

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Формализм Нётер в построении сохраняющихся величин в телепараллельных эквивалентах общей теории относительности

Е.Д. Емцова, А.Н. Петров, А.В. Топоренский

Статья имеет методический характер. В ней представлен комплексный формализм для построения сохраняющихся величин в телепараллельном эквиваленте общей теории относительности (ТЭ ОТО) и симметричном телепараллельном эквиваленте общей теории относительности (СТЭ ОТО). Он был развит в серии наших предшествующих работ, а здесь мы представляем его в объединённой и завершённой форме. Сохраняющиеся токи, суперпотенциалы и заряды построены после применения метода Нётер в рамках тензорного формализма. Показано, что эти величины ковариантны как при координатных преобразованиях, так и при локальных лоренцевых вращениях в ТЭ ОТО, в то время как в СТЭ ОТО они ковариантны при координатных преобразованиях. Телепараллельные (плоские) связности в обеих теориях определяются с помощью принципа "выключения гравитации". Объединив так определённые плоские связности с тетрадами в ТЭ ОТО и с метрикой в СТЭ ОТО, мы ввели новое эффективное в приложениях понятие "калибровок". Выбор разных начальных тетрад в ТЭ ОТО или начальных координат в СТЭ ОТО приводит к различным калибровкам, что ведёт к различным сохраняющимся величинам. Наконец, мы обсуждаем подходящий выбор калибровок из их возможного набора.

Ключевые слова: телепараллельная гравитация, теорема Нётер, сохраняющиеся токи, суперпотенциалы, сохраняющиеся заряды, калибровки

PACS numbers: 04.20. – q, 04.20.Cv, 04.50.Kd

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.05.039924>

Содержание

1. Введение (1235).
2. Основные элементы телепараллельного эквивалента общей теории относительности и симметричного телепараллельного эквивалента общей теории относительности (1236).
 - 2.1. Телепараллельный эквивалент общей теории относительности.
 - 2.2. Симметричный телепараллельный эквивалент общей теории относительности.
3. Сохраняющиеся величины Нётер в произвольной полевой теории (1238).

4. Ковариантные сохраняющиеся величины в телепараллельном эквиваленте общей теории относительности и симметричном телепараллельном эквиваленте общей теории относительности (1240).
 - 4.1. Телепараллельный эквивалент общей теории относительности.
 - 4.2. Симметричный телепараллельный эквивалент общей теории относительности.
 - 4.3. Интерпретация сохраняющихся величин.
 5. Принцип "выключения" гравитации и "калибровки" (1242).
 - 5.1. Телепараллельный эквивалент общей теории относительности.
 - 5.2. Симметричный телепараллельный эквивалент общей теории относительности.
 - 5.3. Подходящие калибровки.
 6. Заключение (1244).
- Список литературы (1244).

Е.Д. Емцова^(1,2,a), А.Н. Петров^(3,b), А.В. Топоренский^(3,c)

⁽¹⁾ Department of Physics, Ariel University,
Ramat HaGolan Str. 65, Ariel, 40700, Israel

⁽²⁾ Department of Physics, Bar Ilan University,
Max ve-Anna Webb Str. 1, Ramat Gan, 5290002, Israel

⁽³⁾ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Государственный астрономический институт
им. П.К. Штернберга,
Университетский просп. 13, 119234 Москва, Российская Федерация

E-mail: ^(a) ed.emcova@physics.msu.ru,

^(b) alex.petrov55@gmail.com,

^(c) atopor@rambler.ru

Статья поступила 5 февраля 2025 г.

1. Введение

Телепараллельные теории гравитации активно развиваются в последние годы. Главной особенностью подобных теорий является использование связностей с нулевой римановой кривизной. К таким теориям относятся телепараллельный эквивалент общей теории относительности (ТЭ ОТО), симметричный телепараллельный эквивалент общей теории относительности (СТЭ ОТО) и модификации указанных теорий [1–5], имеющие то преимущество, что их уравнения поля являются уравнениями второго порядка. Это даёт сходство с теориями калибровочных полей и потенциально связывает грави-

тацию с другими теориями фундаментальных взаимодействий в природе.

В ТЭ ОТО и её модификациях используется плоская связность, совместная с метрикой. В СТЭ ОТО и её модификациях используется плоская связность с нулевым кручением. ТЭ ОТО и СТЭ ОТО полностью эквивалентны ОТО на уровне уравнений поля, поэтому решения уравнений поля в ТЭ ОТО и СТЭ ОТО точно такие же, как и в ОТО. Телепараллельные связности в ТЭ ОТО и СТЭ ОТО не являются динамическими величинами и не могут быть определены уравнениями поля. Этот факт не влияет на динамику гравитационно взаимодействующих объектов, но вносит неопределённости в значения основных величин, определяющих гравитационные энергию и импульс.

Несмотря на то что сейчас основное внимание уделяется тому, насколько точно модифицированные телепараллельные теории могут описывать наблюдаемые явления, в самих ТЭ ОТО и СТЭ ОТО решены не все вопросы. Одним из таких вопросов является определение гравитационного тензора энергии–импульса и других сохраняющихся величин. Существуют различные подходы к построению сохраняющихся величин как в ТЭ ОТО, так и в СТЭ ОТО. Они уже были проверены при их построении, например, для решения Шварцшильда и космологических моделей [6–11].

В большинстве вышеупомянутых работ по ТЭ ОТО наблюдатели, измеряющие сохраняющиеся величины (такие как масса, угловой момент) или проверяющие принцип эквивалентности Эйнштейна, связаны с временноподобным вектором тетрады, что, конечно, разрушает лоренц-ковариантность (или инвариантность) величин. Многие из более ранних подходов основаны на преобразовании уравнений поля, представляющем их в форме законов сохранения [3]. Однако такой путь, например, в ТЭ ОТО, приводит к проблемам в построении зарядов, которые одновременно не могут стать координатно-ковариантными и инвариантными относительно локальных лоренцевских вращений тетрады. В рамках формализма дифференциальных форм данная проблема была решена в [9, 12]. Но эти результаты не получили дальнейшего развития и были проверены на ограниченном числе моделей. Построение сохраняющихся величин в СТЭ ОТО не было столь активным (см. для СТЭ ОТО и его модификаций обзор [13] и многочисленные ссылки в нём).

Тем не менее, насколько известно, определение сохраняющихся величин является одной из важнейших задач в разработке основ любой теории. В течение последних лет мы разрабатывали методы построения сохраняющихся величин как в ТЭ ОТО, так и в СТЭ ОТО [14–22]. Наши подходы полностью основаны на классической теореме Нётер. Диффеоморфная инвариантность действий как в ТЭ ОТО, так и в СТЭ ОТО взята за основу для её приложений. Обе теории рассматриваются как классические теории поля, где тетрадные компоненты в ТЭ ОТО и метрические компоненты в СТЭ ОТО интерпретируются как динамические переменные. Мы учитываем, что диффеоморфизмы действуют на все геометрические объекты, включая нединамические телепараллельные (плоские) связности, а не только на тетрады и метрики. Наблюдатели связаны с векторами смещения диффеоморфизмов, а сохраняющиеся величины интерпретируются в зависимости от выбора таких векторов. Как в ТЭ ОТО, так и в СТЭ ОТО был разработан обобщённый принцип

"выключения гравитации", введено новое понятие "калибровок". Всё это помогает систематически исследовать проблему построения сохраняющихся величин.

При разработке нашего подхода методы, принципы, понятия и предположения вводились шаг за шагом, но они не были объединены в единый формализм. Таким образом, цель данной статьи — методологическая. Мы объединяем все пункты нашего подхода в построении сохраняющихся величин в ТЭ ОТО и СТЭ ОТО, представленные в [14–22], в отдельный формализм. Он может быть более эффективно использован для ТЭ ОТО и СТЭ ОТО в приложениях. Более того, он имеет большой потенциал для развития в рамках модификаций ТЭ ОТО и СТЭ ОТО.

Остальная часть статьи организована следующим образом. В разделе 2 вводятся основополагающие элементы телепараллельных эквивалентов ОТО. Освещаются основные принципы, а также такие понятия, как скаляр кручения, тензор неметричности, и их роль в соответствующих теориях.

В разделе 3 рассматривается формализм Нётер, на основе которого выводятся общие законы сохранения и сохраняющиеся величины в произвольной ковариантной теории поля. Это формирует основу для построения сохраняющихся токов, суперпотенциалов и зарядов.

В разделе 4 общий формализм применяется к ТЭ ОТО и СТЭ ОТО, представляются подробные конструкции сохраняющихся величин и исследуются их ковариантные свойства при преобразованиях координат и локальных вращениях Лоренца.

В разделе 5 основное внимание уделяется определению телепараллельных связностей с использованием принципа "выключения гравитации", обсуждается зависимость сохраняющихся величин от исходного выбора тетрад в ТЭ ОТО или координат в СТЭ ОТО. В качестве необходимого элемента нашего формализма вводится новое понятие, называемое "калибровками" в ТЭ ОТО и СТЭ ОТО.

Наконец, раздел 6 статьи представляет заключение с обобщением результатов, подчёркивая их значимость для телепараллельной гравитации.

Все определения в ТЭ ОТО соответствуют [3]. Все определения в СТЭ ОТО соответствуют [1].

2. Основные элементы телепараллельного эквивалента общей теории относительности и симметричного телепараллельного эквивалента общей теории относительности

2.1. Телепараллельный эквивалент общей теории относительности

Самый популярный гравитационный лагранжиан в ТЭ ОТО представлен в виде, приведённом, например, в книге [3]:

$$\dot{\mathcal{L}} = \frac{h}{2\kappa} \dot{T} \equiv \frac{h}{2\kappa} \left(\frac{1}{4} \dot{T}^{\rho}_{\mu\nu} \dot{T}^{\mu\nu}_{\rho} + \frac{1}{2} \dot{T}^{\rho}_{\mu\nu} \dot{T}^{\nu\mu}_{\rho} - \dot{T}^{\rho}_{\mu\rho} \dot{T}^{\nu\mu}_{\nu} \right). \quad (1)$$

Мы используем единицы $G = c = 1$, для которых постоянная Эйнштейна $\kappa = 8\pi$. Для представления одной из основных величин в ТЭ ОТО, а именно тензора кручения $\dot{T}^a_{\mu\nu}$, необходимо ввести следующие понятия и обозначения.

Во-первых, это тетрады с компонентами h^a_v , где латинские индексы нумеруют векторы тетрады, греческие индексы относятся к пространственно-временным координатам. Они связаны с метрикой $g_{\mu\nu}$ стандартным соотношением

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a_\mu h^b_\nu, \quad (2)$$

где η_{ab} — метрика Минковского в тетрадном пространстве, $h = \det h^a_v$, причём мы используем сигнатуру $(-, +, +, +)$ как для $g_{\mu\nu}$, так и для η_{ab} . Преобразование индексов тетрады в пространственно-временные и наоборот выполняется путём свёртки с векторами тетрады, например, $\dot{T}^\rho_{\mu\nu} = \dot{T}^\rho_{\mu\nu} h^a_\nu$; и т.д.

Во-вторых, ещё одной важной величиной в ТЭ ОТО является связность (телепараллельная) Вайценбока $\dot{\Gamma}^\alpha_{\kappa\lambda}$ [3]. Величины, построенные с использованием $\dot{\Gamma}^\alpha_{\kappa\lambda}$, обозначаются значком "•" над символом, например, соответствующая ковариантная производная $\dot{\nabla}_\mu$. Связность $\dot{\Gamma}^\alpha_{\kappa\lambda}$, как было объявлено во введении, является плоской, т.е. соответствующая ей кривизна равна нулю:

$$\dot{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} \equiv \partial_\mu \dot{\Gamma}^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \dot{\Gamma}^\alpha_{\beta\mu} + \dot{\Gamma}^\alpha_{\kappa\mu} \dot{\Gamma}^\kappa_{\beta\nu} - \dot{\Gamma}^\alpha_{\kappa\nu} \dot{\Gamma}^\kappa_{\beta\mu} = 0. \quad (3)$$

Отметим также, что $\dot{\Gamma}^\alpha_{\kappa\lambda}$ согласована с физической метрикой. Это означает, что соответствующая неметричность $\dot{Q}_{\mu\alpha\beta}$ равна нулю:

$$\dot{Q}_{\mu\alpha\beta} \equiv \dot{\nabla}_\mu g_{\alpha\beta} = 0. \quad (4)$$

В-третьих, особое внимание следует уделить инерциальной спиновой связности (ИСС) $\dot{A}^a_{cv}$, определённой как

$$\dot{A}^a_{b\mu} = -h^a_v \dot{\nabla}_\mu h^v_b. \quad (5)$$

Тогда определение $\dot{T}^a_{\mu\nu}$ можно представить явно как

$$\dot{T}^a_{\mu\nu} = \partial_\mu h^a_\nu - \partial_\nu h^a_\mu + \dot{A}^a_{c\mu} h^c_\nu - \dot{A}^a_{c\nu} h^c_\mu. \quad (6)$$

Именно, наличие $\dot{A}^a_{cv}$ делает кручение (6) ковариантным относительно локальных лоренцевых вращений тетрады.

Поучительно ввести некоторые величины, построенные с использованием связности Леви-Чивиты (символов Кристоффеля) $\dot{\Gamma}^\alpha_{\kappa\lambda}$. Следуя [3], мы обозначаем такие величины значком "о" над символом. Таким образом, $\dot{A}^a_{b\rho}$ представляет собой спиновую связность Леви-Чивиты (Л-ЧСС), определяемую как

$$\dot{A}^a_{b\mu} = -h^a_v \dot{\nabla}_\mu h^v_b, \quad (7)$$

где ковариантная производная $\dot{\nabla}_\mu$ построена с помощью $\dot{\Gamma}^\alpha_{\kappa\lambda}$.

Перечислим основные тензоры в ТЭ ОТО. Одной из важных величин является тензор искривления $\dot{K}^a_{b\rho}$, который является разностью между (5) и (7), таким образом,

$$\dot{K}^a_{b\rho} = \dot{A}^a_{b\rho} - \dot{A}^a_{b\rho}. \quad (8)$$

Он выражается через тензор кручения как

$$\dot{K}^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\dot{T}^\rho_{\mu\nu} + \dot{T}^\rho_{\nu\mu} - \dot{T}^\rho_{\mu\nu}). \quad (9)$$

Скаляр кручения в (1) переписывается в виде

$$\dot{T} = \frac{1}{2} \dot{S}^{\rho\sigma}_a \dot{T}^a_{\rho\sigma} \quad (10)$$

с использованием тензора

$$\dot{S}^{\rho\sigma}_a = \dot{K}^{\rho\sigma}_a + h^{\sigma}_a \dot{K}^{\theta\rho}_\theta - h^{\rho}_a \dot{K}^{\theta\sigma}_\theta, \quad (11)$$

который называется телепараллельным суперпотенциалом и антисимметричен по верхним индексам.

Все вышеупомянутые тензоры $\dot{T}^a_{\mu\nu}$, $\dot{K}^{\rho\sigma}_a$ и $\dot{S}^{\rho\sigma}_a$ ковариантны относительно как преобразований координат, так и локальных вращений Лоренца. Локальная лоренцева ковариантность этих величин достигается одновременным преобразованием тетрады и ИСС:

$$h^a_\mu = \Lambda^a_b(x) h^b_\mu, \quad (12)$$

$$\dot{A}^a_{b\mu} = \Lambda^a_c(x) \dot{A}^c_{d\mu} \Lambda^d_b(x) + \Lambda^a_c(x) \partial_\mu \Lambda^c_b(x), \quad (13)$$

где $\Lambda^a_c(x)$ — матрица локального вращения Лоренца, а $\Lambda^c_b(x)$ является обратной ей матрицей. Преобразование (13) говорит нам, что ИСС не является тензором и может быть обращена в нуль соответствующим локальным преобразованием Лоренца. Затем, после другого лоренцевого вращения, она приобретёт вид:

$$\dot{A}^a_{cv} = \tilde{\Lambda}^a_b \partial_v (\tilde{\Lambda}^{-1})^b_c. \quad (14)$$

Теперь давайте проварируем действие с лагранжианом (1) по тетрадным компонентам:

$$E^{\rho}_a = -\frac{\delta \dot{\mathcal{L}}}{\delta h^a_\rho} = -\left[\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a_\rho} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a_{\rho,\sigma}} \right) \right]. \quad (15)$$

Приведённых данных достаточно, чтобы переписать лагранжиан (1) в виде [3]:

$$\dot{\mathcal{L}} = \dot{\mathcal{L}} - \frac{1}{\kappa} \partial_\mu \left(h \dot{T}^{\nu\mu}_\nu \right), \quad (16)$$

где первый член — лагранжиан Гильберта

$$\dot{\mathcal{L}} = -\frac{h}{2\kappa} \dot{R} \quad (17)$$

со скаляром римановой кривизны $\dot{R}$, выраженным через компоненты тетрады с помощью (2) (см. [23]). Тогда, поскольку лагранжиан ТЭ ОТО (1) содержит ИСС только в дивергенции, то E^{ρ}_a в (15) не содержит ИСС вообще

$$E^{\rho}_a = -\frac{\delta \dot{\mathcal{L}}}{\delta h^a_\rho} = -\frac{\delta \dot{\mathcal{L}}}{\delta h^a_\rho}. \quad (18)$$

Добавим к лагранжиану (1) материальный лагранжиан $\dot{\mathcal{L}}^m$, где материальные поля ϕ минимально связаны с метрикой (2): $\dot{\mathcal{L}} + \dot{\mathcal{L}}^m$. Варьируя действие с таким лагранжианом относительно тетрадных компонент, получаем уравнения гравитационного поля

$$E^{\rho}_a = \theta^{\rho}_a, \quad (19)$$

где $\theta^{\rho}_a = 2\delta \dot{\mathcal{L}}^m / \delta h^a_\rho$ — тензор энергии-импульса материи. В силу (18) убеждаемся, что уравнения поля ТЭ ОТО (19) и уравнения поля в метрической ОТО эквивалентны.

Важно обсудить место ИСС в вышеприведённой схеме. Варьируя действие с лагранжианом (1), то же самое

(16), относительно $\dot{A}^a_{bp}$, получаем $0 = 0$. Это означает, что ИСС не может быть определена в рамках самого ТЭ ОТО. Тогда, если необходимо, её приходится определять с помощью дополнительных требований, например, при построении приемлемых сохраняющихся величин для конкретного решения, как будет показано ниже.

2.2. Симметричный телепараллельный эквивалент общей теории относительности

Обычно лагранжиан в СТЭ ОТО рассматривается в форме, приведённой, например, в [1]:

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} g^{\mu\nu} (L^\alpha_{\beta\mu} L^\beta_{\nu\alpha} - L^\alpha_{\beta\alpha} L^\beta_{\mu\nu}). \quad (20)$$

Здесь тензор деформации $L^\alpha_{\mu\nu}$ вводится как

$$L^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} Q^\alpha_{\mu\nu} - \frac{1}{2} Q^\alpha_{\nu\mu} - \frac{1}{2} Q^\alpha_{\nu\mu}, \quad (21)$$

где тензор неметричности $Q_{\alpha\mu\nu}$ определяется как обычно,

$$Q_{\alpha\mu\nu} \equiv \nabla_\alpha g_{\mu\nu}. \quad (22)$$

Ковариантная производная ∇_α определяется с использованием телепараллельной связности $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$. Она симметрична по нижним индексам, и мы вводим аббревиатуру СТС (симметричная телепараллельная связность). Для СТС отсутствует кручение, поскольку по определению $T^\alpha_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} = 0$. Конечно, СТС является плоской, это означает, что соответствующий тензор кривизны равен нулю:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu}(\Gamma) = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\beta} = 0. \quad (23)$$

Легко проверить, что (21) можно переписать в следующем виде:

$$L^\beta_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\beta_{\mu\nu} - \overset{\circ}{\Gamma}^\beta_{\mu\nu}, \quad (24)$$

где $\overset{\circ}{\Gamma}^\beta_{\mu\nu}$ — связность Леви-Чивиты. Далее, с использованием (21)–(24) лагранжиан (20) приобретает вид:

$$\mathcal{L} = \overset{\circ}{\mathcal{L}} + \frac{\sqrt{-g}g^{\mu\nu}}{2\kappa} R_{\mu\nu} + \mathcal{L}'. \quad (25)$$

Точно также как в (17), первый член — это лагранжиан Гильберта, однако зависящий от метрических компонент (не тетрадных компонент):

$$\overset{\circ}{\mathcal{L}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \overset{\circ}{R}. \quad (26)$$

Второй член в (25) равен нулю благодаря (23). Однако если мы его сохраняем, то нам нужно его варьировать. С другой стороны, вариация (25) вместе со вторым членом по отношению к метрике означает именно вариацию (20). В то же время вариация (20) относительно $\Gamma^\beta_{\mu\nu}$ даёт $\Gamma^\beta_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}^\beta_{\mu\nu}$. Это означает, что плоская СТС $\Gamma^\beta_{\mu\nu}$ должна быть равна связности Леви-Чивиты, которая в общем случае не является плоской. По указанным причинам второй член в (25) необходимо исключить. Третий член $\mathcal{L}'$ представляет собой полную дивергенцию:

$$\mathcal{L}' = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \overset{\circ}{\nabla}_\alpha (\hat{Q}^\alpha - Q^\alpha) = \partial_\alpha \left[\frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} (\hat{Q}^\alpha - Q^\alpha) \right] = \partial_\alpha \mathcal{D}^\alpha, \quad (27)$$

где $Q_\alpha = g^{\mu\nu} Q_{\alpha\mu\nu}$, $\hat{Q}_\alpha = g^{\mu\nu} Q_{\mu\alpha\nu}$. В результате вместо (20) или (25) в СТЭ ОТО мы выбираем лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \overset{\circ}{R} + \partial_\alpha \mathcal{D}^\alpha, \quad (28)$$

где

$$\mathcal{D}^\alpha \equiv -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} (Q^\alpha - \hat{Q}^\alpha). \quad (29)$$

Поскольку лагранжиан СТЭ ОТО содержит СТС только в дивергенции, варьирование действия с лагранжианом (28) относительно метрических компонент даёт точные уравнения поля в метрической ОТО. Предполагая возможное присутствие материальных переменных, имеем

$$\overset{\circ}{G}_{\mu\nu} = \kappa \theta_{\mu\nu}, \quad (30)$$

где $\overset{\circ}{G}_{\mu\nu}$ — обычный тензор Эйнштейна, а $\theta_{\mu\nu}$ — обычный симметричный (метрический) тензор энергии – импульса материи. Кроме того, это ещё одна форма уравнений (19), т.е. уравнений ОТО. Таким образом, мы подчёркиваем эквивалентность между СТЭ ОТО и ОТО.

Наконец, важно отметить следующее. Варьируя действие с лагранжианом (28) относительно $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, получаем $0 = 0$. То есть СТС не может быть определена в рамках самого СТЭ ОТО. Это означает, что СТС, как и ИСС в ТЭ ОТО, является внешней структурой и может быть определена только с помощью дополнительных требований, таких как построение сохраняющихся величин с приемлемыми значениями.

3. Сохраняющиеся величины Нётер в произвольной полевой теории

Для вывода законов сохранения, которые следуют из инвариантности относительно диффеоморфизмов в произвольной ковариантной теории полей ψ^A , обратимся прежде всего к классической книге Мицкевича [24] (см. также [25, 26]). Рассмотрим действие

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\psi^A; \psi^A_{,\alpha}; \psi^A_{,\alpha\beta}), \quad (31)$$

где символ ψ^A означает произвольную тензорную плотность или множество таких плотностей с коллективным индексом A . Задавая инвариантность действия (31) относительно диффеоморфизмов с векторами смещения ξ^α , предполагаем вариации ψ^A в виде производных Ли:

$$\delta\psi^A = \mathcal{L}_\xi \psi^A = -\xi^\alpha \partial_\alpha \psi^A + \psi^A|^\alpha_\beta \partial_\alpha \xi^\beta. \quad (32)$$

Мы заимствуем обозначение $\psi^A|^\alpha_\beta$ из [24], его конкретное представление определяется трансформационными свойствами ψ^A . Например, для тензора $\psi^A = \psi^\sigma_\rho$ имеем $\psi^\sigma_\rho|^\alpha_\beta = \delta^\sigma_\beta \psi^\alpha_\rho - \delta^\alpha_\rho \psi^\sigma_\beta$. Из диффеоморфной инвариантности (31) следует, что лагранжиан $\mathcal{L}$ — скалярная плотность с математическим весом +1. Это определяет основное тождество Нётер:

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{L} = -\partial_\alpha (\xi^\alpha \mathcal{L}). \quad (33)$$

Учитывая (32), основное тождество Нётер переписывается в виде

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^B} \mathcal{L}_\xi \psi^B + \partial_\alpha \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^B_{,\alpha}} \mathcal{L}_\xi \psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^B_{,\beta\alpha}} (\mathcal{L}_\xi \psi^B)_{,\beta} + \xi^\alpha \mathcal{L} \right] \equiv 0, \quad (34)$$

где используются стандартные обозначения

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^B} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^B} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^B_{,\mu}} \right) + \partial_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^B_{,\mu\nu}} \right),$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^B_{,\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^B_{,\alpha}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^B_{,\alpha\mu}} \right),$$

где мы обозначаем двойные частные производные $\partial^2/(\partial x^\mu \partial x^\nu)$ как $\partial_{\mu\nu}$ или $_{,\mu\nu}$. Мы используем частные производные, поскольку в метрических теориях набор полевых переменных ψ^A в любом случае включает метрический тензор $g_{\mu\nu}$, ковариантные производные которого тождественно равны нулю. Действительно, недопустимо дифференцировать по $\nabla g_{\mu\nu} \equiv 0$, иначе формализм потерпит неудачу.

Подставляя (32) в (34), перегруппировывая члены, применяя правило Лейбница и преобразуя дивергенции, получаем:

$$- \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^B} \psi^B_{,\alpha} + \partial_\beta \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^B} \psi^B_{|\alpha}{}^\beta \right) \right] \xi^\alpha + \partial_\alpha [\mathcal{U}_\sigma{}^\alpha \xi^\sigma + \mathcal{M}_\sigma{}^{\alpha\tau} \partial_\tau \xi^\sigma + \mathcal{N}_\sigma{}^{\alpha\tau\beta} \partial_{\beta\tau} \xi^\sigma] \equiv 0. \quad (35)$$

Здесь коэффициенты

$$\mathcal{U}_\sigma{}^\alpha \equiv \mathcal{L} \delta_\sigma{}^\alpha + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^B} \psi^B_{|\sigma}{}^\alpha - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^B_{,\alpha}} \partial_\sigma \psi^B - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^B_{,\beta\alpha}} \partial_{\beta\sigma} \psi^B, \quad (36)$$

$$\mathcal{M}_\sigma{}^{\alpha\tau} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^B_{,\alpha}} \psi^B_{|\sigma}{}^\tau - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^B_{,\tau\alpha}} \partial_\sigma \psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^B_{,\beta\alpha}} \partial_\beta (\psi^B_{|\sigma}{}^\tau), \quad (37)$$

$$\mathcal{N}_\sigma{}^{\alpha\tau\beta} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^B_{,\beta\alpha}} \psi^B_{|\sigma}{}^\tau + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^B_{,\tau\alpha}} \psi^B_{|\sigma}{}^\beta \right] \quad (38)$$

полностью определяются лагранжианом (31) и его производными. Для получения (38) было использовано свойство симметрии $\mathcal{N}_\sigma{}^{\alpha\tau\beta} = \mathcal{N}_\sigma{}^{\alpha\beta\tau}$, которое следует непосредственно из (35) ввиду коммутативности вторых частных производных.

Применяя частную производную к каждому члену в квадратных скобках тождества (35) и помня, что векторное поле ξ^σ и все его частные производные независимы и произвольны в каждой точке пространственно-временного многообразия, можно прийти к выводу, что все коэффициенты при ξ^σ и его производных должны независимо друг от друга тождественно обращаться в нуль. Это приводит к системе тождеств:

$$\partial_\alpha \mathcal{U}_\sigma{}^\alpha \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^B} \psi^B_{,\alpha} + \partial_\beta \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^B} \psi^B_{|\alpha}{}^\beta \right), \quad (39)$$

$$\mathcal{U}_\sigma{}^\alpha + \partial_\lambda \mathcal{M}_\sigma{}^{\lambda\alpha} \equiv 0, \quad (40)$$

$$\mathcal{M}_\sigma{}^{(\alpha\beta)} + \partial_\lambda \mathcal{N}_\sigma{}^{\lambda(\alpha\beta)} \equiv 0, \quad (41)$$

$$\mathcal{N}_\sigma{}^{(\alpha\beta\gamma)} \equiv 0. \quad (42)$$

Система типа (39)–(42) впервые была выведена Клейном [27] и обычно называется *тождествами Клейна*. Дифференцирование (40) и использование (41) и (42) даёт $\partial_\alpha \mathcal{U}_\sigma{}^\alpha \equiv 0$. Последнее означает, что правая часть (39)

также должна тождественно обращаться в нуль,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^B} \psi^B_{,\alpha} + \partial_\beta \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi^B} \psi^B_{|\alpha}{}^\beta \right) \equiv 0. \quad (43)$$

Это по сути утверждение второй теоремы Нётер [26] и обобщение тождества Бианки. Учитывая историческое развитие теории, мы называем систему (39)–(43) *тождествами Клейна–Нётер*.

Тождество (43) позволяет нам независимо использовать тождество:

$$\partial_\alpha [\mathcal{U}_\sigma{}^\alpha \xi^\sigma + \mathcal{M}_\sigma{}^{\alpha\tau} \partial_\tau \xi^\sigma + \mathcal{N}_\sigma{}^{\alpha\tau\beta} \partial_{\beta\tau} \xi^\sigma] \equiv 0 \quad (44)$$

вместо (35). Здесь векторная плотность под дивергенцией обычно классифицируется как ток:

$$\mathcal{I}^\alpha(\xi) \equiv - [\mathcal{U}_\sigma{}^\alpha \xi^\sigma + \mathcal{M}_\sigma{}^{\alpha\tau} \partial_\tau \xi^\sigma + \mathcal{N}_\sigma{}^{\alpha\tau\beta} \partial_{\beta\tau} \xi^\sigma]. \quad (45)$$

Знак "минус" выбран для соответствия общепринятому знаку "минус" перед гравитационным (метрическим) действием (см., например, (17) и (26)). В результате тождество (44) переписывается в компактной форме:

$$\partial_\alpha \mathcal{I}^\alpha(\xi) \equiv 0. \quad (46)$$

Поскольку (46) является тождеством, ток должен быть выражен через тензорную величину (суперпотенциал), $\mathcal{I}^\alpha(\xi) \equiv \partial_\beta \mathcal{I}^{\alpha\beta}(\xi)$, двойная дивергенция которой должна тождественно обращаться в нуль: $\partial_{\alpha\beta} \mathcal{I}^{\alpha\beta}(\xi) \equiv 0$. Покажем это. Учитывая симметрию по последним двум индексам в (38) и тождество (42), получаем

$$\mathcal{N}_\sigma{}^{\alpha\tau\beta} + \mathcal{N}_\sigma{}^{\tau\beta\alpha} + \mathcal{N}_\sigma{}^{\beta\alpha\tau} \equiv 0. \quad (47)$$

Подставляя (40) в (45) и используя (41) и (47), получаем

$$\mathcal{I}^\alpha(\xi) \equiv \partial_\beta (\mathcal{M}_\sigma{}^{\beta\alpha} \xi^\sigma + 2 \mathcal{N}_\sigma{}^{\beta\alpha\lambda} \partial_\lambda \xi^\sigma). \quad (48)$$

Как следует из (46), дивергенция правой части (48) должна быть нулевой. Чтобы показать это, добавим член, тождественно равный нулю:

$$\frac{4}{3} \partial_{\beta\lambda} (\hat{N}_\sigma{}^{[\lambda\beta]\alpha} \xi^\sigma) \equiv 0$$

в правую часть (48). Затем, используя (41) и (47), находим

$$\mathcal{I}^\alpha(\xi) \equiv \partial_\beta \left(-\mathcal{M}_\sigma{}^{[\alpha\beta]} \xi^\sigma + \frac{2}{3} \partial_\lambda \mathcal{N}_\sigma{}^{[\alpha\beta]\lambda} \xi^\sigma - \frac{4}{3} \mathcal{N}_\sigma{}^{[\alpha\beta]\lambda} \partial_\lambda \xi^\sigma \right). \quad (49)$$

Выражение в квадратных скобках в (49) явно антисимметрично по α и β , и поэтому его двойная дивергенция действительно обращается в нуль.

В результате тождество (49) можно записать в изначально предполагаемом виде:

$$\mathcal{I}^\alpha(\xi) \equiv \partial_\beta \mathcal{I}^{\alpha\beta}(\xi), \quad (50)$$

где

$$\mathcal{I}^{\alpha\beta}(\xi) \equiv - \left(\mathcal{M}_\sigma{}^{[\alpha\beta]} \xi^\sigma - \frac{2}{3} \partial_\lambda \mathcal{N}_\sigma{}^{[\alpha\beta]\lambda} \xi^\sigma + \frac{4}{3} \mathcal{N}_\sigma{}^{[\alpha\beta]\lambda} \partial_\lambda \xi^\sigma \right) \quad (51)$$

называется *суперпотенциалом* Нётер. Конечно, тождество (50) можно рассматривать как эквивалент закона сохранения (46) для тока.

Можно показать (подробнее см. [26]), что как построенный выше ток, так и суперпотенциал являются

тензорными величинами. Таким образом, $\mathcal{I}^\alpha(\xi)$ — векторная плотность веса +1, тогда как $\mathcal{I}^{\alpha\beta}(\xi)$ — антисимметричная тензорная плотность веса +1. Для таких величин $\partial_\mu \equiv \bar{\nabla}_\mu$. В силу этого законы сохранения (46) и (50) можно переписать в явно ковариантной форме:

$$\bar{\nabla}_\alpha \mathcal{I}^\alpha(\xi) \equiv 0, \quad (52)$$

$$\mathcal{I}^\alpha(\xi) \equiv \bar{\nabla}_\beta \mathcal{I}^{\alpha\beta}(\xi). \quad (53)$$

Напоминаем, что здесь ковариантная производная $\bar{\nabla}_\alpha$ построена с помощью связности Леви-Чивиты.

Наконец, определим интегральные сохраняющиеся величины. Интегрируя по 4-объёму тождество (46), получаем сохраняющуюся (во времени с соответствующими граничными условиями) величину $\mathcal{P}(\xi)$, определённую на 3-мерном сечении $\Sigma := x^0 = t = \text{const}$:

$$\mathcal{P}(\xi) = \int_\Sigma d^3x \mathcal{I}^0(\xi), \quad (54)$$

здесь и далее "0"-компонента относится к временной координате, тогда как латинские индексы из середины алфавита, например "i", относятся к пространственным координатам. Величина (54) с использованием (50) сводится к поверхностному интегралу, который называется зарядом Нётер:

$$\mathcal{P}(\xi) = \oint_{\partial\Sigma} ds_i \mathcal{I}^{0i}(\xi), \quad (55)$$

где $\partial\Sigma$ — граница Σ , а ds_i — элемент интегрирования по $\partial\Sigma$. По построению величина $\mathcal{P}(\xi)$ как в (54), так и в (55) является скаляром, она инвариантна относительно преобразований координат.

Важно подчеркнуть роль дивергенции в лагранжиане при построении сохраняющихся величин. Согласно части 7 книги [26], для любой полной дивергенции $\partial_\alpha \mathcal{D}^\alpha = \bar{\nabla}_\alpha \mathcal{D}^\alpha$ векторной плотности $\mathcal{D}^\alpha$ (не учитывая её внутреннюю структуру) в лагранжиане можно построить закон сохранения в виде (50) или (53):

$$\mathcal{I}_{\text{div}}^\alpha(\xi) = \partial_\beta \mathcal{I}_{\text{div}}^{\alpha\beta}(\xi) = \bar{\nabla}_\beta \mathcal{I}_{\text{div}}^{\alpha\beta}(\xi). \quad (56)$$

Ток $\mathcal{I}_{\text{div}}^\alpha$ и суперпотенциал $\mathcal{I}_{\text{div}}^{\alpha\beta}$ для дивергенции $\mathcal{D}^\alpha$ определяются как:

$$\mathcal{I}_{\text{div}}^\alpha = \bar{\nabla}_\beta (-\mathcal{M}_{(\text{div})\sigma}^{[\alpha\beta]} \xi^\sigma) = -\mathcal{U}_{(\text{div})\sigma}^\alpha \xi^\sigma - \mathcal{M}_{(\text{div})\sigma}^{[\alpha\beta]} \bar{\nabla}_\beta \xi^\sigma, \quad (57)$$

$$\mathcal{I}_{\text{div}}^{\alpha\beta} = -\mathcal{M}_{(\text{div})\sigma}^{[\alpha\beta]} \xi^\sigma \quad (58)$$

с

$$\mathcal{M}_{(\text{div})\sigma}^{[\alpha\beta]} = 2\delta_\sigma^{[\alpha} \mathcal{D}^{\beta]}, \quad (59)$$

$$\mathcal{U}_{(\text{div})\sigma}^\alpha = 2\bar{\nabla}_\beta (\delta_\sigma^{[\alpha} \mathcal{D}^{\beta]}) \equiv 2\partial_\beta (\delta_\sigma^{[\alpha} \mathcal{D}^{\beta]}). \quad (60)$$

Соответствующий заряд Нётер определяется по аналогии с (54) и (55):

$$\mathcal{P}_{\text{div}}(\xi) = \int_\Sigma d^3x \mathcal{I}_{\text{div}}^0(\xi) = \oint_{\partial\Sigma} ds_i \mathcal{I}_{\text{div}}^{0i}(\xi). \quad (61)$$

Наконец, отметим следующее. Несмотря на то что дивергенция в лагранжиане не вносит вклад в уравнения поля, она явно добавляет члены к току, суперпотенциалу и заряду Нётер.

4. Ковариантные сохраняющиеся величины в телепараллельном эквиваленте общей теории относительности и симметричном телепараллельном эквиваленте общей теории относительности

4.1. Телепараллельный эквивалент общей теории относительности

Лагранжиан ТЭ ОТО (1) как раз принадлежит классу лагранжианов (31). Поэтому процедура построения токов и суперпотенциалов, описанная в предыдущем разделе, может быть применена к (1). Однако (1) не содержит вторых производных, что упрощает процедуру.

В случае ТЭ ОТО коллективное поле ψ^A представляется в виде набора ковариантных тетрадных векторов и инерциальной спиновой связности: $\psi^A = \{h^a{}_\rho; \dot{A}^a{}_{b\mu}\}$. Несмотря на то что инерциальная спиновая связность $\dot{A}^a{}_{b\mu}$ не является динамическим полем, её вариацию необходимо учитывать, поскольку диффеоморфизмы действуют на все рассматриваемые геометрические объекты. Таким образом, поскольку ИСС является вектором по нижнему пространственно-временному индексу, вариации (32) переписываются как

$$\delta h^a{}_\rho = \mathcal{L}_\xi h^a{}_\rho = -\xi^\alpha h^a{}_{\rho,\alpha} - \xi^\alpha{}_{,\rho} h^a{}_\alpha, \quad (62)$$

$$\delta \dot{A}^a{}_{b\mu} = \mathcal{L}_\xi \dot{A}^a{}_{b\mu} = -\xi^\alpha \dot{A}^a{}_{b\mu,\alpha} - \xi^\alpha{}_{,\mu} \dot{A}^a{}_{b\alpha}. \quad (63)$$

Затем коэффициенты (36)–(38), построенные с помощью ковариантного лагранжиана ТЭ ОТО (1), приобретают вид

$$\dot{\mathcal{U}}_\sigma^\alpha \equiv \dot{\mathcal{L}} \delta_\sigma^\alpha + \frac{\delta \dot{\mathcal{L}}}{\delta h^a{}_\rho} h^a{}_\rho|_\sigma^\alpha + \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial \dot{A}^a{}_{b\mu}} \dot{A}^a{}_{b\mu}|_\sigma^\alpha - \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_{\rho,\alpha}} h^a{}_{\rho,\sigma}, \quad (64)$$

$$\dot{\mathcal{M}}_\sigma^{\alpha\tau} \equiv \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_{\rho,\alpha}} h^a{}_\rho|_\sigma^\tau, \quad (65)$$

$$\dot{\mathcal{N}}_\sigma^{\alpha\tau\beta} \equiv 0. \quad (66)$$

Третий член в (64) с использованием структуры (1) и (6) преобразуется как

$$\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial \dot{A}^a{}_{b\mu}} \dot{A}^a{}_{b\mu}|_\sigma^\alpha = -\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_{\rho,\alpha}} \dot{A}^a{}_{b\sigma} h^b{}_\rho. \quad (67)$$

Тогда ток (45) приобретает вид

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) \equiv \left[h \dot{\theta}_\sigma^\alpha + \frac{\delta \dot{\mathcal{L}}}{\delta h^a{}_\alpha} h^a{}_\sigma \right] \xi^\sigma + \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_{\rho,\alpha}} h^a{}_\sigma \partial_\rho \xi^\sigma, \quad (68)$$

где член $\dot{\theta}_\sigma^\alpha$ интерпретируется как тензор энергии–импульса гравитационного поля в ковариантном ТЭ ОТО:

$$\dot{\theta}_\sigma^\alpha \equiv \frac{1}{h} \left[\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a{}_{\rho,\alpha}} \left(\partial_\sigma h^a{}_\rho + \dot{A}^a{}_{b\sigma} h^b{}_\rho \right) - \dot{\mathcal{L}} \delta_\sigma^\alpha \right]. \quad (69)$$

Ток (68) и тензор энергии–импульса (69) выражаются через частные производные $\partial_\sigma h^a{}_\rho$ и $\partial_\rho \xi^\sigma$. Однако их легко переписать в явно ковариантной форме, заменив частные производные в (68) и (69) одновременно на $\bar{\nabla}_\sigma h^a{}_\rho$ и $\bar{\nabla}_\rho \xi^\sigma$, где ковариантная производная $\bar{\nabla}_\alpha$ строится по метрике (2).

Ввиду определений (7), (8) и

$$\frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a_{\rho, \sigma}} \equiv -\frac{h}{\kappa} \dot{S}^{\rho\sigma}_a, \quad (70)$$

ток (68) и тензор энергии – импульса (69) представляются как

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) \equiv \left[h \dot{\theta}^\alpha_\sigma + \frac{\delta \dot{\mathcal{L}}}{\delta h^a_\sigma} h^a_\sigma \right] \xi^\sigma + \frac{h}{\kappa} \dot{S}^{\alpha\rho}_\sigma \dot{\nabla}_\rho \xi^\sigma, \quad (71)$$

$$\dot{\theta}^\alpha_\sigma \equiv \frac{1}{\kappa} \dot{S}^{\alpha\rho}_\sigma \dot{K}^a_{\sigma\rho} - \frac{1}{h} \dot{\mathcal{L}} \delta^\alpha_\sigma. \quad (72)$$

Легко видеть, что они явно ковариантны относительно преобразований координат и вращений Лоренца.

Ток (71) тождественно сохраняется (см. (46) и (52)),

$$\partial_\alpha \dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) \equiv \dot{\nabla}_\alpha \dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) \equiv 0. \quad (73)$$

Аналогично, в силу законов сохранения (50) и (53), ток Нётер в ТЭ ОТО выражается через дивергенцию суперпотенциала Нётер в ТЭ ОТО:

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) \equiv \partial_\alpha \dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi) \equiv \dot{\nabla}_\alpha \dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi), \quad (74)$$

где суперпотенциал (см. (51)) представлен с использованием (65) и (70):

$$\dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi) \equiv -\dot{\mathcal{M}}^{\alpha\beta}_\sigma \xi^\sigma = \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial h^a_{\beta, \alpha}} h^a_\sigma \xi^\sigma = \frac{h}{\kappa} \dot{S}^{\alpha\beta}_a h^a_\sigma \xi^\sigma. \quad (75)$$

Соотношения (73) и (74) на данном этапе все ещё являются тождествами; они не имеют физического смысла, поскольку уравнения поля ещё не были использованы. После применения уравнений поля (19) ток (71) преобразуется в:

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = h \left[\dot{\theta}^\alpha_\sigma + \theta^\alpha_\sigma \right] \xi^\sigma + \frac{h}{\kappa} \dot{S}^{\alpha\rho}_\sigma \dot{\nabla}_\rho \xi^\sigma, \quad (76)$$

где θ^α_σ — тензор энергии – импульса материи, введённый в (19). Тогда тождества (73) и (74) становятся физически осмысленными дифференциальными законами сохранения:

$$\partial_\alpha \dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = \dot{\nabla}_\alpha \dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = 0, \quad (77)$$

$$\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi) = \partial_\beta \dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi) = \dot{\nabla}_\beta \dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi). \quad (78)$$

Все локальные сохраняющиеся величины ковариантны относительно преобразований координат и инвариантны относительно локальных вращений Лоренца. Следовательно, интегральные сохраняющиеся величины, которые могут быть построены по вышеупомянутым стандартным правилам, демонстрируют те же свойства:

$$\mathcal{P}(\xi) = \int_\Sigma d^3x \dot{\mathcal{J}}^0(\xi) = \oint_{\partial\Sigma} ds_i \dot{\mathcal{J}}^{0i}(\xi). \quad (79)$$

Наконец, можно сделать вывод, что проблема построения полностью ковариантных законов сохранения, отмеченная во время обсуждения во введении, была решена посредством построения (77)–(79). Стоит отметить, что этот результат был достигнут не только за счёт использования инерциальной спиновой связности, но и за счёт сохранения в выражениях вектора смещения ξ после применения теоремы Нётер.

4.2. Симметричный телепараллельный эквивалент общей теории относительности

Все слагаемые в лагранжиане СТЭ ОТО (28) являются скалярными плотностями, поэтому логично рассматривать каждое из них отдельно при применении теоремы Нётер. Что касается лагранжиана Гильберта (26), коллективное поле ψ^A представляется просто как $\psi^A \in \{g_{\mu\nu}\}$. В результате ток и суперпотенциал являются классическими, и читателя можно отослать к книгам [24] и [26]. Соответствующий ток Нётер рассчитывается как

$$\mathcal{J}^\alpha_{GR}(\xi) \equiv -(\mathcal{U}_\sigma^{\alpha\xi} \xi^\sigma + \mathcal{M}_\sigma^{\alpha\tau} \partial_\tau \xi^\sigma + \mathcal{N}_\sigma^{\alpha\tau\beta} \partial_{\tau\beta} \xi^\sigma), \quad (80)$$

с коэффициентами

$$\mathcal{N}_\sigma^{\alpha\tau\beta} = \frac{\sqrt{-g}}{4\kappa} (2g^{\tau\beta} \delta^\alpha_\sigma - g^{\alpha\beta} \delta^\tau_\sigma - g^{\alpha\tau} \delta^\beta_\sigma), \quad (81)$$

$$\mathcal{M}_\sigma^{\alpha\tau} = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} (2\dot{\Gamma}^{\alpha\tau}_{\sigma\omega} g^{\omega\omega} - \dot{\Gamma}^{\omega\omega}_{\sigma\omega} g^{\alpha\tau} - \dot{\Gamma}^{\tau\omega}_{\omega\sigma} g^{\omega\epsilon} \delta^\alpha_\epsilon), \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\sigma^\alpha &= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} (g^{\alpha\lambda} g^{\omega\epsilon} - g^{\alpha\epsilon} g^{\omega\lambda}) (g_{\lambda\sigma, \omega\epsilon} + \dot{\Gamma}^v_{\omega\epsilon} \dot{\Gamma}^v_{\lambda\sigma} - \\ &\quad - \dot{\Gamma}^v_{\omega\epsilon} \dot{\Gamma}^v_{\lambda\sigma}) = -\frac{\sqrt{-g}}{\kappa} \left(G^\alpha_\sigma + \frac{1}{2} \delta^\alpha_\sigma R + \frac{1}{2} g^{\alpha\omega} \dot{\Gamma}^\rho_{\rho(\omega, \sigma)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} g^{\omega\epsilon} \dot{\Gamma}^{\alpha}_{\omega\epsilon, \sigma} \right), \end{aligned} \quad (83)$$

где используется обозначение $\dot{\Gamma}^{\alpha}_{\lambda\beta\gamma} = g_{\alpha\rho} \dot{\Gamma}^{\rho}_{\lambda\beta\gamma}$.

Важно представить ток (и связанный с ним суперпотенциал) в явно ковариантной форме. Для этого используются очевидные тождества:

$$\partial_\beta \xi^\sigma \equiv \dot{\nabla}_\beta \xi^\sigma - \dot{\Gamma}^\sigma_{\lambda\beta} \xi^\lambda, \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \partial_\beta \xi^\sigma &\equiv \dot{\nabla}_\tau \dot{\nabla}_\beta \xi^\sigma + [\delta^\sigma_\lambda \dot{\Gamma}^\rho_{\rho\beta\tau} - \delta^\rho_\beta \dot{\Gamma}^\sigma_{\sigma\lambda} - \delta^\rho_\beta \dot{\Gamma}^\sigma_{\lambda\tau}] \dot{\nabla}_\rho \xi^\lambda - \\ &\quad - [\dot{\Gamma}^\sigma_{\lambda\beta, \tau} - \dot{\Gamma}^\sigma_{\rho\beta} \dot{\Gamma}^\rho_{\lambda\tau}] \xi^\lambda. \end{aligned} \quad (85)$$

Подставляя (84) и (85) в (80), можно просто переписать ток ОТО в ковариантной форме:

$$\mathcal{J}^\alpha_{GR}(\xi) \equiv -(\mathcal{U}^{\alpha\xi}_\sigma \xi^\sigma + \mathcal{M}^{\alpha\tau}_\sigma \dot{\nabla}_\tau \xi^\sigma + \mathcal{N}^{\alpha\tau\beta}_\sigma \dot{\nabla}_\tau \dot{\nabla}_\beta \xi^\sigma), \quad (86)$$

с ковариантизированными коэффициентами:

$$\mathcal{N}^{\alpha\tau\beta}_\sigma = \mathcal{N}^{\alpha\tau\beta}_\sigma, \quad (87)$$

$$\mathcal{M}^{\alpha\tau}_\sigma = \mathcal{M}^{\alpha\tau}_\sigma - 2\mathcal{N}^{\alpha\tau\beta}_\sigma \dot{\Gamma}^\lambda_{\sigma\beta} + \mathcal{N}^{\alpha\lambda\beta}_\sigma \dot{\Gamma}^\tau_{\tau\beta} = 0, \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{\alpha\xi}_\sigma &= \mathcal{U}^{\alpha\xi}_\sigma - \mathcal{M}^{\alpha\tau}_\sigma \dot{\Gamma}^\lambda_{\sigma\tau} - \mathcal{N}^{\alpha\tau\beta}_\sigma \partial_\tau \dot{\Gamma}^\lambda_{\sigma\beta} + \\ &\quad + \mathcal{N}^{\alpha\tau\beta}_\sigma \dot{\Gamma}^\kappa_{\lambda\beta} \dot{\Gamma}^\lambda_{\sigma\tau} = -\frac{\sqrt{-g}}{4\kappa} g^{\alpha\omega} \dot{R}_{\omega\sigma}. \end{aligned} \quad (89)$$

Таким образом, ток (86) приобретает очевидно ковариантный вид:

$$\mathcal{J}^\alpha_{GR}(\xi) \equiv \frac{\sqrt{-g}}{4\kappa} \left(\dot{R}^\alpha_\sigma \xi^\sigma + 2g^{\alpha\beta} \dot{\nabla}_\beta \dot{\nabla}_\sigma \xi^\sigma - 2\dot{\nabla}_\beta \dot{\nabla}^\beta \xi^\alpha \right). \quad (90)$$

Чтобы получить ковариантизированный суперпотенциал, связанный с лагранжианом Гильберта (26), подставляем (83), (82) и (81) в определение (49) и получаем

$$\mathcal{J}^{\alpha\beta}_{GR} \equiv \mathcal{K}^{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} \dot{\nabla}^{[\alpha} \xi^{\beta]}, \quad (91)$$

что является известным суперпотенциалом Комара [24, 26].

Обратимся к дивергенции в лагранжиане СТЭ ОТО (28). Формализм, данный в (57)–(60), конечно, может быть применён к дивергенции $\mathcal{L}'$, данной в (27) с (29). Таким образом, вычисляется соответствующий ток Нётер (57) и суперпотенциал (58) для $\mathcal{L}'$ в СТЭ ОТО:

$$\mathcal{J}_{\text{div}}^{\alpha} \equiv \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} \delta_{\sigma}^{\alpha} \hat{\nabla}_{\beta} [(Q^{\beta}] - \hat{Q}^{\beta}) \xi^{\sigma}], \quad (92)$$

$$\mathcal{J}_{\text{div}}^{\alpha\beta} \equiv \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} \delta_{\sigma}^{\alpha} (Q^{\beta}] - \hat{Q}^{\beta}) \xi^{\sigma}. \quad (93)$$

В результате полные ток и суперпотенциал для лагранжиана (28) в СТЭ ОТО приобретают вид

$$\mathcal{J}^{\alpha} \equiv \mathcal{J}_{GR}^{\alpha} + \mathcal{J}_{\text{div}}^{\alpha}, \quad (94)$$

$$\mathcal{J}^{\alpha\beta} \equiv \mathcal{J}_{GR}^{\alpha\beta} + \mathcal{J}_{\text{div}}^{\alpha\beta}. \quad (95)$$

До сих пор мы рассматривали только тождества. Таким образом, $\mathcal{J}^{\alpha}$ и $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$ в (94) и (95) удовлетворяют законам сохранения типа (46), (52) и (50), (53). Они также являются тождествами. Для получения физически осмысленных законов сохранения необходимо использовать уравнения поля. Таким образом, после использования (30) можно переписать (90) как

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{GR}^{\alpha}(\xi) \equiv & \frac{\sqrt{-g}}{4\kappa} \left[\kappa \left(\theta^{\alpha}_{\sigma} - \frac{1}{2} \delta^{\alpha}_{\sigma} \theta^{\beta}_{\beta} \right) \xi^{\sigma} + \right. \\ & \left. + 2g^{\alpha\beta} \hat{\nabla}_{(\beta} \hat{\nabla}_{\sigma)} \xi^{\sigma} - 2\hat{\nabla}_{\alpha} \hat{\nabla}^{\alpha} \xi^{\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (96)$$

После этого токи и суперпотенциалы (94) и (95) удовлетворяют физически значимым законам сохранения:

$$\partial_{\alpha} \mathcal{J}^{\alpha}(\xi) = \hat{\nabla}_{\alpha} \mathcal{J}^{\alpha}(\xi) = 0, \quad (97)$$

$$\mathcal{J}^{\alpha}(\xi) = \partial_{\beta} \mathcal{J}^{\alpha\beta}(\xi) = \hat{\nabla}_{\beta} \mathcal{J}^{\alpha\beta}(\xi) = 0. \quad (98)$$

Все локальные сохраняющиеся величины ковариантны относительно преобразований координат, законы сохранения для них дают возможность построить интегральные сохраняющиеся величины непротиворечивым образом:

$$\mathcal{P}(\xi) = \int_{\Sigma} d^3x \mathcal{J}^0(\xi) = \oint_{\partial\Sigma} ds_i \mathcal{J}^{0i}(\xi). \quad (99)$$

Этот результат был достигнут за счёт использования теоремы Нётер и сохранения в выражениях вектора смещения ξ после её применения.

4.3. Интерпретация сохраняющихся величин

Чтобы интерпретировать сохраняющиеся величины в ТЭ ОТО и СТЭ ОТО, определённые выше, полезно описать пространство Минковского с распространяющейся через него материей в простейшем случае. Рассмотрим плоское пространство–время в координатах, где метрика имеет вид

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (100)$$

Координаты нумеруются как $(t, x, y, z) = (x^0, x^i) = (x^{\alpha})$, где $i = 1, 2, 3$. Чтобы представить это пространство–время как систему отсчёта, нужно снабдить его наблюдателями. Пусть наблюдатели будут статичными с собственными векторами

$$\xi^{\alpha} = (-1, 0, 0, 0). \quad (101)$$

Предполагается, что материя в пространстве Минковского имеет дифференциально сохраняющийся симмет-

ричный тензор энергии–импульса $\Theta^{\alpha}_{\beta} := \partial_{\alpha} \Theta^{\alpha}_{\beta} = 0$. В результате соответствующий ток $J^{\alpha}(\xi) = \Theta^{\alpha}_{\beta} \xi^{\beta}$ также дифференциально сохраняется, $\partial_{\alpha} J^{\alpha}(\xi) = 0$. Его компоненты представляют плотность энергии $J^0 = \Theta^0_0 \xi^0$ и плотность импульса $J^i = \Theta^i_0 \xi^0$, измеренные вышеупомянутыми наблюдателями.

Очевидно, что ток $\mathcal{J}^{\alpha}(\xi)$, определённый в (76) в ТЭ ОТО, и ток $\mathcal{J}^{\alpha}(\xi)$, определённый в (94) с (96) в СТЭ ОТО, обобщают простейшее определение тока $J^{\alpha}(\xi)$. Следовательно, их компоненты имеют аналогичную интерпретацию для наблюдателей. Обобщение относится к собственным векторам наблюдателя ξ , заданным в (101); они, таким образом, могут быть произвольными времениподобными векторами, с которыми ассоциирована система отсчёта. В качестве особого вектора ξ может быть выбран собственный вектор свободно падающего наблюдателя. Тогда, в силу принципа эквивалентности Эйнштейна, все компоненты токов должны быть равны нулю: $\mathcal{J}^{\alpha}(\xi) = \mathcal{J}^{\alpha}(\xi) = 0$.

Заряды Нётер $\mathcal{P}(\xi)$, определённые в ТЭ ОТО (79) и в СТЭ ОТО (99), зависят также от векторного поля ξ . Поскольку, как правило, они определены на поверхностях, ограничивающих (возможно, на бесконечности) изолированные системы, вектор ξ выбирается в качестве вектора, отражающего симметрии пространства–времени (например, вектор Киллинга) на границе. Когда вектор ξ времениподобен, соответствующий сохраняющийся заряд, ограниченный поверхностью $\partial\Sigma$, представляет собой энергию данного ограниченного (или бесконечного) объёма. В этом случае её можно классифицировать как энергию, измеренную набором наблюдателей на $\partial\Sigma$ с их собственными векторами ξ .

5. Принцип "выключения" гравитации и "калибровки"

В разделах 1 и 2 было отмечено, что телепараллельные связности как в ТЭ ОТО, так и в СТЭ ОТО являются внешними структурами и не могут быть определены в рамках самой теории. Их приходится определять, используя дополнительные принципы, вводимые для каждого конкретного решения [1, 28], причём такой выбор не является единственным. Наши принципы обобщают принципы, изложенные в более ранних работах других авторов, и основаны на простых и естественных требованиях следующим образом. Все построенные выше токи, суперпотенциалы и заряды должны обращаться в нуль для систем, где отсутствует гравитационное поле.

5.1. Телепараллельный эквивалент общей теории относительности

В ТЭ ОТО ток Нётер (71), или $\mathcal{J}^{\alpha}(\xi)$, с тензором энергии–импульса (72), θ^{α}_{σ} , и суперпотенциалом (75), $\mathcal{J}^{\alpha\beta}(\xi)$, пропорциональны компонентам искривления K^a_{cu} (или, альтернативно, $\hat{T}^a_{\mu\nu}$ или $\hat{S}^a_{\mu\nu}$), и эти величины должны исчезать при отсутствии гравитации. Следуя данному требованию, обратимся к формуле (8) и сформулируем правила для определения ИСС A^a_{cu} :

1) для рассматриваемого решения ОТО выбирается удобная тетрада и определяется Л-ЧСС A^a_{cu} по формуле (7);

2) затем строится соответствующий определённой выше Л-ЧСС тензор кривизны:

$$\hat{R}^i_{j\mu\nu} = \hat{\partial}_{\mu} \hat{A}^i_{j\nu} - \hat{\partial}_{\nu} \hat{A}^i_{j\mu} + \hat{A}^i_{k\mu} \hat{A}^k_{j\nu} - \hat{A}^i_{k\nu} \hat{A}^k_{j\mu};$$

3) чтобы "выключить" гравитацию, решается уравнение отсутствия гравитации $\dot{R}^a_{b\gamma\delta} = 0$ относительно параметров в выбранном решении ОТО;

4) затем для параметров, удовлетворяющих $\dot{R}^a_{b\gamma\delta} = 0$, устанавливается $A^a_{c\mu} = \dot{A}^a_{c\mu}$.

Напомним, что и $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi)$, и $\dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi)$ явно координатно ковариантны и лоренц-инвариантны. Поэтому, если выбранная тетрада и определённая (как выше) ИСС претерпевают локальные лоренцевы вращения, как в (12) и (13) одновременно, и/или произвольные преобразования координат, то сохраняющиеся величины остаются ковариантными (инвариантными). Всё это можно переформулировать следующим образом. Исходная пара тетрады и ИСС определяет набор пар, связанных с исходной парой вращениями Лоренца и/или произвольными преобразованиями координат, для которых сохраняющиеся величины ковариантны (инвариантны). Такой набор пар мы называем "калибровкой".

Однако оказывается, что после применения принципа "выключения" гравитации в ТЭ ОТО результат определения ИСС всё равно неоднозначен. Он зависит от тетрады, которую мы выбираем с самого начала. В результате получаются разные пары тетрады и ИСС, т.е. получаются разные "калибровки", где пары не связаны локальными вращениями Лоренца и/или произвольными преобразованиями координат. Для разных "калибровок" $\dot{\mathcal{J}}^\alpha(\xi)$ и $\dot{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}(\xi)$ также различны, что даёт нам разные значения сохраняющихся величин. Поэтому одной из основных целей построения сохраняющихся величин является поиск соответствующих калибровок в ТЭ ОТО, для которых мы бы имели физически значимые результаты для конкретных решений.

Наконец, традиционно используется понятие калибровки Вайценбока [3]. В этом случае слово "калибровка" используется в другом смысле: когда говорят "калибровка Вайценбока", подразумевают только одну пару – тетраду и нулевой ИСС; а в нашем определении "калибровка" подразумевается целый класс эквивалентности пар тетрад и ИСС, связанных, как определено выше.

5.2. Симметричный телепараллельный эквивалент общей теории относительности

В СТЭ ОТО для определения неопределённой СТС мы используем адаптированный из ТЭ ОТО принцип "выключения" гравитации. Он основан на предположении, что полный ток (94), $\mathcal{J}^\alpha(\xi)$, и суперпотенциал (95), $\mathcal{J}^{\alpha\beta}(\xi)$, должны обратиться в нуль при отсутствии гравитации. Разумно предположить, что оба слагаемых в (94) и (95) становятся нулевыми по отдельности. Тогда $Q_{\alpha\mu\nu}$ или $L^\alpha_{\mu\nu}$, в дополнение к $\dot{R}^a_{b\mu\nu}$ в ОТО, должны обратиться в нуль при отсутствии гравитации. В результате сформулируем следующие шаги по определению СТС в СТЭ ОТО:

1) для известного решения ОТО строится соответствующий тензор Римана для связности Леви-Чивиты:

$$\dot{R}^a_{b\mu\nu} = \partial_\mu \dot{\Gamma}^a_{b\nu} - \partial_\nu \dot{\Gamma}^a_{b\mu} + \dot{\Gamma}^a_{\kappa\mu} \dot{\Gamma}^\kappa_{b\nu} - \dot{\Gamma}^a_{\kappa\nu} \dot{\Gamma}^\kappa_{b\mu};$$

2) чтобы "выключить" гравитацию, решается уравнение отсутствия гравитации $\dot{R}^a_{b\mu\nu} = 0$ относительно параметров в выбранном решении ОТО;

3) затем для найденных параметров, удовлетворяющих $\dot{R}^a_{b\mu\nu} = 0$, берётся $\Gamma^a_{\mu\nu} = \dot{\Gamma}^a_{\mu\nu}$ для выбранного решения.

Кручение для найденной связности должно быть равно нулю автоматически, потому что она получена из связно-

сти Леви-Чивиты для некоторых значений параметров, а связность Леви-Чивиты всегда симметрична. Кривизна для найденной СТС также должна быть равна нулю, потому что мы нашли её, используя уравнение $\dot{R}^a_{b\gamma\delta} = 0$.

Чтобы иметь ту же терминологию в СТЭ ОТО, что и в ТЭ ОТО, формально мы определяем как "калибровку" пару координат (x^α) и связности $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, вместе с набором пар, которые связаны с ней преобразованиями для координат $x^\alpha = x^\alpha(\bar{x})$ и СТС:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\nu} \bar{\Gamma}^\alpha_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\nu} \right).$$

Понятие "калибровки" в нашем определении представляет множество всех возможных координат и значений СТС, таких что указанное выше соотношение $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(\bar{\Gamma})$ выполняется при всех возможных преобразованиях координат. Это класс эквивалентности. Наше определение отличается, таким образом, от случая только с нулевой СТС, который называется "совпадающей калибровкой" [29, 30]. Последнее определение означает всего лишь случай единственных координат.

Так же как и в ТЭ ОТО, результат определения СТС в СТЭ ОТО неоднозначен, он зависит от координат, которые мы выбираем с самого начала. Это приводит к разным "калибровкам", дающим разные значения для сохраняющихся величин. Поэтому, опять же, одной из главных целей построения сохраняющихся величин в СТЭ ОТО является нахождение подходящих "калибровок", для которых получаем физически значимые результаты для конкретных решений.

5.3. Подходящие калибровки

Необходимость построения ковариантных сохраняющихся величин в ТЭ ОТО и СТЭ ОТО для того или иного решения (модели) требует ограничения возможного выбора ИСС и СТС. Такая ситуация не нова в метрической ОТО, где классические псевдотензоры энергии – импульса и суперпотенциалы не являются ковариантными (см. часть 1 в книге [26]). Одним из многих вариантов улучшения ситуации является использование биметрического представления ОТО, например, предложенного в [31]. Вводя вспомогательную фоновую метрику $\bar{g}_{\mu\nu}$ и используя теорему Нётер, строят ковариантные тензоры энергии – импульса и суперпотенциалы. Уравнения Эйнштейна сохраняются, но токи и суперпотенциалы существенно зависят от $\bar{g}_{\mu\nu}$. Хотя в общем формализме $\bar{g}_{\mu\nu}$ является произвольным, соответствующий выбор $\bar{g}_{\mu\nu}$ существенно зависит от рассматриваемого решения. Например, это может быть плоский фон, если рассматривать изолированную систему с асимптотически плоской метрикой. Однако даже если выбрана конкретная система для анализа, неоднозначность в выборе $\bar{g}_{\mu\nu}$ может остаться.

Возвращаясь к ТЭ ОТО и СТЭ ОТО, мы подчеркнём, что, с одной стороны, наш формализм для построения сохраняющихся величин в ТЭ ОТО и СТЭ ОТО является общим, поскольку он представляет собой общий метод. С другой стороны, он сильно зависит от решения и, таким образом, неприменим в целом, поскольку выбор калибровок должен определяться для каждого конкретного решения отдельно. Роль ИСС и СТС в ТЭ ОТО и СТЭ ОТО аналогична роли $\bar{g}_{\mu\nu}$ в метрической ОТО. Таким образом, не существует единого тензора энергии – импульса, в отличие от электродинамики. Такая си-

туация не является удивительной в ОТО в силу принципа эквивалентности Эйнштейна.

Завершая раздел, мы устанавливаем строгие рамки для построения сохраняющихся величин в ТЭ ОТО и СТЭ ОТО. Метод "выключения гравитации" применяется для определения телепараллельных связностей как в ТЭ ОТО, так и СТЭ ОТО, где выбор начальной тетрады в ТЭ ОТО или начальных координат в СТЭ ОТО определяет результирующую калибровку, которая должна быть найдена в конечном итоге как подходящая для конкретного решения.

6. Заключение

В статье мы представили единый полностью ковариантный формализм для построения сохраняющихся величин в ТЭ ОТО и СТЭ ОТО в тензорной форме. В целом наши методы отличаются от общепринятых. Продемонстрировано, что использование теоремы Нётер имеет существенный потенциал для развития. Уже сейчас оно имеет важные достижения в приложениях. По крайней мере, мы охватили все прикладные результаты предшествующих авторов и добавили новые. Так, мы описали все известные астрофизические и космологические примеры, особое внимание было уделено решению Шварцшильда (см. [14–20]). Мы были первыми, кто сформулировал принцип эквивалентности для гравитационной волны [21] и первыми, кто вычислил угловой момент для решения Керра [22] в телепараллельных эквивалентах ОТО.

Благодарности. ЕЕ получила частичную поддержку от Министерства абсорбции и по гранту "Программа поддержки физики высоких энергий" Израильского совета по высшему образованию, а также поддерживается грантом Израильского научного фонда (ISF) № 1698/22, исследование АП и АТ выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

Список литературы

- Jiménez J B, Heisenberg L, Koivisto T S *Universe* **5** (7) 173 (2019)
- Heisenberg L *Phys. Rep.* **796** 1 (2019)
- Aldrovandi R, Pereira J G *Teleparallel Gravity: an Introduction* (Fundamental Theories of Physics, Vol. 173) (Dordrecht: Springer, 2013) DOI:10.1007/978-94-007-5143-9
- Bahamonde S et al. *Rep. Prog. Phys.* **86** 026901 (2023)
- Adak M et al. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **20** 2350215 (2023)
- Maluf J W, Faria F F, Ulhoa S C *Class. Quantum Grav.* **24** 2743 (2007)
- Lucas T G, Obukhov Yu N, Pereira J G *Phys. Rev. D* **80** 064043 (2009)
- Obukhov Yu N, Rubilar G F *Phys. Rev. D* **73** 124017 (2006)
- Obukhov Yu N, Rubilar G F, Pereira J G *Phys. Rev. D* **74** 104007 (2006)
- Bahamonde S, Järv L *Eur. Phys. J. C* **82** 963 (2022)
- Gomes D A, Jiménez J B, Koivisto T S, arXiv:2205.09716
- Obukhov Yu N, Rubilar G F *Phys. Rev. D* **74** 064002 (2006)
- Heisenberg L *Phys. Rep.* **1066** 1 (2024)
- Emtsova E D, Petrov A N, Toporensky A V *Class. Quantum Grav.* **37** 095006 (2020)
- Emtsova E D, Petrov A N, Toporensky A V *J. Phys. Conf. Ser.* **1557** 012017 (2020)
- Emtsova E D, Krššák M, Petrov A N, Toporensky A V *Eur. Phys. J. C* **81** 743 (2021)
- Emtsova E D, Krššák M, Petrov A N, Toporensky A V *J. Phys. Conf. Ser.* **2081** 012017 (2021)
- Emtsova E D, Petrov A N *Space Time Fundamental Interactions* (39) 18 (2022)
- Emtsova E D, Petrov A N *Gen. Relativ. Gravit.* **54** 114 (2022)
- Emtsova E D, Petrov A N, Toporensky A V *Eur. Phys. J. C* **83** 366 (2023)
- Emtsova E D, Petrov A N, Toporensky A V *Eur. Phys. J. C* **84** 215 (2024)
- Emtsova E D, Petrov A N, Toporensky A V *Eur. Phys. J. C* **85** 23 (2025)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* 7-е изд., испр. (М.: Наука, 1988); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* 4th rev. ed. (Oxford: Pergamon Press, 1975)
- Мицкевич Н В *Физические поля в общей теории относительности* (М.: Наука, 1969)
- Petrov A N, Lompay R R *Gen. Relativ. Gravit.* **45** 545 (2013)
- Petrov A N et al. *Metric Theories of Gravity: Perturbations and Conservation Laws* (De Gruyter Studies in Mathematical Physics, Vol. 38) (Berlin: De Gruyter, 2017)
- Klein F, in *Gesammelte mathematische Abhandlungen* Vol. 1 (Hrsg. R Fricke, A Ostrowski) (Berlin: J. Springer, 1921) p. 568–585
- Golovnev A, Koivisto T, Sandstad M *Class. Quantum Grav.* **34** 145013 (2017)
- Pala C, Adak M *J. Phys. Conf. Ser.* **2191** 012017 (2022)
- Jiménez J B, Koivisto T S *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **19** 2250108 (2022)
- Katz J, Bičák J, Lynden-Bell D *Phys. Rev. D* **55** 5957 (1997)

Noether formalism for constructing conserved quantities in teleparallel equivalents of general relativity

E.D. Emtsova^(1,2,a), A.N. Petrov^(3,b), A.V. Toporensky^(3,c)

⁽¹⁾ Department of Physics, Ariel University, Ramat HaGolan Str. 65, Ariel, 40700, Israel

⁽²⁾ Department of Physics, Bar Ilan University, Max ve-Anna Webb Str. 1, Ramat Gan, 5290002, Israel

⁽³⁾ Lomonosov Moscow State University, Sternberg State Astronomical Institute, Universitetskii prosp. 13, 119234 Moscow, Russian Federation

E-mail: ^(a) ed.emcova@physics.msu.ru, ^(b) alex.petrov55@gmail.com, ^(c) atopor@rambler.ru

This paper has a methodological character, where we present a comprehensive formalism for constructing conserved quantities in the Teleparallel Equivalent of General Relativity (TEGR) and Symmetric Teleparallel Equivalent of General Relativity (STEGR). It was developed in a series of our earlier studies, and here, we combine them into a complete form. By employing the Noether method within a tensor formalism, conserved currents, superpotentials, and charges are constructed. These are shown to be covariant under coordinate transformations and local Lorentz rotations in TEGR, while, in STEGR, they are covariant under coordinate transformations. The teleparallel (flat) connections in both theories are defined using the "turning off gravity" principle. Uniting such defined flat connections with the tetrad in TEGR and metric in STEGR, a new notion — "gauge" — fruitful in applications, is introduced. The choice of various initial tetrads in TEGR or initial coordinates in STEGR leads to different gauges, giving different conserved quantities. Finally, we discuss an appropriate choice of gauges from a possible set of them.

Keywords: teleparallel gravity, Noether theorem, conserved currents, superpotentials, conserved charges, gauges

PACS numbers: **04.20. – q**, 04.20.Cv, 04.50.Kd

Bibliography — 31 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **195** (11) 1235–1244 (2025)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.05.039924>

Received 5 February 2025

Physics – Uspekhi **68** (11) (2025)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.05.039924>