

Нелинейная генерация течений волнами на поверхности жидкости

С.С. Вергелес, А.А. Левченко, В.М. Парфеньев

Затухание поверхностных волн из-за вязкой диссипации сопровождается возбуждением медленных вихревых течений благодаря сохранению полного импульса. Мы представляем теоретическую модель для волн малой амплитуды, объясняющую эксперименты по генерации вихревых течений скрещенными волнами. Особое внимание уделено влиянию поверхностных загрязнений, которое учтено в рамках модели тонкой жидкой эластичной плёнки, приводящей к усилению диссипации волн и интенсификации вихревых течений. При увеличении амплитуды течений необходимо учитывать их взаимодействие с волнами. Предложена теоретическая схема, описывающая данное взаимодействие, с демонстрацией её применимости к классическим задачам: волнам Гуйона, распространению коротких волн навстречу течению и циркуляции Ленгмюра. В заключение описаны экспериментальные данные для турбулентного режима генерации течений, реализующегося при достаточно большой амплитуде волн, и обозначены открытые вопросы в этом направлении.

Ключевые слова: волны на поверхности жидкости, поверхностная плёнка, вихревое течение, массовый транспорт, дрейф Стокса, виртуальное волновое напряжение, вихревая сила, рассеяние и преломление волн

PACS numbers: 05.45. – a, 92.10.hb

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.08.039992>

Содержание

1. Введение (1199).
2. Генерация течений бегущей волной (1202).
 - 2.1. Волны в идеальной жидкости. 2.2. Сохранение импульса в условиях затухания поверхностных волн. 2.3. Дрейф Стокса. 2.4. Медленное потенциальное течение, вызванное движением волновых пакетов.
3. Генерация течений скрещенными волнами на загрязнённой поверхности (1205).
 - 3.1. Уравнения движения и граничные условия. 3.2. Линейная теория поверхностных волн в присутствии плёнки. 3.3. Нелинейная генерация медленного течения. 3.4. Дрейф Стокса и массовый транспорт. 3.5. Вертикальное течение. 3.6. Обсуждение экспериментов.
4. Взаимодействие волн с приповерхностными течениями (1212).
 - 4.1. Вихревая сила. 4.2. Распространение волн на фоне вихревого

течения. 4.3. Волны Гуйона. 4.4. Коротковолновый предел. 4.5. Циркуляция Ленгмюра.

5. Турбулентный режим (1215).

6. Заключение (1216).

Приложения (1216).

А. Вязкий пограничный слой на свободной поверхности. Б. Взаимодействие поверхностных волн с медленным вихревым течением. В. Двумерная турбулентность.

Список литературы (1219).

1. Введение

Перенос массы в горизонтальном направлении под поверхностью жидкости в условиях возбуждённого волнового движения давно является предметом как теоретических исследований, так и практического интереса. Первой попыткой объяснить данное явление стала классическая работа Дж.Г. Стокса [1]. В этой работе рассмотрен перенос массы в бегущей волне в идеальной жидкости, так что течение всюду остаётся потенциальным. Было показано, что движение лагранжевых частиц, усреднённое по периоду колебаний волны, характеризуется скоростью дрейфа, которая квадратична по амплитуде волны. Позже М. Лонге-Хиггинс обнаружил, что вязкость жидкости нарушает потенциальное приближение не только в линейном порядке по амплитуде волны внутри вязкого подслоя вблизи поверхности, но и в квадратичном порядке, существенно изменяя скорость среднего по времени переноса массы [2].

Влияние вязкости жидкости на массовый транспорт может быть объяснено следующим образом. Бегущая

С.С. Вергелес^(1,2,a), А.А. Левченко^(3,b), В.М. Парфеньев^(1,2,c)

⁽¹⁾ Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, просп. Академика Семёнова 1А, 142432 Черноголовка, Московская обл., Российская Федерация

⁽²⁾ Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", ул. Мясницкая 20, 101000 Москва, Российская Федерация

⁽³⁾ Институт физики твёрдого тела им. Ю.А. Осипьяна РАН, ул. Академика Осипьяна 2, 142432 Черноголовка, Московская обл., Российская Федерация

E-mail: ^(a) ssver@itp.ac.ru, ^(b) levch@issp.ac.ru, ^(c) parfenius@gmail.com

Статья поступила 30 марта 2025 г.,

после доработки 3 августа 2025 г.

поверхностная волна обладает импульсом, направленным вдоль её распространения. Поверхностная плотность такого импульса пропорциональна квадрату амплитуды волны. Она совпадает с интегральным по вертикали потоком массы в виде дрейфа Стокса. Вязкая диссипация приводит к ослаблению амплитуды волны по мере её распространения. Падает и импульс, связанный с волновым движением. Однако в силу закона сохранения количества движения недостающий импульс передаётся жидкости. Передача происходит посредством действия виртуальной силы, приложенной в тонком приповерхностном слое, включающем в себя гребни и впадины волны, а также вязкий подслои. Эта сила — виртуальное волновое касательное напряжение — пропорциональна вязкости жидкости и квадрату амплитуды волны [3, 4]. Действие такой силы приводит к возбуждению медленного сдвигового течения, которое затем распространяется в объём жидкости за счёт вязкой диффузии. Если возбуждённое течение слабое, так что оно не турбулентно, то его амплитуда в установившемся режиме не зависит от вязкости жидкости, хотя оно и обязано ей своим происхождением. Дальнейшие работы по данной теме были направлены на переформулирование задачи в лагранжевом описании и на адаптацию главного результата для океанологии — исследование нестационарного случая и влияния сил Кориолиса [5–10]. С методической точки зрения интересна также работа [11], где проведено сравнение разных математических подходов к описанию явления.

В 2010-х годах интерес к генерации течений волнами возник вновь, но в более сложной постановке: как будет устроен поток массы, если на поверхности жидкости возбуждены две скрещенные волны [12–16], геометрически более сложное волнение [17–20] или хаотическое волновое движение [21–25]? Теоретический анализ для жидкости с чистой свободной поверхностью, на которой возбуждены две стоячие ортогональные волны, показал, что в стационарном режиме формируется решётка приповерхностных вихрей с периодом, определяемым длиной волны [12]. В вихрях вертикальная компонента скорости равна нулю, поэтому они полностью характеризуются вертикальной компонентной завихренности, распределение которой в пространстве образует "шахматную доску". Теория, развитая в работе [12], объяснила многие качественные особенности возбуждаемого течения, в частности, его пространственную структуру и пропорциональность амплитуды течения произведению амплитуд волн и синусу разности фаз между ними. Однако численное согласие достигнуто не было: в эксперименте амплитуда течения оказалась на порядок выше теоретических предсказаний.

Причина состояла в том, что поверхность воды в реальных условиях всегда покрыта тонкой плёнкой, приводящей к изменению граничных условий на поверхности жидкости. В частности, такое изменение приводит к резкому возрастанию скорости затухания волны, почти не меняя её закон дисперсии. Исследование роли поверхностной плёнки в динамике волн проводилось в ряде теоретических исследований (см. работы В.Г. Левича [26–28] и других авторов [29, 30]), а также в экспериментальных работах [31, 32]. Среди прочего, повышенная диссипация у волн на поверхности воды вследствие присутствия плёнки не позволяет экспериментально наблюдать обратный каскад в слабой турбулентности

гравитационных волн [33]. В одной из ранних работ [34] по данной теме было замечено, что скорость затухания волны может меняться со временем. Это означает, что поверхностная плёнка является результатом процесса адсорбции поверхностно-активных молекул с ограничивающих течение поверхностей или из воздуха, которые захватываются водой вследствие её большой диэлектрической проницаемости.

Влияние поверхностной плёнки на генерацию течений волнами было подробно исследовано только в недавних работах [35–37]. Стартовая идея состояла в том, что поскольку наличие плёнки увеличивает скорость затухания волн, то соответствующим образом должно увеличиваться и виртуальное волновое касательное напряжение. Сперва анализ был проведён для случая практически несжимаемой плёнки [35], но затем более тщательный анализ экспериментальных данных показал, что горизонтальная компонента скорости в волне на поверхности жидкости не обращается в нуль [37]. Это наблюдение свидетельствовало, что поверхность воды покрыта сжимаемой плёнкой.

Свойства плёнки априори не известны, поскольку процесс её формирования является неконтролируемым. В общем случае её реологические свойства могут быть описаны четырьмя коэффициентами, если предполагается слабая степень деформации плёнки: упругий коэффициент растяжения, вторая вязкость (определяющая диссипативную реакцию плёнки при растяжении/сжатии), упругий модуль сдвига и первая (сдвиговая) вязкость [38]. В работах [36, 37] мы полагали, что диссипация вследствие внутренней вязкости плёнки мала по сравнению с вязкой диссипацией в объёме жидкости, и на этом основании мы пренебрегли обеими вязкостями плёнки. Кроме того, мы предполагали, что плёнка является жидкой, т.е. она не оказывает сопротивления при сдвиговых деформациях. Критерием такого приближения является экспериментальный факт возбуждения вихревых течений [37]. Обратным примером является экспериментальная работа [39], в которой специально приготовленная плёнка обладала сдвиговой эластичностью, и потому вихревые горизонтальные течения были подавлены. Наконец, мы считали, что плёнка сформирована нерастворимыми молекулами, и потому масса плёнки (количество вещества в ней) сохраняется. В результате свойства плёнки в нашей модели описывались только одним параметром — модулем упругого растяжения [36]. Данная модель хотя и является упрощённой, не охватывающей все возможные случаи, но, как было показано в работе [37], она достаточно хорошо описывает экспериментальные результаты.

При увеличении амплитуды ортогональных поверхностных волн в системе на больших временах наряду с "шахматной доской" вихрей развивается крупномасштабное течение размером на всю экспериментальную ячейку [13, 37]. При этом течений промежуточных размеров не наблюдается. В указанных работах волны возбуждались колеблющимися плунжерами, установленными вдоль бортов прямоугольного бассейна. Поскольку плунжеры не доходили до краёв бассейна на 2–3 см, то вследствие краевых эффектов они также возбуждали косые волны небольшой амплитуды, распространяющиеся под малым углом к бортам бассейна [17]. Нелинейное взаимодействие волн, распространяющихся строго параллельно бортам бассейна, с косыми волнами

приводит к генерации крупномасштабного течения с амплитудой, обратно пропорциональной синусу половинного угла между направлениями распространения волн [40]. Таким образом, малость амплитуды косых волн компенсируется малостью угла. Предложенный механизм был целенаправленно исследован в экспериментальной работе [41].

Обсуждаемый нами феномен генерации вихревых течений волнами на фоне исходно покоящейся жидкости является представителем общего класса течений, возникающих во втором порядке по амплитуде некоторого осциллирующего воздействия вследствие существования вязкого пограничного слоя [42]. Другими примерами этого класса являются:

- акустические течения, возбуждаемые в слабовязкой жидкости звуковыми волнами [43, 44] (см. также [45, § 80]),
- вихревые геострофические течения, вызванные инерционными волнами [46, 47],
- течения, произведённые поверхностными волнами в вязком пограничном слое у дна [2],
- течения, вызванные быстро колеблющимся в жидкости твёрдым телом [48, 49],
- течения, вызванные изгибными колебаниями свободно подвешенных плёнок [50 – 52].

Во всех случаях медленное течение есть результат усреднения тензора Рейнольдса в вязком пограничном слое вблизи твёрдой границы или вблизи свободной поверхности. Характерным свойством установившихся акустических течений и вязких течений, возбуждённых в вязком пограничном слое вблизи твёрдой стенки или свободной поверхности без плёнки, является независимость их амплитуды от вязкости. Рассматриваемый нами случай загрязнённой поверхности, покрытой плёнкой, нарушает это правило — интенсивность установившихся медленных течений обратно пропорциональна корню из вязкости при достаточной величине упругого модуля сжатия плёнки.

Увеличение амплитуды поверхностных волн позволяет достигнуть турбулентного режима у поверхностных течений. Так, в работах [21 – 25] волновое движение возбуждалось посредством неустойчивости Фарадея, а в работе [53] волны в квадратной ячейке возбуждались двумя расположенными у смежных сторон плунжерами. Отметим также, что при определённых условиях в последней системе нелинейное четырёхволновое взаимодействие может приводить к возбуждению волн с другими частотами [54]. Примечательно, что статистические свойства медленных приповерхностных течений в таких системах воспроизводят ряд особенностей, характерных для двумерной турбулентности [55], причём это справедливо даже для экспериментов на глубокой воде. В частности, энергетический спектр поверхностного течения $\propto k^{-5/3}$, структурная функция скорости третьего порядка линейно зависит от расстояния между точками и имеет знак, соответствующий обратному энергетическому каскаду, а при уменьшении размера ячейки наблюдается образование крупномасштабного когерентного вихря [22]. Недавние эксперименты [24, 25], направленные на исследование проникновения поверхностных течений в глубину, подтверждают, что энергия горизонтальных потоков быстро убывает с глубиной и локализована в вертикальном направлении на масштабе порядка половины длины волны. В то же время дивергенция горизонтальной скорости не равна нулю, т.е. поверхность взаимодействует

с объёмом за счёт формирования вертикальных струй. Последовательная теоретическая картина, объясняющая все эти результаты, в настоящий момент отсутствует.

Такая теория должна учитывать и то, что при увеличении амплитуды вихревого течения уже нельзя пренебрегать его взаимодействием с быстрыми поверхностными волнами. Критерием относительной незначительности этого взаимодействия является малость амплитуды завихренности вихревого течения по сравнению со скоростью затухания волн. В противном случае следует учитывать объёмную силу [56], называемую вихревой силой [57], которая действует со стороны волн на вихревое течение и возникает вследствие слабого искажения волнового поля медленным течением. С другой стороны, сами поверхностные волны преломляются и рассеиваются на неоднородном в пространстве вихревом течении. До сих пор остаётся неисследованным, какую роль играет взаимодействие волн с течениями в экспериментах [13, 17, 21 – 25, 53, 54]. Наши оценки, приведённые в настоящем обзоре, показывают, что данное взаимодействие по порядку величины сравнимо или даже превосходит результат действия виртуального поверхностного напряжения. Таким образом, при построении статистической теории явлений обратного каскада в приповерхностном слое в присутствии поверхностных волн, повидимому, невозможно обойтись без учёта взаимодействия двух указанных подсистем.

Чтобы для будущих исследований данного вопроса предоставить теоретическое основание, мы приводим аналитическую схему, развитую в недавней работе [58] и позволяющую описывать в общем случае взаимное влияние волн и приповерхностного течения в пределе, когда вихревое течение можно считать медленным, т.е. его скорость изменения и пространственный градиент малы по сравнению с частотой волны. Важно подчеркнуть, что схема не использует каких-либо дополнительных упрощений. Схема предполагает физически обоснованный математический подход: волновое поле скорости на фоне медленного течения по-прежнему описывается потенциалом в нулевом приближении по взаимодействию, однако в первом порядке к нему добавляется слабая вихревая поправка, не связанная с изменением формы поверхности. Поскольку схема новая, мы считаем необходимым продемонстрировать технологию её применения для уже известных классических задач, которые были решены в рамках других, менее универсальных математических формализмов. Во-первых, мы применяем эту схему к описанию волн Гуйона [59], которые в рамках теории возмущений исследуются в терминах функции тока [60]. Во-вторых, мы показываем, как наша схема редуцируется до волнового уравнения при описании преломления волновых лучей в коротковолновом пределе [61, 62]. Мы применяем полученное волновое уравнение для исследования задачи о распространении волны против усиливающегося течения [63, 64]. Как известно, такое течение может останавливать волны. Полученное нами волновое уравнение полностью описывает поведение волны вблизи точки остановки, чего не позволяют сделать подходы, применявшиеся ранее [64]. В-третьих, мы описываем результат применения схемы к задаче о неустойчивости Ленгмюра, возникающей на фоне бегущей волны и сонаправленного ей сдвигового течения. Ранее механизм неустойчивости Ленгмюра был объяснён с помощью концепции вихревой силы [65].

Было показано [58], что учёт рассеяния волны на циркуляции Ленгмюра расширяет структуру неустойчивой моды через включение в неё рассеянной волны. Инкремент неустойчивости такой моды оказывается больше установленного в [65]. В результате через эти примеры мы показываем универсальность нашей теоретической схемы.

В итоге текст настоящего обзора организован следующим образом. В разделе 2 мы рассматриваем генерацию медленных течений в простейшем случае бегущей гравитационной волны. Далее, в разделе 3, мы обобщаем проведённый анализ на случай произвольного волнового движения и учитываем возможное загрязнение поверхности вследствие образования на ней тонкой плёнки. Раздел 4 посвящён описанию взаимодействия медленных течений с поверхностными волнами. Наконец, в разделе 5 мы обсуждаем статистические свойства медленных течений в турбулентном режиме и перечисляем ряд открытых вопросов в этом направлении. В заключении мы кратко формулируем основные результаты, а также указываем на направления исследований, где они могут быть востребованы.

2. Генерация течений бегущей волной

В этом разделе мы рассмотрим генерацию медленных течений плоской бегущей гравитационной волной. Наша задача состоит в том, чтобы раскрыть природу данного явления и связать его с законом сохранения импульса, рассмотрев простейший пример. Сперва мы напомним, как описываются гравитационные волны в идеальной жидкости и как определяется их импульс. Затем мы обсудим, как вязкое затухание поверхностных волн приводит к генерации медленных течений. В конце раздела мы перейдём к описанию движения пассивных частиц, используемых в экспериментах для регистрации поля скорости. Мы увидим, что дрейф таких частиц включает в себя дополнительный вклад — дрейф Стокса [1], который напрямую не связан с генерируемым медленным течением, а обусловлен исключительно волновым движением. В заключение мы кратко обсудим случай монохроматических волн (волновых пакетов) и проанализируем нелинейный потенциальный вклад в медленное течение, возникающий в указанном случае.

2.1. Волны в идеальной жидкости

Рассмотрим безвихревую гравитационную волну в идеальной жидкости бесконечной глубины. Поле скорости потенциально, $\mathbf{u} = \nabla\phi$, и несжимаемо,

$$\Delta\phi = 0, \quad (1)$$

а потенциал скорости ϕ удовлетворяет уравнению Бернулли внутри жидкости [66]

$$\partial_t\phi + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \frac{P}{\rho} = 0. \quad (2)$$

Здесь ρ — плотность жидкости, а P — модифицированное давление, включающее гравитационное слагаемое. Далее мы считаем, что ось z направлена вертикально, противоположно ускорению свободного падения $\mathbf{g}$, поверхность жидкости определяется уравнением $z = h(t, x, y)$, и в состоянии покоя она совпадает с плос-

костью $z = 0$. Тогда модифицированное давление $P = p + \rho gz$, где p — внутреннее давление.

Динамическое уравнение (2) необходимо дополнить граничными условиями на поверхности жидкости. Во-первых, это кинематическое граничное условие, означающее, что поверхность жидкости движется со скоростью жидкости $\mathbf{u} = \nabla\phi$, т.е.

$$\partial_t h = u_z - u_x \partial_x h. \quad (3)$$

Здесь и далее греческие индексы пробегуют значения x и y , а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Во-вторых, это динамическое граничное условие, которое означает равенство давления на поверхности жидкости атмосферному давлению (предполагаемому равным нулю) при отсутствии капиллярных сил

$$P - \rho gh = 0. \quad (4)$$

Подчеркнём, что выражения (1)–(4) вместе с $|\nabla\phi| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$ образуют замкнутую систему нелинейных уравнений, описывающих безвихревое течение идеальной жидкости.

Далее мы предполагаем, что на поверхности жидкости возбуждена гравитационная волна малой крутизны, $|\nabla h| \ll 1$. В линейном приближении речь идёт о волне, характеризующейся законом дисперсии $\omega^2 = gk$, где $k > 0$ — волновое число, а ω — частота волны. Для волны, распространяющейся вдоль направления x , можно найти:

$$P^{(1)} = \rho\omega^2 H \exp(kz) \frac{\cos(kx - \omega t)}{k}, \quad (5)$$

$$\phi^{(1)} = \omega H \exp(kz) \frac{\sin(kx - \omega t)}{k}, \quad (6)$$

$$h^{(1)} = H \cos(kx - \omega t), \quad (7)$$

где H — амплитуда волны, а верхний индекс (1) обозначает линейное приближение.

Как мы увидим ниже, импульс, связанный с волновым движением, квадратичен по амплитуде волны H . Поэтому для его расчёта нам необходимо найти поправки второго порядка, которые определяются следующей системой уравнений:

$$\nabla^2 \phi^{(2)} = 0, \quad \partial_t \phi^{(2)} + \frac{P^{(2)}}{\rho} = -\frac{(u^{(1)})^2}{2}, \quad (8)$$

$$\partial_t h^{(2)} - u_z^{(2)}|_{z=0} = \partial_z u_z^{(1)}|_{z=0} h^{(1)} - u_x^{(1)}|_{z=0} \partial_x h^{(1)}, \quad (9)$$

$$P^{(2)}|_{z=0} - \rho gh^{(2)} = -\partial_z P^{(1)}|_{z=0} h^{(1)}. \quad (10)$$

Используя выражения (5)–(7) и проведя несложные вычисления, получаем

$$P^{(2)} = -\rho\omega^2 H^2 \frac{\exp(2kz)}{2}, \quad \phi^{(2)} = 0, \quad (11)$$

$$h^{(2)} = kH^2 \frac{\cos(2kx - 2\omega t)}{2}. \quad (12)$$

Теперь мы готовы ввести в рассмотрение интересующие нас физические величины на простейшем примере бегущей гравитационной волны в идеальной жидкости. Поверхностная плотность импульса определяется как $\pi_x = \rho \langle \int_{-\infty}^h dz u_x \rangle$ и описывает перенос массы через

перечное сечение волны. Здесь и далее угловые скобки означают усреднение по быстрым волновым колебаниям. С точностью до второго порядка по амплитуде волны получаем

$$\pi_x \simeq \rho \left\langle \int_{-\infty}^{h(1)} dz u_x^{(1)} \right\rangle = \frac{\rho \omega H^2}{2}. \quad (13)$$

Отметим, что интеграл набирается вблизи поверхности в тонком слое, включающем в себя гребни и впадины волны.

Далее мы вводим тензор плотности потока импульса, $\Pi_{ik} = \rho \delta_{ik} + \rho u_i u_k$, который является i -й компонентой количества импульса, текущего вдоль k -й оси [45]. Соответственно, поверхностная плотность π_{xx} потока x -компоненты импульса в направлении оси x , связанная только с волновым движением, равна

$$\pi_{xx} = \left\langle \int_{-\infty}^h dz \Pi_{xx} + \rho g \int_{-\infty}^0 dz z \right\rangle. \quad (14)$$

Здесь последнее слагаемое нужно для вычитания вклада, связанного с гравитацией для невозмущённой поверхности. С точностью до второго порядка по амплитуде волны находим

$$\begin{aligned} \pi_{xx} \simeq & \int_{-\infty}^0 dz \left\langle \rho (u_x^{(1)})^2 + P^{(2)} \right\rangle + \\ & + \left\langle \int_{-\infty}^{h(1)} dz P^{(1)} - \rho g \int_0^{h(1)} dz z \right\rangle = \frac{\rho \omega^2 H^2}{4k}. \end{aligned} \quad (15)$$

Полученный результат соответствует передаче поверхностной плотности импульса π_x с групповой скоростью $c_g = \omega/(2k)$, т.е. $\pi_{xx} = c_g \pi_x$ [67]. Обобщение этих рассуждений на случай гравитационно-капиллярных волн приведено в работе [68].

2.2. Сохранение импульса в условиях затухания поверхностных волн

Вязкость жидкости приводит к затуханию поверхностных волн. Мы будем предполагать, что кинематическая вязкость жидкости ν мала, так что безразмерный параметр $\gamma = \sqrt{\nu k^2/\omega} \ll 1$. В лабораторных экспериментах волны обычно возбуждаются за счёт периодического воздействия у границы, и в стационарном режиме их амплитуда убывает в пространстве, $H = H_0 \exp(-4\gamma^2 kx)$. Можно показать, что для маловязкой жидкости выражения для поверхностной плотности импульса (13) и его потока (15) остаются прежними, только теперь нужно учесть пространственное затухание амплитуды волны.

Если пренебречь влиянием вертикальных стенок, то горизонтальная проекция полного импульса волновой системы должна сохраняться. Поэтому уменьшение импульса волнового движения, связанное с уменьшением амплитуды волны, должно быть скомпенсировано. Физически такая компенсация происходит в тонком вязком подслое вблизи свободной поверхности толщиной $\delta \sim \gamma/k$. В этом слое волновое движение перестаёт быть потенциальным вследствие вязкости среды. Мы в деталях разберём устройство поля скорости в вязком подслое в следующем разделе, а пока для простоты будем считать, что толщиной этого слоя можно прене-

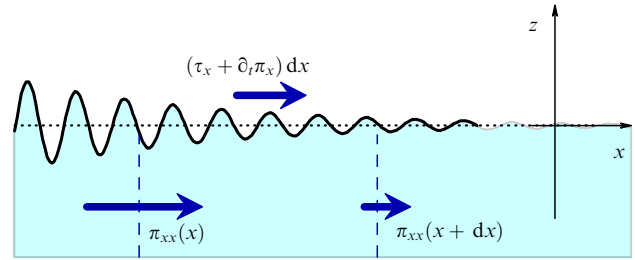


Рис. 1. Изменение горизонтальной составляющей импульса волнового движения порождает поверхностную силу τ_x (виртуальное волновое напряжение), возбуждающую медленное течение.

бречь. В таком приближении к поверхности жидкости должно быть приложено касательное напряжение τ_x , обеспечивающее сохранение полного импульса,

$$\tau_x = -\partial_t \pi_x - \partial_x \pi_{xx} = 2\rho \nu \omega (kH)^2. \quad (16)$$

Выражение (16) проиллюстрировано на рис. 1. Первое слагаемое в правой части (16) соответствует затуханию поверхностных волн со временем [3], которое возможно в общем случае, но отсутствует в нашем примере, а второе слагаемое отвечает затуханию волн в пространстве [4]. Подчёркнём, что дисбаланс в правой части (16) приводит к появлению только поверхностной силы, поскольку в объёме, т.е. вне вязкого подслоя, течение, связанное с волновым движением, остаётся потенциальным, а потому действие нелинейности не может привести к возникновению из него медленного вихревого течения.

Виртуальное волновое напряжение τ_x передаёт импульс от быстрых волн к медленному течению $\mathbf{V}$, которое распространяется в объём жидкости за счёт вязкой диффузии. На начальном этапе, пока амплитуда течения $\mathbf{V}$ мала, данный процесс описывается уравнением Навье–Стокса

$$\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\frac{\nabla \mathcal{P}}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (18)$$

где $\mathcal{P}$ — давление, связанное с медленным течением и обеспечивающее выполнение условия несжимаемости (18). Эти уравнения необходимо дополнить граничными условиями на поверхности

$$\rho \nu \partial_z V_x|_{z=0} = \tau_x, \quad V_z|_{z=0} \simeq 0, \quad (19)$$

предполагающими, что медленное течение оставляет поверхность жидкости плоской. Обратим внимание, что в данном приближении мы не учитываем вклад в уравнение Навье–Стокса, связанный с вихревой силой Крейка–Лейбовича [56], который мы подробнее обсудим в разделе 4.

В качестве иллюстрации определим установившееся медленное течение в жидкости толщиной d . Будем считать, что эта толщина велика по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ (условие глубокой воды для поверхностных волн), но мала по сравнению с длиной распространения $l_v = 1/(4\gamma^2 k)$. Тогда в главном порядке по $d/l_v \ll 1$ можно решать уравнения в предположении, что приложенная к поверхности жидкости сила постоянна и что рассматриваемая система однородна вдоль оси x . За

большое время медленное течение проникнет на всю глубину, и поэтому мы должны дополнительно потребовать обнуления скорости на дне

$$\mathbf{V}|_{z=-d} = 0. \quad (20)$$

Мы также будем считать, что в установившемся режиме перенос массы в горизонтальном направлении отсутствует,

$$\int_{-\infty}^0 V_x(z) dz = 0, \quad (21)$$

что обеспечивается соответствующим повышением среднего уровня жидкости в сторону увеличения координаты x . Забегая вперёд, отметим, что поправкой к этому выражению, обусловленной дрейфом Стокса, можно пренебречь, поскольку $d \gg 1/k$.

Теперь перейдём к вычислениям. Условие несжимаемости (18) приводит к $\partial_z V_z = 0$ и совместно с граничным условием (20) это означает, что $V_z = 0$. Далее, z -компонента уравнения (17) сводится к $\partial_z P = 0$, что означает неизменность давления в вертикальном направлении. Рассматривая x -компоненту уравнения (17) совместно с граничными условиями (19), (20) и соотношением (21), мы находим

$$V_x(z) = \frac{\omega(kH)^2 d}{2} \left(\frac{3z^2}{d^2} + \frac{4z}{d} + 1 \right). \quad (22)$$

Полученный ответ совпадает с результатом работы [2, уравнение (305)]. Отметим, что в пределе $\nu \rightarrow 0$ ответ остаётся конечным и не зависит от вязкости, хотя поверхностная сила (16), возбуждающая медленное течение, имеет вязкую природу и пропорциональна ей.

2.3. Дрейф Стокса

До сих пор мы применяли эйлерово описание движения, интересуясь, как устроено поле скорости потока в различных точках пространства. На практике часто более интересной является скорость перемещения бесконечно малых элементов жидкости — лагранжева скорость. В лабораторных экспериментах для измерения поля скорости в поток часто добавляют мелкие частицы, пассивно переносимые потоком, и фиксируют их перемещение. Обратим внимание, что такая методика накладывает ряд ограничений на свойства используемых частиц. В частности, частицы должны аккуратно следовать за движением жидкости и не должны влиять на свойства течения и самой жидкости, а также собираться в кластеры. При наличии волн средняя лагранжева скорость отличается от средней эйлеровой скорости потока, хотя в каждый момент времени в каждой точке эти скорости совпадают. Разность между этими скоростями называется дрейфом Стокса. Впервые данное явление было описано в классической работе [1], а в качестве современной литературы можно рекомендовать обзор [69].

Рассмотрим движение элемента жидкости вдоль лагранжевой траектории, когда по её поверхности распространяется волна. Движение элемента описывается нелинейным уравнением

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{R}), \quad (23)$$

где вектор $\mathbf{R}(t)$ описывает положение лагранжевой частицы, а $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ — эйлерова скорость потока. В общем случае $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{V}$, где $\mathbf{u}$ описывает быстрое волновое движение, а $\mathbf{V}$ соответствует медленному течению.

Пусть в начальный момент времени лагранжева частица находилась в точке $\mathbf{R}(t_0) = \mathbf{r}_0$. Поле скорости в окрестности этой точки можно разложить в ряд Тейлора

$$v_i(t, \mathbf{r}) = v_i(t, \mathbf{r}_0) + G_{ij}(t, \mathbf{r}_0)(r_j - r_{0j}) + \dots, \quad (24)$$

где $G_{ij}(t, \mathbf{r}_0) = \partial_j v_i(t, \mathbf{r}_0)$ — тензор градиента скорости, латинские индексы пробегает значения x, y, z , и мы суммируем по повторяющимся индексам. Подставляя разложение (24) в уравнение (23), находим смещение частицы $\delta \mathbf{R} = \delta \mathbf{R}_1 + \delta \mathbf{R}_2$ с точностью до второго порядка по амплитуде волны

$$\delta \mathbf{R}_1(t) = \int_{t_0}^t dt' \mathbf{v}(t', \mathbf{r}_0), \quad (25)$$

$$\delta R_{2i}(t) = \int_{t_0}^t dt' G_{ij}(t', \mathbf{r}_0) \delta R_{1j}(t'), \quad (26)$$

причём для вычисления $\delta \mathbf{R}_2$ достаточно удержать только линейные по амплитуде волны слагаемые в $\delta \mathbf{R}_1$ и G_{ij} . Усредняя по быстрым волновым колебаниям, находим среднюю лагранжеву скорость пассивной частицы

$$V_i^L = V_i + \langle G_{ij}(t, \mathbf{r}_0) \delta R_{1j}(t) \rangle. \quad (27)$$

Последнее слагаемое в выражении (27) называется дрейфом Стокса и обозначается $\mathbf{U}^S$.

Используя выражение (6) для потенциала поля скорости бегущей гравитационной волны в идеальной жидкости, находим

$$\mathbf{U}^S = (\omega k H^2 \exp(2kz), 0, 0). \quad (28)$$

В линейном приближении лагранжевы траектории в поле гравитационной волны на глубокой воде имеют вид окружностей. Учёт слагаемых второго порядка приводит к тому, что эти окружности становятся разомкнутыми и частица медленно дрейфует в направлении распространения волны (рис. 2). Дрейф Стокса $\mathbf{U}^S$ практически мгновенно реагирует на изменение амплитуды волны, соответствующее время отклика можно оценить как период волновых колебаний.

Выражение (28) для дрейфа Стокса остаётся справедливым и для маловязкой жидкости за пределами вязкого подслоя вблизи поверхности, поскольку вязкость практически не влияет на потенциальную компоненту скорости волнового движения. Ситуация внутри вязкого под-

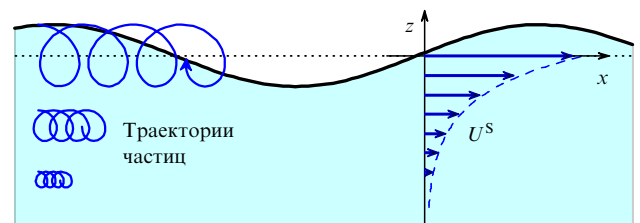


Рис. 2. Дрейф Стокса для волны, бегущей по поверхности глубокой воды.

сложения требует отдельного рассмотрения, которое мы проведём в разделе 3. Отметим также, что поток массы жидкости через поперечное сечение волны можно найти, если проинтегрировать дрейф Стокса по вертикали. Результат останется прежним

$$\pi_x \simeq \rho \int_{-\infty}^0 dz U_x^S = \frac{\rho \omega H^2}{2}, \quad (29)$$

ср. с выражением (13). Ниже, в разделе 3.4, мы обобщим выражения (28) и (29) на случай произвольного волнового поля с малой спектральной шириной.

Измерение дрейфа Стокса оказывается сложной экспериментальной задачей вследствие того, что следует исключить (либо учесть) все типы индуцированных волной эйлеровых течений. Удивительно, но эта задача остаётся актуальной до сих пор [70]. Например, в недавних работах [71, 72] для измерения дрейфа Стокса авторы анализировали траектории лагранжевых частиц при прохождении волнового пакета. Волновое поле в виде ограниченного во времени и пространстве волнового пакета было выбрано с тем, чтобы исключить возбуждение среднего вихревого течения, рассмотренного выше в разделе 2.2. В случае монохроматических волн гидродинамическая нелинейность приводит к возникновению дополнительного потенциального вклада в медленное течение, который следует учитывать при обработке экспериментальных данных. Мы обсуждаем указанный вклад в разделе 2.4. Его происхождение никоим образом не связано с вязкостью жидкости, и его следует отличать от медленного вихревого течения, которому посвящён настоящий обзор.

2.4. Медленное потенциальное течение, вызванное движением волновых пакетов

В слабонемонохроматической волне поверхностные плотности импульса π_x (13) и его потока π_{xx} (15) медленно меняются с координатой и временем даже в идеальной жидкости. Это приводит к возникновению крупномасштабной медленной потенциальной компоненты течения [68], скорость которой мы будем в дальнейшем обозначать $\langle \mathbf{u} \rangle$. Хотя такое течение не является предметом интереса данного обзора, здесь мы приводим основные свойства таких медленных течений, для того чтобы иметь возможность сравнить и отличить их от крупномасштабных вихревых течений, порождённых волнами в слабвязкой жидкости.

Если спектральная ширина пакета волн равна $\Delta\omega \ll \omega$, то пространственный масштаб медленных потенциальных течений равен $l \sim c_g/\Delta\omega$ и, таким образом, значительно превышает длину волны. Их скорость оценивается как $\langle u \rangle \sim kH^2\Delta\omega \exp(z/l)$, если глубина жидкости d превышает характерный масштаб течений, $d \gg l$ [72]. Таким образом, эти течения слабы не только по малой крутизне волны $kH \ll 1$, но и по малой относительной спектральной ширине $\Delta\omega/\omega \ll 1$. Важно отметить, что потенциальность таких течений определяет равенство по порядку величины амплитуд вертикальной и горизонтальной скоростей, $\langle u_z \rangle \sim \langle u_x \rangle$. Если же глубина жидкости по-прежнему удовлетворяет соотношению $kd \gg 1$, но она меньше, чем горизонтальный размер волнового пакета, $l \gg d$, то оценками для скоростей служат $\langle u_x \rangle \sim \omega H^2/d$ и $\langle u_z \rangle \sim kH^2\Delta\omega(1 + z/d)$ [71]. Горизонтальная скорость обсуждаемых течений направлена

противоположно дрейфу Стокса. Вблизи поверхности жидкости эти течения параметрически слабее дрейфа Стокса, но они проникают глубоко в толщу жидкости и на достаточно большой глубине могут приводить к смещению лагранжевых частиц в противоположную сторону по сравнению со смещением частиц вблизи поверхности. Отметим также, что детальное математическое описание движения волновых пакетов приведено, например, в работе [73], а обсуждение геометрической картины распределения медленной скорости вокруг локализованного в пространстве волнового пакета можно найти в обзоре [74] и монографии [62]. Учёт обратного влияния медленных течений на волну обсуждается в работе [75].

Для полноты картины упомянем, что результат медленного потенциального отклика на нелинейное взаимодействие двух волн, имеющих малую разность частот $\Delta\omega$ и распространяющихся в произвольных направлениях с волновыми векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, был рассмотрен в работе [76]. Оценкой для скорости медленного потенциального течения в предельном случае $d \gg 1/|\Delta\mathbf{k}|$ является $\langle u \rangle \sim kH^2\Delta\omega$, что совпадает с вышеприведённой оценкой для скорости медленного течения, индуцированного плоскими волновыми пакетами. Далее в обзоре мы не рассматриваем в деталях медленное потенциальное течение, поскольку его амплитуда вблизи поверхности относительно мала, а концентрируемся на медленном вихревом течении и дрейфе Стокса.

3. Генерация течений скрещенными волнами на загрязнённой поверхности

Данный раздел посвящён анализу генерации медленных вихревых течений в случае, когда поверхность жидкости покрыта тонкой жидкой плёнкой. Сперва мы разберём, как наличие плёнки изменяет поле скорости волнового движения и как это поле скорости устроено вблизи поверхности жидкости, внутри тонкого вязкого подслоя. Затем мы проследим, как нелинейное слагаемое в уравнении Навье–Стокса приводит к появлению виртуального волнового напряжения, возбуждающего медленное течение. Теория будет построена для произвольной формы отклонения поверхности жидкости от равновесия. В заключение мы проведём краткий обзор недавних экспериментальных работ и обсудим их результаты в контексте разработанной теории.

3.1. Уравнения движения и граничные условия

Сформулируем уравнения для описания течения несжимаемой жидкости, поверхность которой покрыта тонкой жидкой плёнкой. В объёме поле скорости удовлетворяет уравнению Навье–Стокса и условию несжимаемости:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (30)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (31)$$

Напомним, что ось Z направлена вертикально вверх, а модифицированное давление P включает в себя гравитационное слагаемое, т.е. $P = p + \rho g z$, где p — внутреннее давление. В сравнении с описанием движения идеальной жидкости мы учли вязкое слагаемое, которое содержит пространственные производные от поля скорости второго порядка и повышает порядок уравнения. Соответ-

ственно, уравнение Навье–Стокса требует постановки дополнительного граничного условия.

Пусть, как и ранее, отклонение поверхности от положения равновесия $z = 0$ описывается функцией $h(t, x, y)$. Эта функция предполагается однозначной функцией координат, т.е. мы не рассматриваем процессы, связанные с обрушением волн. На поверхности жидкости $z = h(t, x, y)$ мы должны потребовать выполнения кинематического и динамического граничных условий. Кинематическое граничное условие совпадает с выписанным ранее (3) для чисто потенциального течения,

$$\partial_t h = v_z - v_x \partial_x h. \quad (32)$$

Как и прежде, буквы греческого алфавита принимают значения x, y , а по повторяющимся индексам происходит суммирование.

Динамическое граничное условие существенно модифицируется вследствие учёта вязкости жидкости и поверхностной плёнки. По сути, это условие означает, что суммарная сила, действующая на произвольный элемент поверхности, равна нулю. Такое требование — прямое следствие второго закона Ньютона, где мы пренебрегаем слагаемым с ускорением, поскольку плёнка предполагается тонкой и имеет пренебрежительно малую массу. Также мы считаем, что со стороны воздуха к поверхности жидкости не приложены никакие силы. Роль плёнки сводится к тому, что она изменяет коэффициент поверхностного натяжения $\sigma(n)$ в зависимости от поверхностной плотности плёнки n . Неоднородность поверхностного натяжения приводит к дополнительной касательной силе, которая должна быть учтена в граничном условии [45, § 63]. В итоге, проецируя динамическое граничное условие на направление вдоль нормали к поверхности $\mathbf{l}$ и на касательную плоскость, мы получаем

$$P - 2\rho v l l_k \partial_i v_k = \rho g h + \sigma K, \quad (33)$$

$$\rho v \delta_{ij}^\perp l_k (\partial_i v_k + \partial_k v_j) = \sigma' \delta_{ij}^\perp \partial_j n. \quad (34)$$

Здесь $\delta_{ij}^\perp = \delta_{ij} - l_i l_j$ — проектор на касательную плоскость, K — средняя кривизна поверхности, равная следу от тензора кривизны $K_{ik} = K_{ki} = \delta_{ij}^\perp \partial_j l_k$, а $\sigma' \equiv \partial \sigma / \partial n$. Отметим, что оператор $\delta_{ij}^\perp \partial_j$ не содержит производных в направлении, перпендикулярном поверхности, поэтому при вычислении частных производных поле концентрации n может формально считаться продолженным с поверхности в трёхмерное пространство любым удобным способом. Выражение (33) обобщает соотношение (4), учитывая ненулевую вязкость жидкости и дополнительное капиллярное давление. Что касается баланса сил в тангенциальной плоскости (34), то это условие не требуется для идеальной жидкости, и оно связано с более высоким порядком уравнения Навье–Стокса. Укажем также, что единичный вектор нормали к поверхности жидкости $\mathbf{l}$ можно выразить через отклонение поверхности от равновесия

$$\mathbf{l}(t, x, y) = \frac{(-\partial_x h, -\partial_y h, 1)}{\sqrt{1 + (\nabla h)^2}}. \quad (35)$$

Чтобы замкнуть систему уравнений, нам осталось описать динамику поверхностной плотности плёнки, которую здесь мы представим как функцию только двух горизонтальных координат, $n = n(t, x, y)$. Мы будем считать плёнку неразрывной, что означает сохранение её

массы [35]

$$\partial_t n + v_x \partial_x n + n \delta_{ij}^\perp \partial_j v_i = 0, \quad (36)$$

где значения поля скорости и его градиентов следует брать на поверхности жидкости. Второе слагаемое в (36) описывает перенос вещества плёнки. Третье слагаемое учитывает процесс её сжатия/растяжения; отметим, что в нём в силу несжимаемости жидкости двумерная дивергенция скорости пропорциональна нормальной компоненте вязкого стресса напряжений, фигурирующего в граничном условии (36), $\delta_{ij}^\perp \partial_j v_i = -l_i l_j \partial_i v_j$. Как обсуждалось ранее, используемая нами модель плёнки не описывает самый общий случай и имеет ограниченную область применения, тем не менее она достаточно неплохо описывает проводимые эксперименты. Случай свободной поверхности жидкости соответствует предельному переходу $\sigma'(n) \rightarrow 0$, и в этом приближении описывать поверхностную плотность плёнки не требуется.

До сих пор мы обсуждали граничные условия на поверхности жидкости $z = h(t, x, y)$. Что касается дна, то оно предполагается плоским и совпадающим с плоскостью $z = -d$. На твёрдой границе все три компоненты скорости должны быть равны нулю. В горизонтальной плоскости течение считается неограниченным, если специально не оговорено обратное. В дальнейшем мы будем часто считать жидкость бесконечно глубокой.

При описании вихревого течения, произведённого волнами вблизи поверхности, нам будет удобно пользоваться завихренностью $\varpi = \text{rot } \mathbf{v}$ вместо скорости $\mathbf{v}$. Взяв ротор от уравнения Навье–Стокса (30), находим

$$\partial_t \varpi = -(\mathbf{v} \nabla) \varpi + (\varpi \nabla) \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \varpi. \quad (37)$$

Граничное условие на нормальную к поверхности компоненту завихренности можно получить, если подействовать оператором $\epsilon_{imq} l_m \partial_q$ (содержит только производные вдоль поверхности) на обе части соотношения (34)

$$l_m l_k \partial_k \varpi_m + (\partial_i v_k + \partial_k v_i) \epsilon_{imq} l_m K_{qi} = 0. \quad (38)$$

Здесь ϵ_{ijk} — единичный антисимметричный тензор и $\varpi_i = \epsilon_{ijk} \partial_j v_k$. При выводе уравнения (38) мы использовали тождество $\epsilon_{imq} l_m \partial_q l_i = \epsilon_{imq} l_m K_{qi} = 0$, которое можно проверить прямым вычислением. Заметим, что градиент поверхностного натяжения не входит в граничное условие (38), поскольку поверхностная сила, возникающая вследствие пространственной неоднородности поверхностного натяжения, имеет потенциальный характер. В дальнейшем это обстоятельство значительно упрощает нелинейный анализ.

3.2. Линейная теория поверхностных волн в присутствии плёнки

Линейный анализ поверхностных волн в рассматриваемой системе хорошо известен [26, 28–30]. У закона дисперсии существует две ветви: гравитационно-капиллярные волны и волны Марангони. С точки зрения динамики плёнки гравитационно-капиллярные волны являются преимущественно поперечными, а волны Марангони — продольными. В дальнейшем мы предполагаем, что гравитационно-капиллярные волны являются слабо затухающими. Это обеспечивается, если безразмерный параметр $\gamma = \sqrt{\nu k^2 / \omega} \ll 1$, где ω и k —

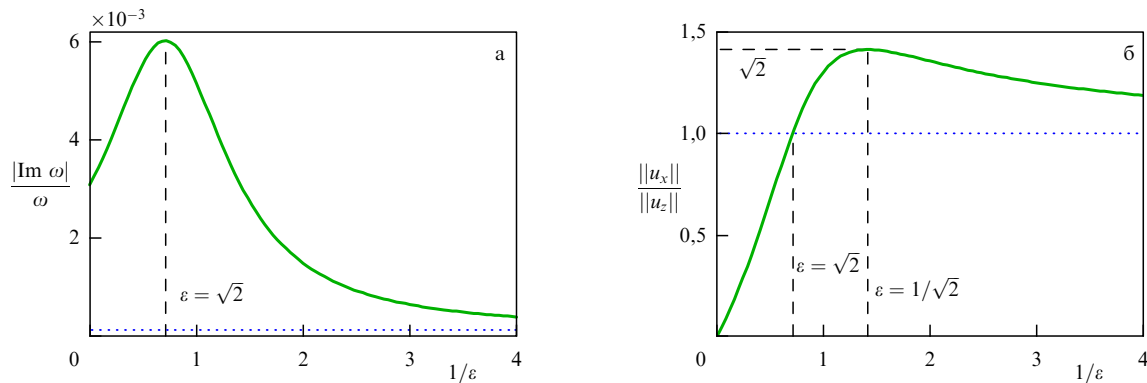


Рис. 3. Зависимость (а) обратной добротности поверхностных волн (42) и (б) отношения амплитуд горизонтальной и вертикальной компонент скорости (43) от обратного значения безразмерного модуля упругого сжатия плёнки $1/\varepsilon$. Численное значение $\gamma \approx 1/120$, что соответствует волнам на воде при частоте 3 Гц. Синими точечными линиями показаны асимптотики для чистой поверхности при $\varepsilon \rightarrow 0$.

частота и волновое число волны. Волны Марангони затухают гораздо быстрее, и по данной причине они нами не рассматриваются. Поле скорости гравитационно-капиллярных волн будем обозначать $\mathbf{u}$. В дальнейшем полное поле скорости $\mathbf{v}$ в нашем анализе будет складываться из быстрого волнового движения $\mathbf{u}$ и медленного вихревого течения $\mathbf{V}$.

В линейном приближении все величины, характеризующие гравитационно-капиллярные волны, можно выразить через величину отклонения поверхности жидкости от равновесия $h(t, x, y) \propto \exp(ik_x r_x - i\omega t)$. Поле скорости для случая глубокой воды $d \gg 1/k$ определяется выражением [36]

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\exp(kz) - D \exp(\kappa z)}{k(1 - (k/\kappa)D)} \partial_x \partial_t h, \\ u_z &= \frac{\exp(kz) - (k/\kappa)D \exp(\kappa z)}{1 - (k/\kappa)D} \partial_t h, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\kappa = \sqrt{k^2 - i\omega/\nu}$ (с положительной действительной частью), а вся зависимость от свойств плёнки сводится к фактору

$$D = \frac{2i\gamma - \varepsilon}{i\gamma(\kappa^2 + k^2)/(\kappa k) - \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{-n_0 \sigma'(n_0)}{\rho \sqrt{\nu \omega^3/k^2}}, \quad (40)$$

где n_0 — равновесное значение поверхностной плотности плёнки на покоящейся поверхности, а параметр $\varepsilon > 0$ можно назвать безразмерным модулем упругого сжатия плёнки. Эта величина должна быть положительной, чтобы плёнка была термодинамически устойчивой [77]. Обратим внимание, что значение ε характеризует не только свойства плёнки, но также зависит от параметров волнового движения. При фиксированном значении коэффициента сжатия плёнки $-n_0 \sigma'(n_0)$ максимум безразмерного параметра ε достигается в области перехода от гравитационных к капиллярным волнам при $k = \sqrt{5g\rho/\sigma_0}$, где σ_0 — поверхностное натяжение в состоянии покоя.

Выражение для поля скорости (39) включает в себя два вклада. Первый вклад пропорционален $\exp(kz)$ и соответствует потенциальной части поля скорости, которая проникает в глубину жидкости на расстояние порядка $1/k$. Второй вклад пропорционален $\exp(\kappa z)$ и обусловлен вязкостью жидкости. Он локализован в тонком вязком подслое вблизи поверхности толщиной $\delta \sim$

$\sim \gamma/k \ll 1/k$. За пределами вязкого подслоя вторым вкладом можно пренебречь и поле скорости становится потенциальным.

Свойства плёнки в нашей модели характеризуются одним безразмерным параметром $\varepsilon > 0$, и они влияют на поле скорости волны посредством комплексного параметра D . Случай свободной поверхности соответствует $\varepsilon \rightarrow 0$ и $D \rightarrow 2\kappa k/(\kappa^2 + k^2)$ и отдельно проанализирован в работе [12]. Другой предельный случай $\varepsilon \rightarrow \infty$ и $D \rightarrow 1$ описывает практически несжимаемую плёнку и описан в работе [35]. В промежуточном диапазоне абсолютное значение параметра D порядка или меньше единицы, поэтому множитель kD/κ мал, по крайней мере, как $\gamma \ll 1$. Это означает, что поверхностная плёнка в основном изменяет непотенциальную часть горизонтальной скорости. Более того, если $|D| \sim 1$, то такая непотенциальная поправка становится сравнимой с потенциальным вкладом внутри вязкого подслоя. Если на поверхности жидкости нет плёнки, то $|D| \sim \gamma$ и потенциальный вклад доминирует везде.

Для дальнейших вычислений нам понадобится выражение для завихренности в линейном приближении $\varpi^u = \text{rot } \mathbf{u}$. Она определяется только вихревой частью поля скорости, и поэтому локализована внутри вязкого подслоя. Прямое вычисление даёт

$$\varpi_x^u = \epsilon_{\alpha\beta} \frac{(\kappa^2 - k^2)D}{\kappa k(1 - (k/\kappa)D)} \exp(\kappa z) \partial_\beta \partial_t h, \quad \varpi_z^u = 0, \quad (41)$$

где $\epsilon_{\alpha\beta}$ — единичный антисимметричный тензор второго ранга. Завихренность направлена горизонтально в линейном приближении по амплитуде волны, и она существенно зависит от свойств плёнки.

Наличие плёнки на поверхности жидкости не изменяет закон дисперсии поверхностных волн $\omega^2 = gk + \sigma_0 k^3/\rho$, за исключением возможного изменения равновесного значения σ_0 коэффициента поверхностного натяжения. Однако скорость затухания волн $-\text{Im } \omega$ существенно изменяется [36]

$$\frac{\text{Im } \omega}{\omega} \approx -2\gamma^2 - \frac{\gamma}{2\sqrt{2}} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{2} + 1}. \quad (42)$$

Второе слагаемое в выражении (42) становится ведущим, если $\varepsilon \gg \sqrt{\gamma}$, и затухание волн достигает максимума при конечной сжимаемости плёнки $\varepsilon = \sqrt{2}$ (рис. 3а). Физически такое поведение связано с близостью резонанса

между гравитационно-капиллярными волнами и волнами Марангони [77–79]. Отметим, что выражение (42) не учитывает диссипацию, связанную с трением на границах системы, что может быть важно в лабораторных экспериментах и зависит от размера экспериментальной установки и параметров волнового движения (см. работу [37] и [45, § 25]). Формулу (42) с поправкой на трение у границ можно использовать для восстановления значения модуля упругого сжатия плёнки ε по экспериментальным измерениям времени затухания поверхностных волн.

Другой способ определения эластичности плёнки, спонтанно формирующейся на поверхности жидкости, был разработан в работе [36]. Авторы предложили измерять горизонтальную и вертикальную скорости волнового движения на поверхности жидкости и проанализировать отношение их амплитуд $\|u_i\| = \max_{x,y,t} |u_i|$. Для плоской волны, распространяющейся в направлении оси x , получается

$$\frac{\|u_x\|}{\|u_z\|} \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{2} + 1}}. \quad (43)$$

Отношение амплитуд изменяется в диапазоне от 0 до $\sqrt{2}$ в зависимости от свойств плёнки (рис. 3б). Применение комбинации обоих методов позволяет устранить возможную неоднозначность в определении параметра ε , когда соответствующие уравнения имеют два решения.

3.3. Нелинейная генерация медленного течения

Теперь рассмотрим процесс генерации медленного вихревого течения $\mathbf{V}$, происходящий за счёт затухания поверхностных волн. Данный эффект квадратичен по амплитуде волн, поэтому характерная частота вынужденного течения $\mathbf{V}$ определяется характерной шириной $\Delta\omega$ спектра поверхностных волн. Мы будем полагать, что такой спектр узок, $\Delta\omega \ll \omega$. Это позволяет разделить по частотам относительно быстрые волны $\mathbf{u}$ и медленные вихревые течения $\mathbf{V}$.

Поскольку течение $\mathbf{V}$ несжимаемо, то его можно параметризовать двумя компонентами, в качестве которых мы выберем вертикальные компоненты завихренности ϖ_z^V и скорости V_z , где $\varpi^V = \text{rot } \mathbf{V}$. Сейчас мы полагаем, что вихревое течение $\mathbf{V}$ слабое, характеризующее его число Рейнольдса невелико, так что динамика этих двух типов течения линейна и не зависима друг от друга. Если $V_z = 0$, то линии тока медленного течения направлены всюду горизонтально, а условие несжимаемости принимает вид $\partial_x V_x = 0$. Ниже, в разделе 3.5, мы покажем, что вертикальное течение V_z оказывается подавленным, поэтому здесь мы начнём с расчётов генерации вертикальной завихренности ϖ_z^V .

Уравнение для ϖ_z^V может быть получено из z -компоненты объёмного уравнения (37) и граничного условия (38) в результате линеаризации по медленному течению $\mathbf{V}$ и удержанию квадратичных по амплитуде волны вкладов, усреднённых по быстрым волновым осцилляциям. Однако для анализа нелинейных слагаемых нам оказывается недостаточно построенной в разделе 3.2 линейной теории. Дело в том, что выражения (39) и (41) для полей скорости и завихренности верны буквально, только если амплитуда волн мала по сравнению с толщиной вязкого подслоя, $h \ll \delta$. На практике обычно реализуется обратный случай, $\delta \ll h \ll 1/k$, и тогда вяз-

кий подслоя следует отсчитывать от текущей поверхности жидкости [80], учитывая как её смещение, так и поворот относительно плоскости $z = 0$. Математическая сторона этой процедуры описана в приложении А. В результате вихревые компоненты скорости волнового движения в выражениях (39) и (41) следует отсчитывать от поверхности, что соответствует формальной замене $\exp(\kappa z) \rightarrow \exp(\kappa(z - h))$, а горизонтальные компоненты теперь следует понимать как соответствующие проекции вихревой скорости на касательные к поверхности жидкости векторы.

В итоге z -компонента уравнения на завихренность (37), усреднённая по быстрым волновым осцилляциям, принимает вид

$$(\partial_t - \nu\Delta)\varpi_z^V = \langle \varpi_\alpha^u \partial_\alpha (u_z - \partial_t h) \rangle. \quad (44)$$

Вид нелинейного члена, стоящего в правой части (44), устанавливается из уравнения (A2). Вклад в правую часть, пропорциональный $\partial_t \partial_\alpha h$, обеспечивает учёт поворота поверхности жидкости, который сопровождается поворотом вектора ϖ^u , что само по себе не приводит к генерации среднего течения. Граничное условие (38) после усреднения по быстрым волновым осцилляциям приводит к

$$\partial_z \varpi_z^V = -\epsilon_{xy} \langle (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) \partial_\beta \partial_\gamma h \rangle. \quad (45)$$

При вычислении среднего от первого слагаемого в (38) мы учли, что часть завихренности ϖ^u , линейная по амплитуде волны, имеет нулевую проекцию на нормаль к поверхности жидкости. Отметим, что в правой части фигурирует кривизна поверхности, поскольку в линейном порядке по амплитуде волны $\partial_\beta \partial_\gamma h = -K_{\beta\gamma}$.

Правая часть уравнения (44) отлична от нуля только в вязком подслое, поэтому именно в нём и происходит генерация медленного вихревого течения. Поскольку характерный горизонтальный масштаб медленных течений существенно больше — не менее длины волны, — то систему уравнений (44) и (45) можно переписать в эквивалентном виде

$$(\partial_z^2 - \hat{\kappa}^2)\varpi_z^V = 0, \quad \rho\nu \partial_z \varpi_z^V|_{z=0} = \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\alpha \tau_\beta, \quad (46)$$

где оператор $\hat{\kappa}^2 = \partial_t/\nu - \partial_\alpha \partial_\alpha$, а τ_α есть введённое ранее виртуальное волновое напряжение. После подстановки в правые части выражений (44) и (45) соотношений (39) и (41) для линейных волн получаем

$$\epsilon_{\alpha\beta} \partial_\alpha \tau_\beta = \rho\nu\epsilon_{\alpha\beta} \left\langle \frac{2}{k} (\partial_\alpha \partial_\gamma h) (\partial_\beta \partial_\gamma \partial_t (1 - \hat{D})h) + (\partial_\alpha h) (\partial_\beta \partial_t \hat{D} \hat{\kappa} h) \right\rangle, \quad (47)$$

где оператор $\hat{D}$ был определён ранее в выражении (40), а волновое число k соответствует волнам на частоте ω . В предельном случае чистой поверхности $\varepsilon \ll \sqrt{\gamma}$ в соотношении (47) надо учесть, что $\hat{D} \hat{\kappa} \simeq 2k$, а сам $|\hat{D}| \sim \gamma \ll 1$, и по этому малому параметру произвести отбор слагаемых. Выражение для напряжения τ в этом случае было ранее получено, например, в [81, Eq. (7.154)]. В противоположном предельном случае существенного влияния плёнки $\varepsilon \gg \sqrt{\gamma}$, наоборот, $\gamma \ll |\hat{D}| \leq 1$, так что в выражении (47) следует удерживать только вторую строчку. Формальным

решением уравнения (46) является

$$\varpi_z^V = \frac{\exp(\hat{\kappa}z)}{\rho v \hat{\kappa}} \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\alpha \tau_\beta. \quad (48)$$

Заметим, что виртуальное волновое напряжение (47) является усреднённой по времени квадратичной формой от h и поэтому содержит только малые частоты $\sim \Delta\omega$. Ситуацию общего случая можно разложить на прямую сумму результата попарных интерференций волн, распространяющихся под углом 2θ друг к другу [40]. Такая пара волн производит напряжение τ с волновым числом $q = 2k \sin \theta \leq 2k$. Из (40), (42) и (47) можно сделать вывод, что абсолютное значение виртуального волнового напряжения $\tau \sim \text{Im } \omega \cdot \rho \omega \langle h^2 \rangle$. Согласно выражению (48) завихренность ϖ_z^V распространяется на глубину $\sim \sqrt{v/\Delta\omega}$, если время изменения $1/\Delta\omega$ виртуального волнового напряжения мало по сравнению со временем $t_E = 1/vq^2$ вязкой релаксации вихревого течения. Амплитуда течения $V \sim \tau/(\rho\sqrt{v}\Delta\omega)$. Если же волновое движение почти монохроматическое, так что $1/\Delta\omega \gg t_E$, то течение имеет вертикальную зависимость $\exp(qz)$ и проникает на глубину $1/q$. Оценкой для амплитуды течения является $V \sim \tau/(\rho v q)$. При одном и том же волновом движении $h(t, x, y)$ правая часть выражения (47) увеличивается в $1/\gamma$ раз при переходе от чистой поверхности к поверхности с плёнкой, обладающей $\varepsilon \gtrsim 1$. Если волновое движение монохроматично, то амплитуда завихренности (48) не зависит от вязкости в случае чистой поверхности и велика как $1/\gamma$, если $\varepsilon \gtrsim 1$.

3.4. Дрейф Стокса и массовый транспорт

Для того чтобы получить лагранжеву скорость, усреднённую по волновым колебаниям, нам надо помимо эйлерова течения (48) рассчитать также и стоксов дрейф (27). В глубине жидкости вне вязкого подслоя дрейф Стокса определяется потенциальным течением и поэтому остаётся тем же самым, что и в невязком случае [56],

$$U_z^S = \exp(2kz) \langle k^{-2} \partial_\beta h \partial_\alpha \partial_\beta \partial_t h + h \partial_\alpha \partial_t h \rangle, \quad (49)$$

а вертикальная компонента $U_z^S \approx 0$.

Теперь найдём поправку к выражению (49), возникающую внутри вязкого подслоя. Этот вопрос является важным с точки зрения анализа движения плавающих на поверхности частиц, размер которых мал по сравнению с толщиной вязкого подслоя. Поскольку вязкий подслой отсчитывается от текущей поверхности жидкости, то выражение (27) должно быть модифицировано по той же схеме, что и выражение (A2). А именно, при определении вариации вихревой части волнового течения смещение лагранжевой траектории должно отсчитываться от поверхности жидкости, т.е.

$$V_i^L = V_i + U_i^S, \quad U_i^S = \langle G_{ij}^\phi(t, \mathbf{r}_0) \delta R_{ij}(t) \rangle + \langle G_{ij}^\psi(t, \mathbf{r}_0) (\delta R_{ij}(t) - \delta_{ij} h(t)) \rangle, \quad (50)$$

где G_{ij}^ϕ и G_{ij}^ψ — градиенты потенциальной и вихревой составляющей поля скорости (39) в линейной волне. Расчёт по формуле (50) на поверхности приводит к выражению (49) с $z = 0$, в котором в первом слагаемом надо произвести замены $h \rightarrow (1 - \hat{D})h$.

Если поверхность жидкости чистая, $|D| \sim \gamma$, то поправка к результату (49), следующая из полного выраже-

ния (50), мала как γ и ею следует пренебречь. Если же влияние плёнки на движение поверхности существенно, $\varepsilon \gtrsim 1$ и $|D| \sim 1$, то дрейф Стокса оказывается мал по крайней мере как γ по сравнению с эйлеровой скоростью (48), и поэтому его учёт для стационарного случая являлся бы превышением точности. В итоге получается, что поправка к дрейфу Стокса внутри вязкого подслоя оказывается несущественной и в дальнейшем её можно не учитывать.

Как и касательное напряжение, дрейф Стокса можно рассматривать как результат интерференции двух волн (см. текст после выражения (48)). Укажем на характерные отличия дрейфа Стокса от медленных эйлеровых вихревых течений, генерируемых скрещенными волнами. Во-первых, проникновение дрейфа Стокса в глубину жидкости описывается фактором $\exp(2kz)$ и не зависит от пространственной конфигурации волн. Медленные вихревые течения могут проникать на гораздо большую глубину, определяемую фактором $\exp(qz)$ с $q = 2k \sin \theta$, если поверхностные волны распространяются под малым углом $2\theta \ll 1$ друг к другу [40]. Во-вторых, на поверхности дрейф Стокса оказывается сопоставим с установившемся эйлеровым течением только в случае чистой поверхности, $|D| \sim \gamma$, и волн, распространяющихся под углом $\sin(2\theta) \sim 1$ друг к другу. Если угол мал, $\theta \ll 1$, то амплитуда эйлерова течения V возрастает в $\sim 1/\theta$ раз, тогда как амплитуда дрейфа Стокса по порядку величины остаётся неизменной. Поверхностная плёнка приводит к дополнительному усилению эйлерова течения. В-третьих, дрейф Стокса является почти мгновенным (время одного периода колебаний) откликом на волновое течение. Это отличие в динамических свойствах от медленных вихревых течений проявляется, если амплитуда поверхностных волн изменяется на временах, гораздо меньших $t_E \sim 1/vq^2 = 1/(4vk^2 \sin^2 \theta)$. Такая ситуация реализуется не только для малых углов 2θ между волнами [41], но может наблюдаться и для ортогональных поверхностных волн, если характерное время затухания и установления волнового движения оказывается существенно меньше оценки $\sim 1/(vk^2)$ вследствие дополнительной диссипации волнового движения у границ системы или из-за присутствия поверхностной плёнки [37]. Отметим, что в данном случае для интерпретации движения частиц на поверхности может потребоваться учёт дрейфа Стокса на начальных временах, даже если поверхность жидкости покрыта плёнкой.

В наших ранних работах [35, 36] не производился отсчёт вертикальной координаты от поверхности жидкости для вычисления вихревой части скорости в линейной волне. В результате в отдельно взятых дрейфе Стокса и эйлеровой скорости внутри вязкого подслоя возникали вклады, относительно большие как $1/\gamma$ по сравнению с вихревой поправкой, задаваемой выражением (50). Эти вклады равны друг другу и противоположны по знаку, так что полная лагранжева завихренность ϖ_z^L в вязком подслое совпадала с результатом изложенных выше вычислений. Представленный здесь метод является более предпочтительным с той точки зрения, что он позволяет сразу исключить нефизические вклады как в дрейф Стокса, так и в эйлерову скорость. В противном случае для одной плоской бегущей волны можно получить, что дрейф Стокса обращается в нуль на чистой поверхности жидкости благодаря вязкой поправке [82]. На самом же деле дрейф Стокса для бегущей волны на

поверхности даже в пределе почти несжимаемой плёнки $\varepsilon \rightarrow \infty$ сокращается всего в два раза по сравнению со случаем чистой поверхности и не обращается в нуль. Это, однако, в нашей постановке задачи не имеет физического значения, поскольку дрейф Стокса оказывается сопоставим с эйлеровым течением, устанавливающимся за всего один период колебаний под действием виртуального волнового напряжения, теперь оцениваемым как $\sim 1/\gamma$ раз бóльшим по сравнению с выражением (16).

Если волновое движение существенно трёхмерно, то прямого обобщения соотношения (29) между поверхностной плотностью импульса π_x и интегральным по вертикали дрейфом Стокса не существует. Действительно,

$$\pi_x = \rho \left\langle \int_{-\infty}^h dz v_x \right\rangle \approx \rho k^{-1} \langle h \partial_x \partial_t h \rangle, \quad (51)$$

так что разница этих двух величин представляет собой циркуляционный поток:

$$\pi_x - \int_{-\infty}^0 dz U_x^S = \frac{1}{4k} \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\beta \langle \epsilon_{\gamma\delta} \partial_\gamma h \partial_\delta \partial_t h \rangle. \quad (52)$$

Источник различия состоит в том, что в общем случае лагранжевы траектории в волновом поле являются существенно трёхмерными (напомним, что такие траектории являются почти замкнутыми на одном периоде). В результате потоки жидкости и лагранжевых частиц через единичную вертикально ориентированную площадку прямоугольной формы не совпадают за счёт того, что на краях площадки существуют траектории, которые пересекают её только в одном направлении за один период колебаний, а их возвращение происходит за краем площадки. В случае плоской волны (29) данный краевой эффект имеет место только у горизонтальных границ площадки, поэтому интегрирование по вертикали его устраняет. В случае существенно трёхмерного волнового движения краевой эффект появляется и на вертикальных границах площадки, так что интегрирование по вертикали в (52) не способно его устранить.

3.5. Вертикальное течение

Вернёмся теперь к компоненте медленного течения, имеющей $V_z \neq 0$. Для вывода граничного условия формально проинтегрируем уравнение непрерывности $\text{div } \mathbf{v} = 0$ по вертикали и усредним результат по быстрым волновым осцилляциям

$$\left\langle \int_{-\infty}^h \partial_x v_x dz \right\rangle + \langle v_z|_{z=h} \rangle = 0. \quad (53)$$

В первом слагаемом вынесем производную за знак интегрирования, воспользовавшись правилом дифференцирования интегралов с переменным верхним пределом, а второе слагаемое преобразуем в соответствии с кинематическим граничным условием (32)

$$\frac{\partial_x \pi_x}{\rho} + \partial_x \left\langle \int_{-\infty}^h V_x dz \right\rangle + \langle \partial_t h \rangle = 0. \quad (54)$$

С точностью до второго порядка по амплитуде волны верхний предел интегрирования во втором слагаемом можно положить равным нулю, и с учётом несжимаемо-

сти медленного течения $\text{div } \mathbf{V} = 0$ мы находим окончательный ответ

$$V_z|_{z=0} = \frac{\partial_x \pi_x}{\rho} + \partial_t \langle h \rangle. \quad (55)$$

Это граничное условие является уточнением граничного условия (19) для вертикальной скорости, которое мы использовали ранее.

Оценим правую часть выражения (55). Во-первых, напомним, что нелинейное взаимодействие поверхностных волн может порождать медленное потенциальное течение $\langle \mathbf{u} \rangle$, которое мы обсуждали ранее в разделе 2.4. В соответствии с результатами этого раздела правая часть в случае идеальной жидкости должна быть оценена как $\sim \Delta \omega k \langle h^2 \rangle$, т.е. она имеет малость по спектральной ширине волн. Во-вторых, помимо возбуждения медленного потенциального течения, возможно также возбуждение и медленного вихревого вклада с $V_z \neq 0$. Для неё правая часть имеет либо аналогичную малость по спектральной ширине, либо, если учесть слабое затухание волн $\partial_x \pi_x / \rho \sim \text{Im } \omega k \langle h^2 \rangle$, содержит другую малость — обратную добротность волны (42). Таким образом, граничные условия на V_z (55) и ϖ_z^V (46) отличаются типом, тогда как уравнение в объёме на V_z совпадает с уравнением на ϖ_z^V . В результате оценкой для V_z будет правая часть выражения (55), которая всегда мала по сравнению со скоростью дрейфа Стокса на поверхности $\sim \omega k \langle h^2 \rangle$ либо как $\Delta \omega / \omega \ll 1$, либо как $\text{Im } \omega / \omega \ll 1$.

Подавление течений с $V_z \neq 0$ подтверждается в экспериментах. Существование ненулевого вертикального течения означает сжимаемость поверхностного течения, поскольку двумерная дивергенция лагранжевой скорости $\partial_x V_x^L \neq 0$. В экспериментальной работе [14] было наблюдеено, что двумерная дивергенция скорости мала по сравнению с вертикальной завихренностью ϖ_z^L , а это свидетельствует об относительной малости вихревого течения с $V_z \neq 0$ в соответствии с рассуждениями, представленными выше.

Как обсуждалось ранее, затухание бегущей волны приводит к возникновению виртуального волнового напряжения $\tau = \text{Im } \omega \rho \omega H^2$ (см. выражение (16)). Напряжение τ вызывает течение, которое увлекает вещество плёнки. Если есть границы поверхности, препятствующие движению плёнки, то возникает её реакция, ограничивающая дальнейшее её растяжение и сжатие. Реакция приводит к подавлению вихревого течения под плёнкой. Однако при высоких амплитудах волн напряжение τ может приводить к разрыву плёнки, так что она оказывается унесённой течением с части поверхности, в результате чего в свойствах поверхности появляется пространственная неоднородность [83]. В частности, эта неоднородность может приводить к появлению вертикальной компоненты скорости в индуцированном волной вихревым течении $\mathbf{V}$, но такие сценарии находятся за рамками нашего анализа.

3.6. Обсуждение экспериментов

Теперь мы готовы перейти к обсуждению экспериментов, в которых поверхностные вихревые течения генерировались скрещенными волнами. Первые работы исследовали генерацию течений двумя ортогональными стоячими волнами в квадратных ячейках. Волны могли быть возбуждены как колебаниями менисков на боковых краях ячейки, вызванными её периодическим движением

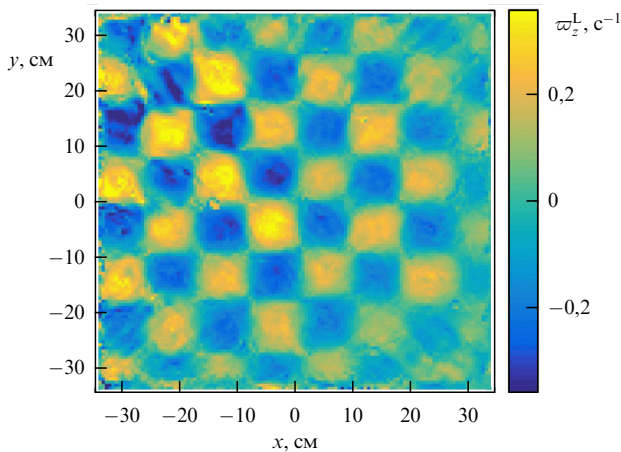


Рис. 4. Распределение вертикальной компоненты завихренности вихревого движения, произведённого двумя ортогональными стоячими волнами (см. выражение (57)); частота волн 3 Гц, разность фаз $\psi = \pi/2$, угловая амплитуда $kH = 0,035$. (Данные взяты из эксперимента [13].)

в вертикальном направлении [12], так и, например, вертикально колеблющимися плунжерами, установленными у боковых границ [37]. Отклонение поверхности жидкости от равновесия в такой системе описывается выражением

$$h = H_1 \cos(\omega t) \cos(kx) + H_2 \cos(\omega t + \psi) \cos(ky), \quad (56)$$

где ψ определяет сдвиг фаз между волнами. Глубину жидкости для простоты будем считать бесконечной. Медленные течения экспериментально можно охарактеризовать вертикальной завихренностью от лагранжевой скорости $\omega_z^L = \omega_z^V + \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\alpha U_\beta^S$, для которой из выражений (48) и (49) в установившемся режиме следует [36]

$$\omega_z^L = - \left[\frac{\epsilon^2 \exp(kz\sqrt{2})}{2\gamma(\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{2} + 1)} + \sqrt{2} \exp(kz\sqrt{2}) + \exp(2kz) \right] \times \\ \times H_1 H_2 \omega k^2 \sin(kx) \sin(ky) \sin \psi. \quad (57)$$

Здесь последнее слагаемое в квадратных скобках соответствует дрейфу Стокса, а первые два описывают вклад эйлеровых течений. Обратим внимание, что вклады имеют разную зависимость от глубины z , но одинаковую пространственную структуру в горизонтальной плоскости. Первое слагаемое в скобках описывает влияние поверхностной плёнки, и оно доминирует, если $\epsilon \gg \sqrt{\gamma}$. В противоположном случае практически чистой поверхности, $\epsilon \ll \sqrt{\gamma}$, им можно пренебречь, и тогда измеряемая в стационарном режиме завихренность ω_z^L не зависит от вязкости жидкости. Экспериментальное наблюдение распределения вихрей приведено на рис. 4.

Наиболее просто с экспериментальной точки зрения измерять течения на поверхности жидкости при $z = 0$. В работе [12] наблюдалась "шахматная доска" вихрей, соответствующая $\omega_z^L \propto \sin(kx) \sin(ky)$, а также было показано, что генерация медленных течений является квадратичным по амплитуде волн эффектом, $\omega_z^L \propto H_1 H_2$. Для объяснения экспериментальных результатов была построена теория, описывающая генерацию эйлеровой завихренности для чистой поверхности, но вклад от дрейфа Стокса не был учтён. В работах [14, 15] авторы, наоборот,

объясняли генерацию "шахматной доски" вихрей дрейфом Стокса и не учитывали вязкий механизм генерации течений. Экспериментальная установка в этих работах позволяла изменять разность фаз ψ между волнами, но при малых значениях ψ в системе возникали крупномасштабные течения, которые существенно деформировали решётку вихрей. Зависимость $\omega_z^L \propto \sin \psi$ была подтверждена количественно в работе [13], где измерения проводились не в стационарном режиме, и поэтому крупномасштабные течения, деформирующие решётку вихрей, не успевали возбуждаться.

Для того чтобы достичь количественного согласия между теорией и экспериментом, потребовалось учесть оба механизма генерации течений, а также влияние тонкой адсорбированной плёнки на поверхности [35, 36]. Соответствующая теория была проверена экспериментально в работе [37]. В ней же экспериментально было доказано существование эйлерова вклада ω_z^V в медленное течение. Идея состояла в том, что поверхностные волны затухают гораздо быстрее медленных течений вследствие наличия плёнки на поверхности и трения о границы. Поэтому после выключения накачки можно было наблюдать "шахматную доску" вихрей даже при полном отсутствии волнового движения. Нестационарные процессы установления и затухания завихренности были также теоретически описаны и экспериментально исследованы в работе [37]. Другая идея, позволяющая проверить существование эйлерова вклада ω_z^V в лагранжеву завихренность ω_z^L , состояла в изучении зависимости интенсивности медленных течений от глубины. Соответствующие измерения были проведены в работе [16], а их результаты были интерпретированы авторами в пользу существования обоих вкладов: как эйлеровой завихренности, так и дрейфа Стокса.

Дальнейшее развитие было связано с исследованием систем, в которых волны распространяются под произвольным углом друг к другу. Пусть две бегущие волны распространяются под углами $\pm\theta$ к оси y , так что поверхность имеет форму

$$h = H_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}) + H_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r}) \quad (58)$$

с волновыми векторами $\mathbf{k}_{1,2} = k(\pm \sin \theta, \cos \theta)$. Тогда установившаяся на больших временах завихренность при неограниченной глубине жидкости равна

$$\omega_z^L = - \left(\frac{\epsilon^2 \exp(qz) \cos \theta}{\sqrt{2}\gamma(\epsilon^2 - \epsilon\sqrt{2} + 1)} + 4 \exp(qz) \cos^3 \theta + \right. \\ \left. + 4 \exp(2kz) \cos^3 \theta \sin \theta \right) H_1 H_2 \omega k^2 \sin(qx), \quad (59)$$

где волновое число, определяющее период модуляции, $q = 2k \sin \theta$. Если угол между волнами мал, то волны способны генерировать крупномасштабное течение, которое имеет большое время релаксации [40, 41]. Этот сценарий позволил объяснить генерацию крупномасштабных течений на больших временах, наблюдавшуюся во многих ранних экспериментах. В последних исследованиях внимание уделено результату интерференции сразу многих волн [18–20]. Сложное волновое движение позволяет контролируемым образом создавать вихревые течения на поверхности со сложной геометрией. Если на поверхности жидкости находятся частицы, то они

вовлекаются в движение вихревыми структурами и их движение можно контролировать перестройкой волнового поля, что открывает дорогу к приложениям, связанным с манипуляцией и сортировкой частиц. При $\theta \rightarrow 0$ достигается пропорциональность между (42) и эйлеровой частью завихренности в (59) как функциями ε , а это соответствует качественному пониманию того, что генерация течения происходит вследствие затухания волны.

4. Взаимодействие волн с приповерхностными течениями

При увеличении интенсивности вихревого течения $\mathbf{V}$ его взаимодействие с волновым движением становится существенным. В результате, с одной стороны, деформация волнового поля вихревым течением приводит к появлению объёмной силы $\mathbf{f}^V$, действующей со стороны волн на течение $\mathbf{V}$, которую называют вихревой силой [57]. С другой стороны, волны начинают рассеиваться и преломляться на вихревом течении. В результате сила $\mathbf{f}^V$ приобретает дополнительные корреляции с течением $\mathbf{V}$, что может существенно модифицировать его динамику; это имеет место, например, в случае циркуляции Ленгмюра (см. ниже). Взаимодействие волн с вихревым течением не зависит от факта наличия слабой вязкости у жидкости, поэтому такое взаимодействие достаточно описывать в рамках модели идеальной жидкости.

Разделение на волновое движение и вихревое течение возможно, если есть разделение этих течений по времени, а именно, частота волн ω велика по сравнению как со скоростью изменения $1/T$ течения $\mathbf{V}$, так и с характерным значением его градиента $\text{grad } \mathbf{V} \sim V/L$,

$$\frac{1}{\omega T} \ll 1, \quad \frac{V}{L\omega} \ll 1, \quad (60)$$

где L — характерный масштаб изменения течения. В частности, это означает, что характеризующее вихревое течение число Фруде мало, $\text{Fr} = V^2/gL \ll 1$. Последнее неравенство позволяет считать, что граничное условие (19) сохраняется и для вертикальной компоненты V_z , т.е. вихревое течение $\mathbf{V}$ не приводит к изменению формы поверхности.

4.1. Вихревая сила

Как и виртуальное касательное напряжение τ , вихревая сила $\mathbf{f}^V$ появляется вследствие того, что волновое течение перестаёт быть полностью потенциальным. Ненулевая высокочастотная завихренность ϖ'' в объёме появляется за счёт того, что волновое поле деформируется ненулевой завихренностью $\mathbf{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V}$ вихревого течения. Чтобы найти ϖ'' , представим волновое течение в виде потенциальной части и малой вихревой добавки $\mathbf{u}''$, $\mathbf{u} = \text{grad } \phi + \mathbf{u}''$. Уравнение на завихренность (37), линеаризованное по амплитуде волны и по амплитуде малой вихревой поправки, имеет вид [56]

$$(\partial_t + (\mathbf{V} \nabla)) \varpi'' = \text{rot} [\text{grad } \phi \times \mathbf{\Omega}], \quad \varpi'' = \text{rot } \mathbf{u}'' . \quad (61)$$

В уравнении (61) мы пренебрегли вязким слагаемым, поскольку масштаб течения ϖ'' в объёме предполагается значительно превышающим вязкий масштаб δ , и слагаемым $(\varpi'' \nabla) \mathbf{V}$, поскольку оно относительно мало как $V/L\omega$ по сравнению с членом $\partial_t \varpi''$. Решением (61)

является

$$\varpi'' = \text{rot} [\delta \mathbf{R}_1 \times \mathbf{\Omega}], \quad (62)$$

$$\delta \mathbf{R}_1(t, \mathbf{r}) = \int^t dt' \text{grad } \phi(t', \mathbf{r}(t')) ,$$

где лагранжева траектория $\mathbf{r}(t)$ задаётся медленным течением, $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{V}(t, \mathbf{r})$, а $\delta \mathbf{R}_1$ есть введённое в (27) смещение лагранжева маркера в результате колебаний волн. Оценкой для амплитуды завихренности (62) является $\varpi'' \sim hV/L$, т.е. вихревая часть волнового осциллирующего движения $\mathbf{u}''$ относительно мала по второму параметру (60), $u''/u \sim V/L\omega$.

Для того чтобы получить обобщение уравнения (17) на медленное течение $\mathbf{V}$ с учётом влияния волн, надо в исходном уравнении (30) выделить слагаемое, билинейное по $\text{grad } \phi$ и ϖ'' , а затем усреднить его по быстрым осцилляциям. Подробные вычисления представлены в приложении Б. Результирующее уравнение Навье – Стокса запишем в форме Ламба [56]

$$\partial_t \mathbf{V} + [\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{V} + \mathbf{U}^S)] = -\frac{\nabla \bar{P}}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{V} . \quad (63)$$

Если слагаемое, пропорциональное дрейфу Стокса, перенести в правую часть (63), то мы получим вихревую силу $\mathbf{f}^V = \rho[\mathbf{U}^S \times \mathbf{\Omega}]$. Вид нелинейного слагаемого в (63) можно интерпретировать так, что завихренность в вихревом течении переносится не только им самим, но и дрейфом Стокса, порождённым волновым движением, т.е. в целом со средней лагранжевой скоростью. Эффективное давление $\bar{P}$ в (63) отличается от физического давления (см. (Б4)). Оно должно быть определено из условия несжимаемости течения $\text{div } \mathbf{V} = 0$ и условия равенства нулю вертикальной скорости V_z на поверхности.

Каким эффектом — виртуальным волновым напряжением τ или вихревой силой $\mathbf{f}^V$ — определяется вихревое течение $\mathbf{V}$, зависит от его амплитуды. Виртуальное волновое напряжение оценивается как $\tau \sim \text{Im } \omega \omega H^2$, где скорость затухания волн дана в (42). Объёмная сила оценивается как $f^V/\rho \sim \omega k H^2 \Omega$ и проникает на глубину $\sim 1/k$, если полагать, что вертикальный масштаб медленного течения больше либо порядка длины волны. Эффекты оказываются одного порядка, когда завихренность медленного течения сравнивается со скоростью затухания волн,

$$\int_{-\infty}^0 dz f^V \sim \tau : \quad \Omega \sim \text{Im } \omega . \quad (64)$$

При меньших амплитудах скорости доминирует эффект, произведённый τ , при больших — произведённый силой $\mathbf{f}^V$. Оценка (64) грубая и может требовать уточнения для специальных геометрий течения.

4.2. Распространение волн на фоне вихревого течения

Теперь рассмотрим, как влияет вихревое течение на распространение волн. Найденная выше завихренность ϖ'' описывает локальное искажение волнового поля, произведённое присутствием вихревого течения $\mathbf{V}$. Нам же теперь нужно получить систему уравнений на потенциал ϕ и на форму поверхности h , которая определяет распространение волн в линейном приближении по их

амплитуде. Всюду мы будем пренебрегать вязкостью. Мы стартуем с уравнения Эйлера для волнового движения $\mathbf{u}$ на фоне вихревого течения $\mathbf{V}$:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla P^u}{\rho} + \mathbf{g}, \quad (65)$$

где P^u есть часть давления, связанная с волновым движением. Завихренность ϖ^u сама по себе не определяет однозначно вихревую часть волнового поля $\mathbf{u}^\varpi$. Мы фиксируем эту неоднозначность, налагая условие на поверхности $u_z^\varpi|_{z=0} = 0$ (на глубине обращается в нуль всё $\mathbf{u}^\varpi$); в результате изменение формы поверхности оказывается связанным только с потенциальной частью волнового течения. Мы обобщаем уравнение Бернулли (2) до вида [58]

$$\frac{P^u}{\rho} = -gz - (\partial_t + V_i \partial_i) \phi + p^\varpi, \quad (66)$$

где p^ϖ может быть условно названо вкладом в давление от вихревой части течения $\mathbf{u}^\varpi$. Кинематическое (3) и динамическое (33) граничные условия принимают вид

$$(\partial_t + \partial_x V_x) h = \hat{k} \psi, \quad (67)$$

$$(\partial_t + V_x \partial_x) \psi = -\varepsilon_k h + p^\varpi, \quad (68)$$

где $\varepsilon_k = g + (\sigma/\rho) \hat{k}^2$ есть оператор потенциальной энергии волны, ψ — значение потенциала ϕ на поверхности $z = 0$, и там же должны браться величины V_x и p^ϖ . Уравнение в объёме на p^ϖ возможно получить, если подставить анзац (66) в уравнение (65), а граничное условие на поверхности для p^ϖ следует из требования $u_z^\varpi = 0$:

$$\Delta p^\varpi = \partial_i \phi \Delta V_i + 2 \partial_i u_i^\varpi \partial_i V_j, \quad (69)$$

$$\partial_z p^\varpi|_{z=0} = \partial_x \psi \partial_z V_x, \quad p^\varpi|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0. \quad (70)$$

Если медленное течение $\mathbf{V}$ чисто потенциально, т.е. представляет собой длинную поверхностную волну, то $\Delta \mathbf{V} = 0$ и $\mathbf{u}^\varpi = 0$, так что и $p^\varpi = 0$. Отсюда следует, что часть давления p^ϖ является продуктом завихренности Ω медленного течения, но эта связь нелинейна по $\mathbf{V}$.

4.3. Волны Гуйона

Волной Гуйона называется плоская бегущая вдоль оси x волна, распространяющаяся на фоне направленного вдоль той же оси течения $V_x(z)$, имеющего вертикальный сдвиг (см., например, [59]). Продемонстрируем, как уравнения раздела 4.2 позволяют определить свойства волн Гуйона в первом порядке по малому параметру $\Omega_y/\omega \ll 1$, где завихренность медленного течения $\Omega_y = \partial_z V_x$. На этом пути мы воспроизведём классический результат [60].

В главном порядке по амплитуде волны амплитуда поднятия поверхности и потенциал являются гармоническими функциями. Представим их через комплексные амплитуды:

$$h = H \exp(i\varphi), \quad \phi = \psi \exp(kz), \quad \psi \propto \exp(i\varphi), \quad (71)$$

где фаза $\varphi = kx - \omega t$. Например, $\text{Re } h$ есть физическая амплитуда поднятия поверхности. Без ограничения общности можно считать амплитуду волны $H > 0$.

Стоксов дрейф задаётся выражением (28), поэтому единственной ненулевой компонентой вихревой силы является вертикальная, $f_z^V = k\omega H^2 \exp(2kz)$. Эта сила даёт только постоянный во времени вклад в давление и не изменяет медленного течения.

Определим теперь закон дисперсии. Прежде всего заметим, что вследствие геометрии задачи $\varpi^u = 0$. Граничные условия (67) и (68) на поверхности суть

$$(-i\omega + ikV_x)h = k\psi, \quad (72)$$

$$(-i\omega + ikV_x)\psi = -gh + p^\varpi, \quad (73)$$

а вихревая поправка к давлению

$$p^\varpi(0) = 2ik\psi \left(V_x(0) - 2k \int_{-\infty}^0 dz \exp(2kz) V_x(z) \right). \quad (74)$$

Решение уравнений (72), (73) в линейном приближении по малому параметру $\Omega_y/\omega \ll 1$ даёт закон дисперсии [60]

$$\omega = \sqrt{gk} + \omega', \quad \omega' = 2k^2 \int_{-\infty}^0 dz \exp(2kz) V_x(z), \quad (75)$$

Если сила сдвига постоянна по вертикали, $V_x = \Omega_y z$, то сдвиг частоты равен $\omega' = -\Omega_y/2$.

4.4. Коротковолновый предел

Предел коротких волн достигается, когда масштаб L течения $\mathbf{V}$ значительно превышает длину волны, $kL \gg 1$. В области распространения волны следует считать, что изменение скорости V по порядку величины не превышает фазовую скорость волны ω/k . Тогда второе слагаемое в (69) не превышает первое, а в граничном условии (68) p^ϖ мало по сравнению с $\phi \partial_x V_x$ как $1/kL$. Пренебрегая этой малой поправкой, мы приходим к волновому уравнению

$$\varepsilon_k (\partial_t + V_x \partial_x) \frac{1}{\varepsilon_k} (\partial_t + \partial_\beta V_\beta) \psi = -\omega_k^2 \psi, \quad (76)$$

где ψ есть значение потенциала на поверхности, а закон дисперсии $\omega_k = \sqrt{gk + (\sigma/\rho)k^3}$.

Рассмотрим распространение волновых пакетов, используя стандартное приближение геометрической оптики. Будем считать ψ комплексной амплитудой и параметризуем её через абсолютное значение амплитуды $|\psi|(t, x, y)$ и действительную фазу (эйконал) $\varphi(t, x, y)$, $\psi = |\psi| \exp(i\varphi)$. Амплитуда $|\psi|$, волновой вектор $\mathbf{k} = \text{grad } \varphi$ и частота $\omega = -\partial_t \varphi$ являются медленно меняющимися величинами по сравнению с фазой φ . Действительная часть домноженного на $\exp(-i\varphi)$ уравнения (76), в которой отброшены поправки порядка $1/(kL)^2$, даёт дисперсионное соотношение

$$(\omega - (\mathbf{V} \mathbf{k}))^2 = \omega_k^2. \quad (77)$$

Комбинация $\tilde{\omega} = \omega - (\mathbf{V} \mathbf{k})$ есть собственная частота волны — частота её колебаний в системе отсчёта, связанной с движущейся со скоростью $\mathbf{V}$ жидкостью, тогда как ω есть частота волны в неподвижной системе отсчёта. Иными словами, соотношение (77) включает в себя эффект Доплера. Вычислим производные по времени и по координате от дисперсионного соотношения (77), в результате чего получим уравнения изменения частоты и волнового вектора вдоль движения волнового

пакета:

$$(\partial_t + ((\mathbf{V} + \mathbf{v}^g) \nabla)) \omega = (\mathbf{k} \partial_t \mathbf{V}), \quad (78)$$

$$(\partial_t + ((\mathbf{V} + \mathbf{v}^g) \nabla)) k_x = -k_y \partial_x V_y, \quad (79)$$

где групповая скорость пакета относительно жидкости $v_x^g = \partial \omega_k / \partial k_x$. В неподвижной системе координат волновой пакет движется со скоростью $\mathbf{V} + \mathbf{v}^g$. Первое равенство (78) означает, в частности, что в стационарном течении $\mathbf{V}$ частота волны ω в неподвижной системе координат остаётся неизменной. Второе уравнение (79) определяет траекторию распространения волнового пакета.

Уравнение на амплитуду волны следует из мнимой части домноженного на $\exp(-i\varphi)$ уравнения (76). Оно может быть приведено к виду закона сохранения

$$\partial_t \mathcal{I} + \operatorname{div}((\mathbf{V} + \mathbf{v}^g) \mathcal{I}) = 0, \quad \mathcal{I} = \frac{\varepsilon_k H^2}{2\omega_k}, \quad (80)$$

где амплитуда колебаний поверхности $H = (k/\omega_k)|\psi|$. Для получения (80) в обеих частях волнового уравнения (76) следует удерживать поправки, линейные по производным медленно меняющихся величин $\mathbf{V}$, $|\psi|$, ω , $\mathbf{k}$. Эта процедура выполнена в приложении Б. Величина $\mathcal{I}$ пропорциональна поверхностной плотности энергии волны $\varepsilon_k H^2/2$, делённой на её собственную частоту ω_k . Сохраняющаяся величина $\int dx dy \mathcal{I}$ называется волновым действием (см., например, [61] и монографии [62, 84, 85]).

На основании изложенной теории рассмотрим задачу о распространении гравитационной волны против потока $V_x(x) < 0$, неоднородного вдоль линий тока, когда плоская волна распространяется в сторону положительных x относительно жидкости, т.е. $k_x > 0$. Закон дисперсии (77) имеет вид $k_x(V_x + 2v^g) = \omega$, где $v^g = \omega_k/2k_x$, что можно рассматривать в качестве уравнения на волновое число k_x [63, 64]. Положим, что волна стационарна, так что $\partial_t \mathcal{I} = 0$ в (80). Тогда амплитуда волны удовлетворяет соотношению $v^g(V_x + v^g)H^2 = \text{const}$. Она неограниченно растёт при приближении к точке остановки $V_x = -v^g$. В этой точке (примем, что её координата есть $x = 0$) групповая скорость оказывается в два раза меньше её значения $v^{g0} = g/2\omega$ в области, где течение отсутствует, $v^g = v^{g0}/2$ (или $k_x = 4k_x^0$).

Вблизи точки остановки выписанное выше уравнение на k_x приводит к тому, что скорость движения группового пакета в абсолютной системе координат ведёт себя как квадратный корень из расстояния до этой точки, $V_x + v^g \propto \sqrt{|x|}$. Таким образом, происходит неограниченный рост крутизны волны по закону $kH \propto |x|^{-1/4}$. При достаточной исходной её амплитуде такой рост приводит к обрушению волны, так что за точкой $V_x = -v^{g0}/2$ поверхность воды оказывается гладкой. Исчезновение волны приводит к передаче её импульса течению, что наблюдается в экспериментах [86]. Существуют также океанические измерения, где повышенная плотность обрушения волн наблюдалась в области сильных восходящих потоков, приводящих к большим перепадам горизонтальной скорости течения [87]. Точка остановки $V_x = -v^g$ соответствует слиянию двух корней уравнения на k_x . Поэтому при достаточно малой исходной амплитуде волны, когда не происходит обрушения, образуется отражённая волна с $k_x > 4k_x^0$, у которой групповая ско-

рость $v^g < -V_x$ и которая потому уносится течением в сторону отрицательных x . Для математического описания поведения волны вблизи точки отражения $x = 0$ следует выйти за рамки приближения геометрической оптики (77), вернувшись к исходному волновому уравнению (76). В работе [64] исходя из асимптотического рассмотрения было установлено, что оно имеет вид уравнения Эйри. Полученное нами волновое уравнение (76) позволяет систематически перейти к этому пределу.

4.5. Циркуляция Ленгмюра

Концепция вихревой силы позволила объяснить механизмы возникновения и поддержания циркуляции Ленгмюра [88]. Циркуляция Ленгмюра возникает на поверхности водоёма, если произошло совпадение двух событий: возбуждена бегущая (вдоль оси x) поверхностная волна (7) и в сторону её распространения (или под малым углом) как результат действия ветра установилось течение $V_x^0(z)$, имеющее вертикальный сдвиг. Циркуляция Ленгмюра $\mathbf{V}$ представляет собой наложение двух компонент течений, почти однородных вдоль x -направления и квазипериодичных в поперечном y -направлении. Первая компонента — модуляция $\delta V_x(y, z)$ сдвигового течения $V_x^0(z)$, вторая компонента — валы с циркуляцией в поперечной плоскости (yz), в которых скорость можно параметризовать функцией тока $\Psi(y, z)$: $\delta V_y = \partial_z \Psi$, $\delta V_z = -\partial_y \Psi$. Течение в валах приводит к собиранию пены и грязи на поверхности жидкости в вытянутые вдоль x -направления полосы, что является визуализацией циркуляции Ленгмюра. Кроме того, вертикальная компонента скорости в валах усиливает турбулентное перемешивание в верхнем морском слое (см., например, общий обзор [89] и обзор недавних экспериментальных работ в Чёрном море [90]).

В работе [65] было показано, что композиция из бегущей волны и сдвигового течения обладает неустойчивостью по отношению к поперечной модуляции. Неустойчивая мода по своей структуре соответствует циркуляции Ленгмюра. В данной задаче, помимо условий слабости сдвигового течения $\Omega = \partial_z V_x^0$ и малой амплитуды волны $kH \ll 1$, важным безразмерным параметром является число Ленгмюра $\text{La} = v^2 k^2 / \omega H^2 \Omega$, где под вязкостью часто понимают турбулентную вязкость. Если $\text{La} \ll 1$, то вязкость не играет существенной роли в динамике неустойчивой моды. В этом пределе, в частности, инкремент неустойчивости, найденный в [65] для случая однородного по вертикали сдвигового течения ($\Omega_y^0 = \partial_z V_x^0$ не зависит от вертикали), равен

$$\lambda = \sqrt{2\Omega_y^0 \omega} \frac{kH\theta}{\mu}, \quad (81)$$

где $2\pi/(k\theta)$ — период модуляции в y -направлении, μ — наименьший корень уравнения $J_\theta(\mu) = 0$, а J — функция Бесселя. Следует предположить, что сила сдвига Ω_y^0 значительно превышает значение (19), произведённое затуханием волны; тогда она превышает и инкремент неустойчивости, $\lambda \ll \Omega_y^0$. Отметим также, что неустойчивость имеет место, только если сдвиг сонаправлен волне, $\Omega_y^0 > 0$ [91]. Если период модуляции велик по сравнению с периодом волны, $\theta \ll 1$, то продольная завихренность $\delta \Omega_x$ проникает на глубину $\sim 1/k$, тогда как циркуляция $\delta V_{y,z}$ и модуляция сдвигового течения δV_x — на большую глубину $\sim 1/k\theta$. Амплитуда скорости в циркуляции значительно слабее амплитуды модуляции сдвига,

$\delta V_{y,z}/\delta V_x \sim \lambda/\Omega_y^0$. Описанный механизм возникновения циркуляции Ленгмюра был впоследствии назван CL2-моделью по фамилиям авторов A.D.D. Craik и S. Leibovich.

Модель [65] не учитывает динамики волн, и потому в ней дрейф Стокса определяется только исходной (опорной) волной (7). Однако периодическая в y -направлении модуляция вихревого течения приводит также и к аналогичной модуляции волнового движения. Эта модуляция наблюдалась как в численных моделированиях [92, 93], так и в экспериментах [94]. Интерференция опорной и модулированной волн приводит к модуляции дрейфа Стокса, которая в свою очередь изменяет динамику вихревого течения. Модулированная волна, таким образом, становится третьей составляющей неустойчивой моды. В теоретической работе [58] произведён учёт модуляции волны. Инкремент неустойчивости не сильно изменяется в области $\theta \gtrsim 1$, поскольку в данном случае волновой вектор рассеянной волны значительно отличается от k , т.е. не удовлетворяет закону дисперсии. Слабая модуляция волны в таком пределе была исследована в [95]. При больших периодах модуляции рассеяние волны становится более существенным, так что при $\theta \ll (\Omega_y^0/\omega)^{1/2}$ инкремент неустойчивости перестаёт зависеть от периода модуляции, $\lambda = \Omega_y^0 k H$. Обратим внимание, что в ходе вычислений вихревая поправка p^ω к давлению в граничном условии (73) оказывается ключевой, т.е. можно сказать, что p^ω производит учёт рассеяния опорной волны. Однако следует помнить, что для того, чтобы рассеяние волны приводило к когерентному эффекту, пространственная структура циркуляции Ленгмюра должна быть периодичной с дальним порядком, сохраняющимся на расстояниях длины пробега волны за время $\sim 1/\lambda$. По-видимому, в реальности это выполняется далеко не всегда. Отметим также более ранние работы [56, 96], где было показано, что две волны, распространяющиеся под равными по абсолютному значению и противоположными по знаку углами к сдвиговому течению, приводят к линейному по времени росту циркуляции Ленгмюра, если её амплитуда мала, и к поддержанию циркуляции в состоянии насыщения её амплитуды вследствие турбулентной вязкости. Такой механизм возникновения циркуляции называют CL1.

5. Турбулентный режим

В ряде экспериментов [21–25], в которых поверхностные волны возбуждались за счёт механизма фарадеевской неустойчивости, и в экспериментах [53, 54], где волны в квадратной ячейке возбуждались расположенными у смежных сторон плунжерами, медленные вихревые течения, порождённые в свою очередь волнами, вблизи поверхности демонстрировали турбулентный характер. Их статистические свойства воспроизводили ряд особенностей, присущих двумерной турбулентности. Для упрощения изложения в приложении В кратко приведены основные свойства двумерного турбулентного течения. Для более подробного ознакомления с особенностями двумерной турбулентности рекомендуем обзор [55].

Впервые турбулентный характер течения, генерируемого фарадеевскими волнами, был исследован в работе [21]. Эксперимент проводился на мелкой воде: толщина жидкости составляла ≈ 2 мм, а длина волны была равна $\lambda \approx 10$ мм. Поле скорости измерялось на поверхности

жидкости. Оказалось, что энергетический спектр $\mathcal{E}(k)$ горизонтального движения имеет перегиб вблизи волнового числа $k_f \approx 0,12$ мм $^{-1}$, приблизительно соответствующего длине волны. В области $k < k_f$ зависимость была близка к $\mathcal{E}(k) \propto k^{-5/3}$, а в области $k > k_f$ наблюдалось поведение $\mathcal{E}(k) \propto k^{-3}$ (см. выражения (B5) и (B6)), хотя диапазоны соответствующих степенных зависимостей были довольно короткими, особенно в области $k > k_f$. Дополнительно были измерены средние потоки энергии и энтропии, которые хотя и не были постоянными по масштабам, но имели знаки, соответствующие картине обратного энергетического каскада в области $k < k_f$ и прямого каскада энтропии при $k > k_f$, характерных для двумерной турбулентности. Наконец, исследование относительной дисперсии пассивных частиц находилось в согласии с законом Ричардсона (B4).

Последовавшие за этим эксперименты выполнялись уже на поверхности глубокой воды в широком диапазоне параметров [22, 23]. Неожданным образом поверхностное течение по-прежнему демонстрировало свойства, характерные для двумерного турбулентного течения, несмотря на то что глубина жидкости превышала длину волны. В области обратного энергетического каскада спектр горизонтального течения $\mathcal{E}(k)$ демонстрировал наклон $-5/3$ в соответствии с выражением (B5), а направление потока энергии подтверждалось измерением тройного коррелятора (B7). Область прямого каскада $k > k_f$ была короткой и подробно не изучалась. Возбуждение фарадеевских волн в квадратной ячейке небольшого размера приводило к образованию крупномасштабного когерентного вихря, что качественно похоже на конденсацию энергии в двумерной турбулентности в случае, когда размер системы меньше масштаба, на котором диссипация останавливает обратный энергетический каскад (см. работы [97–100]). Аналогичное поведение наблюдалось и в более позднем эксперименте другой группы [53], когда поверхностные волны возбуждались плунжерами, глубина жидкости была ≈ 4 см, а длина волны ≈ 5 см. В области $k < k_f$ у вихревого течения был измерен энергетический спектр $\mathcal{E}(k) \propto k^{-5/3}$, а на самых крупных масштабах имелся пик, соответствующий наблюдающемуся непосредственно статистически устойчивому крупномасштабному вихрю.

Полученные результаты противоречат ожиданию того, что горизонтальные течения больших размеров должны проникать в толщу жидкости глубже, чем течения меньших размеров, что в свою очередь нарушало бы картину, заложенную в основу модели двумерной турбулентности. Измерения зависимости вихревого течения от расстояния до поверхности были проведены в работах [24, 25]. Они показали, что скорость и кинетическая энергия горизонтальных течений испытывают резкое падение на расстояниях половины длины волны ниже поверхности. Ниже этого слоя течение имеет трёхмерный характер, гораздо меньшую интенсивность и обладает большими корреляционными временами и масштабами. Движение в глубине возникает за счёт струй, которые образуются на поверхности и проникают вглубь. Наличие таких струй было идентифицировано по измерениям двумерной дивергенции поля скорости на поверхности, а затем подтверждено PIV измерениями в вертикальном срезе.

В настоящее время эти экспериментальные наблюдения ожидают теоретического объяснения. Остаётся неяс-

ным, принимают ли волны участие в процессе образования крупномасштабных вихрей путём действия виртуального поверхностного напряжения или вихревой силы, скоррелированных с вихревым течением, или их роль ограничивается возбуждением вихрей с горизонтальным размером порядка длины волны. Отметим следующее. Оценки, сделанные на основании данных экспериментов, показывают, что проинтегрированная по высоте вихревая сила значительно превышает виртуальное волновое напряжение (см. выражение (64)). Эксперименты [101, 102], в которых трёхмерный статистически-стационарный турбулентный поток в объёме под свободной поверхностью возбуждался струями, бьющими со дна, показывают, что вблизи поверхности наблюдаются некоторые не сильно выраженные элементы обратного каскада. А именно, интегральный масштаб по горизонтали вблизи поверхности оказывается в ≈ 2 раза больше, чем в объёме, а среднеквадратичная горизонтальная скорость у поверхности больше в $\approx 1,5$ раза своего значения в объёме. Качественно похожие результаты демонстрирует численный счёт для затухающей турбулентности [103]. Однако можно предположить, что в такой постановке задачи трёхмерные турбулентные пульсации, приходящие из объёма к свободной поверхности, не дают сформироваться обратному каскаду вблизи неё.

6. Заключение

Волны на поверхности воды часто описывают в рамках потенциального приближения и модели идеальной жидкости. Важно понимать, что у такого описания есть свои ограничения. Учёт малой, но ненулевой вязкости жидкости приводит не только к уменьшению амплитуды поверхностных волн в пространстве или во времени, но и к генерации медленных завихренных течений, которые обеспечивают выполнение закона сохранения импульса. Передача импульса от затухающих волн к медленному течению происходит в тонком вязком подслое вблизи поверхности, где вязкость жидкости нарушает потенциальное приближение. Подчеркнём, что в идеальной жидкости возбуждение завихренных течений потенциальными волнами запрещено теоремой Кельвина.

Медленные течения возбуждаются поверхностной силой (виртуальным волновым напряжением) и распространяются в глубину жидкости за счёт вязкого трения. В стационарном режиме амплитуда медленных течений существенно влияет на лагранжеву скорость, которая описывает перемещение бесконечно малых элементов жидкости. Помимо медленных течений в лагранжеву скорость вносит свой вклад и быстрое волновое движение. Вклад от волн называется дрейфом Стокса, и, как показывает проведённый анализ для случая свободной поверхности, его можно вычислять в рамках модели идеальной жидкости. Дрейф Стокса практически мгновенно реагирует на изменение амплитуды поверхностных волн.

На практике поверхность жидкости часто бывает загрязнена, т.е. покрыта тонкой адсорбированной плёнкой. Наличие плёнки на поверхности увеличивает диссипацию поверхностных волн, а следовательно, приводит и к усилению генерации медленных течений. В этом случае в установившемся режиме лагранжева скорость определяется медленным течением, а дрейфом Стокса можно пренебречь.

Увеличение амплитуды вихревого течения приводит к увеличению нелинейности. Полное течение в объёме уже нельзя считать чисто потенциальным вследствие присутствия там медленного вихревого течения. Медленно меняющаяся во времени завихренность через нелинейное взаимодействие приводит к появлению слабой завихренности, осциллирующей вместе с волновым движением. В результате появляется объёмная вихревая сила, действующая со стороны волн на среднее течение, а сами волны начинают рассеиваться и преломляться на медленном вихревом течении. В экспериментах, где вихревое течение вызвано исключительно поверхностными волнами, увеличение амплитуды ансамбля поверхностных волн приводит к хаотизации медленных течений, причём их статистические свойства во многом становятся похожи на свойства двумерного турбулентного течения. Теоретическое объяснение экспериментальных результатов в этом режиме остаётся одним из открытых вопросов в настоящий момент.

В случае слабой нелинейности представленная теория позволяет описывать транспорт лагранжевых частиц в поле интерферирующих волн. Было продемонстрировано, что эффекты интерференции могут позволить управлять транспортом частиц, бактерий и активной материи путём перестройки волнового поля [20, 104]. Управляя распределением частиц на поверхности жидкости, можно потенциально контролировать её физические свойства, что открывает возможности создания двумерных биосовместимых материалов с дистанционно настраиваемыми характеристиками [14]. Кроме того, быстрые волновые и медленные вихревые течения являются внешним фактором и влияют на жизнедеятельность бактерий, что позволяет выращивать биоплёнки с заданными свойствами [105]. Представленные в обзоре результаты также могут найти применение в описании движения поверхности океана и распространения планктона и загрязняющих веществ вблизи его поверхности [106].

Благодарности

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (финансирование из средств темы FFWR-2024-0017 у В.С.С. и П.В.М. и из средств темы FFWE-2025-0016 у Л.А.А.) и программой фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

7. Приложения

А. Вязкий пограничный слой на свободной поверхности

Здесь мы развиваем математический аппарат для описания вязкого подслоя, который движется и наклоняется вместе с границей жидкости. В работе [2] построен один из вариантов такого аппарата. Мы стремимся ограничиться минимальной математической сложностью, исходя из того что описание должно ограничиваться толщиной вязкого пограничного слоя и вторым порядком по амплитуде волны. Введём вспомогательную криволинейную систему координат $\{t, x, y, \zeta\}$ с новой вертикальной координатой $\zeta = z - h(t, x, y)$, в терминах которой граница всегда имеет плоскую форму $\zeta = 0$. Описание вязкого подслоя ограничивается значениями $\zeta \sim \delta$, поэтому нам не важно, как конкретно устроено преобразование координат на глубине порядка длины

волны. Правила пересчёта производных

$$\partial_t = \tilde{\partial}_t - \partial_t h \partial_\zeta, \quad \partial_x = \tilde{\partial}_x - \partial_x h \partial_\zeta, \quad \partial_z = \partial_\zeta. \quad (\text{A1})$$

Здесь дифференцирование в криволинейной системе координат обозначено волной. Построенные криволинейные координаты не ортогональны, поэтому нам ещё нужно ввести ортогональную матрицу $\mathcal{O}_{ij} = \delta_{ij} + \delta_{iz} \partial_j h - \partial_i h \delta_{zj}$, которая поворачивает локальную ортогональную систему координат так, чтобы третья ось была направлена по нормали к поверхности жидкости, $l_i = \mathcal{O}_{iz}$. Компоненты скорости и завихренности в новых координатах $\tilde{\omega}_i$ связаны с компонентами завихренности ϖ_i в исходных декартовых координатах соотношениями типа $\varpi_i = \mathcal{O}_{ij} \tilde{\omega}_j$. Обратим внимание, что мы определяем преобразования с точностью до первого порядка по амплитуде волны h , поскольку в уравнении Навье–Стокса нам надо учесть не более чем второй порядок по h . С такой точностью в новых координатах уравнение на завихренность (37) приобретает вид

$$\tilde{\partial}_t \tilde{\omega} = -((\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{e}^z \partial_t h) \tilde{\nabla}) \tilde{\omega} + (\tilde{\omega} \tilde{\nabla})(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{e}^z \partial_t h) + \tilde{\omega}_\zeta \tilde{\nabla} \partial_t h + \nu \partial_\zeta^2 \tilde{\omega}, \quad (\text{A2})$$

где $\mathbf{e}^z$ — единичный вектор, направленный вверх, а в последнем слагаемом мы пренебрегли поправками порядка γ^2 . Поправка в первом слагаемом в правой части (A2) учитывает то, что перенос потоком завихренности, приводящий к изменению её распределения относительно поверхности жидкости, надо отсчитывать от этой поверхности. Поправка во втором слагаемом и третье слагаемое производят вычет поворота, происходящего вместе с поворотом поверхности. Поскольку мы проводим вычисления с точностью только до квадратичных вкладов по амплитуде волны, в нелинейных вкладах в (A2) не нужно учитывать различие векторов ϖ^u и $\tilde{\omega}^u$. В линейном приближении по амплитуде волны уравнение (30) приобретает вид $\tilde{\partial}_t \tilde{\omega}_\alpha^u = \nu \partial_\zeta^2 \tilde{\omega}_\alpha^u$ с граничными условиями

$$\nu \tilde{\omega}_\alpha^u|_{\zeta=0} = \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\alpha (\sigma' n - 2\nu \partial_z \phi)|_{z=0}, \quad \partial_\zeta \tilde{\omega}_\zeta^u|_{\zeta=0} = 0, \quad (\text{A3})$$

следующими из (34), (38). В правой части значение потенциальной компоненты скорости достаточно вычислять на невозмущённой поверхности $z = 0$, поскольку условие (1) выполняется при любой форме поверхности, так что экспоненциальная зависимость от вертикальной координаты определяется периодической зависимостью в горизонтальном направлении. Граничное условие в форме (A3) обсуждалось, в частности, в [80, 107].

Б. Взаимодействие поверхностных волн с медленным вихревым течением

Уравнение Навье–Стокса (30), усреднённое по быстрым волновым осцилляциям, может быть записано в виде

$$\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \left\langle \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right\rangle + \nu \Delta \mathbf{V} + \langle [\mathbf{u}, \varpi^u] \rangle. \quad (\text{B1})$$

Используя (62), возможно переписать последнее слагаемое в (B1) в более удобной форме

$$\langle [\mathbf{u}^\phi \times \varpi^u] \rangle = \mathbf{f}^V + \text{grad}(\Omega \mathcal{A}), \quad \mathbf{f}^V = [\mathbf{U}^S \times \Omega], \quad (\text{B2})$$

где вектор $\mathcal{A} = \langle [\text{grad} \phi \times \delta \mathbf{R}_1] \rangle / 2$. При проведении выкладок мы пользовались тем, что потенциальное течение

несжимаемо, поэтому, в частности, $\text{div} \delta \mathbf{R}_1 = 0$; кроме того, $\langle u_i \delta R_{1j} \rangle = -\langle u_j \delta R_{1i} \rangle$. Ранее определённый дрейф Стокса (27)

$$\mathbf{U}^S = \text{rot} \mathcal{A} = \langle \text{rot} [\mathbf{u}^\phi \times \delta \mathbf{R}_1] \rangle \quad (\text{B3})$$

в объёме определяется только потенциальной частью волнового течения. Градиентный вклад в (B2) должен быть включён в эффективное давление (B1), так что эффективное давление в (63)

$$\frac{\bar{P}}{\rho} = \frac{P}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2 + \langle \mathbf{u}^2 \rangle}{2} - (\Omega \mathcal{A}). \quad (\text{B4})$$

Отметим, что все усреднения по времени $\langle \dots \rangle$ в (B1)–(B3) должны быть выполнены вдоль лагранжевых траекторий $\mathbf{r}(t)$, определённых после (62).

Перейдём теперь к коротковолновому пределу (см. раздел 4.4). Опишем сначала, как в правой части волнового уравнения (76), помноженного на $\exp(-i\varphi)$, выделить мнимую часть. Рассмотрим окрестность некоторой точки "0", в которую поместим начало координат. Фаза может быть разложена в ряд Тейлора

$$\varphi = \varphi^0 + k_i^0 r_i + \frac{1}{2} (\partial_j k_i^0) r_i r_j + \dots \quad (\text{B5})$$

В правой части (76) величину ω_k^2 следует рассматривать как интегро-дифференциальный оператор. Разложим этот оператор вблизи несущего волнового вектора $\mathbf{k}^0 = \text{grad} \varphi|_{\mathbf{r}=0}$:

$$-\omega_{\mathbf{k}^0 - i\mathbf{V}}^2 \approx -\omega_{\mathbf{k}^0}^2 + 2i\omega_{\mathbf{k}^0} v_i^g \partial_i + \frac{\partial(\omega_{\mathbf{k}^0} v_i^g)}{\partial k_j^0} \partial_j \partial_i + \dots \quad (\text{B6})$$

В результате мнимая часть (мы опускаем индексы "0")

$$-\text{Im} \left(\exp(-i\varphi) \omega_k^2 (|\psi| \exp(i\varphi)) \right) = 2\omega_k (v^g \nabla) |\psi| + |\psi| \text{div}(\omega_k v^g). \quad (\text{B7})$$

Теперь проведём вычисления для левой части уравнения (76), начав с формальной выкладки

$$\begin{aligned} \epsilon_k \tilde{\omega} \frac{1}{\epsilon_k} \tilde{\omega}' (|\psi| \exp(i\varphi)) &= \\ &= \tilde{\omega} \tilde{\omega}' (|\psi| \exp(i\varphi)) + \epsilon_k \left(\tilde{\omega} \frac{1}{\epsilon_k} - \frac{1}{\epsilon_k} \tilde{\omega} \right) \tilde{\omega}' (|\psi| \exp(i\varphi)), \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

где операторы $\tilde{\omega} = i(\partial_t + V_\alpha \partial_\alpha)$, $\tilde{\omega}' = i(\partial_t + \partial_\alpha V_\alpha)$. Второе слагаемое в правой части (B8) определяется ненулевым значением находящегося в скобках коммутатора:

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\omega} \frac{1}{\epsilon_k} - \frac{1}{\epsilon_k} \tilde{\omega} \right) \exp(i\varphi) &= \\ &= \exp(i\varphi) \left(\tilde{\omega} \frac{1}{\epsilon_k} - \frac{1}{\epsilon_k^2} \frac{d\epsilon_k}{d\omega_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial k_\alpha} \frac{\partial \omega_k}{\partial r_\alpha} \right) = \\ &= \exp(i\varphi) \left(\partial_t + ((\mathbf{V} + \mathbf{v}^g) \nabla) \right) \frac{1}{\epsilon_k}. \end{aligned} \quad (\text{B9})$$

Первое слагаемое в правой части (B8) с точностью до первых производных от медленно меняющихся величин вычисляется относительно прямолинейно. После выделения мнимых частей обе части уравнения (76) надо также помножить на $|\psi|/\epsilon_k$, чтобы получить уравнение (80).

Отметим наконец, что волновое уравнение (76) может рассматриваться как следствие требования равенства нулю вариации действия

$$S = \int dt dx dy \left(((\partial_t + \partial_\beta V_\beta)\psi) \frac{1}{\varepsilon_k} ((\partial_t + \partial_\alpha V_\alpha)\psi) - \psi \hat{k} \psi \right) \quad (B10)$$

на истинной траектории. Условие равенства нулю вариации действия (B10) по фазе φ потенциала ψ приводит к закону сохранения волнового действия (80) (см., например, [84, § 11.7] или [85, § 4.11]).

В. Двумерная турбулентность

Движение двумерного турбулентного течения описывается модифицированным уравнением Навье–Стокса

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \alpha \mathbf{v} + \mathbf{f}. \quad (B1)$$

Здесь поле скорости $\mathbf{v}$ является двумерным и несжимаемым, $\partial_x v_x = 0$. В сравнении с уравнением (30) в правую часть добавлена внешняя сила $\mathbf{f}$, которая возбуждает течение, и диссипативное слагаемое $-\alpha \mathbf{v}$, которое описывает линейное трение о дно. Физически такое уравнение описывает движение тонкого слоя жидкости на масштабах больше его толщины, а трение о дно связано с трёхмерностью задачи. В дальнейшем мы будем считать, что внешняя сила $\mathbf{f}$ имеет характерный масштаб $l_f \sim 1/k_f$ и развивает мощность $\epsilon = \langle \mathbf{v} \mathbf{f} \rangle$, где угловые скобки обозначают усреднение по пространству и времени.

Наряду со скоростью $\mathbf{v}$ движение жидкости можно характеризовать завихренностью, которая в двумерном случае является псевдоскаляром $\varpi = \partial_x v_y - \partial_y v_x$. Уравнение для завихренности следует из уравнения Навье–Стокса (B1)

$$\partial_t \varpi + \mathbf{v} \nabla \varpi = \nu \nabla^2 \varpi - \alpha \varpi + f_\varpi, \quad (B2)$$

где $f_\varpi = \partial_x f_y - \partial_y f_x$. Обратим внимание, что в отсутствие диссипации и накачки уравнения (B1) и (B2) сохраняют не только энергию системы $E = (1/S) \times \int dx dy v^2/2$, но и её энтрофию $Z = (1/S) \int dx dy \varpi^2/2$, где S — площадь системы. Наличие дополнительного квадратичного интеграла движения фундаментальным образом отличает поведение двумерной турбулентной системы от трёхмерного аналога.

На качественном уровне происходит следующее. Внешняя сила вкачивает в систему в единицу времени энергию ϵ и энтрофию $\eta = \langle \varpi f_\varpi \rangle \sim \epsilon k_f^2$. Для турбулентного течения диссипация на масштабе накачки пренебрежимо мала, поэтому эти сохраняющиеся величины начинают перераспределяться по масштабам за счёт нелинейных взаимодействий. Оказывается, что поток энтропии направлен в сторону малых масштабов, и он формирует так называемый прямой каскад энтропии. Предполагая, что типичные флуктуации скорости δv на масштабе r в прямом каскаде зависят только от величины потока энтропии η и самого масштаба r , можно из соображений размерности получить оценку $\delta v \sim \eta^{1/3} r$, где $r \ll l_f$. Далее, используя такую оценку для флуктуаций скорости и сравнивая друг с другом нелинейный и вязкий члены в уравнении Навье–Стокса, можно установить, что вязкость жидкости вступит в игру и остановит прямой каскад на масштабе $L_d \sim \nu^{1/2} \eta^{-1/6}$.

Поток энергии направлен в противоположную сторону и приводит к возбуждению всё более и более крупномасштабных течений. Если мы аналогичным образом предположим, что типичные флуктуации скорости на масштабе r в обратном энергетическом каскаде зависят только от потока энергии ϵ и самого масштаба r , то мы получим оценку $\delta v \sim (\epsilon r)^{1/3}$, где $r \gg l_f$. Обратный каскад останавливается за счёт трения о дно, и это происходит на масштабе

$$L_\alpha \sim \epsilon^{1/2} \alpha^{-3/2}, \quad (B3)$$

когда такой механизм становится способным диссипировать всю вкачиваемую внешней силой мощность ϵ . Отметим, что режим развитой турбулентности предполагает выполнение цепочки неравенств $L_d \ll l_f \ll L_\alpha$, которая как раз и означает, что диссипация на масштабе накачки за счёт вязкости и за счёт трения о дно мала по сравнению с нелинейностью [108].

Одним из следствий оценки флуктуаций скорости $\delta v \sim (\epsilon r)^{1/3}$ в области обратного энергетического каскада $l_f \ll r \ll L_\alpha$ является закон Ричардсона, описывающий отдаление друг от друга частиц, пассивно переносимых потоком. Рассмотрим две частицы, разделённые расстоянием R . С течением времени данное расстояние будет увеличиваться и главный вклад в этот процесс будут вносить флуктуации с масштабом R , т.е. $dR/dt \sim (\epsilon R)^{1/3}$. Флуктуации больших размеров будут переносить обе частицы одинаковым образом, а флуктуации меньших размеров — гораздо слабее. В экспериментах обычно измеряют среднеквадратичное расстояние между частицами, для которого получается следующее решение:

$$\langle R^2 \rangle \sim \epsilon t^3. \quad (B4)$$

Здесь усреднение подразумевается по парам частиц, в начальный момент времени находившихся на одном и том же расстоянии друг от друга. Отметим, что в среднем разбегание частиц происходит быстрее, чем при диффузионном поведении $\langle R^2 \rangle \propto t$, и быстрее, чем при баллистическом движении $\langle R^2 \rangle \propto t^2$.

Турбулентное движение традиционно характеризуется энергетическим спектром, описывающим распределение энергии по масштабам. Используя теорему Парсеваля, энергию системы можно представить как сумму гармоник Фурье для поля скорости $E = \sum_{\mathbf{k}} |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}|^2/2$, где $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} = (1/S) \int dx dy \mathbf{v}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Выражение, стоящее под знаком суммы, называется двумерным энергетическим спектром. На практике обычно работают с одномерным энергетическим спектром $\mathcal{E}(k)$, который получается из двумерного путём усреднения по углу, т.е. $\mathcal{E}(k) = \pi k \langle |\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$, где угловые скобки означают усреднение по всем $|\mathbf{k}| = k$. В соответствии с данным определением энергия и энтропия системы равны $E = \int dk \mathcal{E}(k)$ и $Z = \int dk k^2 \mathcal{E}(k)$. Полученные ранее оценки для флуктуаций скорости в областях обратного и прямого каскадов позволяют получить для одномерного энергетического спектра выражения [55]

$$\mathcal{E}(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad \frac{1}{L_\alpha} \ll k \ll k_f, \quad (B5)$$

$$\mathcal{E}(k) \sim \eta^{2/3} k^{-3}, \quad k_f \ll k \ll \frac{1}{L_d}. \quad (B6)$$

Эти зависимости схематично изображены на рис. 5.

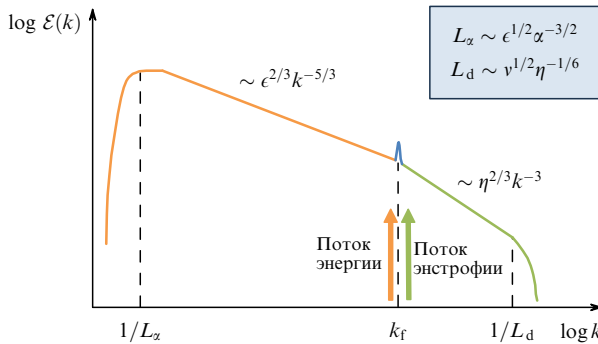


Рис. 5. Схематическое изображение энергетического спектра двумерного турбулентного течения.

Анализ уравнения Навье–Стокса (B1) позволяет установить точное соотношение для корреляционной функции третьего порядка $S_3(r) = \langle (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_r^3 \rangle$, которое является аналогом соотношения Колмогорова для развитой трёхмерной турбулентности. Здесь индексы 1 и 2 обозначают величины, взятые в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_r$ означает проекцию разности скоростей на вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $r = |\mathbf{r}|$. В областях обратного и прямого каскадов соотношения принимают вид [55]

$$S_3(r) = \frac{3}{2} \epsilon r, \quad l_f \ll r \ll L_\alpha, \quad (\text{B7})$$

$$S_3(r) = \frac{1}{8} \eta r^3, \quad L_d \ll r \ll l_f, \quad (\text{B8})$$

и выражают постоянство потоков энергии и энтропии по масштабам соответственно. Отметим, что в случае трёхмерной турбулентности соотношение Колмогорова имеет другой знак, $S_3(r) = -4\epsilon r/5$, в сравнении с выражением (B7), что отражает противоположное направление потока энергии. В трёхмерных турбулентных системах энергия передаётся от масштаба накачки в сторону малых масштабов, а энтропия не является сохраняющейся величиной, поэтому её каскада не существует.

Для полноты картины кратко обсудим характерные времена формирования каскадов. После включения накачки прямой каскад энтропии формируется очень быстро, за время, которое можно оценить как $\eta^{-1/3}$. Обратный каскад энергии развивается гораздо медленнее, поскольку включает в себя возбуждение движений со всё большими масштабами $l(t)$. За время t успевают возбудиться только движения с характерным временем $l/\delta v \lesssim t$, откуда находим оценку $l(t) \sim \epsilon^{1/2} t^{3/2}$. Формирование обратного каскада заканчивается, когда $l(t)$ достигает масштаба L_α .

До сих пор мы предполагали, что размер рассматриваемой двумерной системы больше L_α . Если размер системы $L < L_\alpha$, то обратный каскад энергии будет вынужден остановиться на масштабе L . Поскольку трение о дно не может на этом масштабе полностью диссипировать энергию ϵ , поставляемую накачкой, то она будет накапливаться (ещё говорят "конденсироваться") на масштабе L . В результате в системе возникнет крупномасштабное когерентное течение, которое способно существенно изменить энергетический спектр системы и модифицировать обратный каскад. Структура когерентного течения существенно зависит от граничных условий. Для квадратной ячейки с непротекательными гра-

ницами в лабораторных и численных экспериментах наблюдалось формирование крупномасштабного когерентного вихря [97–100, 109].

Список литературы

1. Stokes G G *Trans. Cambridge Philos. Soc.* **8** 441 (1847)
2. Longuet-Higgins M S *Philos. Trans. R. Soc. A* **245** 535 (1953) DOI: 10.1098/rsta.1953.0006
3. Longuet-Higgins M S *Proc. R. Soc. London A* **311** 371 (1969)
4. Weber J E J. *Geophys. Res. Oceans* **106** 11653 (2001)
5. Stuart J T J. *Fluid Mech.* **24** 673 (1966)
6. Ünlüata U, Mei C C J. *Geophys. Res.* **75** 7611 (1970)
7. Dore B D *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **30** 157 (1977)
8. Madsen O S J. *Phys. Oceanogr.* **8** 1009 (1978)
9. Weber J E J. *Fluid Mech.* **137** 115 (1983)
10. Xu Z, Bowen A J J. *Phys. Oceanogr.* **24** 1850 (1994)
11. Eelink D et al. *Wave Motion* **97** 102610 (2020)
12. Filatov S V et al. *Phys. Rev. Lett.* **116** 054501 (2016)
13. Филатов С В, Алиев С А, Левченко А А, Храмов Д А *Письма в ЖЭТФ* **104** 714 (2016); Filatov S V, Aliev S A, Levchenko A A, Khramov D A *JETP Lett.* **104** 702 (2016)
14. Francois N et al. *Nature Commun.* **8** 14325 (2017)
15. Xia H et al. *Fluids* **4** (2) 74 (2019)
16. Abella A P, Soriano M N *Phys. Scr.* **95** 085007 (2020)
17. Филатов С В, Орлов А В, Бражников М Ю, Левченко А А *Письма в ЖЭТФ* **108** 549 (2018); Filatov S V, Orlov A V, Brazhnikov M Yu, Levchenko A A *JETP Lett.* **108** 519 (2018)
18. Абелла А П, Сориано М Н *ЖЭТФ* **157** 539 (2020); Abella A P, Soriano M N *J. Exp. Theor. Phys.* **130** 452 (2020)
19. Smirnova D A, Nori F, Bliokh K Y *Phys. Rev. Lett.* **132** 054003 (2024)
20. Wang B et al. *Nature* **638** 394 (2025)
21. von Kameke A et al. *Phys. Rev. Lett.* **107** 074502 (2011)
22. Francois N et al. *Phys. Rev. Lett.* **110** 194501 (2013)
23. Francois N et al. *Phys. Rev. X* **4** 021021 (2014) DOI: 10.1103/PhysRevX.4.021021
24. Colombi R, Schlüter M, von Kameke A *Exp. Fluids* **62** 8 (2021)
25. Colombi R et al. *Fluids* **7** (5) 148 (2022)
26. Левич В Г *ЖЭТФ* **10** 1296 (1940)
27. Левич В Г *ЖЭТФ* **11** 340 (1941)
28. Левич В Г *Физико-химическая гидродинамика* 3-е изд., испр. и доп. (М.–Ижевск: Инст. компьт. исслед., 2016); Пер. 1-го изд. на англ. яз.: Levich V G *Physicochemical Hydrodynamics* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1962)
29. Miles J W *Proc. R. Soc. London A* **297** 459 (1967)
30. Lucassen-Reynders E H, Lucassen J *Adv. Colloid Interface Sci.* **2** 347 (1970)
31. Henderson D M J. *Fluid Mech.* **365** 89 (1998)
32. Henderson D M, Segur H J. *Geophys. Res. Oceans* **118** 5074 (2013)
33. Campagne A et al. *Phys. Rev. Fluids* **3** 044801 (2018)
34. Van Dorn W G J. *Fluid Mech.* **24** 769 (1966)
35. Parfenyev V M, Vergeles S S, Lebedev V V *Phys. Rev. E* **94** 052801 (2016)
36. Parfenyev V M, Vergeles S S *Phys. Rev. Fluids* **3** 064702 (2018)
37. Parfenyev V M et al. *Phys. Rev. Fluids* **4** 114701 (2019)
38. Langevin D *Annu. Rev. Fluid Mech.* **46** 47 (2014)
39. Francois N et al. *Phys. Rev. E* **92** 023027 (2015)
40. Parfenyev V M, Vergeles S S *Phys. Rev. Fluids* **5** 094702 (2020)
41. Filatov S V, Poplevin A V, Levchenko A A, Parfenyev V M *Physica D* **434** 133218 (2022)
42. Riley N *Annu. Rev. Fluid Mech.* **33** 43 (2001)
43. Lord Rayleigh *Philos. Trans. R. Soc. London* **175** 1 (1884)
44. Boloriaan S, Morris P *Int. J. Aeroacoust.* **2** 255 (2003)
45. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Физматлит, 2001); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)
46. Subbotin S, Shiryaeva M *Microgravity Sci. Technol.* **34** 89 (2022)
47. Subbotin S et al. *Phys. Fluids* **35** 074110 (2023)
48. Riley N *IMA J. Appl. Math.* **3** 419 (1967) DOI: 10.1093/imamat/3.4.419
49. Lyubimova T P et al. *Microgravity Sci. Technol.* **37** 45 (2025)

50. Parfenyev V M, Vergeles S S, Lebedev V V *Письма в ЖЭТФ* **103** 220 (2016); *JETP Lett.* **103** 201 (2016)
51. Parfenyev V M, Vergeles S S, Lebedev V V *JETP Lett.* **104** 287 (2016)
52. Yablonskii S V, Kurbatov N M, Parfenyev V M *Phys. Rev. E* **95** 012707 (2017)
53. Филатов С В, Левченко А А, Межов-Деглин Л П *Письма в ЖЭТФ* **111** 653 (2020); Filatov S V, Levchenko A A, Mezhev-Deglin L P *JETP Lett.* **111** 549 (2020)
54. Филатов С В, Храмов Д А, Левченко А А *Письма в ЖЭТФ* **106** 305 (2017); Filatov S V, Khranov D A, Levchenko A A *JETP Lett.* **106** 330 (2017)
55. Boffetta G, Ecke R E *Annu. Rev. Fluid Mech.* **44** 427 (2012)
56. Craik A D D, Leibovich S J *Fluid Mech.* **73** 401 (1976)
57. Holm D D *Physica D* **98** 415 (1996)
58. Vergeles S S, Vointsev I A *Phys. Fluids* **36** 034119 (2024); arXiv:2310.19533
59. Абрашкин А А, Пелиновский Е Н *УФН* **192** 491 (2022); Abrashkin A A, Pelinovsky E N *Phys. Usp.* **65** 453 (2022)
60. Stewart R H, Joy J W *Deep Sea Res. Oceanogr. Abstracts* **21** 1039 (1974)
61. Andrews D G, McIntyre M J *Fluid Mech.* **89** 647 (1978)
62. Степанянц Ю А, Фабрикант А Л *Распространение волн в сдвиговых потоках* (М.: Физматлит, 1996); Пер. на англ. яз.: Fabrikant A L, Stepanyants Yu A *Propagation of Waves in Shear Flows* (Singapore: World Scientific, 1998)
63. Peregrine D H *Adv. Appl. Mech.* **16** 9 (1976)
64. Басович А Я, Таланов В И *Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана* **13** 766 (1977)
65. Craik A D D *J. Fluid Mech.* **81** 209 (1977)
66. Lamb H *Hydrodynamics* 6th ed. (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1975)
67. Longuet-Higgins M S, Stewart R W J *Fluid Mech.* **8** 565 (1960)
68. Longuet-Higgins M S, Stewart R *Deep Sea Res. Oceanogr. Abstracts* **11** 529 (1964)
69. van den Bremer T S, Breivik Ø *Philos. Trans. R. Soc. A* **376** 20170104 (2018)
70. Monismith S G J *Fluid Mech.* **884** F1 (2020)
71. van den Bremer T S et al. *J. Fluid Mech.* **879** 168 (2019)
72. Calvert R et al. *Phys. Rev. Fluids* **4** 114801 (2019)
73. Phillips O M *The Dynamics of the Upper Ocean* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1977); Пер. на русск. яз.: Филлипс О М *Динамика верхнего слоя океана* (Л.: Гидрометеониздат, 1980)
74. Степанянц Ю А, Фабрикант А Л *УФН* **159** 83 (1989); Stepanyants Yu A, Fabrikant A L *Sov. Phys. Usp.* **32** 783 (1989)
75. Dysthe K B *Proc. R. Soc. London A* **369** 105 (1979)
76. Longuet-Higgins M S J *Fluid Mech.* **17** 459 (1963)
77. Lucassen J *Trans. Faraday Soc.* **64** 2221 (1968)
78. Rajan G K *Int. J. Eng. Sci.* **154** 103340 (2020)
79. Alpers W, Hühnerfuss H J *Geophys. Res. Oceans* **94** 6251 (1989)
80. Ruvinsky K D, Feldstein F I, Freidman G I J *Fluid Mech.* **230** 339 (1991)
81. Gershuni G Z, Lyubimov D V *Thermal Vibrational Convection* (Chichester: John Wiley and Sons, 1998)
82. Belonozhko D F, Kozin A V *Fluid Dyn.* **46** 270 (2011)
83. Shmyrov A V et al. *J. Fluid Mech.* **877** 495 (2019)
84. Whitham G B *Linear and Nonlinear Waves* (New York: Wiley, 1974); Пер. на русск. яз.: Уизем Дж *Линейные и нелинейные волны* (М.: Мир, 1977)
85. Камчатнов А М *Теория линейных и нелинейных волн* (М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2025)
86. Lee K, Mizutani N *Int. J. Offshore Polar Eng.* **17** 259 (2007)
87. Romero L, Lenain L, Melville W K J *Phys. Oceanogr.* **47** 615 (2017)
88. Thorpe S A *Annu. Rev. Fluid Mech.* **36** 55 (2004)
89. Fox-Kemper B, Johnson L, Qiao F, in *Ocean Mixing: Drivers, Mechanisms and Impacts* (Eds M Meredith, A N Garabato) (Amsterdam: Elsevier, 2022) pp. 65–94, DOI: 10.1016/B978-0-12-821512-8.00011-6
90. Самодуров А С и др. *Морской гидрофизический журн.* **39** 735 (2023); Пер. на англ. яз.: Samodurov A S et al. *Phys. Oceanogr.* **30** 689 (2023)
91. Leibovich S *Annu. Rev. Fluid Mech.* **15** 391 (1983)
92. Kawamura T J *Marine Sci. Technol.* **5** 161 (2000)
93. Fujiwara Y, Yoshikawa Y J *Phys. Oceanogr.* **50** 2323 (2020)
94. Veron F, Melville W K J *Fluid Mech.* **446** 25 (2001)
95. Craik A D D *J. Fluid Mech.* **125** 37 (1982)
96. Leibovich S J *Fluid Mech.* **79** 715 (1977)
97. Molenaar D, Clercx H J H, van Heijst G J F *Physica D* **196** 329 (2004)
98. Xia H, Shats M, Falkovich G *Phys. Fluids* **21** 125101 (2009)
99. Bardóczy L et al. *Phys. Rev. E* **90** 063103 (2014)
100. Doludenko A N et al. *Phys. Fluids* **33** 011704 (2021)
101. Ruth D J, Coletti F J *Fluid Mech.* **1001** A46 (2024)
102. Jamin T, Berhanu M, Falcon E *Phys. Rev. Fluids* **10** 034608 (2025); arXiv:2401.17871
103. Flores O, Riley J J, Horner-Devine A R J *Fluid Mech.* **821** 248 (2017)
104. Gorce J-B et al. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **116** 25424 (2019)
105. Hong S-H et al. *Sci. Adv.* **6** eaaz9386 (2020)
106. Falkovich G J *Fluid Mech.* **638** 1 (2009)
107. Dias F, Dyachenko A I, Zakharov V E *Phys. Lett. A* **372** 1297 (2008)
108. Kolokolov I V, Lebedev V V, Parfenyev V M *Phys. Rev. E* **109** 035103 (2024)
109. Shikanian A, Parfenyev V *Phys. Fluids* **37** 095127 (2025)

Nonlinear generation of currents by waves on liquid surface

S.S. Vergeles^(1,2,a), A.A. Levchenko^(3,b), V.M. Parfenyev^(1,2,c)

⁽¹⁾ Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences, prosp. Akademika Semenova 1A, 142432 Chernogolovka, Moscow region, Russian Federation

⁽²⁾ HSE University, ul. Myasnitskaya 20, 101000 Moscow, Russian Federation

⁽³⁾ Osipyan Institute of Solid State Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Akademika Osipyana 2, 142432 Chernogolovka, Moscow region, Russian Federation

E-mail: ^(a) ssver@itp.ac.ru, ^(b) levch@issp.ac.ru, ^(c) parfenius@gmail.com

Attenuation of surface waves due to viscous dissipation is accompanied by the excitation of slow vortex currents due to the conservation of total momentum. We present a theoretical model for small-amplitude waves that explains experiments on vortex flow generation by crossing waves. Special attention is paid to the effect of surface contaminants, which is accounted for within the framework of a model of a thin elastic liquid film, leading to enhanced wave dissipation and intensified vortex currents. As the amplitude of the currents increases, their interaction with the waves must be considered. A theoretical framework is proposed to describe this interaction, demonstrating its applicability to classical problems: Guyon waves, the propagation of short waves against a current, and Langmuir circulation. Finally, experimental data on the turbulent regime of flow generation, which occurs at sufficiently large wave amplitudes, are described, and open questions in this field are outlined.

Keywords: waves on liquid surface, surface film, vortex flow, mass current, Stokes drift, virtual wave stress, vortex force, wave scattering and refraction

PACS numbers: **05.45. – a**, 92.10.hb

Bibliography — 109 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **195** (11) 1199–1220 (2025)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.08.039992>

Received 30 March 2025, revised 3 August 2025

Physics – Uspekhi **68** (11) (2025)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2025.08.039992>