полей), условие ре-

дукции можно записать в виде¹

$$\begin{aligned}\psi_D^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= \exp(-i\varepsilon t) A_{(+)} \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{x}) \\ \chi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \rightarrow \psi_{FW}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \\ &= U_{FW}^{(+)}(\mathbf{x}) \psi_D^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \exp(-i\varepsilon t) \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)\end{aligned}$$

здесь $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}\psi_D^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= \exp(-i\varepsilon t) A_{(-)} \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{x}) \\ \chi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \rightarrow \psi_{FW}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \\ &= U_{FW}^{(-)}(\mathbf{x}) \psi_D^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \exp(-i\varepsilon t) \begin{pmatrix} 0 \\ \chi(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (6)\end{aligned}$$

здесь $\varepsilon < 0$.

В (5) и (6) $A_{(+)}$, $A_{(-)}$ — нормировочные операторы. $U_{FW}^{(+)}$, $U_{FW}^{(-)}$ — операторы преобразования FW. Операторы $A_{(+)}$, $A_{(-)}$, $U_{FW}^{(+)}$, $U_{FW}^{(-)}$ необязательно одинаковы для положительных и отрицательных энергий.

В FW-представлении уравнение Дирака для электрона, взаимодействующего с электромагнитным полем $A^\mu(\mathbf{x}, t)$, можно получить в виде ряда по степеням электромагнитной константы связи, применяя к уравнению (1) серию унитарных преобразований (см. [9]):

$$U_{FW} = (1 + e\delta_1 + e^2\delta_2 + e^3\delta_3 + \dots) U_{FW}^0. \quad (7)$$

Здесь $U_{FW}^+ = U_{FW}^{-1}$.

В результате получаем уравнение

$$\begin{aligned}\varepsilon \psi_{FW} &= H_{FW} \psi_{FW} = (\beta E_p + eK_1^{FW} + m, A^\mu) + \\ &+ e^2 K_2^{FW} + m, A^\mu, A^\nu + \\ &+ e^3 K_3^{FW} + m, A^\mu, A^\nu, A^\nu + \dots) \psi_{FW}.\end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $E_p = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Обозначение $+m$ в K_n^{FW} указывает на использование положительного знака перед βm в уравнении (1). В уравнении (8) отсутствуют слагаемые с отрицательным знаком перед массой m . Это следует из структуры выражений K_1^{FW} , K_2^{FW} ... (см. (39)–(41), (20), (21) в [9]).

В уравнении (8)

$$\psi_{FW} = U_{FW} \psi_D. \quad (9)$$

В свободном случае

$$\varepsilon(\psi_{FW})_0 = \beta E_p(\psi_{FW})_0, \quad (10)$$

где для положительной энергии $\varepsilon = |E| > 0$

$$\begin{aligned}(\psi_{FW})_0^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= U_{FW}^0(\psi_D)_0^{(+)} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \begin{pmatrix} U_S \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i|E|t + i\mathbf{p}\mathbf{x}), \quad (11)\end{aligned}$$

для отрицательной энергии $\varepsilon = -|E| < 0$

$$\begin{aligned}(\psi_{FW})_0^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= U_{FW}^0(\psi_D)_0^{(-)} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ U_S \end{pmatrix} \exp(+i|E|t - i\mathbf{p}\mathbf{x}). \quad (12)\end{aligned}$$

В FW-представлении уравнение (8) имеет нековариантный вид, при этом гамильтониан H_{FW} является нелокальным. В этом случае в квантовой теории поля трудно использовать стандартные методы вторичного квантования. Однако можно воспользоваться S -матричным подходом и фейнмановским методом функции распространения [2–4,

¹ Ниже волновые функции нормированы на единичную вероятность в ящике объёмом V . Для краткости в наших выражениях для волновых функций отсутствуют множители $1/\sqrt{V}$.

17]. В этом методе процессы КЭД описываются интегральными уравнениями.

Уравнение (8) для четырёхмерных x, y можно записать в виде

$$\psi_{FW}(x) = (\psi_{FW})_0^{(\pm)}(x) + \int d^4 y S_{FW}(x-y) K^{FW}(y) \psi_{FW}(y), \quad (13)$$

где $K^{FW}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^n K_n^{FW}(y)$ — гамильтониан взаимодействия в уравнении (8); $S_{FW}(x-y)$ — фейнмановский пропагатор в представлении Фолди – Ваутхайзена:

$$S_{FW}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \exp(-ip(x-y)) \frac{p^0 + \beta E}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (14)$$

Элементы S -матрицы можно записать в виде

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i\varepsilon_f \int d^4 y [(\bar{\psi}_{FW})_0^{(\pm)}(y)]_f K^{FW}(y) [\psi_{FW}(y)]_i. \quad (15)$$

Здесь черта над функцией ψ_{FW} означает эрмитово сопряжение, $\varepsilon_f = +1$ для решения $[(\bar{\psi}_{FW})_0^{(+)}(y)]_f$ и $\varepsilon_f = -1$ для решения $[(\bar{\psi}_{FW})_0^{(-)}(y)]_f$.

Уравнения (13) и (15) для стандартной КЭД получены в статьях Р. Фейнмана [3, 4], а также, например, в монографии [17].

Далее отметим несколько важных моментов:

1. Гамильтонианы H_{FW} в (8) и $K^{FW}(y)$ в (13) являются диагональными относительно смешивания верхних и нижних компонент биспинора ψ_{FW} . Каждое из уравнений (8) и (13) включает в себя два независимых уравнения со спинорными волновыми функциями $\sim U_S$. Одно уравнение содержит состояния с положительными энергиями, второе уравнение — состояния с отрицательными энергиями. S -матричные элементы в (15) можно вычислять, учитывая лишь состояния с положительными энергиями. В этом случае состояния с отрицательными энергиями не используются в расчётах физических процессов КЭД. Они необходимы лишь для математической полноты в разложениях операторов и волновых функций.

2. В стандартной КЭД с уравнением Дирака позитроны представляют собой электроны с отрицательными энергиями, движущиеся в обратном направлении в пространстве – времени. В представлении Фолди – Ваутхайзена ситуация изменяется. Если в (15) слева использовать $[(\bar{\psi}_{FW})_0^{(+)}]_f$, а с правой стороны — $[(\psi_{FW})_0^{(-)}]_i$, то из-за структуры биспиноров (11), (12) во всех порядках теории возмущений мы будем получать нулевые значения соответствующих элементов S -матрицы. С учётом (11) и (12) можно записать

$$\left\langle \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(i|E_f|t - i\mathbf{p}_f \mathbf{x}) \begin{pmatrix} \bar{U}_S & 0 \end{pmatrix} M_{FW} \begin{pmatrix} 0 \\ U_S \end{pmatrix} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \times \right. \\ \left. \times \exp(i|E_i|t - i\mathbf{p}_i \mathbf{x}) \right\rangle = 0.$$

Здесь M_{FW} по определению — диагональный оператор.

Аналогичный результат мы получим, если использовать в (15) слева $[(\bar{\psi}_{FW})_0^{(-)}]_f$, а с правой стороны — $[(\psi_{FW})_0^{(+)}]_i$.

Таким образом, позитроны в FW-представлении не могут описываться электронными состояниями с отрицательными энергиями. Позитроны в FW-представлении должны описываться состояниями с положительными энергиями специального уравнения для позитронов.

Итак, мы получили первый парадокс. После проведения унитарного преобразования уравнения Дирака в FW-представлении мы потеряли взаимодействие между состояниями с положительными и отрицательными энергиями.

3. Непертурбативная квантовая электродинамика и представления уравнения Дирака

Проведём рассмотрение для электростатических полей водородоподобных ионов.

3.1. Стандартная квантовая электродинамика в полях водородоподобных ионов с большим зарядовым номером Z

Для стандартной КЭД с флуктуирующим фермионным вакуумом на рис. 1 приведены низколежащие энергетические уровни водородоподобного иона как функции ядерного зарядового номера Z . Рисунок взят из монографии [18].

Рассмотрим уровень $1s_{1/2}$. Для кулоновского поля точечного заряда ядра $+Ze|e|$ уровень $1s_{1/2}$ исчезает при достижении $Z = 137$. Если учесть конечные размеры атомных ядер [19–22], то энергия состояния $1s_{1/2}$ становится отрицательной при $Z > 146$. При $Z_{cr} \approx 171$ уровень $1s_{1/2}$ погружается в отрицательно-энергетический континуум. Аналогично энергия уровня $2p_{1/2}$ становится отрицательной при $Z > 168$; при $Z_{cr} \approx 184$ уровень $2p_{1/2}$ погружается в отрицательно-энергетический континуум. Согласно теоретическим предсказаниям стандартной КЭД при погружении какого-либо уровня в отрицательно-энергетический континуум происходит распад нейтрального вакуума с испусканием двух электрон-позитронных пар [20, 21].

3.2. Представления Фейнмана – Гелл-Манна и Фолди – Ваутхайзена

Запишем уравнение Дирака во внешнем электромагнитном поле в ковариантном виде

$$(\gamma^0(p^0 - eA^0) - \gamma(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - m)\psi_D(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (16)$$

Умножим левую часть (16) на оператор с изменённым знаком перед массой фермиона:

$$(\gamma^0(p^0 - eA^0) - \gamma(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + m)(\gamma^0(p^0 - eA^0) - \gamma(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) - m)\psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (17)$$

В результате мы получаем уравнение второго порядка с решениями, вырожденными относительно знака перед массой m :

$$[(p^0 - eA^0)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - m^2 + e\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{H} - ie\boldsymbol{\alpha} \mathbf{E}]\psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (18)$$

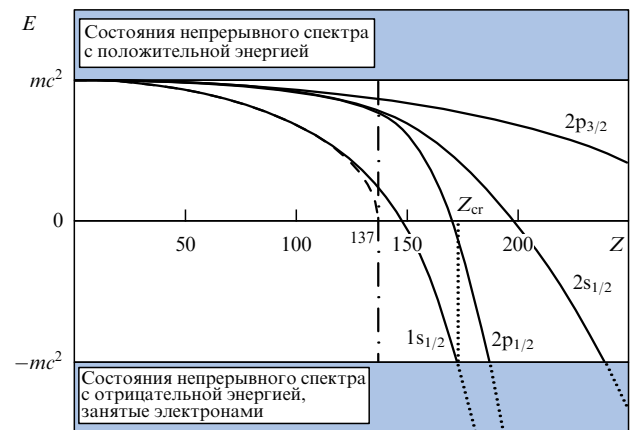


Рис. 1. Низколежащие энергетические уровни водородоподобного иона как функции ядерного зарядового номера Z .

Здесь $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -(\partial \mathbf{A} / \partial t) - \nabla A^0$ — магнитное и электрическое поля.

Далее будем рассматривать случай статических электромагнитных полей, когда $p^0 \psi = \varepsilon \psi$.

Для перехода в FG-представление необходимо использовать в уравнении (18) матрицы Дирака в киральном представлении. Это достигается унитарным преобразованием

$$S = S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\psi_{\text{FG}}(\mathbf{x}, t) = S\psi(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \varphi_{\text{FG}}(\mathbf{x}) \\ \chi_{\text{FG}}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \exp(-i\varepsilon t), \quad (20)$$

$$\alpha_c^i = S\alpha^i S^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \quad \Sigma_c = S\Sigma^i S^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}. \quad (21)$$

В FG-представлении в уравнении (18) отсутствует смешивание верхних и нижних компонент биспинора $\psi_{\text{FG}}(\mathbf{x}, t)$. В случае стационарных состояний уравнение (18) сводится к двум отдельным уравнениям для спиноров $\varphi_{\text{FG}}(\mathbf{x})$ и $\chi_{\text{FG}}(\mathbf{x})$:

$$[(\varepsilon - eA^0)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - m^2 + e\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H} - ie\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}] \varphi_{\text{FG}}(\mathbf{x}) = 0, \quad (22)$$

$$[(\varepsilon - eA^0)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - m^2 + e\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H} + ie\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}] \chi_{\text{FG}}(\mathbf{x}) = 0. \quad (23)$$

Ранее аналогичные уравнения рассматривались Фейнманом и Гелл-Манном [6].

Примечательно, что уравнения (22) и (23) связаны с уравнениями в представлении Фолди – Ваутхайзена [14, 15]. Уравнение (22) в FW-представлении получено для положительных энергий $\varepsilon = |E| > 0$. В этом случае $\varphi_{\text{FG}}(\mathbf{x}) = A_{(+)}\varphi_c(\mathbf{x})$, где $\varphi_c(\mathbf{x})$ является верхним спинором в представлении Фолди – Ваутхайзена:

$$\psi_{\text{FW}}^{(+)}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_c(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (23) в FW-представлении получено для отрицательных энергий $\varepsilon = -|E| < 0$. В этом случае $\chi_{\text{FG}}(\mathbf{x}) = A_{(-)}\chi_c(\mathbf{x})$, где $\chi_c(\mathbf{x})$ является нижним спинором в FW-представлении:

$$\psi_{\text{FW}}^{(-)}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_c(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Запишем в соответствии с [14] в представлениях FG и FW некоторые уравнения для электронов и позитронов.

1. Уравнение для электронов с положительными энергиями ($\varepsilon = |E| > 0$, $e = -|e| < 0$)

$$((|E| + |e|A^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 - i|e|\boldsymbol{\sigma}\nabla A^0)\varphi_{\text{FG}}^e = 0. \quad (24)$$

2. Уравнение для электронов с отрицательными энергиями ($\varepsilon = -|E| < 0$, $e = -|e| < 0$)

$$((|E| - |e|A^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + i|e|\boldsymbol{\sigma}\nabla A^0)\chi_{\text{FG}}^e = 0. \quad (25)$$

3. Уравнение для позитронов с положительными энергиями ($\varepsilon = |E| > 0$, $e = |e| > 0$)

$$((|E| - |e|A^0)^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + i|e|\boldsymbol{\sigma}\nabla A^0)\varphi_{\text{FG}}^p = 0. \quad (26)$$

В уравнении (24) спинор $\varphi_{\text{FG}}^e(\mathbf{x})$ в представлении Фейнмана – Гелл-Манна пропорционален верхнему спи-

нору $\varphi_c^e(\mathbf{x})$ в представлении Фолди – Ваутхайзена:

$$\varphi_{\text{FG}}^e(\mathbf{x}) = A_{(+)}^e \varphi_c^e(\mathbf{x}); \quad (\psi_{\text{FW}}^{(+)}(\mathbf{x}))^e = \begin{pmatrix} \varphi_c^e(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

В уравнении (25) спинор $\chi_{\text{FG}}^e(\mathbf{x})$ в представлении Фейнмана – Гелл-Манна пропорционален нижнему спинору $\chi_c^e(\mathbf{x})$ в представлении Фолди – Ваутхайзена:

$$\chi_{\text{FG}}^e(\mathbf{x}) = A_{(-)}^e \chi_c^e(\mathbf{x}); \quad (\psi_{\text{FW}}^{(-)}(\mathbf{x}))^e = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_c^e(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (28)$$

В уравнении (26) спинор $\varphi_{\text{FG}}^p(\mathbf{x})$ в представлении Фейнмана – Гелл-Манна пропорционален верхнему спинору $\varphi_c^p(\mathbf{x})$ в представлении Фолди – Ваутхайзена:

$$\varphi_{\text{FG}}^p(\mathbf{x}) = A_{(+)}^p \varphi_c^p(\mathbf{x}); \quad (\psi_{\text{FW}}^{(+)}(\mathbf{x}))^p = \begin{pmatrix} \varphi_c^p(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Выше

$$A_{(+)}^e = \left(1 + \frac{m^2}{(|E| + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} + |e|A^0)^2}\right)^{-1/2},$$

$$A_{(-)}^e = \left(1 + \frac{m^2}{(|E| + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} - |e|A^0)^2}\right)^{-1/2},$$

$$A_{(+)}^p = \left(1 + \frac{m^2}{(|E| + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} - |e|A^0)^2}\right)^{-1/2}.$$

В результате мы видим, что уравнение (26) для позитронов с положительными энергиями $\varepsilon > 0$ совпадает с уравнением (25) для электронов с отрицательными энергиями $\varepsilon < 0$. Этот вывод подтверждается после проведения разделения переменных. Системы уравнений для радиальных функций, полученные из уравнений (25), (26), полностью совпадают друг с другом.

В нашем случае позитроны находятся в отталкивающем кулоновском поле ионизованных ядер. Для них существует верхний континуум с непрерывным энергетическим спектром $\varepsilon > m$. Но в этом случае отсутствуют стационарные связанные состояния с $\varepsilon < m$.

Равенство уравнений (25) и (26) подразумевает, что для электронов с отрицательными энергиями и позитронов с положительными энергиями существует эквивалентный (с точностью до знака энергии) непрерывный энергетический спектр с одинаковыми стационарными волновыми функциями. Но в спектре уравнения (25) в интервале $Z_\Sigma = 147 - 170$ содержится отрицательно-энергетический уровень $1s_{1/2}$, а в интервале $Z_\Sigma = 169 - 183$ содержится отрицательно-энергетический уровень $2p_{1/2}$ (см. рис. 1).

Для уравнения (26) существование таких связанных состояний невозможно из простых физических соображений. Следовательно, существование связанных состояний с отрицательными энергиями является математическим артефактом.

Поскольку уравнения (24)–(26) получены унитарными преобразованиями уравнения Дирака, заключение об отсутствии физического (а не математического) вклада стационарных связанных состояний с отрицательными энергиями в рассчитываемые эффекты КЭД справедливо и для исходного уравнения Дирака.

Заметим, что уравнение (26) с изменённым знаком перед $A^0(\mathbf{x})$ (движение позитрона в притягивающем кулоновском поле) совпадает с уравнением (24) для электронов. Как и должно быть, дискретные и непрерывные энергетические спектры электронов и позитронов, движущихся в притягивающем кулоновском поле, совпадают друг с другом.

3.3. Уравнение Дирака с нерелятивистским гамильтонианом в представлении Фолди–Ваутхайзена
Выводы раздела 3.2 подтверждаются анализом нерелятивистского гамильтониана в FW-представлении, полученного ещё в первой статье, посвящённой преобразованию Фолди–Ваутхайзена (см. [5]).

Рассмотрим нерелятивистское движение электронов и позитронов во внешнем электростатическом поле $eA^0(\mathbf{x})$. Согласно [5], нерелятивистский гамильтониан H_{FW} имеет вид

$$H_{FW} = \beta \left(m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right) + eA^0 - \frac{ie}{8m^2} \boldsymbol{\sigma} \text{rot } \mathbf{E} - \frac{e}{4m^2} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) - \frac{e}{8m^2} \text{div } \mathbf{E}. \quad (30)$$

Здесь $\mathbf{E} = -\nabla A^0$ — электрическое поле.

Уравнение Дирака с гамильтонианом H_{FW} записываем в виде

$$\left[(\varepsilon - eA^0) - \beta \left(m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right) + \frac{ie}{8m^2} \boldsymbol{\sigma} \text{rot } \mathbf{E} + \frac{e}{4m^2} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) + \frac{e}{8m^2} \text{div } \mathbf{E} \right] \psi_{FW}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (31)$$

Здесь для $\varepsilon > 0$

$$\psi_{FW}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\varepsilon t),$$

при этом

$$\beta \psi_{FW}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \psi_{FW}^{(+)}(\mathbf{x}, t);$$

для $\varepsilon < 0$

$$\psi_{FW}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \exp(-i\varepsilon t),$$

при этом $\beta \psi_{FW}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = -\psi_{FW}^{(-)}(\mathbf{x}, t)$.

Как и в разделе 3.2, рассмотрим уравнения (31) для электронов и позитронов.

1. Уравнение для электронов с положительными энергиями ($\varepsilon = |E| > 0$, $e = -|e| < 0$):

$$\left[(|E| + |e|A^0) - \left(m^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right) - \frac{i|e|}{8m^2} \boldsymbol{\sigma} \text{rot } \mathbf{E} - \frac{|e|}{4m^2} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) - \frac{|e|}{8m^2} \text{div } \mathbf{E} \right] \varphi^e(\mathbf{x}) = 0. \quad (32)$$

2. Уравнение для электронов с отрицательными энергиями ($\varepsilon = -|E| < 0$, $e = -|e| < 0$):

$$\left[(|E| - |e|A^0) - \left(m^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right) + \frac{i|e|}{8m^2} \boldsymbol{\sigma} \text{rot } \mathbf{E} + \frac{|e|}{4m^2} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) + \frac{|e|}{8m^2} \text{div } \mathbf{E} \right] \chi^e(\mathbf{x}) = 0. \quad (33)$$

3. Уравнение для позитронов с положительными энергиями ($\varepsilon = |E| > 0$, $e = |e| > 0$):

$$\left[(|E| - |e|A^0) - \left(m^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right) + \frac{i|e|}{8m^2} \boldsymbol{\sigma} \text{rot } \mathbf{E} + \frac{|e|}{4m^2} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) + \frac{|e|}{8m^2} \text{div } \mathbf{E} \right] \varphi^p(\mathbf{x}) = 0. \quad (34)$$

Видно, что уравнения (33), (34) совпадают друг с другом, т.е., как и в предыдущих разделах, в кулоновском поле атомных ядер уравнение для позитронов с $\varepsilon > 0$ совпадает с уравнением для электронов с $\varepsilon < 0$.

Однако в нерелятивистском случае с $|E| - m \ll 1$ равенство уравнений (33) и (34) не приводит к противоречиям с физической реальностью. Действительно, в этом случае в уравнении (33) отсутствуют дискретные уровни с отрицательными энергиями (см. рис. 1).

Такие уровни математически появляются в области сильных электростатических полей с $Z > 146$. Это противоречит ясным физическим аргументам об отсутствии дискретных уровней с отрицательными энергиями.

4. Заключение

Ранее в представлении FW уже были объяснены некоторые парадоксы уравнения Дирака.

1. В уравнении Дирака без взаимодействия скорость фермионов равна $v_D = c\alpha$ [1]. В FW-представлении скорость фермиона имеет классический вид $v_{FW} = c\mathbf{p}/E$ [5].

2. В FW-представлении отсутствует "дрожание" (Zitterbewegung) координат фермионов [5]. О проблеме Zitterbewegung см. также [23, 24].

3. Как отмечалось ранее многими авторами, положительным аспектом представления FW является наглядное соблюдение в нерелятивистской квантовой механике принципа соответствия квантово-механических операторов аналогичным классическим величинам. Как видно, например, из пп. 1, 2, такое соответствие в представлении Дирака часто отсутствует.

Эти факты связаны с отсутствием в представлении Фолди–Ваутхайзена виртуального взаимодействия фермионов с положительными и отрицательными энергиями.

К указанным парадоксам уравнения Дирака физическое сообщество привыкло, поскольку эти парадоксы не влияют на результаты расчётов физических эффектов КЭД.

Наш анализ выявил два новых парадокса, разрешение которых влияет на физические следствия КЭД.

Парадокс №1. После унитарного преобразования уравнения Дирака во внешнем электромагнитном поле и перехода в представление FW в S -матричных элементах происходит утрата взаимодействия между состояниями с положительными и отрицательными энергиями. Для обеспечения взаимодействия необходимо введение в теорию дополнительного уравнения для позитронов с положительными энергиями.

Парадокс №2. В противоречии с ясной физической картиной в математических расчётах энергетического спектра водородоподобных ионов с $Z_\Sigma = 147-183$ присутствуют дискретные уровни с отрицательными энергиями².

Оба парадокса связаны с отрицательно-энергетическими решениями уравнения Дирака.

Все парадоксы исчезают, если в расчётах физических эффектов КЭД используются только состояния с положительными энергиями. Состояния с отрицательными энергиями должны учитываться только для сохранения условий полноты в разложениях волновых функций и операторов. При этом кроме уравнения для электронов с положительными энергиями вводится уравнение для позитронов с положительными энергиями.

² Дискретные уровни с отрицательными энергиями появляются в расчётах с учётом конечных размеров атомных ядер [19–22]. В расчётах с кулоновским полем точечного заряда ядра $+Ze|$ такие уровни отсутствуют.

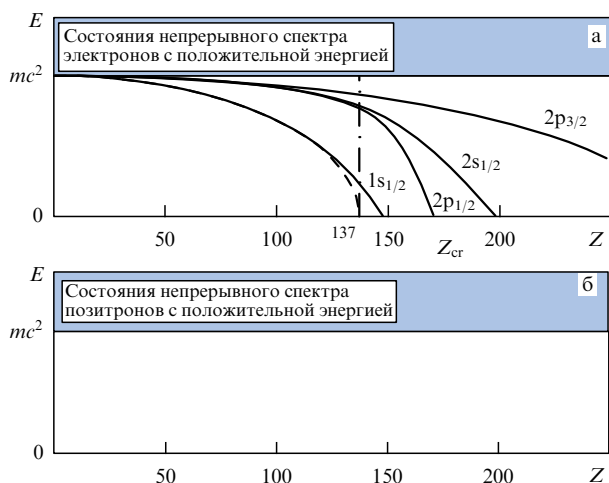


Рис. 2. Энергетический спектр: (а) уравнения для электронов (24), (б) уравнения для позитронов (26).

Такой подход справедлив как для $(\text{КЭД})_{\text{FW}}$, $(\text{КЭД})_{\text{KG}}$, так и для стандартной КЭД с уравнением Дирака (см. [25]). В области применимости теории возмущений конечные физические результаты совпадают с результатами стандартной КЭД.

В непертурбативной КЭД вместо спектра водородоподобных ионов с зарядами $Z|e|$ (см. рис. 1) нужно рассматривать спектр, представленный на рис. 2.

В непертурбативной КЭД расчётный спектр рис. 2а (без дискретного и непрерывного спектра с отрицательными энергиями) может быть экспериментально подтверждён. В работе [26] для такого подтверждения предложено провести серию экспериментов на коллайдерах со столкновениями тяжёлых ионов.

Заметим, что профессор Дирак, неудовлетворённый присутствием в его уравнении состояний с отрицательными энергиями, уже в конце своего жизненного пути обратился к поиску релятивистского волнового уравнения только с положительно-энергетическими решениями [27, 28]. Однако довести этот замысел до логического конца ему не удалось. В данной работе мы продолжили путь к решению физических проблем квантовой электродинамики, связанных с присутствием состояний фермионов с отрицательными энергиями.

Mathematical paradoxes of Dirac equation representations

V.P. Neznamov

Russian Federal Nuclear Center—All-Russian Research Institute of Experimental Physics,
prosp. Mira 37, 607188 Sarov, Nizhny Novgorod region, Russian Federation
E-mail: vpponeznamov@vniief.ru, vpponeznamov@mail.ru

This paper examines the Foldy–Wouthuysen and Feynman–Gell-Mann representations of the Dirac equation. The analysis is conducted for electrons and positrons interacting with electromagnetic fields. Versions of quantum electrodynamics are considered both within the scope of perturbation theory and in the nonperturbative case with strong electromagnetic fields. Mathematical artifacts that contradict the physical premises of the theory are identified in the studied representations of the Dirac equation. These mathematical paradoxes are resolved if the theory only employs amplitude states (real and virtual) with positive energies.

Keywords: Dirac equation representations, quantum electrodynamics, fermion vacuum, positive and negative energy states, mathematical paradoxes of the theory

PACS numbers: 03.65.Pm, 11.10.St, 12.20. – m

Bibliography — 28 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **195** (12) 1356–1361 (2025)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.11.040057>

Благодарности. Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление "Физика частиц и космология. Этап 2023–2025".

Автор благодарит А.Л. Новосёлову за существенную техническую помощь в подготовке статьи.

Список литературы

1. Dirac P A M *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford: The Univ. Press, 1930)
2. Stueckelberg E C G *Helv. Phys. Acta* **14** L32 (1941); *Helv. Phys. Acta* **14** 588 (1941)
3. Feynman R P *Phys. Rev.* **76** 749 (1949)
4. Feynman R P *Phys. Rev.* **76** 769 (1949)
5. Foldy L L, Wouthuysen S A *Phys. Rev.* **78** 29 (1950)
6. Feynman R P, Gell-Mann M *Phys. Rev.* **109** 193 (1958)
7. Зельдович Я Б, Попов В С *УФН* **105** 403 (1971); Zel'dovich Ya B, Popov V S *Sov. Phys. Usp.* **14** 673 (1971)
8. Незнамов В П, Сафронов И И *ЖЭТФ* **155** 792 (2019); Neznamov V P, Safronov I I *J. Exp. Theor. Phys.* **128** 672 (2019); arxiv:1907.03579
9. Незнамов В П *ЭЧАЯ* **37** 152 (2006); Neznamov V P *Phys. Part. Nucl.* **37** 86 (2006); hep-th/0411050
10. Neznamov V P *ЭЧАЯ* **43** 70 (2012); Neznamov V P *Phys. Part. Nucl.* **43** 36 (2012); arxiv:1107.0693
11. Brown L M *Phys. Rev.* **111** 957 (1958)
12. Neznamov V P, Shemarulin V E *Int. J. Mod. Phys. A* **36** 2150086 (2021); arxiv:2108.04664
13. Neznamov V P *Int. J. Mod. Phys. A* **36** 2150173 (2021); arxiv:2110.03530
14. Neznamov V P *Int. J. Mod. Phys. A* **40** 2550049 (2025)
15. Neznamov V P *Int. J. Mod. Phys. A* **40** 2550074 (2025)
16. Neznamov V P, Silenko A J *J. Math. Phys.* **50** 122302 (2009); arxiv:0906.2069
17. Бьеркен Д Д, Дрелл С Д *Релятивистская квантовая теория* Т. 1 (М.: Наука, 1978); Пер. с англ. яз.: Bjorken J D, Drell S D *Relativistic Quantum Mechanics* (New York: McGraw-Hill, 1964)
18. Greiner W, Reinhardt J *Quantum Electrodynamics* (Berlin: Springer, 2002)
19. Pomeranchuk I, Smorodinsky J J *Phys. USSR* **9** 97 (1945)
20. Герштейн С С, Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **57** 654 (1969); Gershtein S S, Zel'dovich Ya B *Sov. Phys. JETP* **30** 358 (1970)
21. Pieper W, Greiner W *Z. Phys.* **218** 327 (1969)
22. Зельдович Я Б, Попов В С *УФН* **105** 403 (1971); Zel'dovich Ya B, Popov V S *Sov. Phys. Usp.* **14** 673 (1972)
23. O'Connell R F "Rotation and spin in physics", in *General Relativity and John Archibald Wheeler* (Astrophysics and Space Science Library, Vol. 367, Eds I Ciufolini, R A Matzner) (Dordrecht: Springer, 2010) p. 325, DOI:10.1007/978-90-481-3735-0_14
24. O'Connell R F *Mod. Phys. Lett. A* **26** 469 (2011)
25. Незнамов В П *ФИЗМАТ* **2** (2) 94 (2024)
26. Neznamov V P *Int. J. Mod. Phys. A* **40** 2550104 (2025)
27. Dirac P A M *Proc. R. Soc. London A* **322** 435 (1971)
28. Dirac P A M *Proc. R. Soc. London A* **328** 1 (1972)

Received 2 June 2025, revised 6 November 2025

Physics – Uspekhi **68** (12) (2025)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.11.040057>