

К 60-летию ИНСТИТУТА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ имени Л.Д. ЛАНДАУ РАН

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Статистика высоких интенсивностей света,
распространяющегося в турбулентной среде

И.В. Колоколов, В.В. Лебедев

Представлено исследование статистических свойств распространения света в турбулентной среде. Основное внимание уделено анализу плотности вероятности интенсивности I для различных значений I и длины пути светового пучка. Плотность вероятности $P(I)$ имеет два хвоста, характеризующихся растянутыми экспонентами, соответствующими тому, что вероятность всплесков с интенсивностью, существенно превышающей типичное значение, оказывается значительно выше, чем можно было бы предположить исходя из обычно используемого экспоненциального распределения.

Ключевые слова: распространение электромагнитных волн, турбулентные среды, редкие события, яркие спеклы

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.25.Dd, 92.60.Ta

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.05.039934>

Содержание

1. Введение (1179).
 2. Общие соотношения (1180).
 3. Статистика интенсивности (1182).
 4. Корреляционные функции (1184).
 5. Интегральное представление для интенсивности (1186).
 6. Квазиклассическое приближение (1188).
 7. Случайная линза (1189).
 8. Хвост 7/12 (1190).
 9. Обоснование хвоста 7/12 (1191).
 10. Хвост 7/13 (1193).
 11. Стратифицированная среда (1194).
 12. Заключение (1195).
 13. Приложение. Переमेжаемость (1196).
- Список литературы (1197).

1. Введение

Предметом данной работы является теоретическое исследование распространения света в турбулентной среде, такой как атмосфера. Дифракция света на флуктуациях показателя преломления, вызванных турбулентностью, приводит к искажениям световой волны.

Наблюдения, например астрономические, показывают, что характер таких искажений существенно зависит от траектории светового пучка. При относительно небольших длинах распространения искажения невелики, тогда говорят о режиме слабых сцинтилляций. При больших длинах распространения пучок распадается на отдельные спеклы, и это режим сильных сцинтилляций.

Описание статистических свойств флуктуаций показателя преломления основано на классических работах Колмогорова и Обухова [1–3], в которых для описания турбулентного состояния была сформулирована картина каскада энергии и были получены степенные спектры, характеризующие флуктуации скорости в инерционном диапазоне масштабов. Впоследствии Обухов [4] и Корсин [5] распространили данный подход на флуктуации пассивных скалярных полей, таких как температура или концентрация примесей, в турбулентной среде. Эти результаты были использованы Обуховым в пионерской работе [6] (см. также монографию [7]), посвящённой задаче о распространении света в турбулентной атмосфере.

Эффекты, связанные с распространением света в турбулентной среде, интенсивно исследовались во второй половине XX века. Результаты этих исследований подытожены в работах [8–14]. Они касаются в основном типичных событий и их статистических свойств. В последнее время интерес к данной проблеме возродился в основном благодаря возросшим возможностям численного моделирования, позволяющим получать подробную информацию о распространяющейся в турбулентной среде световой волне [15–19].

В данной работе мы сосредоточились на изучении редких событий, приводящих к аномально большим значениям интенсивности света в некоторых точках. Вероятность всплесков интенсивности оказывается намного выше, чем её наивная оценка, полученная в рамках представлений о гауссовом волновом поле [20–22]. Это

И.В. Колоколов^(1,2,a), В.В. Лебедев^(1,2,b)

⁽¹⁾ Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, просп. Академика Семёнова 1а, 142432 Черноголовка, Московская область, Российская Федерация

⁽²⁾ Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", ул. Мясницкая 20, 101000 Москва, Российская Федерация

E-mail: ^(a) kolokol@itp.ac.ru, ^(b) lebedev@itp.ac.ru

Статья поступила 24 марта 2025 г.,
после доработки 17 мая 2025 г.

свойство открывает возможности для использования таких событий в оптических приложениях.

В нашей работе мы применяем метод оптимальной флуктуации, впервые сформулированный И.М. Лифшицем при решении задачи об асимптотике плотности состояний в среде с беспорядком (см. [23]). В последующей работе [24] был развит формализм, позволивший найти меру допустимых реализаций беспорядка вблизи оптимальной. В статьях [25, 26] метод оптимальной флуктуации был применён к неравновесным системам гидродинамического типа. Отметим, что в работе [25], посвящённой переносу пассивного скалярного поля хаотическим потоком, когерентная составляющая течений, определяющая хвосты функции распределения скаляра, находилась после усреднения по флуктуациям конечной амплитуды. По сравнению с упомянутыми статьями важной особенностью рассматриваемой в настоящей работе проблемы являются интерференционные эффекты, существенно влияющие на форму оптимальной флуктуации.

В развиваемом нами теоретическом анализе возникает характерная длина X_* , которая представляет собой размер случайной линзы, вызывающей в результате фокусировки anomalously большие значения интенсивности. Для применимости нашего подхода длина X_* должна быть меньше размера начального волнового профиля. Это условие выполняется как для плоской, так и для сферической волны. Однако при работе с конечной апертурой пучка D важно учитывать соотношение между D и X_* , т.е. наши результаты справедливы при $D > X_*$.

Следует упомянуть ранние измерения плотности вероятности $P(I)$ интенсивности широких лазерных пучков в атмосфере [27, 28] (см. также статью Грачевой и др. в [13]). Хотя точность этих измерений не очень высока, они демонстрируют, что в режиме сильных сцинтилляций $P(I)$ уменьшается с ростом I медленнее, чем экспоненциальная функция. Такое наблюдение находится в согласии с нашим анализом.

Результаты ранних численных расчётов для функции распределения вероятностей интенсивности I представлены и проанализированы в монографии [14]. Общий вывод, к которому привёл анализ численных данных, заключается в том, что функция распределения вероятностей по мере увеличения I затухает медленнее, чем экспонента, что согласуется с нашей схемой. В недавней работе [19] выполнено численное моделирование, имеющее целью определение функции распределения вероятностей интенсивности. В ней представлены результаты для режимов слабых и сильных сцинтилляций. К сожалению, в режиме слабых сцинтилляций условие применимости нашего подхода (малость X_* по сравнению с шириной исходного пучка) в работе не выполняется. Поэтому в таком режиме прямое сравнение наших предсказаний с результатами [19] невозможно. В режиме сильных сцинтилляций численные результаты [19] аппроксимируются функциями распределения вероятностей с растянутыми экспонентами. Значения растянутых экспонент удовлетворительно согласуются с показателями, которые мы получили.

Приведём структуру нашего текста. В разделе 2 мы вводим основные понятия, связанные с задачей, и базовые уравнения. В разделе 3 мы представляем результаты, касающиеся плотности вероятности интенсивности света I , включая описание её хвостов. Анонсированные резуль-

таты постепенно обосновываются в последующих разделах. В разделе 4 мы приводим уравнения для корреляционных функций огибающей светового луча и обсуждаем их свойства. В разделе 5 мы приводим представление интенсивности света в заданной точке в виде интеграла по начальному профилю луча и получаем некоторые следствия из такого представления. В разделе 6 мы приводим квазиклассическое выражение для функции Грина, используемое в рамках нашего анализа. В разделе 7 мы обсуждаем возможные пространственные конфигурации показателя преломления, приводящие к anomalously большим значениям интенсивности I в точке наблюдения. В разделе 8 мы строим пространственную конфигурацию показателя преломления в седловой точке функционального интеграла, отвечающую за один из хвостов функции распределения вероятностей. В разделе 9 мы рассматриваем эффекты, связанные с флуктуациями показателя преломления на фоне этой седловой конфигурации, и демонстрируем, что они незначительны. В разделе 10 мы строим конфигурацию среднего показателя преломления, отвечающую за другой хвост функции распределения вероятностей. В разделе 11 мы обсуждаем особенности сильно стратифицированной среды. В разделе 12 мы подводим итоги нашего исследования.

2. Общие соотношения

В данном разделе мы приводим основные соотношения теории распространения света в турбулентной среде.

Мы рассматриваем монохроматическую световую волну, распространяющуюся в турбулентной среде (атмосфере). Волна описывается её огибающей Ψ , которая подчиняется следующему параболическому уравнению:

$$i \partial_z \Psi + \frac{1}{2k_0} \nabla^2 \Psi + k_0 v \Psi = 0. \quad (2.1)$$

Здесь k_0 — волновой вектор несущей световой волны, v — отклонение показателя преломления от его среднего значения, z — координата в направлении распространения волны, ∇ — двумерный (2D) градиент в направлениях, поперечных направлению распространения светового пучка.

Описание волны при помощи её огибающей корректно при условии, что все характерные масштабы задачи намного больше длины волны $2\pi/k_0$. Уравнение (2.1) учитывает эффекты дифракции, однако в уравнении (2.1) не учитывается поглощение света. Условием применимости этого уравнения является также слабость нелинейных эффектов, связанных с зависимостью показателя преломления от интенсивности света (эффектом Керра). Режим, в котором нелинейные эффекты становятся существенными, является темой отдельного исследования и выходит за рамки данной работы.

Поле v зависит от времени t , двумерного радиуса-вектора $\mathbf{r}$, поперечного направлению распространения пучка, и координаты z вдоль этого направления. Однако производная по времени не входит в уравнение (2.1), потому что из-за высокой скорости света огибающая Ψ быстро подстраивается под текущее состояние среды. Поэтому временные изменения показателя преломления немедленно влекут за собой временные изменения электромагнитного поля, представленного огибающей Ψ .

Турбулентные пульсации вызывают случайные вариации показателя преломления v . Поле v входит во все наблюдаемые величины через интегралы по координате z вдоль траектории луча. Эти интегралы можно рассматривать как суммы большого количества независимых случайных величин. Поэтому можно утверждать, что поле v имеет гауссову (нормальную) статистику (см. также [29]).

Статистически флуктуации v можно охарактеризовать с помощью структурной функции

$$S_2 = \langle [v(\mathbf{r}_1, z_1) - v(\mathbf{r}_2, z_2)]^2 \rangle. \quad (2.2)$$

Здесь и ниже угловые скобки обозначают усреднение по времени t или, другими словами, по реализациям случайного поля v . Величина (2.2) равна нулю для совпадающих точек и возрастает по мере увеличения расстояния между точками 1 и 2.

Для масштабов, лежащих в инерционном интервале турбулентности, структурная функция показателя преломления, согласно теоретическим представлениям и эмпирическим данным [33], является изотропной и степенной, как и структурная функция любого пассивного скаляра [4, 5, 8]. Таким образом, мы приходим к следующему выражению для структурной функции (2.2):

$$S_2 = C_n^2 [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{c/2-1/2}. \quad (2.3)$$

Множитель C_n^2 в уравнении (2.3) характеризует силу флуктуаций показателя преломления, а показатель c для спектра Обухова–Коррзина [4, 5] равен $c = 5/3$. Далее мы рассматриваем c как произвольный параметр, удовлетворяющий условиям $1 < c < 2$.

Для больших длин распространения света свойства среды могут изменяться вдоль траектории пучка. Эти изменения могут быть учтены, если мы предположим, что коэффициент C_n^2 в уравнении (2.3) зависит от пройденного расстояния, $z = (z_1 + z_2)/2$. Такое описание корректно, если характерная длина, на которой заметно изменяется C_n^2 , больше, чем любые поперечные масштабы, имеющие отношение к нашей задаче. Среда данного типа известна как стратифицированная среда. Стратификацию надо учитывать, например, при вертикальном распространении пучка света через атмосферу.

Выражение (2.3) соответствует следующему представлению парной корреляционной функции флуктуаций показателя преломления в виде интеграла Фурье:

$$\begin{aligned} \langle v(\mathbf{r}_1, z_1) v(\mathbf{r}_2, z_2) \rangle &= C_n^2 \int \frac{d^2 q \, dq_z}{(2\pi)^2} \exp[i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \times \\ &\times \exp[iq_z(z_1 - z_2)] \frac{\Gamma(1+c) |\cos(\pi c/2)|}{(\mathbf{q}^2 + q_z^2)^{c/2+1}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Выражение (2.4) подразумевает изотропность статистики показателя преломления в инерционном интервале масштабов.

Мы предполагаем, что путь, пройденный пучком, намного превосходит характерные поперечные масштабы. Поэтому $q_z \ll q$ для характерных значений волновых векторов $\mathbf{q}$ в (2.4). Пренебрегая q_z в знаменателе в соотношении (2.4) и интегрируя затем по q_z , мы по-

лучаем

$$\langle v(\mathbf{r}_1, z_1) v(\mathbf{r}_2, z_2) \rangle \rightarrow \delta(z_1 - z_2) C_n^2 \mathcal{A}(r), \quad (2.5)$$

$$\mathcal{A}(r) = 2\pi\Gamma(1+c) \left| \cos\left(\frac{\pi c}{2}\right) \right| \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})}{q^{c+2}}, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Выражение (2.6) определяет двумерный спектр поля $v(\mathbf{r}, z)$.

Интеграл в (2.6) расходится при малых q , поэтому его следует обрезать на обратном внешнем масштабе турбулентности. В результате для расстояний r из инерционного интервала находим

$$\mathcal{A}(r) = \mathcal{A}_0 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(-c/2)}{\Gamma(1/2 - c/2)} r^c. \quad (2.7)$$

Константа $\mathcal{A}_0$ в уравнении (2.7) определяется малыми q (порядка обратной длины внешнего масштаба турбулентности). Для спектра Обухова–Коррзина получаем

$$\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}(r) = 1,4572 r^{5/3}, \quad c = \frac{5}{3}, \quad (2.8)$$

как следует из (2.7). Выражения (2.7), (2.8) верны при условии, что r больше, чем внутренний (вязкий) масштаб турбулентности, и меньше, чем её внешний масштаб. Мы предполагаем, что эти условия выполнены.

Пространственные корреляции огибающей Ψ в поперечных направлениях могут быть охарактеризованы параметром Фрида r_0 , введённым в работе [34],

$$r_0^{-5/3} = 0,423 k_0^2 \int d\zeta C_n^2(\zeta). \quad (2.9)$$

Определение (2.9) подразумевает $c = 5/3$. Обобщение определения (2.9) на произвольный параметр c даёт соотношением:

$$r_0^{-c} \sim k_0^2 \int d\zeta C_n^2(\zeta). \quad (2.10)$$

Величина r_0 уменьшается по мере увеличения длины пути z , пройденного светом.

В дальнейшем нам удобно будет использовать следующий безразмерный параметр:

$$\gamma = \frac{z}{k_0 r_0^2}, \quad (2.11)$$

зависящий как от случайной дифракции, так и от геометрии траектории пучка. Случай $\gamma \ll 1$ соответствует режиму слабых сцинтилляций, а режим сильных сцинтилляций реализуется при $\gamma \gg 1$. Случай $\gamma \sim 1$ мы называем режимом умеренных сцинтилляций. Параметр (2.11) связан с дисперсией Рытова σ_R [10, 12, 14] как

$$\sigma_R^2 = 2,908 \gamma^{5/6}. \quad (2.12)$$

Соотношение (2.12) дано для спектра Обухова–Коррзина, где $c = 5/3$.

Уравнение (2.1) на Ψ можно переписать в терминах переменной $\eta = \ln \Psi$. Действительная часть η называется уровнем волны, а мнимая часть η является фазой ϕ . Уравнение на η имеет вид

$$\partial_z \eta - \frac{i}{2k_0} \nabla^2 \eta - \frac{i}{2k_0} (\nabla \eta)^2 - ik_0 v = 0. \quad (2.13)$$

В то время как уравнение (2.1) является линейным уравнением на Ψ с мультипликативным шумом, уравнение (2.13) является нелинейным уравнением с аддитивным шумом. Нелинейность в уравнении (2.13) является квадратичной, как, например, в уравнении Бюргера [35].

Если нелинейным членом в уравнении (2.13) можно пренебречь, то статистика η (и, следовательно, логарифма интенсивности $\ln I$) является нормальной. Данное приближение известно, как метод плавных возмущений [11]. Однако в режиме сильной нелинейности, когда квадратичный член в уравнении (2.13) существенен, никакой логнормальности статистики I ожидать не приходится. В качестве иллюстрации этого утверждения мы привели в разделе 13 две модели, в которых рассматриваются подобные (2.13) уравнения и которые допускают аналитическое исследование режима сильной нелинейности.

Решение уравнения (2.13) можно искать последовательными итерациями по нелинейности (см., например, [11]). В результате возникает ряд теории возмущений по полю v , каждый член которого является многократным интегралом по пространству с соответствующим ядром. Вычисление величин, средних по статистике v , приводит к выражениям, содержащим корреляционные функции v , имеющим длину корреляции по z , определяемую характеристичными поперечными размерами задачи. Поскольку отношение этого размера к длине распространения z мало, то вклады кумулянтов v в упомянутые средние содержат малость (по сравнению с вкладами, обусловленными парной корреляционной функцией), связанную с соответствующим ограничением области интегрирования по z . Поэтому кумулянтами v можно в главном приближении пренебречь, что и означает эффективно нормальную статистику поля v . Близкая аргументация приведена в работе [29].

Разлагая огибающую Ψ на её абсолютное значение и фазу, $\Psi = \sqrt{I} \exp(i\phi)$, можно перейти от комплексного уравнения (2.1) к двум вещественным:

$$\partial_z I + \frac{1}{k_0} \nabla(I \nabla \phi) = 0, \quad (2.14)$$

$$\partial_z \phi + \frac{1}{2k_0} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{k_0 \sqrt{I}} \nabla^2 \sqrt{I} = k_0 v(\mathbf{r}, z). \quad (2.15)$$

Система уравнений (2.14), (2.15) может рассматриваться как уравнения эволюции сжимаемой жидкости с потенциалным полем скорости $\mathbf{u} = \nabla \phi / k_0$ и плотностью I . Поле v играет роль потенциала внешней силы, действующей на жидкость.

В статьях [30, 31] такая аналогия используется для визуализации различных эффектов в динамике пылевой среды, в первую очередь образования складок и особенностей плотности. Данные особенности возникают в рассматриваемых в [30, 31] модельных задачах как нули якобиана отображения пространства на себя, осуществляемого лагранжевыми траекториями, определяемыми полем скорости $\mathbf{u}$. Последнее же предполагается либо не зависящим от времени вообще, либо имеющим зависимость самого общего характера. Однако среда, описываемая системой уравнений (2.14), (2.15), радикально отличается от пылевой, поскольку в уравнении (2.15) имеется слагаемое $(k_0 \sqrt{I})^{-1} \nabla^2 \sqrt{I}$, играющее роль давле-

ния. Наличие этого члена приводит к сильной коррелированности интенсивности I и фазы ϕ и, следовательно, к невозможности рассматривать I как пассивное поле. Отметим в связи с этим работу [32], где на примере двумерной турбулентности было численно показано, что статистика завихренности и пассивного скаляра совершенно различны, несмотря на то что формально уравнения для завихренности и пассивного скаляра совпадают. Указанная разница связана именно с тем, что завихренность скоррелирована со скоростью.

Неприменимость прямой аналогии оптической задачи с динамикой турбулентной пылевидной среды проявляется в конечности всех моментов интенсивности $\langle I^n \rangle$, тогда как в функции распределения локальной плотности пыли за любое конечное время образуются степенные хвосты [31], которые означают расходимость выражений для высоких моментов.

Уравнения (2.14), (2.15) могут быть использованы для оценки области применимости логнормальной статистики I . Она реализуется, если фаза ϕ линейно выражается через поле v , а $\ln I$, в свою очередь, линейно выражается через фазу ϕ . Для этого второй член в уравнении (2.15) должен быть много меньше первого. Как мы установили, при данном z фаза меняется на величину порядка единицы на длине Фрида r_0 . Поэтому данное условие означает $k_0 r_0^2 \gg z$, где мы оценили $\nabla \phi$ как r_0^{-1} , а $\partial_z \phi$ мы оценили как $1/z$. Это неравенство является не чем иным, как условием режима слабых сцинтилляций $\gamma \ll 1$. Уравнение (2.14) переписывается в виде

$$\partial_z \ln \frac{I}{I_0} + \frac{\nabla \phi}{k_0} \nabla \ln \frac{I}{I_0} + \nabla \frac{\nabla \phi}{k_0} = 0, \quad (2.16)$$

где I_0 — невозмущённое значение интенсивности. В уравнении (2.16) второй (нелинейный) член должен быть много меньше последнего. Отсюда мы находим условие $\ln(I/I_0) \ll 1$ или, что то же самое, $|I - I_0| \ll I_0$.

3. Статистика интенсивности

В данном разделе мы опишем результаты, касающиеся плотности вероятности (функции распределения) интенсивности света $I = |\Psi|^2$, измеренной в некоторой точке внутри светового пучка. Огибающая световой волны Ψ является функционалом флуктуирующей составляющей показателя преломления v . Плотность вероятности (функцию распределения) интенсивности $P(I)$ в точке наблюдения $\mathbf{r}, z$ можно записать в виде

$$P(I) = \langle \delta[I - |\Psi(\mathbf{r}, z)|^2] \rangle, \quad (3.1)$$

где угловые скобки означают усреднение по всем возможным конфигурациям поля $v(\mathbf{r}, \zeta)$ с весом, который определяет вероятность реализации этих конфигураций.

Статистические свойства стохастической величины, такой как I , описываются в терминах её функции распределения, определяющей вероятность наблюдения величины внутри заданного интервала значений. Общие свойства функций распределения представлены, например, в классической монографии [36]. Здесь мы обсуждаем функцию распределения интенсивности I , обозначаемую далее как $P(I)$.

Функция распределения $P(I)$ определена на интервале $0 < I < \infty$. Она положительна и нормирована на единицу:

$$\int_0^\infty dI P(I) = 1.$$

Это соотношение означает, что общая вероятность наблюдения значения I равна единице. Можно ввести моменты I , которые представляют собой средние значения $\langle I^n \rangle$. В терминах функции распределения вероятности моменты определяются следующими интегралами:

$$\langle I^n \rangle = \int_0^\infty dI I^n P(I). \quad (3.2)$$

Моменты $\langle I^n \rangle$, очевидно, положительны.

Опишем общую структуру $P(I)$ для различных значений интенсивности света I и параметра γ (2.11). Ниже мы используем безразмерный параметр I/I_0 , где I_0 — первый момент,

$$I_0 = \int_0^\infty dI I P(I), \quad (3.3)$$

являющийся не чем иным, как средним значением интенсивности I . Вероятность событий, соответствующих аномально большим значениям интенсивности I , $I \gg I_0$, определяется хвостами функции распределения $P(I)$. Структура хвостов также может быть выражена через высокие моменты (3.2), где $n \gg 1$.

В режиме слабых сцинтилляций, когда $\gamma \ll 1$, типичные конфигурации огибающей Ψ слабо искажены по сравнению с распространением свободной волны. Поэтому можно проанализировать поправки к наблюдаемым величинам, обусловленные случайной дифракцией, в рамках теории возмущений, которая представляет собой разложение наблюдаемых величин в ряд по v . Для интенсивности I теория возмущений справедлива, если $|I - I_0| \ll I_0$. Поскольку в главном порядке разности $I - I_0$ пропорциональна v , а v имеет нормальное распределение, разности $I - I_0$ также имеет нормальное распределение в этом режиме. В терминах функции распределения это записывается как

$$\ln P(I) \sim \text{const} - \gamma^{-c/2} \left(\frac{I - I_0}{I_0} \right)^2. \quad (3.4)$$

Коэффициент при $(I - I_0)^2$ следует из уравнения (2.5) и соответствует результатам, полученным в работах [8, 37, 38]. Моменты $\langle I^n \rangle$ в данном режиме близки к I_0^n , если n достаточно мало, $n \ll \gamma^{-c/2}$.

В случае сильных сцинтилляций, когда $\gamma \gg 1$, огибающая $\Psi(z)$ представляет собой сумму вкладов от дифракции на большом числе случайно распределённых областей с разными значениями флуктуирующего поля v . Поэтому огибающая Ψ имеет гауссову статистику в силу центральной предельной теоремы. Пересчитав эту гауссову статистику в статистику I , мы можем получить экспоненциальную функцию плотности вероятности

$$P(I) = I_0^{-1} \exp \left(-\frac{I}{I_0} \right). \quad (3.5)$$

Тогда моменты интенсивности I легко находятся

$$\langle I^n \rangle = n! I_0^n. \quad (3.6)$$

Поправки к функции распределения вероятности (3.5) были рассмотрены в работах [38–40]. Полученные в них результаты означают, что выражение (3.5) для функции распределения справедливо при условии

$$I \ll I_0 \gamma^{2-c}. \quad (3.7)$$

Для спектра Обухова–Коррсина показатель степени в неравенстве (3.7) равен $2 - c = 1/3$.

За пределами условий применимости выражений (3.4), (3.5) функция распределения интенсивности I имеет асимптотики (хвосты), характеризующиеся так называемыми растянутыми экспонентами. Зависимость плотности вероятности от I в этом случае принимает вид

$$P \propto \exp \left[-\left(\frac{I}{I_0} \right)^\beta \right], \quad (3.8)$$

где I_0 и β — некоторые положительные параметры. Высокие моменты (3.2), $n \gg 1$, могут быть вычислены из (3.2), (3.8) в перевальном приближении. Условие экстремума приводит к уравнению

$$\left(\frac{I_{\text{saddle}}}{I_0} \right)^\beta = \frac{n}{\beta}, \quad (3.9)$$

для значения интенсивности I_{saddle} в седловой точке. Таким образом, мы приходим к оценке

$$\langle I^n \rangle \sim I_0^n n^{n/\beta}, \quad (3.10)$$

справедливой с точностью до некоторого коэффициента, который является константой порядка единицы в степени n .

Первый хвост, рассмотренный в работе [20], возникает в случае сильных сцинтилляций, когда $\gamma \gg 1$. Эта асимптотика имеет вид (3.8) со следующими параметрами:

$$\beta = \frac{4-c}{6-c}, \quad I_0 \sim I_0 \gamma^{-2(2-c)/(4-c)}. \quad (3.11)$$

Для спектра Обухова–Коррсина, когда $c = 5/3$, показатель степени β равен $7/13$. Хвост (3.11) реализуется при условиях

$$I_0 \gamma^{2-c} \ll I \ll I_0 \gamma^{2(2+c)/(2-c)}, \\ \text{или } \gamma^{2-c} \ll n \ll \gamma^{4/(2-c)}, \quad (3.12)$$

выраженных в терминах I или n .

Существует дополнительный хвост функции распределения величины I [21, 22], реализующийся при произвольном значении величины γ . Он определяется следующими параметрами:

$$\beta = \frac{4-c}{4}, \quad I_0 \sim I_0 \gamma^{2c/(4-c)}. \quad (3.13)$$

Для спектра Обухова–Коррсина, когда $c = 5/3$, показатель степени β равен $7/12$. Область, в которой реализуется хвост (3.13), зависит от значения параметра γ .

Если $\gamma \ll 1$, то хвост (3.13) реализуется при условии $I \gg I_0$. Этот критерий противоположен тому, который соответствует применимости выражения (3.4). В терминах моментов критерий $I \gg I_0$ означает $n^2 \gamma^c \gg 1$. При $\gamma \sim 1$ хвост (3.13) определяет все высокие моменты. Если $\gamma \gg 1$, то асимптотика (3.11) переходит в хвост (3.13) при

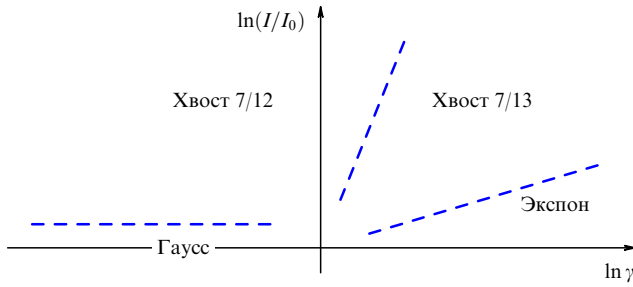


Рис. 1. Области, соответствующие различному поведению $P(I)$.

условии $I \gg I_0 \gamma^{2(2+c)/(2-c)}$, противоположном тому, которое соответствует (3.12). В терминах n данный критерий означает $n \gg \gamma^{4/(2-c)}$. Для спектра Обухова–Коррзина критерий выглядит как $I \gg I_0 \gamma^{22}$. Очевидно, что хвост (3.13) наиболее выражен при $\gamma \sim 1$ (в режиме умеренных сцинтилляций). Если $\gamma \gg 1$, то область применимости хвоста (3.13) смещается в сторону чрезвычайно больших значений I .

Приведённые результаты отражены на рис. 1, где представлена диаграмма на плоскости $\ln \gamma - \ln(I/I_0)$. На ней схематично показаны разделённые штриховыми линиями области, соответствующие различным типам поведения функции распределения $P(I)$. Гауссова плотность вероятности интенсивности I с пиком при $I = I_0$ обозначена как "Гаусс". Экспоненциальная функция распределения (3.5) обозначена как "Экспон". Хвост (3.13) обозначается как "Хвост 7/12", а хвост (3.11) обозначается как "Хвост 7/13".

В соответствии с выражением (3.1) плотность вероятности $P(I)$ является мерой множества конфигураций $v(\mathbf{r}, \zeta)$, приводящих к заданному значению интенсивности I в точке наблюдения. Если значение I значительно превышает среднее значение I_0 , то следует ожидать, что это множество сосредоточено вблизи некоторой выделенной конфигурации $\mathcal{V}(\mathbf{r}, \zeta)$ и имеет меру, тем меньшую, чем больше значение I . Для нахождения асимптотического поведения $P(I)$ при $I \gg I_0$ необходимо определить такую оптимальную, или, используя терминологию квантовой теории поля, инстантонную конфигурацию $\mathcal{V}(\mathbf{r}, \zeta)$ и вычислить меру допустимых отклонений $v(\mathbf{r}, \zeta) - \mathcal{V}(\mathbf{r}, \zeta)$ от этой конфигурации, приводящих к данному значению I .

При вычислении хвостов функции распределения $P(I)$ удобно использовать язык высоких моментов интенсивности $\langle I^n \rangle$. Такое среднее определяется совместно значением I на данной оптимальной конфигурации и "энтропийным" вкладом, представляющим "фазовый объём" допустимых отклонений $v - \mathcal{V}$. До тех пор пока последний маргинален по сравнению с I^n , соответствующим оптимальной флуктуации (инстантону) $\mathcal{V}(\mathbf{r}, \zeta)$, именно окрестность $\mathcal{V}(\mathbf{r}, \zeta)$ в пространстве конфигураций поля v определяет доминирующий вклад в $P(I)$.

Структура области функций $v(\mathbf{r}, \zeta)$ в конфигурационном пространстве, определяющая $P(I)$, существенно зависит от значения интенсивности I и от параметров, контролирующих силу флуктуаций v . В частности, амплитуда вариаций поля $v(\mathbf{r}, \zeta)$ около среднего $\mathcal{V}(\mathbf{r}, \zeta)$ может быть сравнимой с $\mathcal{V}(\mathbf{r}, \zeta)$ или даже превосходить её. Подобная ситуация реализуется, в частности, в окрестности фазового перехода второго рода, где на фоне среднего значения параметра порядка наблю-

даются его интенсивные флуктуации (см., например, [41]). Однако именно наличие среднего $\mathcal{V}(\mathbf{r}, \zeta)$ и обеспечивает аномально большое значение интенсивности.

Таким образом, для нахождения хвостов функции распределения $P(I)$, соответствующих аномально большим значениям интенсивности I , необходимо сначала определить инстантонную конфигурацию $\mathcal{V}$, которая является наиболее вероятной (оптимальной) конфигурацией поля v , приводящей к данному значению I , а затем исследовать флуктуации поля v на фоне $\mathcal{V}$, приводящие к тому же значению интенсивности I . Чем выше амплитуда таких флуктуаций (энтропийный фактор), тем больше значение $P(I)$. Реализация этой программы проведена в разделах 7–10 настоящего обзора, причём разделы 8 и 10 посвящены оценке энтропийного фактора на фоне инстантона.

4. Корреляционные функции

В этом разделе мы рассматриваем корреляционные функции огибающей Ψ , которые содержат детальную информацию о статистических свойствах светового пучка.

Корреляционные функции определяются как средние значения различных произведений Ψ и Ψ^* . Простейшим таким объектом является парная корреляционная функция

$$F_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) = \langle \Psi(\mathbf{r}_1, z) \Psi^*(\mathbf{r}_2, z) \rangle. \quad (4.1)$$

Напомним, что угловые скобки обозначают усреднение по времени или, что то же, усреднение по статистике поля v . Заметим, что парная корреляционная функция F_2 для совпадающих точек $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ является не чем иным, как первым моментом интенсивности $I_0 = \langle |\Psi|^2 \rangle$ (3.3).

Подчеркнём, что такие средние значения, как $\langle \Psi \rangle$ или $\langle \Psi \Psi \rangle$, малы из-за сильных флуктуаций фазы Ψ с масштабами порядка внешней длины турбулентности. Эти крупномасштабные флуктуации фазы выпадают из произведения $\Psi \Psi^*$, фигурирующего в определении (4.1). Мы будем анализировать только такие средние значения (корреляционные функции), которые нечувствительны к крупномасштабным фазовым флуктуациям.

Можно получить замкнутое уравнение для парной корреляционной функции (4.1) [42–47], оно имеет вид

$$\partial_z F_2 - \frac{i}{2k_0} \left[\frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{r}_1^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{r}_2^2} \right] + U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) F_2 = 0, \quad (4.2)$$

$$U(\mathbf{r}, z) = k_0^2 C_n^2(z) [A_0 - \mathcal{A}(\mathbf{r})] \propto r^c. \quad (4.3)$$

Обратим внимание на то, что большая константа A_0 выпадает из выражения (4.3). Это является следствием независимости произведения $\Psi \Psi^*$ от крупномасштабных флуктуаций фазы. Отметим, что аналогичные уравнения были получены для корреляционных функций пассивного скаляра [48] и магнитного поля [49] в хаотично движущейся жидкости с движениями, коротко коррелированными во времени.

Чтобы вывести уравнение (4.2), необходимо найти приращение $\Delta \Psi$ огибающей Ψ на конечном интервале времени, а затем усреднить его по флуктуациям показателя преломления. Приращение Ψ на интервале

$(z, z + \Delta z)$ определяется из уравнения (2.1):

$$\Delta \Psi = \frac{i\Delta z}{2k_0} \nabla^2 \Psi(z) + ik_0 \int_z^{z+\Delta z} d\zeta v(\zeta) \Psi(z) - k_0^2 \int_z^{z+\Delta z} d\zeta_1 \int_z^{\zeta_1} d\zeta_2 v(\zeta_1) v(\zeta_2) \Psi(z), \quad (4.4)$$

где поле v учитывается до второго порядка. Из-за коротких корреляций по z поле v на интервале $(z, z + \Delta z)$ статистически независимо от $v(\zeta)$ при $\zeta < z$. Следовательно, можно независимо усреднить приращение $\Psi_1 \Psi_2^*$, равное $\Delta \Psi_1 \Psi_2^* + \Psi_1 \Delta \Psi_2^* + \Delta \Psi_1 \Delta \Psi_2^*$, по статистике поля v на интервале $(z, z + \Delta z)$ с использованием соотношений (2.5), (2.7). В результате мы находим приращение, линейное по Δz и, в конце концов, уравнение (4.2).

Уравнение (4.2) решается явно, например, для начальной плоской волны, когда $F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)$ — константа, не зависящая от координат $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$:

$$F_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) \propto \exp \left[- \int_0^z d\zeta U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \zeta) \right]. \quad (4.5)$$

Интеграл в экспоненте в (4.5) оценивается как

$$\int d\zeta U(r, \zeta) \sim \left(\frac{r}{r_0} \right)^c, \quad (4.6)$$

как следует из (2.10), (4.3). Приравнявая величину (4.6) к единице, мы находим ширину парной корреляционной функции. С точностью до множителя порядка единицы она совпадает с параметром Фрида r_0 . Таким образом, параметр Фрида действительно играет роль поперечной длины корреляции световой волны.

Уравнение (4.2) может быть явно решено и для точечного источника. Помещая начало координат в источник, находим

$$F_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) \propto \frac{k_0^2}{4\pi^2 z^2} \exp \left\{ \frac{ik_0}{z} \mathbf{r} \mathbf{R} - \int_0^z d\zeta U(\mathbf{r}, \zeta) \left(\frac{\zeta}{z} \right)^c \right\}, \quad (4.7)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$. Коэффициент пропорциональности в (4.7) равен единице, если $\Psi(\mathbf{r}_1, 0) = \delta(\mathbf{r}_1)$. Парная корреляционная функция (4.7) устроена аналогично (4.5), в частности, для заданного z её ширина оценивается как r_0 .

Для совпадающих точек $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, когда $\mathbf{r} = 0$, экспоненты в (4.5) и (4.7) становятся равными единице. В результате среднее значение I_0 совпадает с интенсивностью свободно распространяющегося излучения. Данное свойство — следствие закона сохранения энергии: дифракция перераспределяет энергию света в пространстве, но не меняет её интегральное значение. Как в случае плоской волны так и в случае сферической волны, энергия равномерно распределена вдоль волнового фронта, и на такую однородность в среднем не влияют вариации показателя преломления. Однако это не выполняется для произвольного начального профиля пучка. Например, оно не выполняется для исходного гауссова профиля.

Обобщением парной корреляционной функции (4.1) является многоточечная корреляционная функция чётного порядка $2n$ (где n — целое число), которая определяется следующим образом:

$$F_{2n}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n+1}, \dots, \mathbf{r}_{2n}, z) = \langle \Psi(\mathbf{r}_1, z) \dots \Psi(\mathbf{r}_n, z) \Psi^*(\mathbf{r}_{n+1}, z) \dots \Psi^*(\mathbf{r}_{2n}, z) \rangle. \quad (4.8)$$

Здесь мы имеем дело с произведением n факторов Ψ и n факторов Ψ^* , так что крупномасштабный вклад в фазу Ψ сокращается.

Можно найти замкнутое уравнение для многоточечной корреляционной функции (4.8), вывод которого аналогичен выводу уравнения для парной корреляционной функции (4.2) [42–47]. Выразим приращение произведения $\Psi \dots \Psi \Psi^* \dots \Psi^*$ через приращения Ψ, Ψ^* , определяемые уравнением (4.4) и, усредняя результат по флуктуациям показателя преломления, мы находим приращение F_{2n} , приводящее к следующему уравнению:

$$\partial_z F_{2n} - \frac{i}{2k_0} \left[\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_n^2} - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_{n+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_{2n}^2} \right] F_{2n} + Y(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{2n}) F_{2n} = 0, \quad (4.9)$$

где

$$Y(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{2n}) = \sum_{i \leq n, j > n} U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) - \sum_{i < j \leq n} U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) - \sum_{n < i < j} U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (4.10)$$

Для $n = 1$ величина (4.10) сводится к $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, а уравнение (4.9) принимает вид (4.2).

Заметим, что функция (4.10) возникает из среднего

$$\langle [v(\mathbf{r}_1) + \dots + v(\mathbf{r}_n) - v(\mathbf{r}_{n+1}) - \dots - v(\mathbf{r}_{2n})]^2 \rangle.$$

Мы приходим к выводу, что $Y \geq 0$. Следовательно, в режиме сильных сцинтилляций, где $\gamma \gg 1$, член с Y в уравнении (4.9) приводит к существенному (экспоненциальному) подавлению корреляционной функции F_{2n} везде, кроме конфигураций точек, где Y аномально мал.

Такая малость имеет место, если наборы точек $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ и $\mathbf{r}_{n+1}, \dots, \mathbf{r}_{2n}$ распределены в n пар (одна точка из первого набора, а другая — из второго), где расстояния между точками пары намного меньше расстояний между парами. Очевидно, что существует $n!$ способов выбора таких пар. Для любого такого разбиения, например, для конфигурации с набором пар $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{n+1}), \dots, (\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{2n})$, слагаемые U в сумме (4.9), содержащие $\mathbf{r}_1$, практически сокращают друг друга, за исключением члена $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{n+1})$. Аналогичные сокращения происходят и для других координат $\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$.

Таким образом, для пар $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{n+1}), \dots, (\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{2n})$ величину Y в уравнении (4.9) можно заменить на сумму

$$U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{n+1}) + \dots + U(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{2n}).$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (4.2) для парной корреляционной функции F_2 , мы заключаем, что для выбранного набора пар корреляционная функция F_{2n} аппроксимируется произведением [40]

$$F_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{n+1}, z) F_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_{n+2}, z) \dots F_2(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{2n}, z). \quad (4.11)$$

Аналогично доказывается, что функция, полученная из (4.11) путём перестановки точек $\mathbf{r}_{n+1}, \dots, \mathbf{r}_{2n}$, является решением уравнения (4.9), если $\gamma \gg 1$.

Если учитывать только доминирующие вклады в F_{2n} от областей в полном 2^{2n} -мерном пространстве, соответствующих описанным выше наборам пар, то представление корреляционной функции (4.8) в виде суммы $n!$

произведений, таких, как в (4.11), является её приближением в соответствующих областях 2^{2n} -мерного пространства. По существу, выполняется теорема Вика [54]. Это означает, что поле Ψ обладает нормальной статистикой в соответствии с работой [8]. Таким образом, мы подтвердили функцию распределения (3.5) для интенсивности.

Оценим точность найденного приближения. Возьмём в качестве примера корреляционную функцию четвёртого порядка $F_4(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, z)$. При обосновании вклада $F_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, z)F_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4, z)$ в F_4 как доминирующего в уравнении (4.9) не учитывался член $F_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)F_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4)\mathcal{U}$, где

$$\mathcal{U} = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) + U(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4). \quad (4.12)$$

Из-за "квадрупольной" структуры выражения (4.12) оно оценивается как

$$\mathcal{U} \sim k_0^2 C_n^2 R^{c-2} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3| |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4|, \quad (4.13)$$

как следует из (4.3). Здесь R — расстояние между парами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3$ и $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4$, которое, как предполагается, намного больше, чем размеры пар $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|, |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4|$. Это условие объясняет малость $\mathcal{U}$ (4.13) по сравнению с $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$.

Имеется весьма интересный вопрос о пространственной структуре профиля интенсивности в режиме сильных сцинтилляций. В работах [29, 50] на основе анализа экспериментов и численного моделирования [51–53] выделяется область сильных фокусировок, где структура особенностей поля существенно отличается от последовательности отдельных пиков и особенности носят преимущественно одномерный характер. Эти наблюдения имеют качественный характер. Количественное же объяснение особенностей пространственной структуры поля интенсивности в режиме сильных сцинтилляций требует анализа разноточечных корреляционных функций огибающей Ψ высокого порядка.

Приведённое нами в данном разделе приближение для многоточечных функций Ψ в режиме сильных сцинтилляций отражает только локальную структуру спеклов. Для анализа пространственной структуры поля интенсивности необходимо знать корреляции поля интенсивности на масштабах много больше характерного размера спекла r_0 . Для этого необходимо выйти за пределы приведённого в данном разделе приближения. Уже анализ первой поправки к данному приближению является довольно громоздким [40]. Очевидно, извлечение информации о пространственной структуре поля интенсивности потребует суммирования ведущих рядов теории возмущений, что является технически сложной задачей, решение которой мы оставляем на будущее.

5. Интегральное представление для интенсивности

В настоящем разделе мы рассмотрим представление интенсивности I через начальное значение огибающей Ψ и поле v . Основной нашей задачей является анализ оптимальной конфигурации поля v , приводящей к данному большому значению интенсивности I (или её высокого момента), а также исследование флуктуаций около такой конфигурации, которые определяют основной вклад в соответствующий функциональный инте-

грал по v . Для решения указанных задач необходимо знать I как функционал от поля v . Для этой цели удобно использовать представление огибающей Ψ в виде свертки функции Грина (для данной конфигурации v) с начальным профилем огибающей.

Мы изучаем плотность вероятности значения I в точке $(\mathbf{0}, z)$. Поскольку $I = |\Psi(\mathbf{0}, z)|^2$, моменты I можно выразить через корреляционные функции огибающей (4.8) как

$$\langle I^n \rangle = F_{2n}(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, z).$$

Таким образом, если бы мы знали корреляционные функции, мы бы знали статистику I . Однако, чтобы найти эти корреляционные функции, нужно решить уравнение (4.9) для определённых начальных условий. Для наших целей удобнее будет использовать более гибкий метод с применением функций Грина, который работает при произвольных начальных условиях.

Из основного уравнения (2.1) следует, что для $z > \zeta$

$$\Psi(\mathbf{r}, z) = \int d^2x G(\mathbf{r}, z; \mathbf{x}, \zeta) \Psi(\mathbf{x}, \zeta), \quad (5.1)$$

где G — функция Грина уравнения (2.1). Выражение для Ψ^* можно найти с помощью комплексного сопряжения. Величина G в уравнении (5.1) является функцией Грина для данной реализации показателя преломления v . Следовательно, G является функционалом поля v . Отметим, что зависящее от координат поле v нарушает пространственную однородность, поэтому функция Грина G не может зависеть только от разности координат.

Функция Грина G удовлетворяет уравнению

$$\left[\partial_z - i \frac{1}{2k_0} \partial_r^2 - ik_0 v(\mathbf{r}, z) \right] G(\mathbf{r}, z; \mathbf{x}, \zeta) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \delta(z - \zeta), \quad (5.2)$$

как следствие соотношения (2.1). Также можно использовать уравнение

$$\left[\partial_\zeta + i \frac{1}{2k_0} \partial_x^2 + ik_0 v(\mathbf{x}, \zeta) \right] G(\mathbf{r}, z; \mathbf{x}, \zeta) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \delta(z - \zeta). \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) описывает "обратную эволюцию" функции Грина.

Соотношение (5.1) позволяет получить следующее выражение для интенсивности света I в точке $(\mathbf{0}, z)$:

$$I = \int d^2x_1 d^2x_2 G(\mathbf{0}, z; \mathbf{x}_1, 0) G^*(\mathbf{0}, z; \mathbf{x}_2, 0) \Psi(\mathbf{x}_1, 0) \Psi^*(\mathbf{x}_2, 0). \quad (5.4)$$

Выражение (5.4) связывает I с v , поскольку функция Грина G связана с v через уравнение (5.2) или (5.3). Соотношение (5.4) является отправной точкой для последующих вычислений. Если $v = 0$, то из (5.2) или из (5.3) находим:

$$G_0(\mathbf{r}, z; \mathbf{x}, \zeta) = \frac{k_0}{2\pi i (z - \zeta)} \exp \left[i \frac{k_0 (\mathbf{r} - \mathbf{x})^2}{2(z - \zeta)} \right]. \quad (5.5)$$

Это выражение соответствует свободной эволюции (без случайной дифракции) огибающей Ψ . Заметим также, что при малых значениях $z - \zeta$ член с v в уравнениях (5.2), (5.3) становится несущественным, и функция Грина G принимает вид (5.5).

Если параметр γ (2.11) мал, то функция Грина G слабо отличается от выражения (5.5). Первая поправка к функции Грина (5.5) записывается как

$$\delta G(\mathbf{r}, z; \mathbf{x}, 0) = \int d^2 y \int_0^z d\zeta G_0(\mathbf{r}, z; \mathbf{y}, \zeta) i k_0 v(\mathbf{y}, \zeta) G_0(\mathbf{y}, \zeta; \mathbf{x}, 0). \quad (5.6)$$

В этом приближении поправка к интенсивности выражается следующим образом:

$$\delta I = \Psi_0^*(\mathbf{0}, z) \delta \Psi(\mathbf{0}, z) + \delta \Psi_0^*(\mathbf{0}, z) \Psi(\mathbf{0}, z), \quad (5.7)$$

где

$$\delta \Psi(\mathbf{0}, z) = \int d^2 x \delta G(\mathbf{0}, z; \mathbf{x}, 0) \Psi(\mathbf{x}, 0). \quad (5.8)$$

Поскольку δI (5.7) является линейным функционалом v , то δI имеет гауссову статистику. Таким образом, мы подтверждаем утверждение, сделанное в разделе 3.

Теперь мы можем оценить среднеквадратичное значение $\langle (\delta I)^2 \rangle$. Чтобы найти эту величину, подставим в (5.7) выражение (5.6) и усредним результат в соответствии с (2.5). Легко видеть, что константа A_0 , введенная в (2.7), сокращается. Радиусы-векторы в интеграле могут быть оценены как $\sqrt{z/k_0}$. Принимая во внимание определение (2.10), мы получаем

$$\langle (\delta I)^2 \rangle \sim I_0^2 r_0^{-c} \frac{(z/k_0)^c}{2} \sim \gamma^{c/2} I_0^2.$$

Таким образом, мы подтвердили значение коэффициента при $(I - I_0)^2$ в выражении (3.4) для функции распределения I .

В соответствии с (5.1) n -й момент интенсивности I записывается в виде

$$\langle I^n \rangle = \int d^2 x_1 \dots d^2 x_{2n} B_{2n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2n}, 0) \times \Psi(\mathbf{x}_1, 0) \dots \Psi(\mathbf{x}_n, 0) \Psi^*(\mathbf{x}_{n+1}, 0) \dots \Psi^*(\mathbf{x}_{2n}, 0), \quad (5.9)$$

где введено обозначение

$$B_{2n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2n}, \zeta) = \langle G(\mathbf{0}, z; \mathbf{x}_1, \zeta) \dots G(\mathbf{0}, z; \mathbf{x}_n, \zeta) \times G^*(\mathbf{0}, z; \mathbf{x}_{n+1}, \zeta) \dots G^*(\mathbf{0}, z; \mathbf{x}_{2n}, \zeta) \rangle. \quad (5.10)$$

Можно найти уравнение, аналогичное (4.9), для объекта B_{2n} (5.10), следующее из (5.3) и описывающее обратную эволюцию B_{2n} . Это уравнение аналогично уравнению (4.9).

В случае сильных сцинтилляций, когда $\gamma \gg 1$, величина B_{2n} достигает максимума на таких конфигурациях, где радиусы-векторы $\mathbf{x}_i$ собраны в n пар с малым внутривекторным расстоянием, аналогично $2n$ -точечной корреляционной функции (см. раздел 4). Скажем, если мы рассмотрим набор пар $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{n+1}) \dots (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{2n})$, то B_{2n} аппрок-

симируется произведением

$$B_{2n} \approx \mathcal{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{n+1}, \zeta) \dots \mathcal{G}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{2n}, \zeta), \quad (5.11)$$

где

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \zeta) = \langle G(\mathbf{0}, z; \mathbf{x}_1, \zeta) G^*(\mathbf{0}, z; \mathbf{x}_2, \zeta) \rangle. \quad (5.12)$$

В произведении (5.11) стоит n множителей $\mathcal{G}$.

Очевидно, что в интеграле (5.9) есть $n!$ областей, где величина B_{2n} достигает максимума и аппроксимируется произведением типа (5.11). Следовательно, из (5.9) следует, что $\langle I^n \rangle \approx n! I_0^n$, где

$$I_0 = \int d^2 x_1 d^2 x_2 \mathcal{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, 0) \Psi(\mathbf{x}_1, 0) \Psi^*(\mathbf{x}_2, 0). \quad (5.13)$$

Из (5.9), (5.12) мы заключаем, что I_0 — первый момент I . Таким образом, мы подтвердили справедливость соотношения (3.6) и, следовательно, выражения (3.5), если $\gamma \gg 1$.

Величина $\mathcal{G}$ (5.12) удовлетворяет уравнению

$$-\partial_\zeta \mathcal{G} - \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \mathbf{x}_2^2} + U(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \zeta) \mathcal{G} = 0, \quad (5.14)$$

аналогичному уравнению (4.2) для парной корреляционной функции. Решение для (5.14) имеет вид

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \zeta) = \frac{k_0^2}{4\pi^2(z - \zeta)^2} \exp \left\{ \frac{ik_0}{z - \zeta} \mathbf{x} \mathbf{X} - \int_\zeta^z d\xi U(\mathbf{x}, \xi) \left(\frac{\xi}{z - \xi} \right)^c \right\}, \quad (5.15)$$

аналогичный (4.7). Здесь $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$, а U определено в (4.3). Выражение (5.15) показывает, что характерное значение $\mathbf{x}$ в интеграле (5.13) оценивается как r_0 благодаря члену, содержащему U в показателе экспоненты. Приравнявая затем коэффициент $k_0 \mathbf{x} \mathbf{X} / z$ в (5.15) к единице, получаем оценку

$$R_0 \sim \frac{z}{k_0 r_0} \sim \gamma r_0, \quad (5.16)$$

для характерного значения расстояния между парами $\mathbf{X}$.

Теперь оценим поправки к приближению (5.11). Скажем, для $n = 2$ поправка к произведению $\mathcal{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \zeta) \times \mathcal{G}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4, \zeta)$ в B_4 определяется членом

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \mathcal{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \zeta) \mathcal{G}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4, \zeta) \quad (5.17)$$

в выражении для $\partial_\zeta B_4$. Величина $\mathcal{U}$ определяется равенством (4.12). Расстояния $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3$ и $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4$ в (5.17) оцениваются как r_0 , тогда как расстояние между парами оценивается как R_0 (5.16). Если $\gamma \gg 1$, то $R_0 \gg r_0$, и неравенство оправдывает оценку (4.13) для $\mathcal{U}$.

Интегрируя $\mathcal{U}$ по ζ , получаем

$$\int d\zeta \mathcal{U} \sim \left(\frac{r_0}{R_0} \right)^{2-c} \sim \gamma^{c-2}. \quad (5.18)$$

Эта величина определяет относительную поправку к моменту $\langle I^2 \rangle$. Аналогичным образом можно найти относительную поправку к n -му моменту $\langle I^n \rangle$, которая

оценивается как $\gamma^{c-2}n^2$ [40]. Здесь множитель n^2 отражает комбинаторный фактор $n(n-1)/2$, являющийся количеством поправочных членов для B_{2n} . Обозначив момент $\langle I^n \rangle$ как I_n^n , находим оценку для поправки

$$\delta I_n \sim \gamma^{c-2} n I_n. \quad (5.19)$$

Требуя, чтобы $\delta I_n \ll I_n$, мы приходим к выводу, что приближение (5.11) работает при условии $n \ll \gamma^{2-c}$ [39], и, следовательно, подтверждаем ограничение (3.12).

6. Квазиклассическое приближение

В данном разделе мы анализируем квазиклассическое выражение для функции Грина G , применимое при вычислении моментов высокого порядка I . Мы имеем в виду использовать квазиклассическое приближение для гриновской функции на фоне оптимальной конфигурации v , которая является гладким и не случайным полем. Условия применимости квазиклассического приближения для функции Грина в этом случае будут проверены позже, после того как будет установлен профиль оптимальной конфигурации.

Функция Грина G , определённая для заданной реализации поля v , удовлетворяет уравнениям (5.2), (5.3). Квазиклассическое приближение подразумевает, что $G \propto \exp(i\vartheta)$, где $\vartheta(\mathbf{r}, z; \mathbf{x}, \zeta)$ — быстро меняющаяся фаза (см., например, [55, 56]). Уравнение для фазы ϑ можно вывести из уравнения (5.2) или из уравнения (5.3). В результате приходим к следующему уравнению эйконала:

$$\partial_z \vartheta + \frac{1}{2k_0} (\partial_r \vartheta)^2 - k_0 v(\mathbf{r}, z) = 0, \quad (6.1)$$

или к альтернативному уравнению эйконала

$$\partial_\zeta \vartheta - \frac{1}{2k_0} (\partial_x \vartheta)^2 + k_0 v(\mathbf{x}, \zeta) = 0. \quad (6.2)$$

Уравнение (6.1) или (6.2) позволяет связать фазу ϑ с показателем преломления v .

Учитывая следующий порядок по квазиклассическому параметру $\nabla^2 \vartheta / (\nabla \vartheta)^2$, можно найти более точное выражение для функции Грина:

$$G(\mathbf{r}, z; \mathbf{x}, \zeta) = -i \Xi \exp(i\vartheta). \quad (6.3)$$

Уравнение для фактора Ξ в (6.3) может быть получено из тех же базовых уравнений (5.2), (5.3):

$$\partial_\zeta \Xi - \frac{1}{k_0} \partial_x \vartheta \partial_x \Xi - \frac{1}{2k_0} \partial_x^2 \vartheta \Xi = 0. \quad (6.4)$$

Обратим внимание на то, что в уравнении (6.4) учитывается вторая производная от ϑ , тогда как вторая производная от Ξ не учитывается. В соответствии с (6.3) выражение (5.5), справедливое при малых $z - \zeta$, приводит к следующим выражениям:

$$\vartheta = \frac{k_0(\mathbf{r} - \mathbf{x})^2}{2(z - \zeta)}, \quad (6.5)$$

$$\Xi = \frac{k_0}{2\pi(z - \zeta)}. \quad (6.6)$$

Разумеется, выражения (6.3), (6.5), (6.6) удовлетворяют уравнениям (6.1), (6.2), (6.4) при $v = 0$.

В рамках квазиклассического подхода вводятся классические траектории (лучи) $\mathbf{y}(\zeta)$, задаваемые уравнением

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\zeta} = -\frac{1}{k_0} \partial_{\mathbf{y}} \vartheta(\mathbf{r}, z; \mathbf{y}, \zeta). \quad (6.7)$$

Любая траектория (луч) может быть охарактеризована своим начальным положением $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, взятым при $\zeta = 0$. В соответствии с уравнением (6.5), при малых $z - \zeta$

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\zeta} = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{r}}{\zeta - z} \rightarrow \mathbf{y} - \mathbf{r} \propto \zeta - z. \quad (6.8)$$

Таким образом, все траектории (лучи) сходятся в одной точке $\mathbf{r}$ при $\zeta \rightarrow z$.

В терминах траекторий (лучей) уравнения (6.2), (6.4) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d}{d\zeta} \vartheta = -\frac{k_0}{2} \left(\frac{d\mathbf{y}}{d\zeta} \right)^2 - k_0 v(\mathbf{y}, \zeta), \quad (6.9)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \Xi = \frac{1}{2k_0} \partial_{\mathbf{y}}^2 \vartheta \Xi, \quad (6.10)$$

где $d/d\zeta$ обозначает производную поля вдоль траектории:

$$\frac{d}{d\zeta} \equiv \partial_\zeta + \partial_{\zeta} \mathbf{y} \partial_{\mathbf{y}}. \quad (6.11)$$

Вычисляя производную $d/d\zeta$ от (6.7) и используя (6.2), получаем

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} \mathbf{y} = \partial_{\mathbf{y}} v(\mathbf{y}, \zeta). \quad (6.12)$$

Это не что иное, как закон Ньютона.

В соответствии с асимптотиками (6.5), (6.8), $\vartheta \rightarrow 0$ вдоль траектории, когда $\zeta \rightarrow z$. Поэтому из уравнения (6.9) мы получаем

$$\vartheta(\mathbf{r}, z; \mathbf{x}, 0) = \int_0^z d\zeta \left[\frac{k_0}{2} \left(\frac{d\mathbf{y}}{d\zeta} \right)^2 + k_0 v(\mathbf{y}, \zeta) \right], \quad (6.13)$$

где $\mathbf{y}(\zeta)$ — траектория, начинающаяся в точке $\mathbf{x}$ при $\zeta = 0$. Таким образом, мы нашли квазиклассическое выражение для поля ϑ в терминах классических траекторий (лучей), дополняющее уравнение (6.12), которое связывает траектории с полем v .

Полученные в этом разделе соотношения можно вывести из представления функции Грина G в виде интеграла по траекториям. Правила вычисления таких интегралов можно найти в монографии [57]. Из уравнения (2.1) следует, что G может быть представлена в виде следующего интеграла по траекториям:

$$G(\mathbf{r}, z; \mathbf{x}, \zeta) = \int D\mathbf{y} \exp(i\Theta), \quad (6.14)$$

$$\Theta = k_0 \int_\zeta^z d\xi \left[\frac{(\partial_\xi \mathbf{y})^2}{2} + v(\mathbf{y}, \xi) \right]. \quad (6.15)$$

Интеграл (6.14) берётся по функциям $\mathbf{y}(\xi)$, определённым на интервале $\zeta < \xi < z$ и удовлетворяющим граничным условиям $\mathbf{y}(\zeta) = \mathbf{x}$ и $\mathbf{y}(z) = \mathbf{r}$. Можно сказать, что интегрирование производится по траекториям, идущим из начальной точки $\mathbf{x}$ в конечную точку $\mathbf{r}$.

Наш подход означает, что интеграл по траекториям (6.14) может быть вычислен в квазиклассическом приближении. Тогда фаза ϑ в (6.3) — экстремальное значение

интеграла (6.15). Как следствие условия экстремума, оптимальный путь $y(\xi)$ удовлетворяет классическому уравнению

$$\partial_{\xi}^2 y = \partial_y v(y, \xi). \quad (6.16)$$

Варьируя функционал Θ (6.15) по x и используя (6.16), находим

$$\partial_x \vartheta = -k_0 \partial_{\xi} y(\xi)|_{\xi=\zeta}. \quad (6.17)$$

Тогда, варьируя величину Θ (6.15) по ζ и используя (6.16), можно получить уравнение (6.2).

7. Случайная линза

В настоящем разделе мы рассмотрим конфигурацию поля v , которая приводит к аномально большому значению интенсивности I . Такая оптимальная конфигурация представляет собой линзу, распределённую в пространстве и она удовлетворяет условию $\delta I / \delta v = 0$, т.е. вариационная производная от I по полю v должна быть равна нулю. В данном разделе мы строим однопараметрическое семейство решений этого уравнения, определяющее один из хвостов плотности вероятности $P(I)$, который мы называем хвостом 7/12.

При изучении хвостов функции распределения вероятности $P(I)$ нас интересуют аномально большие значения I . При изучении событий, приводящих к большим значениям I , можно использовать квазиклассическое приближение для функции Грина G , найденное в разделе 6. Ниже это утверждение будет обосновано. Подставляя выражение (6.3) в соотношение (5.1) и подставляя $\zeta = 0$, получаем

$$\Psi(0, z) = -i \int d^2 x \Xi \exp(i\vartheta) \Psi(x, 0), \quad (7.1)$$

где обе величины, ϑ и Ξ , имеют аргументами $(0, z; x, 0)$. Выражение (7.1) показывает, что $\Psi(0, z)$ формируется в результате интерференции вкладов, связанных с различными x , в соответствии с принципом Гюйгенса – Френеля. Таким образом, если ϑ велика, единственный способ получить большие значения Ψ — взять поле v , приводящее к одинаковым фазам у произведения $\exp(i\vartheta) \Psi(x, 0)$ в широкой области x . Тогда деструктивная интерференция отсутствует.

Если фаза начального профиля $\Psi(x, 0)$ однородна по x , то фаза множителя $\exp(i\vartheta) \Psi(x, 0)$ (с точностью до константы) сводится к $\vartheta(0, z; x, 0)$. Мы также предполагаем, что начальный профиль $\Psi(x, 0)$ является изотропным. Тогда, чтобы обеспечить большое значение I , мы должны гарантировать, что фаза $\vartheta(0, z; x, 0)$ однородна внутри круга относительно большого радиуса X_* (который подлежит определению). За пределами этого круга фаза ϑ является функцией x . Мы предполагаем, что интегрирование в (7.1) по внешней области даёт незначительный вклад в $\Psi(0, z)$ из-за деструктивной интерференции. Таким образом, область интегрирования в (7.1) можно ограничить кругом радиуса X_* .

Если начальный профиль $\Psi(x, 0)$ имеет однородную фазу, то

$$I = \int d^2 x d^2 y |\Psi(x, 0)| |\Psi(y, 0)| \Xi(0, z; x, 0) \times \Xi(0, z; y, 0) \cos [\vartheta(0, z; x, 0) - \vartheta(0, z; y, 0)], \quad (7.2)$$

как следствие равенства (7.1). Если поле $\vartheta(0, z; x, 0)$ однородно внутри круга, то $\cos$ в (7.2) равен единице. Таким образом, в этом случае $\delta I / \delta \vartheta = 0$. Следовательно, также и $\delta I / \delta v = 0$.

Приведённую схему можно легко обобщить для произвольной фазы φ исходного профиля:

$$\Psi(x, 0) = |\Psi(x, 0)| \exp[i\varphi(x)]. \quad (7.3)$$

Выражение для интенсивности (7.2) тогда заменяется на следующее:

$$I = \int d^2 x d^2 y |\Psi(x, 0)| |\Psi(y, 0)| \Xi(x) \Xi(y) \times \cos [\vartheta(0, z; x, 0) + \varphi(x) - \vartheta(0, z; y, 0) - \varphi(y)]. \quad (7.4)$$

Таким образом, чтобы обеспечить большое значение I , следует требовать однородности суммы

$$\vartheta(0, z; x, 0) + \varphi(x), \quad (7.5)$$

внутри круга радиуса X_* . Далее мы предполагаем, что начальная фаза φ однородна.

В соответствии с уравнениями (6.12), (6.13) фаза ϑ может быть однородной внутри круга радиуса X_* только в том случае, если $v(y) \propto y^2$ в области пространства, занимаемой лучами, исходящими из окружности. В противном случае разные лучи неизбежно будут иметь разные фазы. Поэтому мы считаем, что равенство разности фаз выполняется для всех лучей, начинающихся в точках x внутри окружности радиуса X_* при $\zeta = 0$ и приходящих при $\zeta = z$ в начало координат. Область, занимаемая лучами, представляет собой конус, вершина которого имеет координаты $(0, z)$, а основанием является круг радиуса X_* .

Если v является квадратичной функцией координат, то уравнение (6.12) становится линейным, и мы немедленно заключаем, что

$$y(\zeta) = g(\zeta)x, \quad (7.6)$$

где x — начальная точка траектории (луча). Поэтому мы должны положить $g(0) = 1$. Функция g определяет форму траекторий, начинающихся внутри круга радиуса X_* при $\zeta = 0$. Траектория должна заканчиваться в точке $r = 0$, поэтому $g(z) = 0$. Производная $\partial_x \vartheta = 0$ внутри круга радиуса X_* . Следовательно, $dg/d\zeta = 0$ при $\zeta = 0$, как следует из уравнения (6.7). Из (6.12) следует, что $v = \mathcal{V}$, где

$$\mathcal{V}(y, \zeta) = \frac{1}{2g} \frac{d^2 g}{d\zeta^2} y^2. \quad (7.7)$$

Поскольку $g \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow z$, мы должны потребовать $d^2 g / d\zeta^2 = 0$ при $\zeta = z$.

Подставляя выражения (7.6), (7.7) в (6.9) и выполняя интегрирование от ζ до z , мы находим

$$\vartheta(0, z; y, \zeta) = -\frac{k_0}{2} y^2 \frac{1}{g} \frac{dg}{d\zeta} \quad (7.8)$$

как следствие установленных граничных условий для функции $g(\zeta)$. Из них же получается, что $\vartheta = 0$ при $\zeta = 0$. Вблизи $\zeta = z$ мы имеем $g \propto z - \zeta$, и тогда выражение (7.8) воспроизводит асимптотическое поведение (6.5).

Далее из (6.10) мы находим, что

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\zeta} = -\frac{1}{g} \frac{dg}{d\zeta} \mathcal{E}.$$

Следовательно, $\mathcal{E} \propto g^{-1}$ вдоль траекторий. Величина $\mathcal{E}$ оказывается не зависящей от $\mathbf{x}$. Сравнивая закон $\mathcal{E} \propto g^{-1}$ с асимптотикой (6.6), мы приходим к выводу, что

$$\mathcal{E} \sim k_0(gz)^{-1}. \quad (7.9)$$

Таким образом, мы приходим к оценке $\mathcal{E} \sim k_0/z$ при $\zeta \rightarrow 0$.

Теперь мы можем сформулировать условие применимости квазиклассического приближения для функции Грина (см. раздел 5), использованное в нашем выводе. Общее условие записывается как $(\partial_y \vartheta)^2 \gg |\partial_y^2 \vartheta|$. Подставляя сюда выражение (7.8), мы находим

$$k_0 y^2 \partial_\zeta \ln g \gg 1, \quad (7.10)$$

т.е. $\vartheta \gg 1$. Найденный критерий выполняется для рассмотренных далее случаев.

Мы предполагаем, что квадратичная аппроксимация, рассмотренная в данном разделе, реализуется в ограниченной области пространства. А именно, мы предполагаем, что она реализуется в области, заполненной траекториями (лучами), начинающимися с некоторого круга при $\zeta = 0$ и определяемыми выражением $\mathbf{y} = \mathbf{x}g(\zeta)$, где $\mathbf{x}$ — начальная точка траекторий. Поскольку $g(z) = 0$, все траектории заканчиваются в начале координат при $\zeta = z$. Следовательно, область представляет собой конус с круглым основанием и точкой $(0, z)$ в качестве вершины. Предполагается, что вне конуса v не является квадратичной функцией. Поэтому вклад в интеграл (7.4) от этой внешней области считается незначительным из-за деструктивной интерференции.

8. Хвост 7/12

В этом разделе мы анализируем хвост (3.13) функции распределения интенсивности I [21, 22], реализуемый на произвольных дистанциях распространения пучка.

Наблюдаемые величины, которые являются средними значениями по времени, можно рассматривать и как статистические средние. Такие средние значения записываются в виде функциональных интегралов по полю v с весом $\exp(-S)$. В соответствии с терминологией, принятой в квантовой теории поля (см., например, [58]), мы называем S эффективным действием. Правила вычисления функциональных интегралов можно найти, например, в монографиях [56, 59]. Чтобы проанализировать интересующие нас функциональные интегралы, необходимо выразить эффективное действие S через v .

Поскольку при сделанных нами предположениях поле v может рассматриваться как коротко коррелированное по z , то оно обладает гауссовой статистикой в соответствии с центральной предельной теоремой. Следовательно, эффективное действие S является квадратичным функционалом от v . В соответствии с соотношением (2.5) эффективное действие может быть записано следующим образом:

$$S \sim \int_0^z \frac{d\zeta}{C_n^2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} q^{c+2} |\tilde{v}(\mathbf{q}, \zeta)|^2, \quad (8.1)$$

где коэффициент пропорциональности определяется уравнением (2.6). Здесь $\tilde{v}(\mathbf{q})$ означает 2d фурье-компоненту поля $v(\mathbf{r})$:

$$\tilde{v}(\mathbf{q}, \zeta) = \int d^2 r \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) v(\mathbf{r}, \zeta).$$

Отметим, что эффективное действие S является нелокальным функционалом $v(\mathbf{r})$.

Моменты интенсивности I , $\langle I^n \rangle$, записываются в виде следующих функциональных интегралов

$$\langle I^n \rangle = \int Dv \exp(-S + n \ln I), \quad (8.2)$$

где предполагается, что нормировка включена в определение меры Dv , т.е., $\int Dv \exp(-S) = 1$. Соотношение между I и v определяется соотношением (5.4). При изучении высоких моментов можно использовать интегральное представление для I из раздела 5, и квазиклассическое приближение для функции Грина G , рассмотренное в разделе 6.

Мы анализируем режим, в котором высокие моменты I могут быть найдены из функционального интеграла (8.2) в седловом приближении. Прежде всего необходимо найти поле v , соответствующее максимальному значению величины $-S + n \ln I$. Это поле можно назвать седловой конфигурацией или инстантоном, в соответствии с терминологией, принятой в квантовой теории поля (см., например, [58]). Инстантон определяется условием экстремума

$$-\frac{\delta S}{\delta v} + \frac{n}{I} \frac{\delta I}{\delta v} = 0, \quad (8.3)$$

следующим из (8.2). Мы уже построили решение для $\delta I / \delta v = 0$. Член же с $\delta S / \delta v$ в (8.3) внутри конуса вносит малые поправки в решение из-за предполагаемого большого значения n , $n \gg 1$.

Однако мы по-прежнему остаёмся с неопределённым параметром X_* и неопределённой функцией $g(\zeta)$, которые должны быть найдены путём оптимизации суммы $-S + n \ln I$, фигурирующей в показателе степени в (8.2). Заметим, что значение I не зависит от функции g (см. (7.2)). Поэтому g следует находить, минимизируя только S . После этого находится минимум разности $S - n \ln I$ как функции X_* .

Найденное решение для v реализуется в области пространства, охватываемой траекториями, начинающимися при $\zeta = 0$ из точек окружности радиуса X_* . Область определяется условием $x < X_* g(\zeta)$ при заданном ζ и представляет собой коническую линзу с окружностью в качестве основания и точкой $(0, z)$ в качестве вершины. За пределами этой области v стремится к некоторому постоянному значению по мере роста x . Далее, имеет место оценка:

$$\int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} q^{c+2} |\tilde{v}(\mathbf{q}, \zeta)|^2 \sim X_*^{4-c} g^{2-c} (\partial_\zeta^2 g)^2, \quad (8.4)$$

согласно (7.6), (7.7). Таким образом, мы приходим к следующей оценке

$$S \sim X_*^{4-c} \int_0^z \frac{d\zeta}{C_n^2} g^{2-c} (\partial_\zeta^2 g)^2, \quad (8.5)$$

следующей из (8.1).

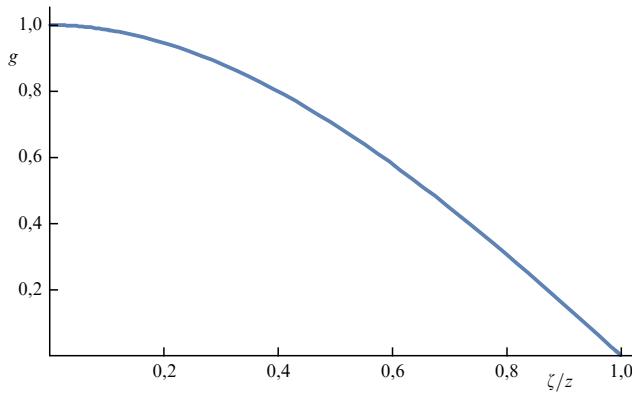


Рис. 2. Величина g , определяющая коническую линзу, в зависимости от ζ/z для случая $C_n^2 = \text{const}$.

Выражение (8.5) должно быть оптимизировано по функции $g(\zeta)$. Граничные условия для $g(\zeta)$ были установлены ранее:

$$g(0) = 1, \quad \partial_\zeta g(0) = 0, \quad g(z) = 0, \quad \partial_\zeta^2 g(z) = 0, \quad (8.6)$$

(см. раздел 7). Величина g , найденная численно путём минимизации интеграла (8.5) с граничными условиями (8.6) для случая, когда C_n^2 не зависит от ζ и $c = 5/3$, приведена как функция ζ/z на рис. 2. Поскольку функция g по порядку величины равна единице, мы получаем из (8.5) следующую оценку эффективного действия:

$$S \sim \frac{X_*^{4-c}}{z^2} k_0^2 r_0^c, \quad (8.7)$$

где считается, что C_n^2 имеет один и тот же порядок величины на всём пути пучка. Альтернативный случай рассматривается в разделе 11.

Ниже мы предполагаем, что X_* намного меньше ширины D начального профиля $\Psi(\mathbf{x}, 0)$. Поэтому $\Psi(\mathbf{x}, 0)$ внутри круга радиусом X_* можно заменить значением, не зависящим от $\mathbf{x}$. Далее, как мы установили, предэкспоненциальный множитель $\Xi(\mathbf{x}, 0; \mathbf{0}, z)$ не зависит от $\mathbf{x}$ внутри круга. Поэтому из (7.2), мы делаем вывод, что седловое значение I можно оценить как

$$I_n \sim I_0 \frac{k_0^2}{z^2} X_*^4, \quad (8.8)$$

где мы заменили $\cos \rightarrow 1$ в соответствии с однородностью фазы ϑ .

Оптимизируя величину $-S + n \ln I_n$ по X_* , можно получить оценки $S \sim n$ и

$$X_*^{4-c} \sim \frac{n z^2}{k_0^2 r_0^c} \sim n \gamma^2 r_0^{4-c}. \quad (8.9)$$

Затем мы находим

$$\langle I^n \rangle \sim I_n^n, \quad I_n \sim I_0 n^{4/(4-c)} \gamma^{2c/(4-c)}, \quad (8.10)$$

определяя, таким образом, интенсивность I при $\zeta = z$ для оптимальной конфигурации при заданном n . Сравнивая затем момент $\langle I^n \rangle$ (8.10) с выражением (3.10), мы приходим к асимптотике (3.13) функции распределения $P(I)$.

Теперь мы можем проверить условие применимости (7.10) квазиклассической аппроксимации функции Грина. Оценивая в (7.10) y как X_* и ∂_ζ как z^{-1} , мы приходим к критерию

$$\frac{k_0 X_*^2}{z} \gg 1. \quad (8.11)$$

Как следует из (8.8), это условие эквивалентно неравенству $I \gg I_0$, что подтверждает корректность квазиклассического подхода.

Найденную седловую конфигурацию поля v можно рассматривать как распределённую линзу, создающую всплеск интенсивности (яркое пятно). Интегральную мощность всплеска можно оценить как $\pi X_*^2 I_0$, поскольку мощность, полученная от исходного луча, концентрируется в этом всплеске. Радиус X_* определяется соотношением (8.9). В соответствии с указанным выражением полная мощность всплеска увеличивается с ростом n или I . Площадь же пятна может быть оценена как интегральная мощность, делённая на интенсивность I всплеска. Из таких соображений и из (8.8) мы получаем оценку размера a пятна аномальной яркости:

$$a \sim \frac{z}{k_0 X_*} \sim n^{-1/(4-c)} \gamma^{(2-c)/(4-c)} r_0. \quad (8.12)$$

Таким образом, размер a уменьшается по мере увеличения n или I при заданном значении расстояния z .

9. Обоснование хвоста 7/12

В данном разделе мы проводим обоснование результатов, полученных для хвоста функции распределения I в перевальном приближении в разделе 8, и устанавливаем условия их применимости.

Мы нашли седловую конфигурацию (инстантон) $\mathcal{V}$ (7.7) поля v в функциональном интеграле (8.2) для момента $\langle I^n \rangle$ и оценили его значение. Однако, чтобы подтвердить справедливость такого подхода, мы должны вычислить интеграл по флуктуациям поля v вблизи седловой конфигурации (инстантона) и продемонстрировать, что поправки к моментам интенсивности I , возникающие в результате такого интегрирования, несущественны. Это стандартная процедура в рамках анализа седлового приближения.

Мы предполагаем, что отклонения $\delta v = v - \mathcal{V}$ поля v от его перевального значения $\mathcal{V}$ (7.7) невелики, это предположение будет проверено ниже. Поэтому мы сохраняем только члены второго порядка по δv в выражении $-S + n \ln I$, стоящем в интеграле (8.2). Тогда поправки к значениям моментов в седловой конфигурации появляются как дополнительные множители $\mathcal{Z}_n$ в выражениях для моментов

$$\langle I^n \rangle = \mathcal{Z}_n \langle I^n \rangle_{\text{saddle}}, \quad (9.1)$$

где $\langle I^n \rangle_{\text{saddle}} \approx I_n^n$ (см. (8.10)). Факторы $\mathcal{Z}_n$ являются следующими функциональными интегралами

$$\mathcal{Z}_n = \int D\delta v \exp \left[\frac{-S^{(2)} + nI^{(2)}}{I} \right]. \quad (9.2)$$

Здесь $S^{(2)}$ и $I^{(2)}$ — вклады второго порядка по флуктуациям δv в эффективное действие и интенсивность.

Интеграл (9.2) является гауссовым, и поэтому его можно выразить через парную корреляционную функцию флуктуирующего поля δv , вычисленную с весом (9.2). Однако, как следует из соотношения (7.2), I выражается через фазу ϑ , взятую при $\zeta = 0$. Следовательно, флуктуации поля ϑ , обозначаемые далее как $\delta\vartheta$, должны быть определены через δv . Такую связь можно найти из уравнения (6.2) путём его линеаризации:

$$\frac{d}{d\zeta} \delta\vartheta + k_0 \delta v = 0, \quad (9.3)$$

где $d/d\zeta$ — производная (6.11) вдоль классической траектории (луча).

Удобно ввести поле

$$\xi(\mathbf{x}, \zeta) = \delta v[\mathbf{y}(\zeta), \zeta], \quad (9.4)$$

отражающее эволюцию флуктуации δv вдоль траекторий. Соотношение (8.1) позволяет выразить $S^{(2)}$ через поле ξ :

$$S^{(2)} \sim \int_0^z \frac{d\zeta}{C_n^2 g^c} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} k^{c+2} |\tilde{\xi}(\mathbf{k}, \zeta)|^2, \quad (9.5)$$

где $\tilde{\xi}(\mathbf{k}, \zeta)$ обозначает преобразование Фурье от поля $\xi(\mathbf{x}, \zeta)$.

Как следствие уравнения (9.3), начальную флуктуацию фазы $\theta(\mathbf{x}) = \delta\vartheta(\mathbf{0}, z; \mathbf{x}, 0)$ можно записать в виде следующего интеграла:

$$\theta(\mathbf{x}) = k_0 \int_0^z d\zeta \xi(\mathbf{x}, \zeta). \quad (9.6)$$

Интегрирование в (9.6) выполняется вдоль классической траектории (лучу) $\mathbf{y}(\zeta)$, стартующей при $\zeta = 0$ из точки $\mathbf{x}$.

Теперь мы можем выразить $I^{(2)}$ через поле (9.4). Из соотношения (7.2) следует, что вклад второго порядка по θ в I равен

$$I^{(2)} = -\frac{1}{2} \int d^2 x d^2 y |\Psi(\mathbf{x}, 0)| |\Psi(\mathbf{y}, 0)| \Xi(\mathbf{0}, z; \mathbf{x}, 0) \times \\ \times \Xi(\mathbf{0}, z; \mathbf{y}, 0) [\theta(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{y})]^2. \quad (9.7)$$

Как мы увидим далее, доминирующие флуктуации ξ имеют относительно большие волновые векторы. Поэтому в (9.7) можно пренебречь перекрестным слагаемым, пропорциональным $\theta(\mathbf{x})\theta(\mathbf{y})$,

$$(\ln I)^{(2)} \sim \int \frac{d^2 x}{X_*^2} [\theta(\mathbf{x})]^2 = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{|\tilde{\theta}(\mathbf{k})|^2}{X_*^2}. \quad (9.8)$$

При выводе (9.8) мы использовали соотношение (8.8) и предположили, что основной вклад в величину вносит круг радиуса X_* .

Таким образом, оба члена, $S^{(2)}$ и $I^{(2)}$, выражаются через поле (9.4), и мы можем перейти к вычислению факторов $\mathcal{Z}_n$ (см. (9.2)), интегрируя по полю ξ вместо интегрирования по δv .

Внутри круга радиуса X_* парная корреляционная функция поля ξ может быть записана в виде интеграла Фурье:

$$\langle \xi(\mathbf{x}_1, \zeta_1) \xi(\mathbf{x}_2, \zeta_2) \rangle = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)] \Phi(\zeta_1, \zeta_2, \mathbf{k}). \quad (9.9)$$

Выражения (9.5), (9.6), (9.8) приводят к следующему уравнению для Φ :

$$A(\zeta_1) \Phi(\zeta_1, \zeta_2) + B \int_0^z d\zeta_1 \Phi(\zeta_1, \zeta_2) = \delta(\zeta_1 - \zeta_2), \quad (9.10)$$

$$A \sim \frac{k^{c+2}}{C_n^2 g^c}, \quad B \sim \frac{nk_0^2}{X_*^2}, \quad (9.11)$$

которое надо решить для $0 < \zeta < z$.

Решение уравнения (9.10) имеет вид:

$$\Phi(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{\Delta}{A(\zeta_1)A(\zeta_2)} + \frac{1}{A(\zeta_1)} \delta(\zeta_1 - \zeta_2), \quad (9.12)$$

где Δ — константа, которую необходимо определить. Подставляя выражение (9.12) в (9.10), получаем соотношение

$$(1 + BD)\Delta + B = 0, \quad (9.13)$$

определяющее параметр Δ . Здесь

$$D = \int_0^z \frac{d\zeta}{A(\zeta)} \sim (r_0^c k^{c+2} k_0^2)^{-1}, \quad (9.14)$$

как это следует из (2.10), (9.11).

Парная корреляционная функция поля θ выражается через Φ согласно равенству (9.6):

$$\langle \theta(\mathbf{x}_1) \theta(\mathbf{x}_2) \rangle = k_0^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)] \iint_0^z d\zeta_1 d\zeta_2 \Phi(\zeta_1, \zeta_2), \quad (9.15)$$

Интеграл, входящий в (9.15), находится после подстановки (9.12):

$$\iint_0^z d\zeta_1 d\zeta_2 \Phi(\zeta_1, \zeta_2) = (D^{-1} + B)^{-1}, \quad (9.16)$$

где использовано соотношение (9.13). В результате мы приходим к следующему выражению для парной корреляционной функции:

$$\langle \theta(\mathbf{x}_1) \theta(\mathbf{x}_2) \rangle = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)] \frac{1}{C_1 r_0^c k^{c+2} + C_2 n / X_*^2}, \quad (9.17)$$

где C_1, C_2 — константы порядка единицы. Выражение (9.17) справедливо при условии, что $kX_* \gg 1$, поскольку мы использовали однородность флуктуаций, что верно внутри круга радиуса X_* .

Чтобы оценить флуктуационные факторы $\mathcal{Z}_n$ (9.2), входящие в (9.1), мы используем соотношение:

$$-\frac{\partial \ln \mathcal{Z}_n}{\partial n} \sim \langle \theta^2 \rangle = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{C_1 r_0^c k^{c+2} + C_2 n / X_*^2} \sim \\ \sim \left(\frac{n^{-1} X_*^2}{r_0^2} \right)^{c/(c+2)}, \quad (9.18)$$

где производная по n берётся при фиксированном значении X_* . Выражение (9.18) получено в соответствии с (9.2), (9.8), (9.17). Характерный волновой вектор k в интеграле (9.18) определяется оценкой

$$kX_* \sim (nr_0^2 X_*^{-2})^{1/(c+2)}. \quad (9.19)$$

Вычислительная схема самосогласована, если величина (9.19) является большой.

Флуктуационные факторы являются несущественными при условии $|\ln Z_n|/n \ll 1$, в соответствии с (9.1). Это отношение параметрически совпадает с $\partial \ln Z_n / \partial n$. Таким образом, мы находим из (9.18) критерий применимости перевального приближения:

$$n \gg \frac{X_*^2}{r_0^2}, \text{ или } n^{2-c} \gg \gamma^4, \quad (9.20)$$

где мы использовали оценку (8.9). То же неравенство (9.20) оправдывает слабость флуктуаций поля θ , поскольку оно приводит к неравенству $\langle \theta^2 \rangle \ll 1$, в соответствии с (9.18).

Критерий (9.20) всегда выполняется для больших моментов, $n \gg 1$, если $\gamma \lesssim 1$, т.е. для случая слабых и умеренных сцинтилляций. В режиме сильных сцинтилляций, когда $\gamma \gg 1$, критерий (9.20) ограничивает возможные значения n . Выражая n через I_n из уравнения (8.10), мы получаем при $\gamma \gg 1$ условие применимости $I \gg I_0 \gamma^{2(2+c)/(2-c)}$ как следствие (9.20). Таким образом, мы подтвердили критерий, приведённый в разделе 3.

10. Хвост 7/13

В данном разделе мы исследуем хвост функции распределения I с параметрами (3.11), выражение для такой асимптотики было получено в [20].

Данный асимптотический режим функции распределения $P(I)$ с параметрами (3.11) существует, если $\gamma \gg 1$. В отличие от хвоста (3.13), хвост (3.11) не может быть получен из (8.2) методом перевала. Это связано с тем, что в режиме 7/13 флуктуации показателя преломления являются сильными. При вычислении интеграла (8.2) возникает некоторое среднее значение показателя преломления v , которое мы обозначим как $\mathcal{V}$. Поэтому схема вычисления интеграла (8.2) заключается в следующем. Сначала мы вычисляем интеграл по флуктуациям при заданном значении $\mathcal{V}$. Затем результат должен быть оптимизирован по $\mathcal{V}$.

Отправной точкой нашего анализа является общее выражение для моментов (см. равенства (5.9), (5.10)). Аналогично анализу, приведённому в разделе 5, можно установить, что средние значения B_{2n} (5.10) достигают максимума вблизи конфигураций, в которых наборы координат $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ и $\mathbf{x}_{n+1}, \dots, \mathbf{x}_{2n}$ разбиты на n пар, таких что расстояния между точками в них намного меньше расстояний между парами. И мы приходим к факторизованному представлению типа (5.11) для конкретного выбора пар.

Чтобы получить достаточно большие значения моментов $\langle I^n \rangle$ в соответствии с (5.9), следует использовать геометрию, в которой характерное расстояние между парами намного больше, чем величина (5.16), вызванная флуктуациями. Затем траектории пар определяются квазиклассически с помощью $\mathcal{V}$. Таким образом, мы приходим к следующей схеме. Траектории $\mathbf{X}(\zeta)$ центров пар управляются (крупномасштабным) средним значением $\mathcal{V}$. Внутренняя же структура факторов $\mathcal{G}$ в уравнении (5.12), т.е. их зависимость от размера пары $\mathbf{x}$, определяется как флуктуациями v , так и средним значением $\mathcal{V}$.

Поле $\mathcal{V}$ должно фокусировать все траектории (лучи) $\mathbf{X}(\zeta)$ в точке $(\mathbf{0}, z)$. Именно поэтому мы возвращаемся к квадратичной зависимости $\mathcal{V}$ от поперечных координат,

т.е. к распределённой линзе (см. раздел 7). Как и в разделе 7, линза может быть описана в терминах траекторий $\mathbf{y} = g(\zeta)\mathbf{x}$, а вероятность её появления определяется выражением (8.5), где X_* — поперечный размер линзы. Выражение должно быть дополнительно оптимизировано с учётом граничных условий (8.6). Условие $\partial_\zeta g(0) = 0$ гарантирует, что квазиклассическая фаза ϑ , связанная с $\mathcal{V}$, однородна при $\zeta = 0$ (см. раздел 7).

Представление объекта B_{2n} (5.10) в виде произведения $\mathcal{G}$, как в уравнении (5.11) позволяет найти момент $\langle I^n \rangle_*$ при заданном значении X_* :

$$\langle I^n \rangle_* \approx n! J^n. \quad (10.1)$$

Здесь J обозначает следующий интеграл:

$$J = \int d^2 x_1 d^2 x_2 \Psi^*(\mathbf{x}_1, 0) \Psi^*(\mathbf{x}_2, 0) \mathcal{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, z), \quad (10.2)$$

а функция $\mathcal{G}$ определяется уравнением (5.12). Множитель $n!$ в (10.1) — комбинаторный фактор, дающий количество возможных наборов пар.

Уравнение для величины (5.12) при наличии среднего значения $\mathcal{V}$ может быть получено аналогично уравнению (4.3) для парной корреляционной функции. Следует выразить приращение $\mathcal{G}$ через приращения Ψ , как в (4.4), а затем усреднить с учётом среднего значения v . В результате получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \partial_\zeta \mathcal{G} + \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \mathbf{x}_1^2} + ik_0 \mathcal{V}(\mathbf{x}_1, \zeta) \mathcal{G} - \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \mathbf{x}_2^2} - \\ - ik_0 \mathcal{V}(\mathbf{x}_2, \zeta) \mathcal{G} - U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \mathcal{G} = -\delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \delta(\zeta - z), \end{aligned} \quad (10.3)$$

где U определено в (4.3).

Мы вводим функцию Грина G для среднего показателя преломления $\mathcal{V}$ (смотри раздел 5), которая удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left[\partial_\zeta + i \frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} + ik_0 \mathcal{V}(\mathbf{x}, \zeta) \right] G(\mathbf{r}, z; \mathbf{x}, \zeta) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \delta(z - \zeta), \quad (10.4)$$

вместо уравнения (5.3). Подставляя затем представление

$$\mathcal{G} = G(\mathbf{0}, z; \mathbf{x}_1, \zeta) \mathcal{Q} G^*(\mathbf{0}, z; \mathbf{x}_2, \zeta) \quad (10.5)$$

в (10.3), мы получаем уравнение для $\mathcal{Q}$:

$$\begin{aligned} \partial_\zeta \mathcal{Q} + \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial \mathbf{x}_1^2} - \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial \mathbf{x}_2^2} + \frac{i}{k_0} \frac{\partial \ln G_1}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \mathbf{x}_1} - \\ - \frac{i}{k_0} \frac{\partial \ln G_2^*}{\partial \mathbf{x}_2} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \mathbf{x}_2} - U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \mathcal{Q} = 0. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Поскольку в пределе $\zeta \rightarrow z$ мы должны перейти к свободному распространению волны, величина $\mathcal{Q}$ должна стремиться к единице при $\zeta \rightarrow z$.

В квазиклассическом приближении $\ln G$ в (10.6) можно аппроксимировать как $i\vartheta$, где фаза ϑ определяется выражением (7.8). Тогда уравнение (10.6) принимает вид

$$\partial_\zeta \mathcal{Q} + \frac{i}{k_0} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \mathbf{Y}} - U(\mathbf{y}) \mathcal{Q} + \frac{1}{g} \frac{dg}{d\zeta} \left(\mathbf{Y} \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}} + \mathbf{y} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \right) \mathcal{Q} = 0, \quad (10.7)$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ и $\mathbf{Y} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$. Переходя к переменным $\mathbf{x} = \mathbf{y}/g$, $\mathbf{X} = \mathbf{Y}/g$, мы получаем уравнение

$$\partial_{\xi} \mathcal{Q}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) + \frac{i}{g^2 k_0} \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{X}} - U(g\mathbf{x}) \mathcal{Q} = 0, \quad (10.8)$$

аналогичное (4.2). Оно описывает изменение $\mathcal{Q}$ вдоль траекторий, начинающихся в точке ξ в круге радиуса X_* . Решение этого уравнения (10.8) аналогично (4.5):

$$\mathcal{Q} = \exp \left\{ - \int_{\xi}^z d\xi U[g(\xi)\mathbf{x}, \xi] \right\}, \quad (10.9)$$

где мы учли предельное поведение $\mathcal{Q}$ при $\xi \rightarrow z$.

Поскольку начальная фаза ϑ функции G однородна, значение интеграла по разности $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ в (10.2) определяется фактором $\mathcal{Q}$. Поэтому интегрирование по разности в уравнении (10.2) даёт фактор $\sim r_0^2$. Интегрирование по сумме $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ в (10.2) производит множитель $\sim X_*^2$. В результате мы приходим к оценке

$$J \sim I_0 \frac{k_0^2}{z^2} X_*^2 r_0^2 \sim I_0 \gamma^{-2} \left(\frac{X_*}{r_0} \right)^2. \quad (10.10)$$

Таким образом, моменты $\langle I^n \rangle_*$ (10.1) могут быть выражены как $\langle I^n \rangle_* \sim I_n^n$, где

$$I_n \sim nJ \sim n I_0 \gamma^{-2} \left(\frac{X_*}{r_0} \right)^2, \quad (10.11)$$

и вместо факториала $n!$ подставлена его аппроксимация n^n .

Вклад в эффективное действие S , связанный с $\mathcal{V}$, определяется выражением (8.7). Момент $\langle I^n \rangle_* \sim I_n^n$ может быть оценён с помощью соотношения (10.11). Оптимизируя по X_* сумму $-S + \ln \langle I^n \rangle_*$, определяющую n -й момент, можно получить ту же оценку (8.9) для X_* . Заметим, что $X_* \sim R_0$ для граничного значения $n \sim \gamma^{2-c}$, где R_0 приведено в (5.16), и $X_* \gg R_0$, если $n \gg \gamma^{2-c}$. Поскольку X_* определяет характерное расстояние между парами, мы приходим к выводу, что оно действительно много больше, чем R_0 .

При этом асимптотика момента $\langle I^n \rangle$ отличается от оценки (8.10), полученной для хвоста 7/12. Как следует из (8.9), (10.11):

$$\langle I^n \rangle \sim I_n^n, \quad I_n \sim I_0 n^{(6-c)/(4-c)} \gamma^{-2(2-c)/(4-c)}. \quad (10.12)$$

Сравнивая выражение (10.12) с (3.10), мы убеждаемся в справедливости выражений (3.11) для исследуемого хвоста.

Чтобы обосновать используемый в этом разделе подход, необходимо оценить поправки к $\langle I^n \rangle$, связанные с членами, которыми мы пренебрегли при выводе факторизованной аппроксимации для B_{2n} . Лидирующая поправка к $\langle I^n \rangle$ может быть оценена так же, как в разделе 5. Она связана с факторами $\mathcal{U}$, определёнными, как в (4.12), и входящими в выражение для $\partial_{\xi} B_{2n}$, смотри определения (5.9), (5.10). Значение $\mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$ для пар $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)$ и $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4)$ может быть оценено как

$$\mathcal{U} \sim k_0^2 C_n^2 X_*^{-2} x_{13} x_{24}, \quad (10.13)$$

подобно анализу, приведённому в разделе 5. Здесь x_{13} — расстояние между точками 1 и 3, x_{24} — расстояние между точками 2 и 4, а X_* — расстояние между парами.

Однако теперь в выражении (10.5) появляется фаза ϑ функций Грина. Она быстро меняется при раздвижке точек пары в радиальном направлении. Таким образом, интегрирование по разности $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3$ пары ограничено в радиальном направлении расстоянием x_{ph} , определяемым условием

$$\frac{k_0 X x_{ph}}{z} \sim 1, \quad (10.14)$$

где X — расстояние пары от начала координат. Соотношение (10.14) означает, что приращение фазы ϑ на расстоянии x_{ph} имеет порядок единицы (см. (7.8)). Оценивая X в (10.14), как X_* , мы находим

$$\frac{x_{ph}}{r_0} \sim (n \gamma^{2-c})^{-1/(4-c)} \ll 1, \quad (10.15)$$

где использованы соотношения (2.11), (8.9). Можно сказать, что в этом режиме пары становятся сильно анизотропными, поскольку их размер, поперечный к радиусу, остаётся $\sim r_0$.

При оценке поправки, происходящей от $\mathcal{U}$, возникают четыре малых фактора (10.15), связанные с интегрированиями по внутренним координатам двух пар, к которым относится $\mathcal{U}$, и интегрированием по двум парам в исходном интеграле при $\xi = 0$, поскольку из-за вставки $\mathcal{U}$ начальная однородность фазы оказывается нарушенной. Интегрируя $\mathcal{U}$ по ξ в соответствии с (10.13), где x_{13} и x_{24} оцениваются как r_0 , и принимая во внимание четыре малых фактора (10.15), мы приходим к относительной поправке

$$(n \gamma^2)^{(c-2)/(4-c)} (n \gamma^{2-c})^{-4/(4-c)},$$

связанной с $\mathcal{U}$. С учётом комбинаторного множителя $n(n-1)/2$ и пересчётом поправки на I_n находим:

$$\frac{\delta I_n}{I_n} \sim (n \gamma^{2-c})^{-2/(4-c)}. \quad (10.16)$$

Поправка оказывается малой при выполнении условий реализации исследуемого хвоста (3.12).

Объясним теперь второе неравенство в условиях (3.12). Плотность пар можно оценить как

$$n X_*^{-2} \sim r_0^{-2} (n \gamma^{-4/(2-c)})^{(2-c)/(4-c)}, \quad (10.17)$$

где мы подставили выражение (8.9). Плотность (10.17) растёт по мере увеличения n . Однако плотность должна быть меньше r_0^{-2} . Это не что иное, как второе неравенство в условии (3.12).

Теперь мы можем оценить размер яркого спекла, соответствующего основному вкладу в момент $\langle I^n \rangle$. Приравняв произведение $I_n a^2$ к энергии, собранной с круга радиуса X_* , мы находим из соотношения (10.11)

$$a \sim \gamma r_0 n^{-1/2}. \quad (10.18)$$

Величина (10.18) превращается в (8.12) при $n^{2-c} \sim \gamma^4$, как и должно быть в соответствии с (3.12).

11. Стратифицированная среда

В данном разделе мы рассматриваем особенности сильно стратифицированной среды и демонстрируем, что наши результаты для функции вероятности $P(I)$ верны и в этом случае.

Мы анализируем случай, когда фактор C_n^2 отличен от нуля внутри слоя толщиной h и пренебрежимо мал за его пределами. Такой случай можно назвать режимом тонкой атмосферы. Тогда интеграл в определении (2.10) набирается внутри слоя с максимальными значениями C_n^2 . Предположим, что слой расположен вблизи $\zeta = 0$. Тогда интеграл (2.10) становится не зависящим от z , если z больше толщины слоя h . В этом случае параметр γ , определяемый уравнением (2.11), пропорционален длине пути пучка z , если $z > h$.

Функции распределения I (3.4) и (3.5), реализованные для случаев слабых и сильных сцинтилляций соответственно, очевидно, справедливы и в случае сильно стратифицированной среды. Они реализуются для $\gamma \lesssim 1$ и $\gamma \gtrsim 1$. Хвосты (3.11), (3.13) также воспроизводятся в случае сильно стратифицированной среды. Чтобы доказать это утверждение, необходимо выполнить шаги, описанные в разделах 5–10, и убедиться, что в приведённых там выводах ничего не меняется. Ниже мы прокомментируем некоторые ключевые моменты.

Мы анализируем случай, когда C_n^2 отличен от нуля внутри слоя толщиной h и пренебрежимо мал вне слоя. Тогда классические траектории (лучи) определяются свободной фазой (6.5) вне слоя. В соответствии с уравнением (6.7) в этой области $g = 1 - \zeta/z$. Следовательно, производная $dg/d\zeta$ изменяется от нуля при $\zeta = 0$ до значения $\sim 1/z$ при $\zeta = h$. Вторая производная в этой ситуации оценивается как $d^2g/d\zeta^2 \sim (zh)^{-1}$ внутри слоя.

Одним из ключевых наблюдений является оценка величины S (8.1), определяющей вероятность различных средних конфигураций показателя преломления. Интегрирование по ζ в уравнении (8.1) ограничено слоем с существенными флуктуациями показателя преломления. Используя выражение (8.5), следующее из уравнения (7.7), и учитывая особенности g , установленные выше, мы получаем оценку

$$S \sim X_*^{4-c} \left(z^2 \int d\zeta C_n^2 \right)^{-1}.$$

Поэтому мы возвращаемся к соотношению (8.7) [21].

Соотношения (8.8), (10.11), характеризующие седловые вклады в моменты $\langle I^n \rangle$, нечувствительны к зависимости C_n^2 от ζ внутри слоя. При анализе интегралов по окрестности седловой конфигурации мы использовали соотношение (9.6), в котором статистика поля ξ определяется уравнением (9.5). Таким образом, оценка коэффициентов $\mathcal{Z}_n$ (9.2) сохраняется. Аналогично можно проследить за выводом хвоста 7/13 в разделе 10 и проверить, что все приведённые там соотношения остаются справедливыми.

Таким образом, все соотношения, установленные для плавно изменяющихся параметров среды, воспроизводятся в случае сильно стратифицированной среды, если результаты выражены в терминах безразмерных параметров γ и I/I_0 .

12. Заключение

В заключение подведём итоги нашего исследования, основанного на представлении моментов интенсивности I в виде функционального интеграла (8.2).

Мы проанализировали вероятность редких событий, когда в световом пучке, распространяющемся через тур-

булентную среду (атмосферу), формируется всплеск с интенсивностью I , намного превышающей среднюю. Мы установили общую структуру функции вероятности интенсивности I и нашли её хвосты (см. раздел 3). Эти хвосты характеризуются растянутыми экспонентами 7/12 и 7/13, т.е. являются "жирными". Поэтому вероятность появления всплесков оказывается намного больше, чем их наивная оценка в рамках гауссовой статистики поля Ψ . Вместо анализа хвостов функции вероятности можно работать в терминах высоких моментов $\langle I^n \rangle$, соотношение между n и I определяется выражением (3.9).

Ключевым объектом в объяснении хвостов функции вероятности I является коническая распределённая линза радиуса X_* , зависящего от безразмерного параметра γ (2.11) и от наблюдаемой величины I или от номера n момента $\langle I^n \rangle$. Параметр γ выражается через дисперсию Рытова (см. выражение (2.12)). Значение X_* определяется оценкой (8.9), эта величина возрастает с ростом n или I . Линза появляется самопроизвольно из-за турбулентных пульсаций и концентрирует свет в виде яркого пятна. Наши результаты основаны на оценке вероятности формирования такой линзы случайными турбулентными пульсациями.

Наши расчёты верны при условии, что X_* меньше ширины пучка. Очевидно, что это условие выполняется для начальной плоской волны. Оно выполняется и для начального точечного источника. Действительно, в данном случае можно рассматривать фронт сферической волны, создаваемой точечным источником, как вторичный источник. Если кривизна фронта меньше, чем X_*^{-1} , то он играет качественно ту же роль, что и фронт плоской волны. Некоторые ограничения на нашу схему накладываются в случае конечной апертуры D источника света (скажем, лазера). Если дифракционная расходимость луча слабая, $z \lesssim k_0 D^2$, то наши результаты верны при условии, что $D > X_*$. Противоположный предел требует отдельного анализа.

Можно задаться вопросом о форме ярких пятен при заданном значении n . Характерные размеры a пятен для хвостов 7/12 и 7/13 определяются выражениями (8.12), (10.18). Заметим, что размер a уменьшается по мере роста n . Можно предложить оценку $a \sim r_0 n^{c/[2(2-c)]}$ для пятен, относящихся к экспоненциальной части $P(I)$, которая сшивается с найденными значениями на обеих границах интервала, при $n \sim 1$ и $n \sim \gamma^{2-c}$. Мы наблюдаем увеличение a по мере роста n . Обоснование данной оценки является предметом отдельного исследования.

Далее можно оценить интегральную интенсивность (мощность) всплеска как произведение $I_n a^2$, где I_n — характерное значение I в всплесках, формирующих момент $\langle I^n \rangle$. Используя выражения (8.10), (10.12) для хвостов 7/12 и 7/13 и оценку $I_n \sim n I_0$ для экспоненциального хвоста, мы заключаем, что интегральная интенсивность монотонно возрастает при росте n . Таким образом, всплески становятся мощнее по мере увеличения числа n , как и следовало ожидать.

Отметим, что анализ распространения света в турбулентной среде нельзя вести в терминах ляпуновских экспонент, поскольку "поле скорости", управляющее расходимостью лагранжевых траекторий, не является гладким. Это свойство отражает негладкость показателя преломления v . Кардинальная разница между гладким и негладким полями скоростей продемонстрирована, например, в наших работах [60, 61].

Упомянем задачу о распространении волны в ограниченном канале с беспорядком. Она важна как в оптических волокнах [62], так и для распространения звуковых волн в подводных звуковых каналах [63, 64]. Эта задача находится в сфере наших интересов, но вне тематики настоящего обзора.

Благодарности. Авторы благодарят за поддержку Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Мы благодарны Ф.А. Старикову за полезные обсуждения.

13. Приложение. Перемежаемость

В настоящем приложении мы обсуждаем две модели для полей с мультипликативным шумом, в рамках которых можно аналитически установить особенности статистики поля в режиме сильного взаимодействия. Эти модели демонстрируют, что в режиме сильного взаимодействия (сильной нелинейности в уравнении на логарифм поля) важную роль играет перемежаемость и тесно связанный с ней аномальный скейлинг. В данном случае речь идёт о предельном аномальном скейлинге.

Классическим примером нелинейного уравнения с аддитивным шумом является уравнение Бюргерса для поля $u(t, x)$

$$\partial_t u + u \partial_x u = \kappa \partial_x^2 u - \partial_x \xi, \quad (\text{П1})$$

где $\xi(t, x)$ — случайное поле, а κ — кинематическая вязкость. Преобразование Коула–Хопфа, т.е. переход к полю

$$\Phi = \exp \left[\frac{h}{2\kappa} \right], \quad (\text{П2})$$

где h — потенциал поля u , $u = -\partial_x h$, приводит уравнение (П1) к виду

$$\partial_t \Phi = \kappa \partial_x^2 \Phi + \frac{\xi}{2\kappa} \Phi. \quad (\text{П3})$$

Уравнение (П3) является уравнением с мультипликативным шумом для поля Φ .

Далее мы рассматриваем случай, когда поле ξ коротко коррелировано по времени, но имеет конечную длину корреляции по x , и имеет нормальную статистику. Нас интересует случай сильной нелинейности в уравнении (П1), который соответствует большому числу Рейнольдса Lu_0/κ , где L — длина корреляции поля ξ , а u_0 — характерное значение поля u , которое порождается шумом ξ . В данном случае статистика поля u и его градиента $\partial_x u$ оказывается экстремально негауссовой [35, 65, 66]. Численное подтверждение этого факта было получено в работе [67].

Экстремальная негауссовость u связана с явлением перемежаемости, обусловленным возникновением в поле u шоков с шириной существенно меньше длины корреляции L случайного поля ξ [35]. Например, моменты разности $\Delta u = u(x_1 + x) - u(x_1)$ в случае $x \ll L$ определяются выражением

$$\langle |\Delta u|^n \rangle \sim \frac{u_0^n x}{L}. \quad (\text{П4})$$

Здесь малый множитель x/L определяет вероятность того, что шок попадет между точками x_1 и $x_1 + x$. Выражение (П4) демонстрирует предельный аномальный скейлинг, когда все моменты Δu имеют одинаковую зависимость от раздвижки x . Соотношение (П4) можно переписать в виде закона

$$\frac{\langle |\Delta u|^n \rangle}{\langle |\Delta u| \rangle^n} \propto \left(\frac{L}{x} \right)^{n-1}, \quad (\text{П5})$$

который и отражает аномальный скейлинг.

В качестве ещё одного примера уравнения с мультипликативным шумом можно привести точно решаемую модель для волнового поля, подчиняющегося уравнению (2.1) с полем v , которое является случайной гладкой функцией координат. Это означает, что разность $v(\mathbf{r}_1) - v(\mathbf{r}_2)$ можно разложить в ряд Тейлора по разности $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Мы будем полагать, что радиус сходимости ряда Тейлора превосходит все характерные поперечные длины, и потому при анализе различных величин можно ограничиться первыми членами разложения в ряд Тейлора. Однако по-прежнему будем считать, что поле v является коротко коррелированным вдоль оси Z .

Эта задача для не слишком широкого гауссова пучка эквивалентна модели гладкого поля флуктуаций показателя преломления, численно исследованной в работе [68], в которой было обнаружено насыщение флуктуаций интенсивности с ростом расстояния, качественно согласующееся с приведённым ниже результатом для моментов I (П17) (см. также [69]).

В дальнейшем мы вычисляем моменты интенсивности I в точке $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. В этом случае из огибающей Ψ удобно исключить однородный по $\mathbf{r}$ вклад в фазу

$$\phi_0 = \int_0^z d\zeta k_0 v(\mathbf{0}, \zeta).$$

Для поля $\psi = \exp(-i\phi_0)\Psi$ находим из уравнения (2.1) следующее уравнение:

$$i\partial_z \psi + \frac{1}{2k_0} \nabla^2 \psi + k_0 [v(\mathbf{r}, z) - v(\mathbf{0}, z)] \psi = 0. \quad (\text{П6})$$

Отметим, что интенсивность I выражается через новое поле так же, как и через исходное: $I = |\psi|^2$, поскольку фазовый множитель $\exp(i\phi_0)$ выпадает при подстановке $\Psi = \exp(i\phi_0)\psi$ в выражение для интенсивности $I = |\Psi|^2$.

Раскладывая разность $v(\mathbf{r}, z) - v(\mathbf{0}, z)$ в ряд Тейлора до первого не исчезающего члена, мы находим $\mathbf{w}\mathbf{r}$, где $\mathbf{w}$ — случайная функция z . Подстановка этого разложения в уравнение (П6) даёт

$$i\partial_z \psi + \frac{1}{2k_0} \nabla^2 \psi + k_0 \mathbf{w}\mathbf{r} \psi = 0. \quad (\text{П7})$$

Статистические свойства $\mathbf{w}$ определяются его парной корреляционной функцией

$$\langle w_\alpha(z) w_\beta(\zeta) \rangle = D \delta(z - \zeta) \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{П8})$$

Здесь мы предположили изотропию статистических свойств $\mathbf{w}$. Фактор D в соотношении (П8) может быть, вообще говоря, функцией z . В дальнейшем мы считаем фактор D константой, не зависящей от z . Обобщение

нашей схемы на случай произвольной зависимости D от z достаточно просто.

Переходя к фурье-компоненте

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}, z) = \int d^2r \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, z), \quad (\text{П9})$$

мы находим из уравнения (П7)

$$i\partial_z \tilde{\psi} - \frac{k^2}{2k_0} \tilde{\psi} + ik_0 \mathbf{w} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \tilde{\psi} = 0. \quad (\text{П10})$$

Уравнение (П10) легко решается методом характеристик, в результате получаем

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}, z) = \tilde{\psi}(\mathbf{k}, 0) \exp \left\{ -\frac{i}{2k_0} \int_0^z d\tau \left[\mathbf{k} - k_0 \int_\tau^z d\zeta \mathbf{w}(\zeta) \right]^2 \right\}. \quad (\text{П11})$$

Интересующее нас значение $\psi(\mathbf{0}, z)$ получается интегрированием правой части (П11) по $\mathbf{k}$.

Для определённости выбираем начальный гауссов профиль огибающей $\psi(\mathbf{r}, 0) \propto \exp(-br^2/2)$, тогда $\tilde{\psi}(\mathbf{k}, 0) \propto \exp(-b^{-1}k^2/2)$. Подставляя это значение в правую часть (П11) и интегрируя по $\mathbf{k}$, находим

$$\psi(\mathbf{0}, z) = \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2} \int_0^z d\tau \left[\int_\tau^z d\zeta \mathbf{w}(\zeta) \right]^2 \right\} \times \frac{\mu}{1 + ibz/k_0} \exp \left[-\frac{b\Xi}{2(1 + ibz/k_0)} \right], \quad (\text{П12})$$

$$\Xi = \left(\int_0^z d\tau \int_\tau^z d\zeta \mathbf{w} \right)^2, \quad (\text{П13})$$

где μ — константа, которая определяется амплитудой начального гауссова профиля. Отсюда следует

$$I = \frac{\mu^2}{1 + b^2 z^2/k_0^2} \exp \left(-\frac{b\Xi}{1 + b^2 z^2/k_0^2} \right), \quad (\text{П14})$$

со сложной зависимостью от z .

Таким образом, статистика $\ln I$ определяется величиной (П13), которая не обладает нормальной статистикой. Эта величина имеет среднее значение

$$\langle \Xi \rangle = \frac{2}{3} Dz^3, \quad (\text{П15})$$

которое вычисляется в соответствии с (П8). Плотность вероятности для Ξ определяется выражением

$$P(\Xi) = \frac{1}{2\langle \Xi \rangle} \exp \left[-\frac{\Xi}{2\langle \Xi \rangle} \right], \quad (\text{П16})$$

т.е. плотность вероятности для Ξ является экспоненциальной. Исходя из выражения (П16), несложно вычислить моменты I :

$$\langle I^n \rangle = \left(\frac{\mu^2}{1 + b^2 z^2/k_0^2} \right)^n \left[\frac{1 + 2bn\langle \Xi \rangle}{1 + b^2 z^2/k_0^2} \right]^{-1}, \quad (\text{П17})$$

где $\langle \Xi \rangle$ определяется (П15).

Случай сильной нелинейности уравнения на $\ln \Psi$ соответствует достаточно большим z , когда

$$p \equiv \frac{4bDz^3/3}{1 + b^2 z^2/k_0^2} \gg 1. \quad (\text{П18})$$

В этом случае мы находим из (П17)

$$\frac{\langle I^n \rangle}{\langle I \rangle^n} = \frac{1}{n} p^{n-1}, \quad (\text{П19})$$

аналогичное (П5). Таким образом, мы опять сталкиваемся с перемежаемостью и предельно аномальным скейлингом. В данном случае все моменты определяются вероятностью того, что точка наблюдения попадет внутрь пучка, центр которого флуктуирует с амплитудой, растущей с z .

Список литературы

1. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **30** 299 (1941); Пер. на англ. яз.: Kolmogorov A N *Proc. R. Soc. London A* **434** 9 (1991)
2. Колмогоров А Н *ДАН СССР* **32** 19 (1941); Пер. на англ. яз.: Kolmogorov A N *Selected Works of A.N. Kolmogorov* Vol. 1 (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991) p. 324
3. Обухов А М *ДАН СССР* **32** 22 (1941)
4. Обухов А М *Изв. АН СССР. Географическая и геофизическая* **13** (1) 58 (1949)
5. Corrsin S J. *Appl. Phys.* **22** 469 (1951)
6. Обухов А М *Изв. АН СССР. Сер. геофизическая* (2) 155 (1953)
7. Обухов А М *Турбулентность и динамика атмосферы* (Л.: Гидрометиздат, 1988)
8. Татарский В И *Распространение волн в турбулентной атмосфере* (М.: Наука, 1967)
9. Goodman J W "Statistical properties of laser speckle pattern", in *Laser Speckle and Related Phenomena* (Topics in Applied Physics, Vol. 9, Ed. J C Dainty) (Berlin: Springer-Verlag, 1975) pp. 9–75, DOI:10.1007/978-3-662-43205-1_2
10. Кравцов Ю А, Рытов С М, Татарский В И *УФН* **115** 239 (1975); Kravtsov Yu A, Rytov S M, Tatarskii V I *Sov. Phys. Usp.* **18** 118 (1975)
11. Рытов С М, Кравцов Ю А, Татарский В И *Введение в статистическую радиофизику Ч. 2 Случайные поля* (М.: Наука, 1978); Пер. на англ. яз.: Rytov S M, Kravtsov Yu A, Tatarskii V I *Principles of Statistical Radiophysics* Vol. 3 *Elements of Random Fields* (Berlin: Springer-Verlag, 1989)
12. Rytov S M, Kravtsov Yu A, Tatarskii V I *Principles of Statistical Radiophysics 4: Wave Propagation through Random Media* (Berlin: Springer-Verlag, 1989)
13. Стробен Д (Ред.) *Распространение лазерного пучка в атмосфере* (М.: Мир, 1981); Пер. с англ. яз.: Strohbehn J W (Ed.) *Laser Beam Propagation in the Atmosphere* (Topics in Applied Physics, Vol. 25) (Berlin: Springer-Verlag, 1978) DOI:10.1007/3-540-08812-1
14. Andrews L C, Phillips R L *Laser Beam Propagation through Random Media* (Press Monograph Series, Vol. PM53) (Bellingham, WA: SPIE Optical Engineering Press, 1998) DOI:10.1117/3.626196
15. Vorontsov M et al. "Characterization of atmospheric turbulence effects over 149 km propagation path using multi-wavelength laser beacons", in *Proc. of the Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conf., AMOS, Maui, Hawaii, September 14–17, 2010* (Ed. S Ryan) (Maui, HI: The Maui Economic Development Board, 2010) id. E18
16. Vorontsov M et al. "Comparison of turbulence-induced scintillations for multi-wavelength laser beacons over tactical (7 km) and long (149 km) atmospheric propagation paths", in *Proc. of the Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conf., AMOS, Maui, Hawaii, September 13–16, 2011* (Maui, HI: The Maui Economic Development Board, 2011) id. E37
17. Lachinova S L, Vorontsov M A *J. Opt.* **18** 025608 (2016)
18. Lushnikov P M, Vladimirova N *Письма в ЖЭТФ* **108** 611 (2018); *JETP Lett.* **108** 571 (2018)
19. Aksenov V P et al. *Opt. Express* **27** 024705 (2019)
20. Колоколов И В, Лебедев В В *Письма в ЖЭТФ* **118** 234 (2023); Kolokolov I V, Lebedev V V *JETP Lett.* **118** 238 (2023)
21. Колоколов И В, Лебедев В В *Письма в ЖЭТФ* **120** 850 (2024); Kolokolov I V, Lebedev V V *JETP Lett.* **120** 816 (2024)
22. Kolokolov I V, Lebedev V V *Phys. Rev. E* **111** 064104 (2025)

23. Лифшиц И М *УФН* **83** 617 (1964); Lifshitz I M *Sov. Phys. Usp.* **7** 549 (1965)
24. Zittartz J, Langer J S *Phys. Rev.* **148** 741 (1966)
25. Falkovich G et al. *Phys. Rev. E* **54** 4896 (1996)
26. Balkovsky E et al. *Phys. Rev. Lett.* **78** 1452 (1997)
27. Грачева М Е, Гурвич А С *Изв. вузов. Радиофизика* **8** 717 (1965); Gracheva M E, Gurvich A S *Radiophys. Quantum Electron.* **8** 511 (1965)
28. Грачева М Е, Гурвич А С, Каллистратова М А *Изв. вузов. Радиофизика* **13** 56 (1970); Gracheva M E, Gurvich A S, Kallistratova M A *Radiophys. Quantum Electron.* **13** 40 (1970)
29. Кляцкин В И *УФН* **174** 177 (2004); Klyatskin V I *Phys. Usp.* **47** 169 (2004)
30. Зельдович Я Б, Мамаев А В, Шандарин С Ф *УФН* **139** 153 (1983); Zel'dovich Ya B, Mamaev A V, Shandarin S F *Sov. Phys. Usp.* **26** 77 (1983)
31. Гурбатов С Н, Саичев А И, Шандарин С Ф *УФН* **182** 233 (2012); Gurbatov S N, Saichev A I, Shandarin S F *Phys. Usp.* **55** 223 (2012)
32. Babiano A et al. *J. Fluid Mech.* **183** 379 (1987)
33. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности* Т. 1 (М.: Наука, 1965); Пер. на англ. яз.: Monin A S, Yaglom A M *Statistical Fluid Mechanics. Mechanics of Turbulence* Vol. 1 (Cambridge, MA: MIT Press, 1971)
34. Fried D L *Radio Sci.* **10** 71 (1975)
35. Бес J, Khanin K "Burgers turbulence" *Phys. Rep.* **447** 1 (2007)
36. Феллер В *Введение в теорию вероятностей и ее приложения* Т. 1, 2 (М.: Мир, 1967); Пер. с англ. яз.: Feller W *An Introduction to Probability Theory and its Applications* Vols 1, 2 (New York: John Wiley and Sons, 1957, 1966)
37. Прохоров А М и др. *УФН* **114** 415 (1974); Prokhorov A M et al. *Sov. Phys. Usp.* **17** 826 (1975)
38. Charnotskii M I *Waves Random Media* **4** 243 (1994)
39. Заворотный В У, Кляцкин В И, Татарский В И *ЖЭТФ* **73** 481 (1977); Zavorotnyi V U, Klyatskin V I, Tatarskii V I *Sov. Phys. JETP* **46** 252 (1977)
40. Kolokolov I, Lebedev V, Lushnikov P M *Phys. Rev. E* **101** 042137 (2020)
41. Паташинский А З, Покровский В Л *Флуктуационная теория фазовых переходов* 2-е изд., перераб. (М.: Наука, 1982); Пер. на англ. яз. 1-го изд.: Patashinskii A Z, Pokrovskii V L, Shepherd P J *Fluctuation Theory of Phase Transitions* (Oxford: Pergamon Press, 1979)
42. Шишов В И *Изв. вузов. Радиофизика* **11** 866 (1968); Shishov V I *Radiophys. Quantum Electron.* **11** 500 (1968)
43. Татарский В И *ЖЭТФ* **56** 2107 (1969); Tatarskii V I *Sov. Phys. JETP* **29** 1133 (1969)
44. Чернов Л А *Акуст. журн.* **15** 554 (1969); Chernov L A *Sov. Phys. Acoust.* **15** 480 (1970)
45. Кляцкин В И *ЖЭТФ* **57** 952 (1969); Klyatskin V I *Sov. Phys. JETP* **30** 520 (1970)
46. Beran M J, Ho T L *J. Opt. Soc. Am.* **59** 1134 (1969)
47. Molyneux J E *J. Opt. Soc. Am.* **61** 248 (1971)
48. Kraichnan R H *Phys. Fluids* **11** 945 (1968)
49. Казанцев А П *ЖЭТФ* **53** 1806 (1967); Kazantsev A P *Sov. Phys. JETP* **26** 1031 (1968)
50. Кляцкин В И *УФН* **186** 75 (2016); Klyatskin V I *Phys. Usp.* **59** 67 (2016)
51. Гурвич А С, Каллистратова М А, Мартвель Ф Е *Изв. вузов. Радиофизика* **20** 1020 (1977); Gurvich A S, Kallistratova M A, Martvel' F É *Radiophys. Quantum Electron.* **20** 705 (1977)
52. Flatté S M, Jan M, Wang G-Y *J. Opt. Soc. Am. A* **10** 2363 (1993)
53. Flatté S M, Bracher C, Wang G-Y *J. Opt. Soc. Am. A* **11** 2080 (1994)
54. Wick G C *Phys. Rev.* **80** 268 (1950)
55. Bender C M, Orszag S A *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (New York: McGraw-Hill, 1978)
56. Попов В Н *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике* (М.: Атомиздат, 1976)
57. Фейнман Р, Хибс А *Квантовая механика и интегралы по траекториям* (М.: Мир, 1968); Пер. с англ. яз.: Feynman R P, Hibbs A R *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill, 1965)
58. Weinberg S *The Quantum Theory of Fields* Vol. 2 (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000)
59. Kamenev A *Field Theory of Non-Equilibrium Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2023)
60. Chertkov M et al. *Phys. Rev. E* **52** 4924 (1995)
61. Chertkov M et al. *Phys. Rev. E* **51** 5609 (1995)
62. Chernyak V et al. *J. Lightwave Technol.* **22** 1155 (2004)
63. Вировлянский А Л, Макаров Д В, Пранц С В *УФН* **182** 19 (2012); Virovlyansky A L, Makarov D V, Pranz S V *Phys. Usp.* **55** 18 (2012)
64. Wolfson M A, Tomsovic S J *Acoust. Soc. Am.* **109** 2693 (2001)
65. Фейгельман М В *ЖЭТФ* **79** 1095 (1980); Feigel'man M V *Sov. Phys. JETP* **52** 555 (1980)
66. Weinan E et al. *Phys. Rev. Lett.* **78** 1904 (1997)
67. Gotoh T *Phys. Fluids* **6** 3985 (1994)
68. Дагкесаманская И М, Шишов В И *Изв. вузов. Радиофизика* **13** (1) 16 (1970); Dagkesamanskaya I M, Shishov V I *Radiophys. Quantum Electron.* **13** 9 (1970)
69. Гурвич А С и др. *Изв. вузов. Радиофизика* **22** 198 (1979); Gurvich A S et al. *Radiophys. Quantum Electron.* **22** 135 (1979)

High intensity statistics of light propagating in turbulent fluid

I.V. Kolokolov^(1,2,a), V.V. Lebedev^(1,2,b)

⁽¹⁾ Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences, prosp. Akademika Semenova 1a, 142432 Chernogolovka, Moscow region, Russian Federation

⁽²⁾ National Research University Higher School of Economics, ul. Myasnitskaya 20, 101000 Moscow, Russian Federation
E-mail: ^(a) kolokol@itp.ac.ru, ^(b) lebede@itp.ac.ru

We present an investigation of the statistical properties of light propagation in a turbulent fluid. Our focus is on the probability density function of the intensity I for different values of I and the beam's path length. The probability density function $P(I)$ exhibits two tails, characterized by stretched exponents, indicating that the likelihood of rare events with intensities much higher than the typical value is significantly higher than naive Gaussian estimates would suggest. We present an analysis of the spatial structure of high-intensity bursts of light.

Keywords: electromagnetic wave propagation, turbulent media, rare events, bright speckles

PACS numbers: 41.20.Jb, 42.25.Dd, 92.60.Ta

Bibliography — 69 references

Received 24 March 2025, revised 17 May 2025

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **195** (11) 1179–1198 (2025)

Physics – Uspekhi **68** (11) (2025)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.05.039934>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2025.05.039934>