

Влияние вихрей Пирла на форму и положение скирмионов типа Нееля в гетероструктурах сверхпроводник – киральный ферромагнетик

С.С. Апостолов, Е.С. Андрияхина, И.С. Бурмистров

Представлен обзор недавних работ, выполненных в Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, по изучению влияния сверхпроводящего вихря на форму и положение скирмионов типа Нееля в гетероструктурах сверхпроводник – киральный ферромагнетик. На основе аналитических и численных подходов предсказан ряд эффектов, вызванных неоднородным магнитным полем вихря: значительное увеличение радиуса или изменение киральности скирмиона в случае соосного расположения вихря и скирмиона, модификация формы скирмиона в случае эксцентрической конфигурации. Обсуждаются недавние эксперименты по изучению рассматриваемых эффектов.

Ключевые слова: сверхпроводники, киральные ферромагнетики, вихри, скирмионы

PACS numbers: 12.39.Dc, 74.78.Fk, **75.70. – i**

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.05.039936>

Содержание

1. Введение (1157).
2. Скирмион и вихрь: перспективы и актуальное состояние (1158).
 - 2.1. Топологические квантовые вычисления. 2.2. Теоретическая модель. 2.3. Микромагнитное моделирование.
3. Соосные конфигурации скирмиона и вихря (1163).
 - 3.1. Уравнение Эйлера – Лагранжа. 3.2. Вариационный подход. 3.3. Анализ результатов. 3.4. Радиус скирмиона при конечной длине Пирла.
4. Эксцентрические конфигурации (1166).
 - 4.1. Вариационный подход. 4.2. Оптимальные положения скирмиона и вихря.
5. Стабилизация пары вихрь – антивихрь с помощью скирмиона (1172).
 - 5.1. Конфигурация "без скирмиона" в магнитном поле пары вихрь – антивихрь. 5.2. Вариационный подход для конфигурации скирмион – вихрь – антивихрь. 5.3. Стабильные конфигурации.

6. Скирмионы высокого порядка в магнитном поле вихря Пирла (1174).
 - 6.1. Трёхспиновое взаимодействие. 6.2. Стабильные конфигурации.
 7. Обсуждение (1175).
 - 7.1. Экспериментальные исследования. 7.2. Дальнейшие направления теоретических исследований.
 8. Заключение (1177).
- Список литературы (1177).

1. Введение

Развитие современной физики связано с повышенным интересом к физическим объектам в многочастичных системах, которые, с одной стороны, являются коллективными возбуждениями, а с другой стороны, обладают топологической защитой. Одним из примеров таких объектов являются скирмионы, теоретически предложенные Т. Скирмом в качестве модели барионов в середине XX века [1 – 3]. В дальнейшем существование аналогичных топологических возбуждений было предсказано для различных физических систем: двумерного электронного газа в режиме квантового эффекта Холла [4], спинорных конденсатов Бозе – Эйнштейна [5], сверхтекучего ^3He [6], киральных магнитных плёнок [7] и др. Именно скирмионы, реализующиеся в киральных ферромагнетиках, будут представлять для нас интерес. Детальное описание основных теоретических и экспериментальных результатов, связанных с топологически нетривиальными магнитными возбуждениями (включая скирмионы) в системах без центра инверсии, можно найти в недавнем обзоре [8].

Другим хорошо известным примером топологически защищённых объектов в многочастичных системах

С.С. Апостолов^(1,2), Е.С. Андрияхина^(3,a), И.С. Бурмистров^(1,b)

⁽¹⁾ Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, просп. Академика Семёнова 1а, 142432 Черноголовка, Московская область, Российская Федерация

⁽²⁾ Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", ул. Мясницкая 20, 101000 Москва, Российская Федерация

⁽³⁾ Dahlem Center for Complex Quantum Systems and Physics Department, Freie Universität Berlin, Arnimallee 14, 14195 Berlin, Germany

E-mail: ^(a) esandriyakhina@itp.ac.ru, ^(b) burmi@itp.ac.ru

Статья поступила 7 марта 2025 г.,
после доработки 29 апреля 2025 г.

являются вихри в сверхпроводящих структурах [6, 9]. Обычно в одном и том же материале сверхпроводимость и магнетизм являются антагонистами и существуют в различных областях фазовой диаграммы. Создание гетероструктур сверхпроводник – ферромагнетик позволило получить значительное количество интересных эффектов, связанных с пространственно разделённым сосуществованием магнетизма и сверхпроводимости [10–17]. В частности, гетероструктура сверхпроводник – ферромагнетик даёт возможность изучать два топологически нетривиальных объекта: скирмион и вихрь — в одной экспериментальной системе [18–20]. Даже в отсутствие сверхпроводящих вихрей наличие скирмионов способно сильно влиять на физику гетероструктур сверхпроводник – ферромагнетик: так, скирмионы модифицируют эффект Джозефсона [21], могут индуцировать состояния типа Ю – Шiba – Русинова [22, 23] и изменяют сверхпроводящую критическую температуру [24].

Одновременное присутствие скирмионов и вихрей в гетероструктуре сверхпроводник – ферромагнетик интересно тем, что магнитное поле, создаваемое неоднородной намагниченностью скирмиона, индуцирует в сверхпроводящем вихре квазичастичное состояние точно на нулевой энергии, причём это состояние является майорановским [25–32]. Такие майорановские состояния могут быть использованы для создания платформы для топологических квантовых вычислений [33, 34]. Существует несколько механизмов образования пары скирмион – вихрь в гетероструктурах сверхпроводник – киральный ферромагнетик. В случае достаточно хорошей границы эффект близости при наличии спин-орбитального расщепления приводит к образованию пары скирмион – вихрь [35, 36]. Вне зависимости от качества границы существует механизм образования пары, связанный с воздействием магнитного поля рассеяния, созданного вихрем, на намагниченность скирмиона [37–40]. Причём такой эффект оказывается чувствителен к пространственному распределению намагниченности скирмиона, т.е. к тому, какого типа скирмион: блоховского или неелевского. В последнем случае оказывается, что стабильная конфигурация пары скирмион – вихрь может соответствовать конечному расстоянию между их центрами [41]. Поэтому при анализе структуры квазичастичных состояний в коре сверхпроводящего вихря *априори* нельзя игнорировать тот факт, что магнитное поле, создаваемое вихрем, меняет пространственный профиль намагниченности скирмиона (в том числе вынуждая его сдвинуться на некоторое расстояние от вихря), а это, в свою очередь, влияет на зеемановское расщепление квазичастичного спектра.

Таким образом, для последовательного микроскопического анализа майорановских состояний в гетероструктурах сверхпроводник – ферромагнетик необходимо уметь решать магнитостатическую задачу о равновесном профиле намагниченности в киральной ферромагнитной плёнке под действием магнитного поля, создаваемого вихрем в сверхпроводящей плёнке. В настоящем обзоре изложены методы решения этой задачи и приведены недавние результаты [42–44].

В разделе 2 представлен обзор задачи о взаимодействии скирмионов и вихрей в гетероструктурах сверхпроводник – киральный ферромагнетик, изложены аналитические методы описания этой задачи, а также численный подход на основе микромагнитного моделирования.

Вариационный подход к анализу существования соосной конфигурации вихря и неелевского скирмиона представлен в разделе 3. В разделе 4 представлен подход к изучению эксцентричных конфигураций вихря и скирмиона и рассмотрены различные эффекты, связанные с таким расположением. Далее, в разделе 5, развитый вариационный подход используется для анализа стабилизации пары вихрь – антивихрь за счёт взаимодействия со скирмионом. В разделе 6 рассматривается влияние вихря на скирмионы высокого порядка. Обзор заканчивается обсуждением имеющихся экспериментальных результатов и заключением.

2. Скирмион и вихрь: перспективы и актуальное состояние

2.1. Топологические квантовые вычисления

Недавний всплеск интереса к майорановским фермионам в конденсированных средах был вызван их потенциальным использованием в неабелевых квантовых вычислениях [45]. Многие исследователи сосредоточились на создании одномерных гетероструктур, в которых топологическая p -волновая сверхпроводимость возникает за счёт эффекта близости и приводит к образованию майорановских состояний на границе [46–54]. Другим перспективным направлением стало изучение гетероструктур, в которых тонкая сверхпроводящая плёнка соединена с неколлинеарным магнетиком [25, 55]. Среди преимуществ двумерной реализации майорановских состояний в структуре сверхпроводник – неколлинеарный магнетик можно упомянуть то, что майорановские состояния могут существовать без точной подстройки химического потенциала, стабилизируются в гораздо более широком диапазоне параметров и разделяются на расстояние, определяемое дальним неколлинеарным порядком и достигающее макроскопических масштабов [25].

Впервые обсуждение гетероструктуры сверхпроводник – неколлинеарный магнетик в контексте майорановских состояний было приведено в работе [55], где было показано, что спиральная спиновая структура вблизи s -волнового сверхпроводника приводит к появлению краевых майорановских фермионов с плоской дисперсией, в то время как спиновая конфигурация в виде скирмионного кристалла порождает киральные майорановские состояния на границе образца. Вскоре в работе [25] был разработан более углублённый и унифицированный подход, охватывающий циклоидальный, спиральный и наклонный конический порядки, обнаруженные в мультиферроиках, а также доменные стенки типа Блоха и Нееля в ферромагнитных изоляторах.

С появлением новых идей создания майорановских состояний возникла потребность в изучении их стабильности и возможности манипулирования ими. В качестве возможных реализаций были предложены различные геометрии. Среди них гетероструктура на основе двумерного электронного газа, зажатая между киральным ферромагнетиком, в котором существуют магнитные скирмионы, с одной стороны, и s -волновым сверхпроводником — с другой [27]. Также предлагалась система, где магнитный скирмион с чётным топологическим зарядом Q (см. уравнение (26)) был помещён вблизи s -волнового сверхпроводника [26].

Тем не менее многие из предложенных геометрий оказались трудными с точки зрения реализации в эксперименте. В частности, в большинстве известных материалов существуют только скирмионы с единичным топологическим зарядом [56], тогда как состояния с чётным топологическим зарядом, описанные в [26], нестабильны и их не удавалось обнаружить вплоть до недавнего времени, когда они были впервые найдены при комнатной температуре в мультислойной структуре $[\text{Co}(0,2 \text{ нм})/\text{Ni}(0,7 \text{ нм})]_n$, где $n = 4-11$ — количество бислоёв в гетероструктуре [57]. Однако в работе [29] было показано, что необходимость в экспериментальной реализации чётного $|Q| > 1$ можно избежать следующим крайне изящным образом. Если рассмотреть скирмион с топологическим зарядом Q , расположенный соосно со сверхпроводящим вихрем, который обладает неоднородным параметром порядка $\Delta(\mathbf{r}) = \exp(i\varphi)\Delta(r)$, где (r, φ) — расстояние от центра вихря и азимутальный угол соответственно, то можно показать, что необходимым условием появления майорановского состояния является чётность числа $Q + b$. Таким образом, было предсказано, что наиболее реалистичный с точки зрения эксперимента случай $|Q| = |b| = 1$, соответствующий обычному скирмиону и одноквантовому сверхпроводящему вихрю, может привести к образованию майорановского состояния.

В настоящее время такая реализация майорановских состояний в гетероструктурах сверхпроводник–киральный ферромагнетик рассматривается как достаточно перспективная. В частности, недавно были предложены и теоретически проанализированы протоколы для реализации перемещения друг относительно друга майорановских состояний в парах скирмион–сверхпроводящий вихрь [33, 34].

Далее рассмотрим более подробно теоретическую модель, в рамках которой можно аналитически исследовать влияние сверхпроводящего вихря на форму и положение скирмиона.

2.2. Теоретическая модель

Мы рассматриваем тонкую киральную плёнку ферромагнетика, магнитная свободная энергия которой определяется выражением [7]:

$$\frac{\mathcal{F}_{\text{magn}}[\mathbf{m}]}{d_F} = \int d^2\mathbf{r} \left\{ A(\nabla\mathbf{m})^2 + K(1 - m_z^2) + w_{\text{DM}}[\mathbf{m}] \right\}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ обозначает единичный вектор направления намагниченности, d_F — толщина плёнки, $A > 0$ и $K > 0$ — константы обменной энергии и эффективной¹ перпендикулярной анизотропии соответственно. Плотность $w_{\text{DM}}[\mathbf{m}]$, в свою очередь, отвечает за вклад от релятивистского антисимметричного обмена, известного также как взаимодействие Дзялошинского–Мории (ВДМ). Важно отметить, что вид $w_{\text{DM}}[\mathbf{m}]$ зависит от кристаллического класса материала и приводит к формированию различных неколлинеарных структур. В дальнейшем нас будут интересовать скирмионы типа Нееля, образующиеся в решётках семейства "пирамидальных" групп симметрии C_{nv} , поэтому приведём

явное выражение вклада ВДМ для них:

$$w_{\text{DM}}[\mathbf{m}] = D[m_z \nabla\mathbf{m} - (\mathbf{m}\nabla)m_z], \quad (2)$$

где D — константа взаимодействия Дзялошинского–Мории. Выражения $w_{\text{DM}}[\mathbf{m}]$ для других классов симметрий можно найти в работе [7].

Магнитная свободная энергия нормирована так, что $\mathcal{F}_{\text{magn}}$ равно нулю для ферромагнитного состояния с $m_z = 1$.

2.2.1. Свободный скирмион. В отсутствие внешнего магнитного поля свободная энергия (1) предполагает существование метастабильных стационарных состояний — скирмионов.

Одиночный свободный скирмион, расположенный в начале координат, имеет центрально-симметричный профиль намагниченности, который может быть записан в следующем общем виде:

$$\mathbf{m} = [\mathbf{e}_r \cos \psi(r) + \mathbf{e}_\phi \sin \psi(r)] \sin \theta(r) + \mathbf{e}_z \cos \theta(r). \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\phi$ и $\mathbf{e}_z$ — радиальный, азимутальный и аксиальный единичные векторы в цилиндрической системе координат, где ось z перпендикулярна границе раздела. Угол $\psi(r)$ определяет тип скирмиона: если $\psi(r) = \pi/2$, то скирмион называют блоховским, если $\psi(r) = 0$, то — неелевским. В дальнейшем мы будем обсуждать неелевские скирмионы, поскольку именно такие скирмионы возникают в последних экспериментах [18–20] в конфигурации со сверхпроводящим вихрем и для таких скирмионов могут существовать как соосные, так и смещённые конфигурации [41, 42, 44].

Таким образом, профиль намагниченности свободного неелевского скирмиона имеет вид

$$\mathbf{m} = \mathbf{e}_r \sin \theta(r) + \mathbf{e}_z \cos \theta(r), \quad (4)$$

где угол скирмиона $\theta(r)$ может быть найден из уравнения Эйлера–Лагранжа (УЭЛ), которое получается путём минимизации свободной энергии $\mathcal{F}_{\text{magn}}$ с вкладом от ВДМ в форме уравнения (2)

$$\frac{\ell_w^2}{r} \partial_r(r \partial_r \theta) - \frac{\ell_w^2 + r^2}{2r^2} \sin(2\theta) + 2\epsilon \frac{\sin^2 \theta}{r/\ell_w} = 0, \quad (5)$$

где мы вводим безразмерный параметр ВДМ ϵ и параметр размерности длины ℓ_w , имеющий смысл ширины доменной стенки,

$$\epsilon = \frac{D}{2\sqrt{AK}}, \quad \ell_w = \sqrt{\frac{A}{K}}. \quad (6)$$

Обратим внимание, что поскольку ℓ_w служит естественным масштабом длины в задаче, то ферромагнитную плёнку можно считать тонкой, если её толщина мала в сравнении с этой длиной, $d_F \ll \ell_w$.

Уравнение (5) описывает скирмион при выполнении следующих граничных условий:

$$\theta(r \rightarrow \infty) = 0, \quad \theta(r = 0) = \chi\pi. \quad (7)$$

Первое условие обеспечивает однородность намагниченности вдали от центра скирмиона. Второе условие

¹ Вклад размагничивающего поля включён в эффективную константу перпендикулярной анизотропии $K = K_0 - 2\pi M_s^2$ [39, 41, 58].

определяет, что намагниченность в центре скирмиона инвертирована относительно однородной намагниченности. Здесь $\chi = \pm 1$ обозначает собой киральность скирмиона. Важно отметить, что свободный скирмион в изолированной ферромагнитной плёнке обладает только одной киральностью, определяемой знаком параметра ВДМ, $\chi = \text{sgn}(\epsilon)$. В данной статье детально рассматривается только положительный² ВДМ, $\epsilon > 0$. Следовательно, единственно возможное решение уравнения (5) для свободного скирмиона киральности $\chi = +1$ стабильно. Однако скирмион во внешнем неоднородном магнитном поле может обладать обеими киральностями (см. подробности в [43] и в разделе 3).

Прямое численное решение уравнения (5) с граничными условиями (7) позволяет определить профиль скирмиона. Кроме того, точное решение хорошо аппроксимируется так называемым анзацем 360°-доменной стенки, $\theta(r) \approx \theta_{R\delta}(r)$,

$$\theta_{R\delta}(r) \equiv 2 \arctan \frac{\sinh(R/\delta)}{\sinh(r/\delta)}. \quad (8)$$

Здесь параметр R кодирует две физические величины: радиус скирмиона $|R|$ и киральность $\chi = \text{sgn}(R)$, а δ представляет собой эффективную ширину доменной стенки, формирующую границу скирмиона. Параметры R и δ могут быть получены путём численной минимизации свободной энергии $\mathcal{F}_{\text{magn}}$ с использованием анзаца доменной стенки (8).

2.2.2. Ферромагнитная плёнка во внешнем магнитном поле. Влияние внешнего неоднородного магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r}, z)$ на тонкую ферромагнитную плёнку определяется зеемановским вкладом, который добавляется к свободной энергии:

$$\mathcal{F}_Z[\mathbf{m}, \mathbf{B}] = -d_F \int d^2\mathbf{r} M_s \mathbf{m} \mathbf{B}|_{z=+0}, \quad (9)$$

где M_s обозначает намагниченность насыщения. В дальнейших расчётах внешнее магнитное поле рассматривается в тонкой ферромагнитной плёнке, т.е. при $z = +0$. Поэтому мы опустим обозначение $|_{z=+0}$ и будем писать $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, если иное не оговорено. Кроме того, мы будем предполагать, что магнитное поле вдали от рассматриваемой области мало, $\mathbf{B}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, что очевидно выполняется для поля рассеяния одного или нескольких сверхпроводящих вихрей.

Для определения устойчивых состояний ферромагнитной плёнки в присутствии внешнего магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ требуется минимизировать полную свободную энергию:

$$\mathcal{F}_{\text{ferro}}[\mathbf{m}, \mathbf{B}] = \mathcal{F}_{\text{magn}}[\mathbf{m}] + \mathcal{F}_Z[\mathbf{m}, \mathbf{B}]. \quad (10)$$

Наиболее простым стационарным состоянием является конфигурация "без скирмиона", когда намагниченность ферромагнитной плёнки под действием неоднородного магнитного поля $\mathbf{B}$ оказывается близка к однородной и не содержит скирмионов или иного типа доменных границ. Мы будем рассматривать слабое поле,

характеризующееся эффективной силой γ ,

$$\gamma = \frac{M_s B_0}{2K} \ll 1, \quad (11)$$

где B_0 — постоянная в пространстве характерная амплитуда поля, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 \mathbf{b}(\mathbf{r})$, в плёнке, $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ — безразмерная функция координаты. Обратим внимание, что существует неоднозначность в определении B_0 . Его следует выбрать так, чтобы обеспечить: 1) разумную оценку эффективной силы γ в уравнении (11) и 2) вектор μ_b в уравнении (12) имеет порядок $\gamma^0 = 1$. При этом конкретный выбор B_0 не влияет на окончательный результат, а требуется лишь для оценки эффективной силы γ , поскольку в ответ входит только произведение $\gamma \mu_b$. В частности, имеет смысл выбирать B_0 так, чтобы функция $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ на масштабах характерной длины ℓ_w оказывалась порядка $\gamma^0 = 1$, что и сделано в уравнении (20) для вихря Пирла.

Тогда намагниченность $\mathbf{m}_b$ такого стабильного состояния приблизительно определяется выражением

$$\mathbf{m}_b \approx \mathbf{e}_z + \gamma \mu_b, \quad (12)$$

где $\mu_b(\mathbf{r})$ — вектор порядка γ^0 , ортогональный $\mathbf{e}_z$, т.е. $\mu_b \mathbf{e}_z = 0$.

Расскладывая полную свободную энергию в уравнении (10) с $\mathbf{m} = \mathbf{m}_b$ до второго порядка по γ и минимизируя её, получаем УЭЛ для μ_b ,

$$\ell_w^2 \Delta \mu_b - \mu_b + \mathbf{b}_{||} = 0, \quad (13)$$

где Δ обозначает лапласиан, а $\mathbf{b}_{||} = \mathbf{b} - \mathbf{e}_z b_z$ представляет собой составляющую вдоль плёнки нормированного внешнего магнитного поля $\mathbf{b}$.

2.2.3. Магнитное поле, создаваемое вихрем Пирла. В дальнейшем мы будем предполагать, что магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, действующее на ферромагнетик, представляет собой поле либо одиночного сверхпроводящего вихря, либо пары вихрь–антивихрь. Рассмотрим гетероструктуру, состоящую из двух тонких плёнок — сверхпроводящей и ферромагнитной, разделённых тонким изолирующим слоем, подавляющим эффект близости (рис. 1). Будем считать толщину d_s сверхпроводящей плёнки малой в сравнении с лондоновской глубиной проникновения, $d_s \ll \lambda_L$. В этом случае сверхпроводящий вихрь называется вихрем Пирла, а характерная длина, определяющая масштаб изменения магнитного поля рассеяния вихря, $\lambda = \lambda_L^2/d_s$, — длиной Пирла [59].

Магнитное поле $\mathbf{B}_V$, создаваемое над сверхпроводящей плёнкой (при $z > 0$) одиночным вихрем Пирла, центр которого расположен в начале координат, имеет вид [60]

$$\mathbf{B}_V = \phi_0 \nabla \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{\exp(-qz + i\mathbf{q}\mathbf{r})}{qF(q)}, \quad (14)$$

где $\phi_0 = hc/2e$ — квант магнитного потока. При произвольном соотношении d_s и λ_L функция $F(q)$ имеет вид

$$F(q) = \lambda_L^2 \kappa \frac{(q + \kappa)^2 \exp(\kappa d_s) - (q - \kappa)^2 \exp(-\kappa d_s)}{(q + \kappa) \exp(\kappa d_s) + (q - \kappa) \exp(-\kappa d_s) - 2q}, \quad (15)$$

где $\kappa = \sqrt{q^2 + \lambda_L^{-2}}$.

² В разделе 3 на рис. 4 приведены также некоторые результаты и для $\epsilon < 0$.

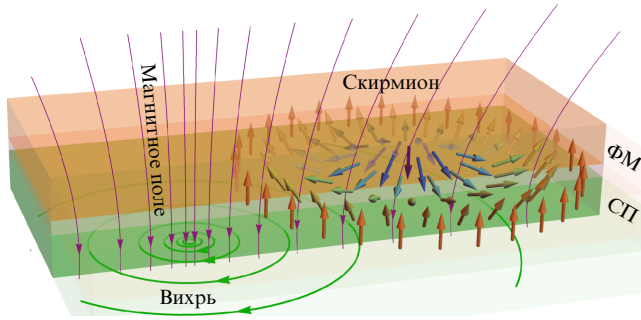


Рис. 1. Схематическое изображение гетероструктуры, состоящей из тонких плёнок сверхпроводника (СП) и ферромагнетика (ФМ) и содержащей соответствующие топологические объекты — вихрь и скирмион, взаимодействующие посредством магнитного поля рассеяния.

В предельном случае тонкой плёнки, $d_S \ll \lambda_L$, не очень близко к центру вихря, $r \gg d_S$, при вычислении интеграла (14) можно положить $F(q) = 1 + 2q\lambda$. Тогда магнитное поле вихря Пирла, обладающее центральной симметрией относительно центра вихря, в ферромагнитной плёнке (при $z = +0$) может быть представлено следующим образом:

$$\mathbf{B}_V(\mathbf{r}) = \frac{\phi_0}{4\pi\ell_w\lambda} [b_r(r)\mathbf{e}_r + b_z(r)\mathbf{e}_z], \quad (16)$$

где функции $b_z(r)$ и $b_r(r)$ определяются из уравнения (14) при $r \gg d_S$,

$$b_{r/z}(r) = -\ell_w \int_0^\infty \frac{dq q J_{1/0}(qr)}{q + 1/(2\lambda)}. \quad (17)$$

Здесь $J_a(x)$ обозначает функцию Бесселя первого рода.

Отметим также, что при $r \lesssim d_S$ магнитное поле вихря Пирла, вычисленное с использованием указанного приближения, $F(q) = 1 + 2q\lambda$, отличается от результата, получаемого из общего выражения (15). Однако оказывается, что μ_b мало в этой области (поскольку $\mu_b \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$) и, следовательно, отклонение магнитного поля вблизи центра вихря от точного значения практически не оказывает влияния на поведение скирмиона. Поэтому в дальнейшем мы будем использовать приближение тонкой плёнки и для области $r \lesssim d_S$, т.е. для любых r .

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением указанного предельного случая тонкой плёнки, поскольку для него можно получить ряд аналитических результатов. Обратим внимание на то, что вариационный метод, представленный в разделах 3 и 4, применим для произвольного распределения магнитного поля, и поэтому он может быть использован и в общем случае, описываемом выражениями (14) и (15).

Далее мы будем предполагать, что характерные размеры скирмиона и расстояния между центрами скирмиона и сверхпроводящего вихря в устойчивых конфигурациях определяются шириной доменной стенки ℓ_w , которая в свою очередь мала в сравнении с длиной Пирла λ , что достигается для достаточно тонких сверхпроводящих плёнок:

$$d_S \sim d_F \ll \ell_w \sim \delta \sim |R| \ll \lambda = \frac{\lambda_L^2}{d_S}. \quad (18)$$

В рамках этих допущений мы можем пренебречь $1/(2\lambda)$ в знаменателе подынтегрального выражения в уравнении (17) и получить более простые выражения для магнитного поля вихря:

$$b_{r/z}(r) = -\frac{\ell_w}{r}, \quad r \ll \lambda. \quad (19)$$

Характерная величина поля рассеяния вихря Пирла и, следовательно, эффективная сила вихря γ , определённая в уравнении (11), даются выражениями

$$B_0 = \frac{\phi_0}{4\pi\ell_w\lambda}, \quad \gamma = \frac{M_s\phi_0}{8\pi\lambda\sqrt{AK}}. \quad (20)$$

В последующих аналитических исследованиях мы будем считать γ малым параметром, что согласуется с экспериментальными наблюдениями [43].

Поскольку магнитное поле одиночного вихря Пирла обладает центральной симметрией, то намагниченность состояния "без скирмиона" из уравнения (12) также оказывается центрально-симметричной, а вектор μ_b сонаправленным с $\mathbf{e}_r$,

$$\mu_b(\mathbf{r}) = \theta_b(r)\mathbf{e}_r. \quad (21)$$

Тогда уравнение (13) можно записать в форме уравнения для θ_b ,

$$\frac{\ell_w^2}{r} \partial_r(r \partial_r \theta_b) - \frac{\ell_w^2 + r^2}{r^2} \theta_b + b_r = 0. \quad (22)$$

Решение этого уравнения с нулевыми граничными условиями,

$$\theta_b(r=0) = 0, \quad \theta_b(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (23)$$

может быть найдено аналитически [44],

$$\theta_b(r) = -2\ell_w \int_0^\infty \frac{dq q J_1(qr)}{(2q + 1/\lambda)[1 + (\ell_w q)^2]}. \quad (24)$$

В случае большой длины Пирла мы получаем более простое выражение [43]:

$$\theta_b(r) = K_1\left(\frac{r}{\ell_w}\right) - \frac{\ell_w}{r}, \quad r \ll \lambda, \quad (25)$$

где $K_n(z)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода.

2.2.4. Скирмионы высокого порядка. Для того чтобы характеризовать различные типы топологических объектов в плёнке ферромагнетика, в рассмотрение обычно вводят понятие топологического заряда Q и его локальной плотности $\rho(\mathbf{r})$. Эти величины связаны с намагниченностью $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ следующими соотношениями:

$$Q = \int d^2\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}), \quad \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{m} \left[\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial y} \right]. \quad (26)$$

В предыдущем разделе речь шла о простейшем варианте скирмиона, топологический заряд которого равен $|Q| = 1$. Большинство теоретических и экспериментальных исследований рассматривает именно такие скирмио-

ны. Однако недавно в ходе численных и физических экспериментов были обнаружены другие магнитные топологические структуры: скирмиониумы [61], скирмионы высокого порядка [57], скирмионные мешки [62], би-скирмионы [63]. Перечисленные структуры могут нести топологический заряд $|Q| \neq 1$ за счёт различных особенностей спиновых текстур.

Причины, по которым в системе могут существовать указанные выше нетривиальные топологические объекты, различны, но в данном обзоре мы более детально остановимся на скирмионах высокого порядка (СВП) с $|Q| \geq 2$, поскольку, как показано в работах [64, 65], такие скирмионы могут стабилизироваться в поле сверхпроводящего вихря.

Радиально-симметричные СВП с центром в начале координат будем описывать в рамках стандартной параметризации, аналогичной уравнению (3):

$$\mathbf{m} = (\mathbf{e}_r \cos \phi^{(n)} + \mathbf{e}_\phi \sin \phi^{(n)}) \sin \theta + \mathbf{e}_z \cos \theta. \quad (27)$$

Здесь ϕ и $\mathbf{e}_\phi$ — азимутальный угол и соответствующий единичный вектор в полярных координатах, $\phi^{(n)} = (n-1)(\phi - \phi_0)$, а n — параметр завихренности (vorticity) скирмионной текстуры, который связан с её топологическим зарядом соотношением $n = -Q$. Важно отметить, что введение азимутального угла ϕ_0 эффективно задаёт спиральность (helicity) скирмиона. Как показано в работе [65], СВП могут создавать стабильные конфигурации с вихрем Пирла (см. подробности в разделе 6).

2.3. Микромагнитное моделирование

2.3.1. Общие понятия. Важным инструментом для анализа теоретических и экспериментальных результатов является техника микромагнитного моделирования [66]. Все приведённые в настоящей работе симуляции были получены с помощью программного обеспечения Object Oriented MicroMagnetic Framework (OOMMF) [67] и среды Ubermag [68]. Далее мы обсудим принцип работы численных минимизаторов в этих программах.

В численном счёте мы имеем дело с дискретизованной задачей, когда система помещается на решётку, в узлах которой расположены классические магнитные моменты единичной длины. Ключевое предположение микромагнитного подхода состоит в том, что направление спина изменяется лишь на малый угол при переходе от одного узла решётки к следующему [69]. При этом выражение для свободной энергии системы, в свою очередь, принимает дискретизированный вид и зависит от $3N$ переменных, где N — количество узлов в решётке, а 3 соответствует трём проекциям намагниченности. Согласно документации OOMMF [67], алгоритм программы построен на пошаговой эволюции системы классических магнитных моментов с помощью эволюторов (англ. *evolvers*). Каждый шаг динамической эволюции или энергетической минимизации зависит от предыдущего (или нескольких предыдущих) шагов, и эволюторы отвечают за обновление конфигурации намагниченности от одного шага к следующему. Существуют два типа эволюторов: временные (*time evolvers*), отслеживающие динамику уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта, и эволюторы минимизации (*minimization evolvers*), которые находят локальные минимумы на энергетической поверхности с помощью методов прямой минимизации.

Обсудим подробнее численное решение динамической задачи с помощью решения уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта [70, 71]. В отсутствие диссипации и спин-поляризованного тока уравнение динамики намагниченности имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -|\gamma_{\text{LLG}}| \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}, \quad (28)$$

где γ_{LLG} — феноменологическая постоянная, а $\mathbf{H}_{\text{eff}}$ имеет смысл эффективного магнитного поля, действующего на среду. Оно определяется как вариационная производная свободной энергии по намагниченности:

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{\delta \mathcal{F}[\mathbf{m}]}{\delta \mathbf{m}}. \quad (29)$$

Естественным образом стационарные решения уравнения (28) соответствуют локальным экстремумам свободной энергии.

Учёт диссипации модифицирует исходное уравнение. Наиболее известные модификации бездиссипативного уравнения имеют дополнительный член в форме Ландау–Лифшица

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -|\gamma_{\text{LL}}| \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} - \frac{|\gamma_{\text{LL}}| \alpha}{M_s^2} \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}), \quad (30)$$

где α — безразмерная константа диссипации, обычно связанная с наличием спин-орбитальной связи, или, в форме Гильберта,

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -|\gamma_{\text{G}}| \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} + \frac{\alpha}{M_s} \left(\mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \right). \quad (31)$$

Две приведённые выше формы уравнения эквивалентны друг другу и связаны преобразованием $\gamma_{\text{G}} = \gamma_{\text{LL}}(1 + \alpha^2)$.

С точки зрения численного моделирования включение диссипационного члена позволяет привести систему к равновесию за конечное время. Однако если задача требует точного предсказания динамики системы, выбор α имеет важное значение.

2.3.2. Численный анализ намагниченности скирмиона в поле вихря Пирла. Численные методы микромагнитного моделирования активно применяются и для изучения поведения магнитных скирмионов во внешних полях. Например, анализ движения намагниченности скирмионов представляет особый интерес в задачах спинового транспорта в целом и скирмионики в частности. В этом обзоре мы сконцентрируемся на обсуждении поведения скирмионов в гетероструктурах сверхпроводник–киральный ферромагнетик, когда в слое сверхпроводника находятся вихри.

В работе [39] изучалась возможность манипуляции скирмионами в подобных гетероструктурах с помощью вихрей. В частности, авторам удалось численно обнаружить, что характерный размер скирмиона в поле вихря может значительно (на два порядка) увеличиться при определённых соотношениях констант взаимодействия, таких как сила ВДМ и размер вихря Пирла. Отметим, что этот интригующий результат не следовал из аналитического подхода и не было проведено системного анализа причин и условий возникновения такого эффекта.

Численный анализ устойчивости соосных конфигураций скирмиона и вихря Пирла, а также изменения про-

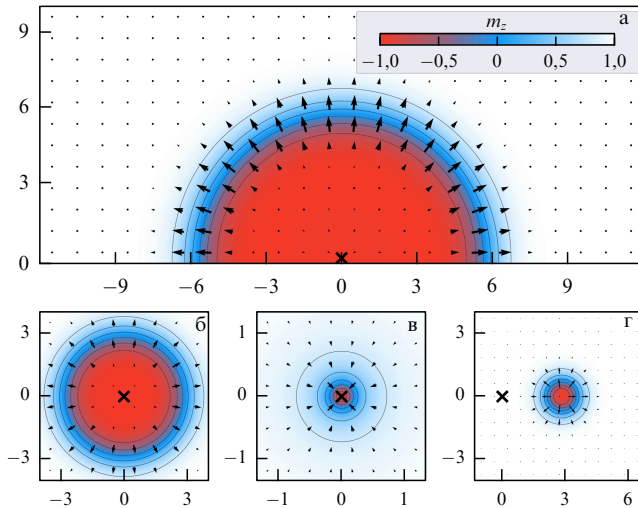


Рис. 2. Профиль намагниченности скирмиона в поле вихря Пирла, полученный с помощью микромагнитного моделирования. Все представленные распределения намагниченности были получены при константе ВДМ $\epsilon = 0,325$ и силе вихря $\gamma = 0,479$, что подтверждает существование метастабильных состояний системы скирмион Нееля–вихрь Пирла. Длины измеряются в единицах ℓ_w (см. уравнение (6)). Цветовая шкала показывает значение m_z (z-проекция полной намагниченности), а векторное поле отражает проекцию $\mathbf{m}$ в плоскости $x-y$. Центр вихря схематически изображён крестом в начале координат. (а) Скирмион аномально большого радиуса, (б) скирмион среднего размера, (в) скирмион малого размера с изменённым знаком киральности и (г) скирмион, смещённый относительно центра вихря.

филя скирмиона в зависимости от параметров системы был проведён авторами настоящего обзора в работе [42]. В микромагнитном расчёте и с помощью минимальной аналитической модели нами было обнаружено, что скирмион неелевского типа может быть неустойчивым к смещению своего центра относительно центра вихря Пирла, а также может значительно увеличиваться в размере.

В наших дальнейших исследованиях [43, 44] также было продемонстрировано, что в системе неелевский скирмион–вихрь Пирла намагниченность может изменять свою киральность, и возможно существование метастабильных состояний. Мы подробнее обсудим это далее в нашем обзоре, а в рамках данного раздела обратим внимание на результат микромагнитного моделирования, представленный на рис. 2. На нём изображены четыре метастабильных состояния скирмиона в поле рассеяния вихря Пирла при фиксированных значениях параметров ВДМ и силы вихря, $\epsilon = 0,325$ и $\gamma = 0,479$. Представленный результат показывает возможность формирования трёх различных соосных конфигураций, а также конфигурации смещённых относительно друг друга скирмиона и вихря.

Таким образом, численные работы, исследовавшие задачу о скирмионе в поле вихря, демонстрируют разнообразие эффектов, связанных с изменением профиля намагниченности. Эти эффекты не описываются в рамках стандартного анзаца доменной стенки, что и подтолкнуло нас к созданию нового аналитического подхода.

2.3.3. Детали микромагнитного моделирования. Наконец, перед тем как приступить к развитию аналитического описания скирмиона в поле вихря, приведём краткие

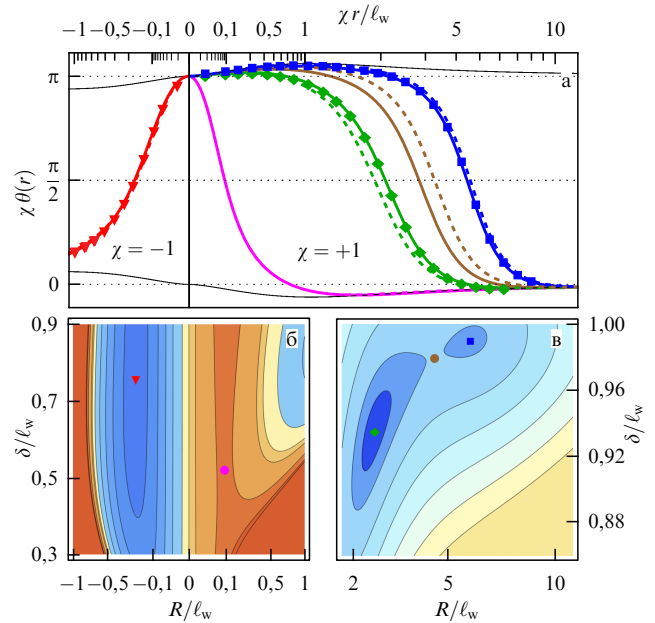


Рис. 3. (а) Скирмионный угол $\theta(r)$ как функция радиальной координаты r/ℓ_w , знак которых скорректирован умножением на киральность скирмиона $\chi = \pm 1$, определённый для параметров $\epsilon = 0,325$ и $\gamma = 0,479$. Сплошные и штриховые кривые представляют результаты, полученные точным решением УЭЛ (32) и с помощью вариационного метода с анзацем в форме (33) соответственно, а символы (квадраты, треугольники и ромбы) извлечены из микромагнитного моделирования (ср. рис. 2). Шкала на оси абсцисс — квадратичная. (б, в) Свободная энергия (1) ферромагнетика со скирмионом, намагниченность которого даётся в форме анзаца (33), как функция параметров R/ℓ_w и δ/ℓ_w . Точки минимума показаны символами, соответствующими рис. а, а седловые точки — кружками. Цветовой градиент показан в произвольных единицах.

сведения о микромагнитном моделировании, использованном в этой работе. Дополнительную информацию можно найти в приложении Е работы [44].

В численном счёте мы моделируем ферромагнитную плёнку как систему размера $2L \times 2L \times dL$, состоящую из ячеек размера $dL \times dL \times dL$. Длины измеряются в единицах ℓ_w . В зависимости от желаемой точности и возможностей вычислительной машины использовались различные значения L и dL . Для данных, изображённых на рис. 2 и 3, были использованы следующие параметры: $L = 15$, $dL = 0,04$. Для рисунка 5 мы взяли $L = 32$, $dL = 0,2$. Рисунки 6 и 8 были построены по параметрам $L = 10,05$ и $dL = 0,015$. Данные для рис. 10 были получены при $L = 10$, $dL = 0,02$.

3. Соосные конфигурации скирмиона и вихря

Мы начнём изучение формы неелевского скирмиона в поле сверхпроводящего вихря Пирла с наиболее простого случая, когда скирмион и вихрь находятся в соосном состоянии. Такие конфигурации были впервые аналитически изучены в статье [43].

3.1. Уравнение Эйлера–Лагранжа

В соосной конфигурации скирмион обладает центрально-симметричной намагниченностью, соответственно, его профиль может быть записан в виде (4). Минимизируя полную свободную энергию в уравнении (10), полу-

чаем УЭЛ для $\theta(r)$,

$$\frac{\ell_w^2}{r} \partial_r(r \partial_r \theta) - \frac{\ell_w^2 + r^2}{2r^2} \sin 2\theta + 2\epsilon \frac{\sin^2 \theta}{r/\ell_w} = \gamma(b_z \sin \theta - b_r \cos \theta). \quad (32)$$

Уравнение (32), дополненное граничными условиями (7), может быть решено численно. Отметим, что, в отличие от случая свободного скирмиона, когда решение уравнения единственно и обладает определённой киральностью $\chi = \text{sgn}(\epsilon)$, при наличии внешнего неоднородного магнитного поля решений УЭЛ может быть несколько, причём обеих киральностей, $\chi = \pm 1$. Кроме того, оказывается, что некоторые из этих решений могут соответствовать не минимуму свободной энергии (10), а седловой точке (см. рис. 3). В последнем случае решение УЭЛ не описывает устойчивое состояние скирмиона и должно быть отброшено после соответствующей проверки.

Обозначенные особенности приводят к дополнительным техническим трудностям при численном определении устойчивых состояний. Поэтому представляется удобным использовать вариационный подход, в котором профиль скирмиона определяется как заданная функция, содержащая ряд параметров, определяемых в ходе минимизации свободной энергии.

3.2. Вариационный подход

Как показано в работе [43], точное решение уравнения (32) при граничных условиях (7) может быть эффективно аппроксимировано с помощью следующего выражения (в дальнейшем мы будем называть его соосным анзацем):

$$\theta(r) \approx \theta_{R\delta}^\gamma(r) \equiv \theta_{R\delta}(r) + \gamma \theta_b(r) \cos \theta_{R\delta}(r), \quad (33)$$

где $\theta_{R\delta}$ обозначает анзац доменной стенки, представленный в уравнении (8), а γ и θ_b вызваны сверхпроводящим вихрем и определены в уравнениях (20) и (25).

Указанную форму анзаца (33) полезно переписать в терминах намагниченности. Действительно, если к вектору намагниченности $\mathbf{m}_{R\delta}$, который описывается анзацем доменной стенки (8), прибавить вектор $\gamma \mathbf{\mu}_b$, который показывает отклонение однородной намагниченности под действием магнитного поля $\mathbf{B}$ (см. уравнения (12) и (21)), а затем нормировать сумму на единицу, то результирующий единичный вектор будет в линейном приближении по $\gamma \ll 1$ представлять собой намагниченность скирмиона с углом $\theta_{R\delta}^\gamma(r)$ из уравнения (33),

$$\frac{\mathbf{m}_{R\delta} + \gamma \mathbf{\mu}_b}{|\mathbf{m}_{R\delta} + \gamma \mathbf{\mu}_b|} \approx \mathbf{e}_r \sin \theta_{R\delta}^\gamma + \mathbf{e}_z \cos \theta_{R\delta}^\gamma. \quad (34)$$

Качественная идея анзаца (33) состоит в следующем. Естественно ожидать, что намагниченность скирмиона в главном приближении описывается анзацем 360° -доменной стенки. Но за счёт действия относительно слабого, $\gamma \ll 1$, магнитного поля эта намагниченность в каждой точке дополнительно поворачивается. Тогда можно записать, что $\theta(r) \approx \theta_{R\delta}(r) + \delta\theta(r)$. Для определения угла $\delta\theta(r)$ такого поворота рассмотрим намагниченность ферромагнетика в трёх различных областях: вблизи центра скирмиона, при $r \sim |R|$, и далеко от начала координат. Вдали от центра скирмиона или вблизи него намагниченность близка к однородной, $m_z \approx \pm 1$, и её изменение

определяется главным образом магнитным полем вихря, следовательно, $\delta\theta(r) \approx \pm \gamma \theta_b(r)$, что напрямую следует из решения уравнения (22) для состояния "без скирмиона". В промежуточной области $m_z \approx \cos \theta_{R\delta}(r)$, поэтому угол поворота $\delta\theta(r)$ сглаживается естественным образом так, что $\delta\theta(r) \approx \gamma \theta_b(r) m_z = \gamma \theta_b(r) \cos \theta_{R\delta}(r)$, и мы получаем анзац (33).

Важно отметить, что угол поворота $\delta\theta$ оказывается малым при $\gamma \ll 1$, это может создать впечатление, будто анзац в уравнении (33) описывает лишь незначительное отклонение от свободного скирмиона. Тем не менее оказывается, что при не слишком малом γ возможны значительные изменения радиуса скирмиона R , а также возникновение решений с противоположной киральностью [43]. Действительно, соосный анзац (33) следует подставить в выражение для свободной энергии (10), а затем минимизировать её по двум параметрам R и δ , не предполагая близость к параметрам свободного скирмиона. Такой вариационный метод оказывается быстрее и эффективнее, чем прямое решение уравнения (32) численно. Кроме того, он даёт достоверные результаты в широком диапазоне параметров ϵ и γ [43].

На рисунке 3а показаны результаты точного решения УЭЛ (сплошные кривые) и вариационного подхода (штриховые кривые), а также результаты микромагнитного моделирования для значения параметров $\epsilon = 0,325$ и $\gamma = 0,479$. Тонкие сплошные кривые показывают $\theta(r) = \gamma \theta_b(r)$ и $\theta(r) = \pi - \gamma \theta_b(r)$ и близки к профилям скирмионов при малых и при больших r . Видно, что три указанных подхода показывают хорошее соответствие друг с другом.

Как видно из рис. 3б, в, нормированная свободная энергия как функция параметров R и δ при указанных параметрах может иметь несколько минимумов: два минимума соответствуют положительной киральности, $\chi = +1$ (зелёный ромб и синий квадрат), и один минимум — отрицательной киральности, $\chi = -1$ (красный треугольник). Эти минимумы могут соответствовать стабильным состояниям скирмиона. Подчёркнём, что радиус стабильного скирмиона (синий квадрат на рис. 3в) составляет $R \approx 5,7\ell_w$, что примерно в 14 раз больше радиуса скирмиона $R_0 \approx 0,41\ell_w$ при $\gamma = 0$. Кроме того, свободная энергия имеет две седловые точки (коричневый и пурпурный кружки), описывающие неустойчивые состояния скирмионов, которые невозможно стабилизировать в микромагнитном моделировании.

3.3. Анализ результатов

Поскольку выбор параметров ϵ и γ соответствует конкретной гетероструктуре, изменение этих параметров может привести к различному числу экстремумов у свободной энергии и, следовательно, к различному числу возможных устойчивых состояний скирмион-вихрь. Для исследования данного вопроса на рис. 4 показаны зависимости R от γ для нескольких значений ϵ . Сплошные и штриховые кривые на плоскости (γ, R) соответствуют минимуму и седловой точке свободной энергии (10) как функции R и δ соответственно. Область седловых неустойчивых состояний отмечена светло-серой заливкой.

Следует отметить, что даже те решения УЭЛ (32), которые отвечают минимуму свободной энергии как функции R и δ , не обязательно соответствуют стабильным

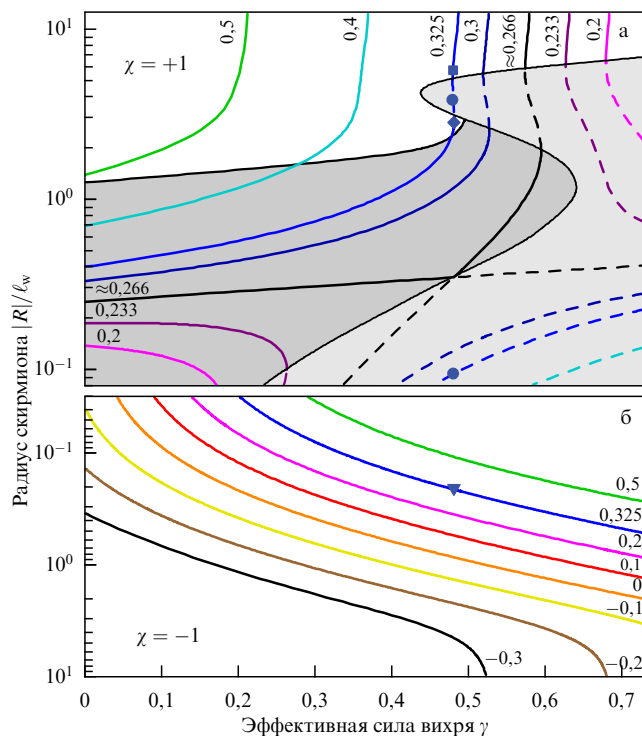


Рис. 4. Зависимость радиуса скирмиона $|R|/\ell_w$ от эффективной силы вихря γ для нескольких значений параметра ВДМ ϵ в полулогарифмическом масштабе для киральностей $\chi = +1$ (а) и -1 (б). Сплошные и штриховые кривые соответствуют минимумам и седловым точкам $\mathcal{F}[R, \delta]$ соответственно. Область неустойчивых соосных состояний и область седловых состояний отмечены тёмно- и светло-серой заливкой соответственно. Значения ϵ , используемые на рисунке, представлены числами возле кривых. Символы (квадрат, ромб и треугольник) соответствуют стабильным скирмионам на рис. 3, а кружки показывают седловые решения.

конфигурациям скирмиона и вихря. Дело в том, что при выводе УЭЛ (32) мы предполагали, что центр скирмиона совпадает с центром пирловского вихря, что может не соответствовать устойчивому состоянию при некоторых ϵ и γ , поскольку центр скирмиона может смещаться от центра вихря. Как показано в работах [41, 42, 44], пара скирмион–вихрь может оставаться стабильной, когда скирмион находится на некотором конечном расстоянии a от вихря Пирла. Более детально такие смещённые конфигурации обсуждаются в разделе 4. Тут мы ограничимся утверждением, что соосные состояния с киральностью $\chi = +1$ неустойчивы при $\epsilon < \epsilon_{cr} \approx 0,49$ и $\gamma < \gamma_{cr}(\epsilon)$ (рис. 8). В этом случае скирмион отталкивается от вихря. Если какое-либо из вышеперечисленных условий не удовлетворено, соосная конфигурация окажется устойчивой относительно смещения. На рисунке 4 область неустойчивых конфигураций отмечена тёмно-серой заливкой, а белый фон обозначает стабильные соосные конфигурации.

Диаграмма на рис. 4 имеет несколько интересных особенностей. Во-первых, все кривые для скирмионов киральности $\chi = +1$ (рис. 4а) расположены в квадрантах, которые на плоскости (γ, R) порождает кривая при $\epsilon = \epsilon_{sep} \approx 0,266$ (чёрная линия). При $\epsilon < \epsilon_{sep}$ кривые $R(\gamma)$ расположены в левом нижнем и правом верхнем квадрантах, тогда как кривые для $\epsilon > \epsilon_{sep}$ расположены в правом нижнем и левом верхнем квадрантах.

Во-вторых, для $0,3 \lesssim \epsilon \lesssim 0,35$ существуют значения γ , при которых могут существовать два скирмиона кираль-

ности $\chi = +1$. Пример такой ситуации можно увидеть на рис. 2 и 3в, где показаны два минимума свободной энергии, соответствующие положительной киральности.

В-третьих, для каждой пары ϵ и γ существует скирмион киральности $\chi = -1$ с определённым радиусом $|R|$ (см. рис. 4б). Однако следует подчеркнуть, что при малых γ и $\epsilon > 0$ радиус скирмиона оказывается чрезвычайно малым ($R \ll \ell_w$). В этом случае выражение для свободной энергии (1) становится неприменимым, и поэтому решения с такими малыми радиусами не включены в рис. 4. Как хорошо видно на рис. 4б, радиус $|R|$ для скирмионов с $\chi = -1$ монотонно возрастает с ростом γ .

Наконец, для каждого ϵ и для обеих киральностей $\chi = \pm 1$ существует критическое значение $\gamma_{\infty}^{\pm}(\epsilon)$. Когда γ возрастает, приближается к $\gamma_{\infty}^{\pm}$, радиус скирмиона существенно возрастает. Для $|R| \gg \delta \approx \ell_w$ свободная энергия может быть рассчитана в главном приближении,

$$\frac{\mathcal{F}_{\text{ferro}}[R]}{8\pi A d_F} \approx \frac{(1 \mp \epsilon\pi/2)|R|}{\ell_w} + \gamma \ell_w^{-2} \int_0^{|R|} dr r b_z(r). \quad (35)$$

Первое слагаемое связано с энергией доменной границы, разделяющей внутреннюю и внешнюю области скирмиона, а второе слагаемое — с энергией внутренней области скирмиона, в которой намагниченность, $m_z \approx -1$, направлена противоположно намагниченности в основном ферромагнитном состоянии, $m_z \approx +1$. Для $\ell_w \ll |R| \ll \lambda$ мы можем аппроксимировать $b_z(r) \approx -\ell_w/r$ (см. уравнение (19)) и оценить второй член в уравнении (35) как $\gamma |R|/\ell_w$. Следовательно, критическое значение γ можно оценить как

$$\gamma_{\infty}^{\pm}(\epsilon) \approx 1 \mp \frac{\epsilon\pi}{2} > 0. \quad (36)$$

Если $\gamma \gtrsim \gamma_{\infty}^{\pm}$, радиус скирмиона становится сравнимым или бóльшим, чем длина Пирла, $|R| \gtrsim \lambda \gtrsim \ell_w$, то минимум свободной энергии определяется соотношением $-b_z(|R|)|R|/\ell_w \approx \gamma_{\infty}^{\pm}/\gamma$ и следует учитывать зависимость поля вихря от длины Пирла. Более детальный анализ такой конфигурации обсуждается в разделе 3.4.

3.4. Радиус скирмиона при конечной длине Пирла

В предыдущих разделах мы предполагали, что длина Пирла велика по сравнению с радиусом скирмиона, т.е. $\lambda \gg R$. Это оправдано в случае, когда параметры ϵ и γ , описывающие взаимодействие Дзялошинского–Мории и влияние сверхпроводящего вихря, относительно малы. Как было показано на рис. 4 и пояснено в конце раздела 3.3, при увеличении данных параметров размер скирмиона возрастает и оказывается сравним с λ . Кроме того, с точки зрения применения теоретических результатов к реальному эксперименту, следует учитывать, что величина λ связана с γ следующим соотношением:

$$\zeta \equiv \frac{\lambda\gamma}{\ell_w} = \frac{M_s \phi_0}{8\pi A}, \quad (37)$$

где введённый параметр ζ определяется только материальными параметрами ферромагнитной плёнки и оказывается величиной порядка 10 (см. таблицу). Таким образом, в определённом диапазоне параметров следует учитывать конечное значение λ .

Известно [72], что магнитное поле вихря из уравнения (17) можно достаточно хорошо аппроксимировать сле-

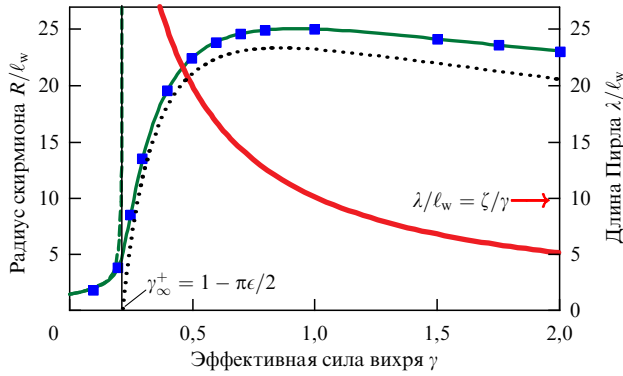


Рис. 5. Зависимость радиуса R/ℓ_w скирмиона положительной киральности от эффективной силы вихря γ при $\epsilon = 0,5$, вычисленная в пределе бесконечно большой (зелёная штриховая линия) и конечной (зелёная сплошная линия) длины Пирла, а также её асимптотика (40) при $R \gg \lambda$ (чёрная пунктирная линия). Результаты микромагнитного моделирования изображены синими квадратами. Зависимость $\lambda/\ell_w = \zeta/\gamma$ длины Пирла от γ представлена тонкой красной линией.

дующими выражениями:

$$b_r(r) \approx -\frac{\ell_w}{r[1+r/(2\lambda)]}, \quad b_z(r) \approx -\frac{\ell_w}{r[1+r/(2\lambda)]^2}. \quad (38)$$

Это позволяет записать достаточно простое выражение для θ_b , аналогичное (25):

$$\theta_b(r) = K_1 \left(\frac{r}{\ell_w} \right) - \frac{\ell_w}{r[1+r/(2\lambda)]} - \frac{\exp(-r/\ell_w)}{2\lambda}. \quad (39)$$

Используя выражения (38) и (39) в вариационном подходе, который был изложен в разделе 3.2, можно определить более корректную зависимость радиуса R скирмиона от эффективной силы вихря γ . Кроме того, для анализа этой зависимости, предполагая, что радиус велик, можно использовать выражение (35). В таком случае, как уже было указано, минимум свободной энергии определяется соотношением $-b_z(|R|)|R|/\ell_w \approx \gamma_\infty^\pm/\gamma$. Воспользовавшись уравнением (38), получим, что минимум $\mathcal{F}_{\text{ferro}}$ достигается при радиусе скирмиона

$$|R| \approx 2\lambda \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_\infty^\pm}} - 1 \right) = 2\zeta\ell_w \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma\gamma_\infty^\pm}} - \frac{1}{\gamma} \right). \quad (40)$$

Обратим внимание, что данная зависимость оказывается корректной при любых $|R| \gg \ell_w$, а последнее выполняется при $\gamma \gtrsim \gamma_\infty^\pm$.

На рисунке 5 представлена зависимость радиуса R/ℓ_w скирмиона положительной киральности для $\epsilon = 0,5$ от эффективной силы вихря γ , показывающая сравнение случаев бесконечно большой и конечной длины Пирла с результатами микромагнитного моделирования и асимптотическим выражением (40).

Отметим также интересную особенность полученной в уравнении (40) зависимости $|R|$ от γ , заключающуюся в том, что она является немонотонной и достигает максимума при $\gamma = 4\gamma_\infty^\pm$:

$$|R_{\text{max}}^\pm| = \frac{\zeta\ell_w}{2\gamma_\infty^\pm} = \frac{\zeta\ell_w}{2 \mp \epsilon\pi}, \quad (41)$$

который является комбинацией параметров только ферромагнетика, но не сверхпроводника. Другими словами,

существует предельный размер скирмиона, который может быть получен в данной ферромагнитной плёнке вследствие влияния сверхпроводящего вихря Пирла.

4. Эксцентрические конфигурации

В этом разделе мы будем изучать состояние одиночного скирмиона типа Нееля, помещённого во внешнее неоднородное магнитное поле. Аналитическое исследование таких состояний представляет значительную трудность при определении подходящего профиля намагниченности $\mathbf{m}$. Точный подход предполагает вывод УЭЛ и задание граничных условий, $\mathbf{m} = -\mathbf{e}_z$ в центре скирмиона и $\mathbf{m} = \mathbf{e}_z$ на удалении от центра. Однако численное решение таких УЭЛ, представляющих собой векторные уравнения в частных производных, потребует вычислительных ресурсов, сопоставимых с теми, которые необходимы для микромагнитного моделирования.

Простейший подход к описанию эксцентрической конфигурации состоит в том, чтобы вычислить зеемановский вклад в энергию, который будет зависеть от расстояния между центрами скирмиона и вихря, но при этом не учитывать изменение формы скирмиона из-за присутствия вихря. Такой подход соответствует развитой в настоящем обзоре теории в формальном пределе $\gamma \rightarrow 0$. Именно такой подход был использован в работе [41], где было получено, что скирмиону типа Нееля может быть выгодно располагаться на конечном расстоянии от центра вихря. Качественно, такое поведение возникает из-за следующих физических соображений. Неоднородная намагниченность скирмиона создаёт сверхток в сверхпроводящей плёнке. Этот ток имеет только азимутальную компоненту, которая может обращаться в нуль на некотором расстоянии от центра скирмиона. Так как сверхток действует через силу Лоренца на сверхпроводящий вихрь, то вихрь может находиться в равновесии только в тех точках, где сверхток обращается в нуль. Можно показать [9], что величина сверхтока определяется производной зеемановской энергии по расстоянию между скирмионом и вихрем. Поэтому нуль сверхтока соответствует минимуму энергии Зеемана. Как мы увидим ниже, приближение $\gamma \rightarrow 0$, использованное в работе [41], оказывается слишком грубым и для аккуратного описания эксцентрических конфигураций требуется более продвинутое теория.

Альтернативой точному численному решению является использование вариационного подхода, аналогичного описанному в разделе 3.2, основанного на достаточно простом аналитическом анзаце, который с достаточной точностью аппроксимирует точные решения УЭЛ или результаты микромагнитного моделирования. Следуя статье [44], мы введём, объясним и аргументируем выбор такого анзаца для намагниченности скирмиона под действием внешнего слабого неоднородного магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ в общем случае, а затем применим этот вариационный подход для описания эксцентрических конфигураций скирмиона и вихря. Кроме того, основываясь на полученных результатах, в разделе 5 мы проанализируем стабильность пары вихрь–антивихрь вследствие взаимодействия со скирмионом.

4.1. Вариационный подход

В данном разделе мы опишем идею построения анзаца для намагниченности скирмиона под действием внешнего слабого неоднородного магнитного поля. Такой

анзац будет определяться тремя параметрами: радиусом R , эффективной шириной доменной стенки δ и положением $\mathbf{a}$ скирмиона относительно магнитного поля. Для того чтобы обосновать это построение, мы разложим полную свободную энергию (10) до второго порядка по малой эффективной силе γ и минимизируем её аналитически. В результате мы выведем формулы для анзаца (см. уравнения (42), (45) и (48)), а также упростим полную свободную энергию до вида одномерных интегралов (см. уравнения (54), (58) и (61)). Такие упрощённые выражения могут быть использованы при численном определении параметров R , δ и $\mathbf{a}$ при описании намагниченности скирмиона.

Полезно также предварительно изложить порядок проведения указанных вычислений. Во-первых, для определения параметров R и δ при фиксированном положении $\mathbf{a}$ скирмиона достаточно разложить свободную энергию лишь до первого порядка по $\gamma \ll 1$, как показано в уравнении (54), а затем минимизировать её. На этом этапе оказывается, что можно пренебречь искривлением скирмиона и считать его намагниченность центрально-симметричной функцией. Тогда мы получаем радиус и эффективную толщину стенки как функцию положения скирмиона, $R(\mathbf{a})$ и $\delta(\mathbf{a})$, поскольку магнитное поле неоднородно.

Затем, чтобы определить $\mathbf{a}$, необходимо учесть вклады второго порядка по малому γ в разложении свободной энергии (см. уравнения (58) и (61)). Эти вклады учитывают искривление формы скирмиона. Наконец, нужно минимизировать полную свободную энергию относительно $\mathbf{a}$, используя R и δ в форме функций от положения скирмиона.

Из вышеописанного следует, что процедуру минимизации свободной энергии можно проводить двумя разными способами. Прямой способ предполагает поиск минимума сразу по всем параметрам, R , δ и $\mathbf{a}$, что даёт стабильную конфигурацию скирмиона с минимально возможной энергией, так же как и в микромагнитном моделировании.

Второй способ предполагает выполнение процедуры в два этапа. Сначала свободная энергия минимизируется только по отношению к R и δ при фиксированном $\mathbf{a}$. Затем результирующую функцию положения $\mathbf{a}$ анализируют для определения её локальных минимумов, соответствующих метастабильным положениям скирмионов. Этот подход отличается от микромагнитного моделирования тем, что облегчает определение нескольких потенциальных метастабильных экстремальных состояний.

Подробное сравнение аналитических результатов и микромагнитного моделирования будет представлено в разделе 4.2.

4.1.1. Формулировка анзаца намагниченности. Для удобства дальнейшего построения сдвинем начало координат в центр скирмиона — точку $\mathbf{a}$. В результате смещённое внешнее магнитное поле будет зависеть от $\mathbf{a}$ как от параметра, $\mathbf{B}^{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}_{\mathbf{a}})$, где $\mathbf{r}_{\mathbf{a}} = \mathbf{r} + \mathbf{a}$.

Основная концепция построения анзаца заключается в поиске главного приближения для намагниченности скирмиона $\mathbf{m}$ в форме центрально-симметричной функции $\bar{\mathbf{m}}$ (ср. с уравнением (4)):

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{e}_r \sin \bar{\theta}(r) + \mathbf{e}_z \cos \bar{\theta}(r), \quad (42)$$

где $\bar{\theta}(r)$ представляет собой скирмионный угол.

Как будет показано в разделе 4.1.2, угол $\bar{\theta}$ можно рассматривать как скирмионный угол в магнитном поле $\bar{\mathbf{B}}^{\mathbf{a}}$ — внешнем поле $\mathbf{B}^{\mathbf{a}}$, усреднённом по полярному углу ϕ вокруг центра скирмиона, относительно радиальных, азимутальных и внеплоскостных составляющих:

$$\bar{\mathbf{B}}^{\mathbf{a}} = \langle B_r^{\mathbf{a}} \rangle_{\phi} \mathbf{e}_r + \langle B_z^{\mathbf{a}} \rangle_{\phi} \mathbf{e}_z, \quad \langle \dots \rangle_{\phi} \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \dots \quad (43)$$

Следовательно, угол $\bar{\theta}$ подчиняется соответствующему УЭЛ (32) для соосного скирмиона. Точное решение упомянутого уравнения можно аппроксимировать следующим соосным анзацем (см. уравнение (33) в разделе 3.2 и статью [43]):

$$\bar{\theta}(r) \approx \theta_{R\delta}^{\mathbf{a}}(r) \equiv \theta_{R\delta}(r) + \gamma \theta_{\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}}}(r) \cos \theta_{R\delta}(r), \quad (44)$$

где $\theta_{R\delta}(r)$ представляет собой анзац доменной стенки из уравнения (8), а $\theta_{\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}}}(r)$ получено из уравнения (22) с $b_r = \bar{b}_r^{\mathbf{a}}$. Напомним, что $\mathbf{b}^{\mathbf{a}} = \mathbf{B}^{\mathbf{a}}/B_0$ и $\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{B}}^{\mathbf{a}}/B_0$, где B_0 — характерная амплитуда внешнего магнитного поля, которая для вихря Пирла определена в уравнении (20).

На следующем этапе построения анзаца необходимо учесть деформацию скирмиона относительно центрально-симметричной намагниченности $\bar{\mathbf{m}}$. Как уже было указано, такая деформация должна быть мала в меру эффективной силы γ внешнего магнитного поля. Следовательно, намагниченность скирмиона принимает следующий вид:

$$\mathbf{m} \approx \bar{\mathbf{m}} + \gamma \tilde{\mathbf{m}}. \quad (45)$$

В рамках линейного приближения по γ вектор деформации $\tilde{\mathbf{m}}$ должен быть ортогонален $\bar{\mathbf{m}}$, поскольку оба вектора $\mathbf{m}$ и $\bar{\mathbf{m}}$ являются единичными. Поэтому $\tilde{\mathbf{m}}$ можно представить как векторное произведение, $\tilde{\mathbf{m}} = \bar{\mathbf{m}} \times \boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega}$ можно определить из следующих соображений.

Поскольку $\bar{\mathbf{m}}$ выражается через $\bar{\theta}$ из уравнения (44), т.е. представляет собой намагниченность скирмиона, соосного с усреднённым магнитным полем $\bar{\mathbf{B}}^{\mathbf{a}}$, то можно воспользоваться выражением (34). Раскладывая его по малому γ , получаем, что $\bar{\mathbf{m}}$ линейным образом выражен через вектор $\boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}}} = \theta_{\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}}} \mathbf{e}_r$,

$$\bar{\mathbf{m}} \approx \frac{\mathbf{m}_{R\delta} + \gamma \boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}}}}{|\mathbf{m}_{R\delta} + \gamma \boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}}}|} \approx \mathbf{m}_{R\delta} + \gamma [\mathbf{m}_{R\delta} \times \boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}}} \times \mathbf{m}_{R\delta}]. \quad (46)$$

Естественно ожидать, что в линейном по γ порядке полная намагниченность скирмиона должна зависеть от полного магнитного поля $\mathbf{B}^{\mathbf{a}}$ таким же образом,

$$\mathbf{m} \approx \frac{\mathbf{m}_{R\delta} + \gamma \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}^{\mathbf{a}}}}{|\mathbf{m}_{R\delta} + \gamma \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}^{\mathbf{a}}}|} \approx \mathbf{m}_{R\delta} + \gamma [\mathbf{m}_{R\delta} \times \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}^{\mathbf{a}}} \times \mathbf{m}_{R\delta}]. \quad (47)$$

Возвращаясь к уравнению (45), можно окончательно записать выражение для деформационной части намагниченности:

$$\tilde{\mathbf{m}} = [\bar{\mathbf{m}} \times (\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{b}^{\mathbf{a}}} - \boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}}}) \times \bar{\mathbf{m}}]. \quad (48)$$

Таким образом, с линейной точностью по γ анзац для намагниченности скирмиона определяется совокупностью выражений (42), (45) и (48). Обратим внимание на то, что в действительности указанный анзац верен также и с квадратичной точностью по γ , если в правой части уравнения (45) вписать слагаемое $-\gamma^2 \bar{\mathbf{m}} \bar{m}^2 / 2$ (см. уравнение (57)).

Используя представленный анзац, можно определять оптимальные параметры скирмиона: радиус R , эффективную ширину доменной стенки δ и положение $\mathbf{a}$ —

минимизируя полную свободную энергию (10). Уточним, что свободная энергия (10) представляет собой интеграл по двум пространственным координатам, что достаточно затратно с точки зрения процессорного времени при выполнении численного счёта на компьютере. В следующих разделах получено упрощённое выражение (58) для свободной энергии, представляющее разложение до квадратичного порядка по $\gamma \ll 1$. При этом соответствующие вклады (54) и (61) представлены в форме интегралов только по радиальной координате, тогда как интегрирование по азимутальному углу выполнено аналитически, что существенно ускоряет численный счёт.

4.1.2. Приближение первого порядка. В этом разделе вычисляется и минимизируется свободная энергия с точностью до слагаемых, линейных по эффективной силе $\gamma \ll 1$ внешнего магнитного поля. В данном случае, как было указано в разделе 4.1.1, ведущим приближением для намагниченности скирмиона $\mathbf{m}$ является центрально-симметричная вектор-функция $\tilde{\mathbf{m}}$ единичной длины (см. уравнение (42)). В свою очередь деформация скирмиона, описываемая вектором $\tilde{\mathbf{m}}$, под действием поля проявляется только в первом приближении по γ (см. уравнение (45)).

Для определения неизвестного угла скирмиона $\bar{\theta}$ в первом порядке по $\gamma \ll 1$ подставим намагниченность $\mathbf{m}$ в форму (45) в выражение для полной свободной энергии в уравнении (10) и разложим его до первого порядка по γ ,

$$\mathcal{F}_{\text{ferro}}[\mathbf{m}, \mathbf{B}^a] \approx \mathcal{F}_{\text{ferro}}[\tilde{\mathbf{m}}, \mathbf{B}^a] + \gamma \mathcal{F}_{\text{magn}}^{(1)}[\tilde{\mathbf{m}}, \tilde{\mathbf{m}}], \quad (49)$$

где $\mathcal{F}_{\text{magn}}^{(1)}$ обозначает первую вариацию магнитной энергии из уравнения (1),

$$\mathcal{F}_{\text{magn}}^{(1)}[\tilde{\mathbf{m}}, \tilde{\mathbf{m}}] = -2d_F \int d^2 \mathbf{r} [A \tilde{\mathbf{m}} \Delta \tilde{\mathbf{m}} + K \tilde{m}_z \tilde{m}_z - D(\tilde{m}_z \nabla \tilde{\mathbf{m}} - \tilde{\mathbf{m}} \nabla \tilde{m}_z)]. \quad (50)$$

Обратим внимание, что интегрирование по полярному углу ϕ в последнем выражении необходимо выполнить только для радиальной и внеплоскостной компонент $\tilde{\mathbf{m}}$, поскольку $\tilde{\mathbf{m}}$ является центрально-симметричной функцией. Это означает, что если среднее значение указанных компонент по ϕ будет равно 0,

$$\langle \tilde{m}_r \rangle_\phi = \langle \tilde{m}_z \rangle_\phi = 0, \quad (51)$$

то будет равна 0 и первая вариация $\mathcal{F}_{\text{magn}}^{(1)}$. Если дополнительно учесть, что $\tilde{\mathbf{m}}$ должно быть ортогонально $\tilde{\mathbf{m}}$ и может быть представлено в виде $\tilde{\mathbf{m}} = \tilde{\mathbf{m}} \times \boldsymbol{\omega}$, то условие (51) может быть упрощено до $\langle \omega_\phi \rangle_\phi = 0$.

С другой стороны, если в уравнении (45) произвести замену $\theta \rightarrow \theta + \gamma \vartheta$, то азимутальная составляющая $\boldsymbol{\omega}$ должна быть также изменена, $\omega_\phi \rightarrow \omega_\phi + \vartheta$, чтобы $\mathbf{m}$ осталось неизменным. Чтобы избежать указанной неоднозначности, можно считать, что функция ω_ϕ выбрана таким образом, что её среднее по углу равно 0, т.е. $\langle \omega_\phi \rangle_\phi = 0$, а функция $\bar{\theta}$ должна быть определена с точностью до линейных слагаемых по $\gamma \ll 1$. Подчеркнём, что указанное условие для $\boldsymbol{\omega} = [(\boldsymbol{\mu}_b^a - \boldsymbol{\mu}_b^a) \times \tilde{\mathbf{m}}]$ из уравнения (48) упрощается до $\langle \mu_r^a \rangle_\phi = 0$, где

$$\boldsymbol{\mu}^a = \boldsymbol{\mu}_b^a - \boldsymbol{\mu}_b^a, \quad (52)$$

и становится очевидным, поскольку

$$\langle \boldsymbol{\mu}_b^a \mathbf{e}_r \rangle_\phi = \boldsymbol{\mu}_b^a \mathbf{e}_r = \theta_b^a(r), \quad (53)$$

что легко проверяется сравнением уравнения (22) с $\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}}^a$ и уравнения (13) с $\mathbf{b} = \mathbf{b}^a$ после умножения на $\mathbf{e}_r$ и усреднения по ϕ .

В результате указанного выбора в правой части уравнения (49) следует сохранить только первое слагаемое $\mathcal{F}_{\text{ferro}}[\tilde{\mathbf{m}}, \mathbf{B}^a]$. Поскольку $\tilde{\mathbf{m}}$ является центрально-симметричной функцией, то интегрирование в указанном слагаемом по углу ϕ позволяет заменить внешнее магнитное поле $\mathbf{B}^a$ на его усреднённое по углу значение $\bar{\mathbf{B}}^a$ (см. уравнение (43)). В итоге явная формула для полной свободной энергии в линейном приближении по $\gamma \ll 1$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_{\text{ferro}}[\mathbf{m}, \mathbf{B}^a]}{2\pi d_F A} &\approx \frac{\mathcal{F}_{\text{ferro}}[\tilde{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{B}}^a]}{2\pi d_F A} = \frac{\mathcal{F}_{\text{ferro}}[\mathbf{m}_b, \mathbf{B}]}{2\pi d_F A} + \\ &+ \int_0^\infty \frac{dr}{r} \left\{ \left(\frac{\ell_w^2}{r^2} + 1 \right) \sin^2 \bar{\theta} + 2\epsilon \left(\ell_w \partial_r \bar{\theta} + \frac{\sin 2\bar{\theta}}{2r/\ell_w} \right) + \right. \\ &\left. + \ell_w^2 (\partial_r \bar{\theta})^2 - 2\gamma \left[\bar{b}_r^a \sin \bar{\theta} - 2\bar{b}_z^a \sin^2 \left(\frac{\bar{\theta}}{2} \right) \right] \right\}. \quad (54) \end{aligned}$$

Здесь выражение $\mathcal{F}_{\text{ferro}}[\mathbf{m}_b, \mathbf{B}]$ представляет собой свободную энергию конфигурации "без скирмиона", которая не зависит от каких-либо параметров скирмиона, таких как радиус R , эффективная ширина стенки δ или положение $\mathbf{a}$. Поэтому в процессе минимизации её можно отбросить.

Минимизируя полную свободную энергию, определяемую уравнением (54), относительно скирмионного угла $\bar{\theta}(r)$, получаем УЭЛ,

$$\begin{aligned} \frac{\ell_w^2}{r} \partial_r (r \partial_r \bar{\theta}) - \frac{\ell_w^2 + r^2}{2r^2} \sin(2\bar{\theta}) + 2\epsilon \frac{\sin^2 \bar{\theta}}{r/\ell_w} = \\ = \gamma (\bar{b}_z^a \sin \bar{\theta} - \bar{b}_r^a \cos \bar{\theta}), \quad (55) \end{aligned}$$

которое аналогично уравнению (32) для соосного скирмиона, но с $\bar{b}_{r/z}^a$ вместо $b_{r/z}$. Это уравнение должно сопровождаться соответствующими граничными условиями, аналогичными уравнениям (7) с соответствующим смыслом,

$$\bar{\theta}(r \rightarrow \infty) = 0, \quad \bar{\theta}(r = 0) = \chi\pi. \quad (56)$$

Напомним, что точное решение УЭЛ (55) может быть эффективно приближено с помощью анзаца (44) так же, как это описано в разделе 3.2 для соосного скирмиона, при условии замены $\mathbf{b}$ на $\bar{\mathbf{b}}^a$.

Важно указать, что выражение для свободной энергии (54) может быть формально минимизировано не только относительно $\bar{\theta}$, но и относительно положения $\mathbf{a}$ скирмиона. Однако можно показать, что найденное при такой процедуре $\mathbf{a}$ определяется лишь в нулевом порядке по малому параметру γ , подробности можно найти в статье [44]. Дело в том, что положение скирмиона очень чувствительно не только к размеру скирмиона, который определяется параметрами R и δ , но и к деформации его формы вследствие влияния магнитного поля, которая содержится как в $\bar{\theta}$, так и в $\tilde{\mathbf{m}}$. Для того чтобы корректно учесть это влияние и определить $\mathbf{a}$ в следующем порядке, нужно вычислить свободную энергию до второго порядка по $\gamma \ll 1$, что и делается в следующем разделе.

4.1.3. Приближение второго порядка. Для корректного определения зависимости положения скирмиона $\mathbf{a}$ от эффективной силы $\gamma \ll 1$ магнитного поля необходимо вычислить полную энергию $\mathcal{F}_{\text{ferro}}[\mathbf{m}, \mathbf{B}^a]$ до второго порядка по γ , а затем минимизировать её относительно

а. Для этого нужно продлить разложение $\mathbf{m}$, включив в него члены второго порядка по γ . Формально впишем в уравнение (45) слагаемое вида $\gamma^2 \lambda$, где λ — произвольная вектор-функция, длина которой имеет порядок γ^0 , а затем нормируем $\mathbf{m}$ на единицу. В результате с точностью до слагаемых порядка γ^2 выразим разложение в виде

$$\mathbf{m} \approx \bar{\mathbf{m}} + \gamma \tilde{\mathbf{m}} - \frac{\gamma^2 \bar{\mathbf{m}} \tilde{\mathbf{m}}^2}{2} + \gamma^2 [\bar{\mathbf{m}} \times \lambda \times \bar{\mathbf{m}}]. \quad (57)$$

Подставив эту форму $\mathbf{m}$ в уравнение (10), получаем следующее выражение для полной энергии:

$$\mathcal{F}_{\text{ferro}}[\mathbf{m}, \mathbf{B}^a] \approx \mathcal{F}_{\text{ferro}}[\bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{B}}^a] + \mathcal{F}^{(2)}[\bar{\mathbf{m}}, \tilde{\mathbf{m}}, \mathbf{a}], \quad (58)$$

где первый член имеет значение, определённое в уравнении (54), а второе слагаемое имеет вид

$$\mathcal{F}^{(2)}[\bar{\mathbf{m}}, \tilde{\mathbf{m}}, \mathbf{a}] = \gamma^2 \mathcal{F}'_{\text{ferro}}[\tilde{\mathbf{m}}, \mathbf{B}^a] - \gamma^2 \mathcal{F}_{\text{magn}}^{(1)}\left[\bar{\mathbf{m}}, \frac{\bar{\mathbf{m}} \tilde{\mathbf{m}}^2}{2}\right]. \quad (59)$$

В этом уравнении штрих над первым слагаемым указывает на то, что при вычислении $\mathcal{F}_{\text{magn}}$ согласно уравнению (1) в формуле полной свободной энергии (10) в подынтегральном выражении исключается постоянный член, равный K .

Среди вкладов порядка γ^3 и старше, отброшенных при выводе уравнения (59), есть один, на который следует обратить отдельное внимание:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^2 \mathcal{F}_{\text{magn}}^{(1)}\{\bar{\mathbf{m}}, [\bar{\mathbf{m}} \times \lambda \times \bar{\mathbf{m}}]\}}{2\pi d_F A} &= 2\gamma^2 \int \frac{dr}{\ell_w} [\lambda \times \bar{\mathbf{m}}]_{\phi} \times \\ &\times \left[\frac{\ell_w^2}{r} \partial_r(r \partial_r \bar{\theta}) - \frac{\ell_w^2 + r^2}{2r^2} \sin(2\bar{\theta}) + 2\epsilon \frac{\sin^2 \bar{\theta}}{r/\ell_w} \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

Хотя на первый взгляд может показаться, что этот член имеет порядок γ^2 , выражение в квадратных скобках на самом деле имеет порядок γ , поскольку представляет собой левую часть уравнения (55). Следовательно, данный член имеет порядок γ^3 и им можно пренебречь. Таким образом, для вычисления свободной энергии с точностью до γ^2 определение неизвестной векторной функции λ не требуется.

Важно отметить, что $\bar{\theta}$, который входит в $\mathcal{F}_{\text{ferro}}[\bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{B}}^a]$ в уравнении (58), следует рассчитывать только до первого порядка, как указано в уравнениях (44) и (55). Любая поправка к $\bar{\theta}$ порядка γ^2 может рассматриваться как изменение λ в уравнении (57), следовательно, будет вносить вклад в свободную энергию порядка γ^3 и может быть опущена.

Теперь, используя уравнение (48) для $\tilde{\mathbf{m}}$, можно проинтегрировать по полярному углу ϕ в уравнении (59) и получить явный вид для $\mathcal{F}^{(2)}$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}^{(2)}[\bar{\mathbf{m}}, \tilde{\mathbf{m}}, \mathbf{a}]}{2\pi d_F A} &= \gamma^2 \int \frac{dr}{\ell_w^2} \left\{ 2\tilde{b}_r^a \sin^2 \bar{\theta} + \tilde{b}_z^a \sin(2\bar{\theta}) + \right. \\ &+ [\tilde{\mu}_r^a \sin^2 \bar{\theta} - \tilde{\mu}_{\phi}^a] \frac{\ell_w^2 (\partial_r \bar{\theta})^2}{2r^2} - \frac{\tilde{\mu}_r^a}{2r^2} (\ell_w^2 + r^2) \sin^2(2\bar{\theta}) - \\ &\left. - 2\epsilon \left[\tilde{\mu}_{\phi}^a \ell_w \partial_r \bar{\theta} + \frac{\tilde{\mu}_{r \times \phi}^a}{2r/\ell_w} \sin(2\bar{\theta}) + \frac{\tilde{\mu}_r^a}{4r/\ell_w} \sin(4\bar{\theta}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (61)$$

где введены некоторые функции, возникающие в результате действия внешнего магнитного поля и содержащие положение $\mathbf{a}$ в качестве параметра,

$$\begin{aligned} \tilde{b}_r^a(r) &= \left\langle \mu_r^a \left(b_r^a + \frac{\ell_w^2 \Delta \mu_r^a}{2} \right) \right\rangle_{\phi} - \left(\frac{\ell_w}{r} \right)^2 \tilde{\mu}_{r \times \phi}^a + \\ &+ \left[\left(\frac{\ell_w}{r} \right)^2 - 1 \right] \frac{\tilde{\mu}_r^a + \tilde{\mu}_{\phi}^a}{2}, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_z^a(r) &= \langle \mu_r^a b_z^a \rangle_{\phi}, \quad \tilde{\mu}_r^a(r) = \langle (\mu_r^a)^2 \rangle_{\phi}, \quad \tilde{\mu}_{\phi}^a(r) = \langle (\mu_{\phi}^a)^2 \rangle_{\phi}, \\ \tilde{\mu}_{r \times \phi}^a(r) &= \tilde{\mu}_r^a + \tilde{\mu}_{\phi}^a + \langle \mu_r^a \partial_{\phi} \mu_{\phi}^a - \mu_{\phi}^a \partial_{\phi} \mu_r^a \rangle_{\phi}. \end{aligned}$$

4.2. Оптимальные положения скирмиона и вихря

В этом разделе представлены результаты применения описанного ранее вариационного подхода к изучению стабильных эксцентрических конфигураций скирмиона типа Нееля, находящегося под действием поля рассеяния от вихря Пирла. Также проводится сравнение с результатами микромагнитного моделирования.

Обратим внимание, что из полученных результатов следует, что эксцентрические конфигурации могут быть реализованы только для скирмиона положительной киральности, $\chi = +1$. Для почти свободного скирмиона ($\gamma \rightarrow 0$) такое явление было предсказано в работе [41]. Приведём тут качественное объяснение. В случае $\gamma \rightarrow 0$ форма скирмиона не зависит от расстояния a до центра вихря и свободную энергию скирмиона с киральностью χ можно представить в виде $\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ - \chi \mathcal{F}_-$, где $\mathcal{F}_{\pm}$ — монотонные функции этого расстояния. Когда $\chi = -1$, функция $\mathcal{F}(a)$ монотонна, и единственный минимум возможен при $a = 0$. В противоположном случае $\chi = +1$ вычитаются две монотонные функции, что может дать функцию с несколькими минимумами. Качественно ситуация сохраняется и для произвольного γ , хотя размер и форма скирмиона начинают зависеть от расстояния.

Чтобы минимизировать общую свободную энергию (58) с соответствующими вкладами (54) и (61), необходимо предварительно вычислить функции, связанные со сдвинутым магнитным полем вихря $\mathbf{B}^a(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_V(\mathbf{r}_a)$, где $\mathbf{r}_a = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ (см. уравнение (14) и пояснения о происхождении сдвига в начале раздела 4.1.1). В предположениях (18) некоторые из этих функций поддаются аналитическому вычислению, в частности,

$$\mathbf{b}^a = -\frac{\mathbf{e}_{\mathbf{r}_a} + \mathbf{e}_z}{r_a/\ell_w}, \quad \mu_{\mathbf{b}}^a = \theta_{\mathbf{b}}(r_a) \mathbf{e}_{\mathbf{r}_a}, \quad (63)$$

$$\bar{\mathbf{b}}^a = \bar{b}_r^a(r) \mathbf{e}_r + \bar{b}_z^a(r) \mathbf{e}_z, \quad \mu_{\bar{\mathbf{b}}}^a = \theta_{\bar{\mathbf{b}}}^a(r) \mathbf{e}_r, \quad (64)$$

$$\bar{b}_r^a(r) = -\frac{\Theta(r-a)}{r/\ell_w}, \quad \bar{b}_z^a(r) = -\frac{K[4ar/(a+r)^2]}{\pi(a+r)/2\ell_w}, \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \theta_{\bar{\mathbf{b}}}^a(r) &= \left[I_0\left(\frac{a}{\ell_w}\right) K_1\left(\frac{r}{\ell_w}\right) - \frac{\ell_w}{r} \right] \Theta(r-a) - \\ &- K_0\left(\frac{a}{\ell_w}\right) I_1\left(\frac{r}{\ell_w}\right) \Theta(a-r), \end{aligned} \quad (66)$$

а также см. уравнения (19) и (25). Здесь $\mathbf{e}_{\mathbf{r}_a} = \mathbf{r}_a/r_a$ — единичный вектор в радиальном направлении относительно смещённого центра пирловского вихря. Функции $I_n(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого

рода, $K[z]$ — полный эллиптический интеграл первого рода, а $\Theta(z)$ — функция Хевисайда. Остальные функции, $b_{r/z}^a$, $\tilde{\mu}_{r/\phi}^a$ и $\tilde{\mu}_{r \times \phi}^a$ рассчитываются численно согласно уравнению (62). Затем полную свободную энергию можно минимизировать, используя форму, приведённую в уравнении (58), с явными выражениями из уравнений (54) и (61), подставляя θ согласно уравнению (44).

В силу радиальной симметрии вихря Пирла положение скирмиона $\mathbf{a}$ входит в полную свободную энергию только как его величина a , т.е. расстояние между центрами скирмиона и вихря. Таким образом, минимизация осуществляется по трём параметрам скирмиона: радиусу R , эффективной ширине доменной стенки δ и расстоянию a до центра вихря Пирла. Стабильное расстояние $a = 0$ соответствует соосной конфигурации, которая обсуждалась в разделе 3 и работе [43]. Эксцентрические конфигурации скирмиона, где $a \neq 0$, описаны далее.

4.2.1. Радиус скирмиона и расстояние в эксцентрической конфигурации. На рисунке 6 представлены расстояние a (рис. 6а) между центрами скирмиона и вихря и радиус скирмиона R (рис. 6б) в устойчивых эксцентрических конфигурациях в зависимости от эффективной силы вихря γ для различных значений параметра ВДМ ϵ . Сплошные кривые являются результатом минимизации уравнения (58) с использованием уравнения (44), а кружки получены из микромагнитного моделирования (см. раздел 2.3).

Все кривые начинаются с пологого наклона при малых γ и завершаются резким увеличением радиуса R и резким уменьшением расстояния a . Такое поведение соответствует зависимости типа квадратного корня вблизи определённого критического значения γ_{cr}^+ , т.е.

$$R(\gamma_{\text{cr}}^+) - R(\gamma) \propto a(\gamma) - a(\gamma_{\text{cr}}^+) \propto \sqrt{\gamma_{\text{cr}}^+ - \gamma}, \quad (67)$$

при $|\gamma_{\text{cr}}^+ - \gamma| \ll \gamma_{\text{cr}}^+$. Как было указано в разделе 4.1, корректное определение расстояния a существенно зависит от вкладов второго порядка по малому γ (см. (61)). Точность расчёта указанных слагаемых отражается в хорошем соответствии кривых $a(\gamma)$ на рис. 6а, хотя некоторое количественное отклонение можно наблюдать вблизи γ_{cr}^+ . Это связано с тем, что формально значения параметров R , δ и a определены лишь с линейной точностью по γ . Однако рис. 6 показывает, что даже вблизи γ_{cr}^+ качественное (и даже количественное при $\gamma \ll 1$, см. кривые для $\epsilon > 0,4$) поведение кривых, указанное в уравнении (67), воспроизводится очень хорошо. Кроме того, само расстояние a оказывается чувствительным даже к малым изменениям в свободной энергии, поэтому какие-то неучтённые эффекты, дающие вклад, сравнимый с γ^2 , могут влиять на экспериментально наблюдаемое расстояние между скирмионом и вихрем.

Обратим внимание, что на рис. 6 можно наблюдать интересную особенность: значения радиуса скирмиона и расстояния между центрами скирмиона и вихря сближаются по мере приближения γ к γ_{cr}^+ . Физически такую особенность можно понять следующим образом. По мере увеличения эффективной силы вихря γ радиус скирмиона R увеличивается за счёт влияния магнитного поля рассеяния. Чем больше радиус, тем меньшим должно быть расстояние a , что легко проверить, вычислив энергию Зеемана (9) как функцию радиуса для свободного скирмиона. Когда R значительно меньше a , это означает, что скирмион контактирует с центром вихря

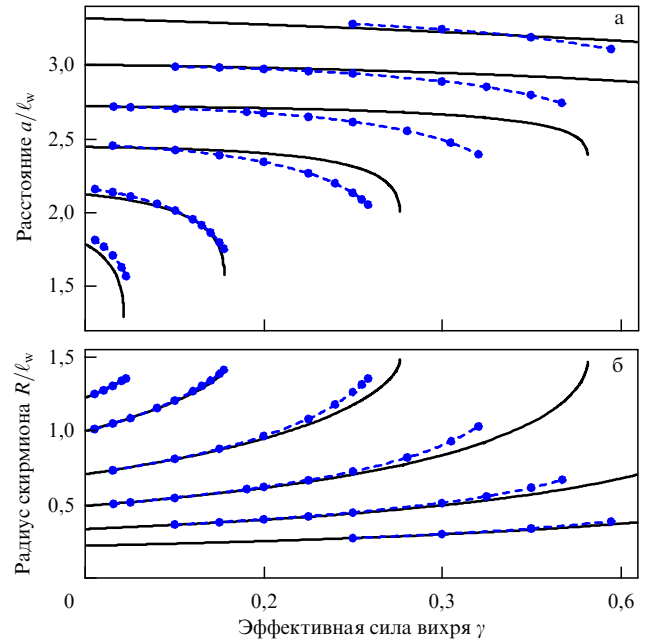


Рис. 6. Зависимость расстояния a/ℓ_w (а) между центрами скирмиона и вихря и радиуса скирмиона R/ℓ_w (б) от эффективной силы вихря γ , полученная минимизацией полной свободной энергии (58) с анзацем для θ (44). Различные кривые соответствуют различным параметрам ВДМ $\epsilon = 0,25; 0,3; 0,35; 0,4; 0,45; 0,48$ (сверху вниз для рис. а и снизу вверх для рис. б). Кружками, соединёнными штриховыми линиями, отмечены аналогичные зависимости, полученные с помощью микромагнитного моделирования.

только своим "хвостом", где намагниченность примерно вертикальна, $\mathbf{m} = \mathbf{e}_z$. Когда же радиус R скирмиона близок по величине к расстоянию a , доменная стенка скирмиона, где намагниченность значительно отклоняется от вертикали, начинает перекрываться с центром вихря. Такое состояние оказывается энергетически невыгодным, и скирмион занимает положение непосредственно над центром вихря, т.е. эксцентрическая конфигурация меняется на соосную.

4.2.2. Зависимость свободной энергии от расстояния: несколько минимумов. Рассмотрим зависимость свободной энергии от расстояния a подробно, чтобы выяснить, какая конфигурация более выгодна при конкретных значениях параметров ϵ и γ : эксцентрическая или соосная. Для этого введём функцию $\mathfrak{F}(a)$ в виде

$$\mathfrak{F}(a) \equiv \min_{R, \delta} \frac{\mathcal{F}_{\text{ferro}}[\mathbf{m}, \mathbf{B}^a]}{2\pi d_F A}, \quad (68)$$

которая представляет собой полную свободную энергию $\mathcal{F}_{\text{ferro}}[\mathbf{m}, \mathbf{B}^a]$ из уравнения (58) с $\bar{\theta}$ из уравнения (44), нормированную на $2\pi d_F A$ и минимизированную по размерным параметрам скирмиона, а именно радиусу R и эффективной ширине доменной стенки δ . Минимум $\mathfrak{F}(a)$ в конкретной точке $a = a_{\text{min}}$ указывает на возможную стабильную конфигурацию скирмиона в поле рассеяния вихря Пирла.

Рисунок 7 иллюстрирует изменение $\mathfrak{F}(a)$ для параметра ВДМ $\epsilon = 0,45$ для нескольких значений γ . Они представляют собой характерные типы зависимостей, классификация которых основывается на трёх критических значениях, $\gamma_{\text{cr}}^-(\epsilon)$, $\gamma_{\text{cr}}(\epsilon)$ и $\gamma_{\text{cr}}^+(\epsilon)$, и описана далее.

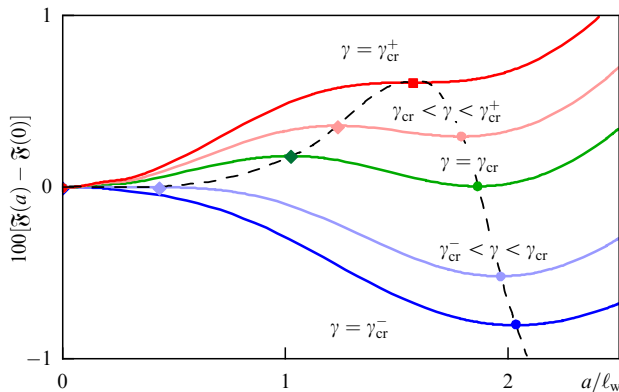


Рис. 7. График функции $100[\mathcal{F}(a) - \mathcal{F}(0)]$, полученной из полной свободной энергии (68), для параметра ВДМ $\epsilon = 0,45$ и нескольких значений эффективной силы вихря γ : $\gamma_{cr}^- \approx 0,106$; $0,119$; $\gamma_{cr} \approx 0,138$; $0,147$; $\gamma_{cr}^+ \approx 0,156$ (снизу вверх). Кружки, ромбы и квадраты обозначают минимумы, максимумы и точки перегиба соответственно. Штриховой кривой отмечены положения минимумов и максимумов при непрерывном изменении γ . Все построенные функции имеют монотонный рост в области $a > 2,5\ell_w$ вне видимых пределов.

При $\epsilon < \epsilon_{cr}^- \approx 0,488$ и $\gamma < \gamma_{cr}^-(\epsilon)$ функция $\mathcal{F}(a)$ имеет единственный минимум при $a = a_{min} > 0$. Это указывает на то, что единственной возможной стабильной конфигурацией скирмион – вихрь является эксцентрическая.

Когда $\gamma > \gamma_{cr}^+(\epsilon)$ или $\epsilon > \epsilon_{cr}^+ \approx 0,493$, функция $\mathcal{F}(a)$ имеет единственный минимум при $a = 0$. Это означает, что соосная конфигурация скирмион – вихрь является единственно возможной.

В промежуточном режиме, когда $\gamma_{cr}^-(\epsilon) < \gamma < \gamma_{cr}^+(\epsilon)$, система может поддерживать как соосную, так и эксцентрическую конфигурацию скирмион – вихрь, поскольку функция $\mathcal{F}(a)$ имеет по меньшей мере два минимума: один при $a = 0$, а другой при $a = a_{min} > 0$. Тем не менее значения свободной энергии для этих конфигураций различаются, причём глобальный минимум наблюдается для соосной конфигурации, когда $\gamma_{cr}(\epsilon) < \gamma < \gamma_{cr}^+(\epsilon)$, и для эксцентрической конфигурации, когда $\gamma_{cr}^-(\epsilon) < \gamma < \gamma_{cr}(\epsilon)$.

Примечательно, что нет принципиального запрета на то, чтобы функция $\mathcal{F}(a)$ имела более двух минимумов. В частности, был обнаружен дополнительный локальный минимум при $a = a_{add} \sim 0,2\ell_w$. Однако для всех значений ϵ и γ этот минимум является лишь локальным и его малая глубина оказывается за пределами точности нашего второго приближения при $\gamma \ll 1$. Следовательно, вариационный аналитический подход сам по себе не может гарантировать существование подобной устойчивой конфигурации. Более того, микромагнитное моделирование не подтвердило наличие такой конфигурации.

Штриховая линия на рис. 7 отображает положение минимумов и максимумов при непрерывном изменении γ . Видно, что вблизи $\gamma \approx \gamma_{cr}^+$ положение минимума a_{min} быстро меняется с γ , сходясь с точкой максимума a_{max} в точке перегиба a_{in} именно при $\gamma = \gamma_{cr}^+$. Такое быстрое изменение приводит к резкому уменьшению (увеличению) расстояния a (радиуса R), как показано на рис. 6.

4.2.3. Фазовая диаграмма. Результаты раздела 4.2.2 представлены на фазовой диаграмме на плоскости (ϵ, γ) , показанной на рис. 8. На этой диаграмме обозначены четыре отдельные фазы для конфигураций скирмион –

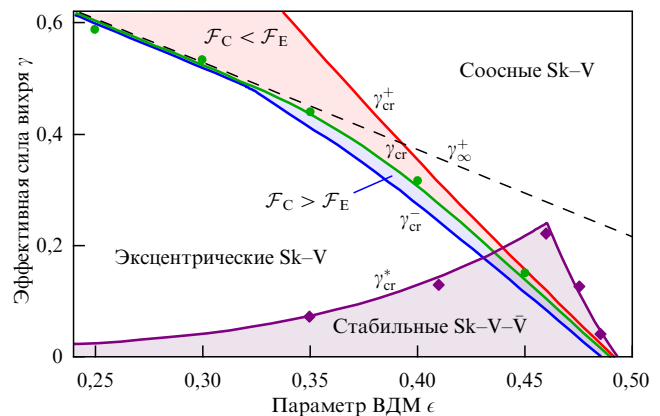


Рис. 8. Фазовая диаграмма, построенная по полной свободной энергии из уравнения (58) с анзацем для $\bar{\theta}$ (44). Синей, зелёной и красной сплошными монотонными кривыми (снизу вверх) показаны $\gamma_{cr}^-(\epsilon)$, $\gamma_{cr}(\epsilon)$ и $\gamma_{cr}^+(\epsilon)$ соответственно, очерчивающие разделение фаз для конфигураций скирмион – вихрь. Заштрихованные области между ними представляют фазы, в которых могут сосуществовать соосные и эксцентрические состояния одновременно. Чёрная штриховая прямая обозначает $\gamma_{\infty}^+(\epsilon)$, указывающая на условие, при котором радиус соосного скирмиона сравним с длиной Пирла (см. уравнение (36)). Фиолетовой сплошной немонотонной кривой показана $\gamma_{cr}^*(\epsilon)$, очерчивающая фазу (заштрихованная область ниже кривой) существования стабильных конфигураций скирмион – вихрь – антивихрь (см. раздел 5). Кружки и ромбы отвечают значениям γ_{cr} и γ_{cr}^* , полученным в результате микромагнитного моделирования.

вихрь (обозначено сплошными монотонными линиями, соответствующими критическим значениям $\gamma_{cr}^-(\epsilon)$, $\gamma_{cr}(\epsilon)$ и $\gamma_{cr}^+(\epsilon)$), а также фазы для стабильных конфигураций скирмион – вихрь – антивихрь (обозначено сплошной немонотонной линией), о которых более детально речь пойдёт в разделе 5. Две незакрашенные области обозначают фазы, где возможны только эксцентрические, $\gamma < \gamma_{cr}^-(\epsilon)$, либо только соосные, $\gamma > \gamma_{cr}^+(\epsilon)$, конфигурации. Сплошные закрашенные области между линиями $\gamma_{cr}^-(\epsilon)$, $\gamma_{cr}(\epsilon)$ и $\gamma_{cr}^+(\epsilon)$ обозначают фазы, в которых как эксцентрическая, так и соосная конфигурации теоретически возможны в пределах одной и той же гетероструктуры, поскольку свободная энергия имеет два минимума относительно расстояния a . На практике обе конфигурации наблюдались при микромагнитном моделировании, когда $\gamma \approx \gamma_{cr}$, как описано в разделе 2.3 и проиллюстрировано на рис. 2.

Заметим, что кривые $\gamma_{cr}^-(\epsilon)$ и $\gamma_{cr}(\epsilon)$ приближаются к асимптотической линии $\gamma_{\infty}^+(\epsilon) = 1 - \pi\epsilon/2$ при $\epsilon \lesssim 0,3$. Когда эффективная сила вихря γ приближается к критическому порогу γ_{∞}^+ , радиус R коаксиального скирмиона существенно увеличивается, становясь сравнимым с длиной Пирла λ , которая значительно превышает ℓ_w (см. подробности в разделе 3.3 и в работе [43]). Поскольку свободная энергия такого увеличенного соосного скирмиона оказывается заметно ниже, чем у любой эксцентрической конфигурации, то значение γ_{∞}^+ оказывается всегда больше, чем $\gamma_{cr}^-(\epsilon)$ и $\gamma_{cr}(\epsilon)$, которые характеризуют этапы перехода между соосными и эксцентрическими конфигурациями.

Зелёные кружки на рис. 8 представляют значения $\gamma_{cr}(\epsilon)$, определённые на основе микромагнитного моделирования, что подтверждает аналитические предсказания с высокой степенью согласия.

5. Стабилизация пары вихрь – антивихрь с помощью скирмиона

В этом разделе мы обсудим более сложную конфигурацию, когда скирмион находится в поле пары вихрей Пирла, магнитное поле которых направлено в противоположные стороны. Тот из вихрей, который определяется уравнением (14), будем называть вихрем, а второй — антивихрем. Для определения магнитного поля антивихря нужно будет изменить знак в уравнении (14) на противоположный,

$$\mathbf{B}_{\bar{V}} = -\phi_0 \operatorname{sgn}(z) \nabla \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{\exp(-q|z| + i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{a}}))}{q(1 + 2q\lambda)}. \quad (69)$$

Кроме того, в последнем выражении учтено, что центр антивихря находится в точке $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{a}}$, тогда как центр вихря предполагается в начале координат, $\mathbf{r} = 0$ (ср. уравнение (14)).

Отметим, что взаимодействие скирмиона с одиночным антивихрем оказывается менее интересно, чем скирмиона с вихрем и скирмиона с парой вихрь – антивихрь. Дело в том, что скирмион для широкого диапазона параметров будет отталкиваться от антивихря. Действительно, рассмотрим очень малые γ , когда форму скирмиона можно считать невозмущённой. Как было указано в разделе 4.2, в этом случае энергия скирмиона как функция a будет монотонной при отрицательной киральности, $\chi = -1$, и может быть немонотонной для положительной киральности, $\chi = +1$. В первом случае энергия будет монотонно убывать и скирмион для любого a будет отталкиваться от антивихря, следовательно, стационарное состояние возникать не будет. Во втором случае скирмион будет притягиваться к антивихрю только тогда, когда их центры расположены достаточно близко (подробнее см. далее в разделе 5.2 и на рис. 9), иначе он будет также отталкиваться. Более того, только для $\epsilon < \epsilon_{\text{anti}} \approx 0,387$ минимум энергии при $a = 0$ может быть ниже, чем энергия при $a \rightarrow \infty$. В данной статье мы не будем подробно исследовать указанные соосные состояния скирмиона и антивихря, а перейдём к более интересным конфигурациям скирмион – вихрь – антивихрь.

В целом задача определения стабильных конфигураций системы скирмион – вихрь – антивихрь вполне аналогична той, что решена в предыдущем разделе. Однако отличие заключается в том, что имеется дополнительный параметр — расстояние $\bar{a} = |\bar{\mathbf{a}}|$ между центрами вихря и антивихря, изменение которого не только меняет энергию ферромагнетика, но и энергию сверхпроводника. Поэтому сначала опишем решение более простой задачи: определим и проанализируем энергию состояния "без скирмиона", предполагая заданным расстояние $\bar{a}$. А затем, опираясь на полученный результат, воспользуемся вариационным подходом, который позволит определить стабильные конфигурации скирмион – вихрь – антивихрь при условии изменения расстояний между всеми объектами конфигурации.

5.1. Конфигурация "без скирмиона" в магнитном поле пары вихрь – антивихрь

Начнём рассмотрение со случая, когда расстояние между центрами вихрей сравнимо с магнитной длиной и мало в сравнении с длиной Пирла,

$$\xi \ll l_w \sim \bar{a} \ll \lambda. \quad (70)$$

В последнем условии также явно указано, что магнитная длина l_w велика по сравнению с длиной когерентности в сверхпроводнике. В этом случае можно считать, что сверхпроводящие токи и магнитное поле пары вихрь – антивихрь можно представить в виде суперпозиции двух отдельных вихрей.

Свободная энергия гетероструктуры сверхпроводник – ферромагнетик, содержащей такую пару вихрь – антивихрь, состоит из суммы энергий сверхпроводника и ферромагнетика:

$$\mathcal{F}_{\text{tot}}[\mathbf{m}, \bar{\mathbf{a}}] = \mathcal{F}_{\text{super}}[\bar{\mathbf{a}}] + \mathcal{F}_{\text{ferro}}[\mathbf{m}, \mathbf{B}_V + \mathbf{B}_{\bar{V}}]. \quad (71)$$

Предполагая, что эффективная сила вихрей γ мала (см. уравнение (11)) и намагниченность $\mathbf{m}$ лишь слегка отклоняется от вертикального направления (ср. уравнение (12)),

$$\mathbf{m} = \mathbf{e}_z + \gamma(\boldsymbol{\mu}_b - \boldsymbol{\mu}_{b^a}), \quad (72)$$

можно вычислить свободную энергию ферромагнетика в главном приближении по малому параметру γ :

$$\frac{\mathcal{F}_{\text{ferro}}[\mathbf{m}, \mathbf{B}_V + \mathbf{B}_{\bar{V}}]}{2\pi d_F A} = -\gamma^2 \int \frac{d^2 \mathbf{r}}{2\pi \ell_w^2} (\boldsymbol{\mu}_b - \boldsymbol{\mu}_{b^a})(\mathbf{b} - \mathbf{b}^a). \quad (73)$$

Здесь $\mathbf{b} = \mathbf{B}_V/B_0$ и $\mathbf{b}^a = -\mathbf{B}_{\bar{V}}/B_0$ обозначают нормированное поле вихря и антивихря соответственно, а $\boldsymbol{\mu}_b$ и $\boldsymbol{\mu}_{b^a}$ — соответствующие векторы, характеризующие отклонение намагниченности в магнитном поле (см. уравнения (20), (21), (63)). Отметим, что в выражение (73) вклад даёт не только энергия Зеемана, но и все остальные члены в энергии, уменьшая вклад от энергии Зеемана ровно в два раза. В условиях (70) можно воспользоваться приближениями (19), (25) и (65) и получить явную зависимость энергии от $\bar{a}$,

$$\frac{\mathcal{F}_{\text{ferro}}[\mathbf{m}, \mathbf{B}_V + \mathbf{B}_{\bar{V}}]}{2\pi d_F A} = -2\gamma^2 \left[K_0 \left(\frac{\bar{a}}{\ell_w} \right) + \ln \frac{\bar{a}}{2 \exp(-\gamma_E) \ell_w} \right], \quad (74)$$

где $\gamma_E \approx 0,577$ — постоянная Эйлера.

Энергия взаимодействия сверхпроводящих токов вихря и антивихря Пирла, расположенных на расстоянии $\bar{a}$, была посчитана в статье [59]. Когда расстояние мало по сравнению с длиной Пирла, эта энергия равна

$$\mathcal{F}_{\text{super}}[\bar{\mathbf{a}}] = \frac{\phi_0^2}{8\pi^2 \lambda} \ln \frac{\bar{a}}{\xi}, \quad \xi \ll \bar{a} \ll \lambda. \quad (75)$$

Нормируя её на ту же величину, что и магнитную энергию, получаем:

$$\frac{\mathcal{F}_{\text{super}}[\bar{\mathbf{a}}]}{2\pi d_F A} = \beta \gamma^2 \ln \frac{\bar{a}}{\xi}, \quad (76)$$

где безразмерный параметр β выражается через материальные параметры гетероструктуры,

$$\beta = \frac{\phi_0}{2\pi^2 \gamma d_F \ell_w M_s} = \frac{4A\lambda}{\pi d_F \ell_w^2 M_s^2}, \quad (77)$$

и оказывается малым для экспериментально релевантных значений [18–20].

Сравнивая выражения (74) и (76), можно сделать вывод, что при $\beta \ll 1$ и при условии (70) можно пренебречь вкладом в энергию со стороны сверхпроводника и при изучении зависимости полной энергии системы от расстояния можно пользоваться только энергией ферромаг-

нетика. Укажем на то, что энергия $\mathcal{F}_{\text{ferro}}$ (см. уравнение (74)) является убывающей функцией расстояния $\bar{a}$, что предполагает отталкивание вихря и антивихря. Физический смысл этого отталкивания заключается в том, что магнитное поле вихрей, находящихся на расстоянии, сравнимом с магнитной длиной, создаёт в ферромагнетике конфигурацию намагниченности, которая является энергетически невыгодной.

Обратим внимание, что сверхпроводящие вихрь и антивихрь будут притягиваться, если расстояние $\bar{a}$ не удовлетворяет условию (70). Действительно, для $\bar{a} \ll \ell_w$ энергия ферромагнетика (74) становится малой и может стать сравнимой или меньше энергии сверхпроводящих токов (76). В этом случае вихрь и антивихрь будут притягиваться до взаимного уничтожения, аналогично тому как было бы без ферромагнетика.

В другом предельном случае, $\bar{a} \gg \lambda$, выражение для энергии сверхпроводящих токов следует записать в виде [59]

$$\frac{\mathcal{F}_{\text{super}}}{2\pi d_F A} = C_{\text{super}} - 2\beta\gamma^2 \frac{\lambda}{\bar{a}}, \quad (78)$$

где C_{super} — константа, не зависящая от расстояния $\bar{a}$. Для больших расстояний, $\bar{a} \gg \lambda$, энергия ферромагнетика (73) должна быть рассчитана с помощью выражений (17) и (24),

$$\frac{\mathcal{F}_{\text{ferro}}}{2\pi d_F A} = C_{\text{ferro}} + \frac{32\gamma^2 \lambda^3}{\bar{a}^3}, \quad (79)$$

где C_{ferro} — константа, не зависящая от расстояния $\bar{a}$. Минимизируя полную энергию системы, можно определить, что вихрь и антивихрь могут находиться в стационарном состоянии на расстоянии $\bar{a}_{\min} = 4\lambda/\sqrt{\beta/3}$, которое велико по сравнению с длиной Пирла, $\bar{a}_{\min} \gg \lambda$.

5.2. Вариационный подход для конфигурации скирмион – вихрь – антивихрь

Рассмотрим теперь конфигурацию, состоящую из пары вихрь – антивихрь и скирмиона положительной киральности, и будем предполагать параметры системы такими, что данная конфигурация устойчива для расстояний между центрами объектов, сравнимых с ℓ_w . Как мы увидим далее, существует достаточно широкий диапазон параметров, когда это выполнено (см. рис. 4). На рисунке 9 изображены зависимости нормированной свободной энергии $[\mathcal{F}(a) - \mathcal{F}(a=0)]/(2\pi d_F A \gamma^2)$ для трёх попарных конфигураций: вихрь – антивихрь (сплошная кривая, обозначена $V-\bar{V}$), скирмион – вихрь (штриховая кривая, обозначена $Sk-V$) и скирмион – антивихрь (штрихпунктирная кривая, обозначена $Sk-\bar{V}$), где a обозначает расстояние между центрами соответствующих объектов. Из представленных зависимостей видно, что вихрь и антивихрь отталкиваются, как было показано в предыдущем разделе. Скирмион стремится разместиться на некотором расстоянии от центра вихря (см. раздел 4.2) и соосно с антивихрем. Также для других параметров скирмион может стремиться расположиться строго над центром вихря и оттолкнуться от антивихря, но в таком случае конфигурация, очевидно, не будет устойчивой.

Поскольку в рассматриваемой конфигурации скирмион притягивает как вихрь, так и антивихрь, а вихрь и антивихрь отталкиваются, то центры всех трёх объектов будут располагаться на одной линии, при этом скирмион будет расположен в середине между двумя вихрями. Обозначим расстояния от центра скирмиона до центров

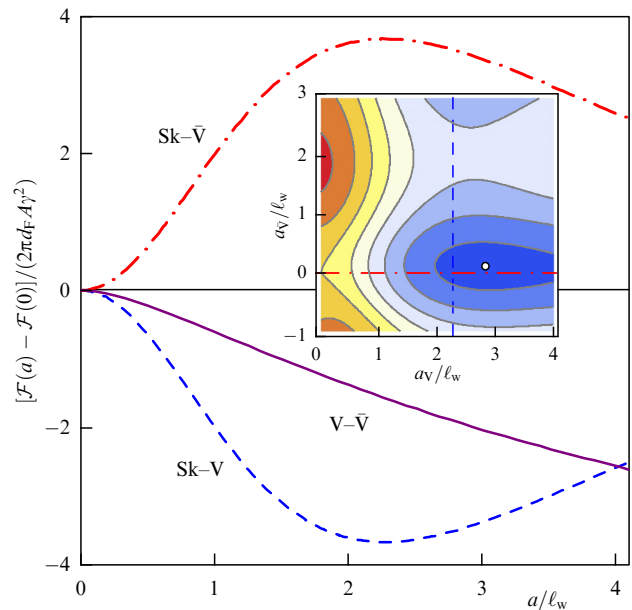


Рис. 9. Зависимость нормированной свободной энергии $\mathcal{F}$ в парных конфигурациях вихрь – антивихрь (сплошная кривая), скирмион – вихрь (штриховая кривая) и скирмион – антивихрь (штрихпунктирная кривая) от расстояния a между центрами объектов. На вставке: полная энергия (в произвольных единицах) конфигурации скирмион – вихрь – антивихрь как функция сдвигов a_V вихря и $a_{\bar{V}}$ антивихря относительно скирмиона. Вертикальные и горизонтальные прямые обозначают положения минимумов в парных конфигурациях, а точка — фактическое положение минимума. Параметры: $\epsilon = 0,41$, $\gamma = 0,1$.

вихря и антивихря через a_V и $a_{\bar{V}}$ соответственно и будем искать минимум свободной энергии как функции параметров двух данных расстояний, а также радиуса R и эффективной толщины доменной стенки δ скирмиона, следуя подходу, развитому в разделе 4.1. На вставке рис. 9 изображена (в произвольных единицах) полная энергия $\mathcal{F}$ такой конфигурации как функция сдвигов a_V вихря и $a_{\bar{V}}$ антивихря относительно скирмиона. Видно, что минимум функции, обозначенный белой точкой, достигается при значениях a_V и $a_{\bar{V}}$, отличных от минимумов в соответствующих парных конфигурациях скирмион – вихрь и скирмион – антивихрь (обозначены штриховой и штрихпунктирной прямыми соответственно). Далее проанализируем стабильные конфигурации скирмион – вихрь – антивихрь более детально.

5.3. Стабильные конфигурации

На рисунке 10 представлена зависимость расстояний a_V и $a_{\bar{V}}$ от центра скирмиона до центров вихря и антивихря, а также радиуса R скирмиона от γ для нескольких значений параметра ВДМ ϵ . Сплошные кривые получены с помощью вариационного подхода, а точки — результат микромагнитного моделирования. Можно выделить два различных режима, которые качественно можно описать следующим образом:

1. При $\epsilon < \epsilon_{\text{cr}}^* \approx 0,46$ вихрь удаляется от пары скирмион – антивихрь при увеличении γ .
2. При $\epsilon > \epsilon_{\text{cr}}^* \approx 0,46$ антивихрь удаляется от пары скирмион – вихрь при увеличении γ .

В указанных режимах при превышении некоторого критического значения $\gamma > \gamma_{\text{cr}}^*(\epsilon)$ вихрь (антивихрь) удаляется от пары скирмион – антивихрь (скирмион – вихрь)

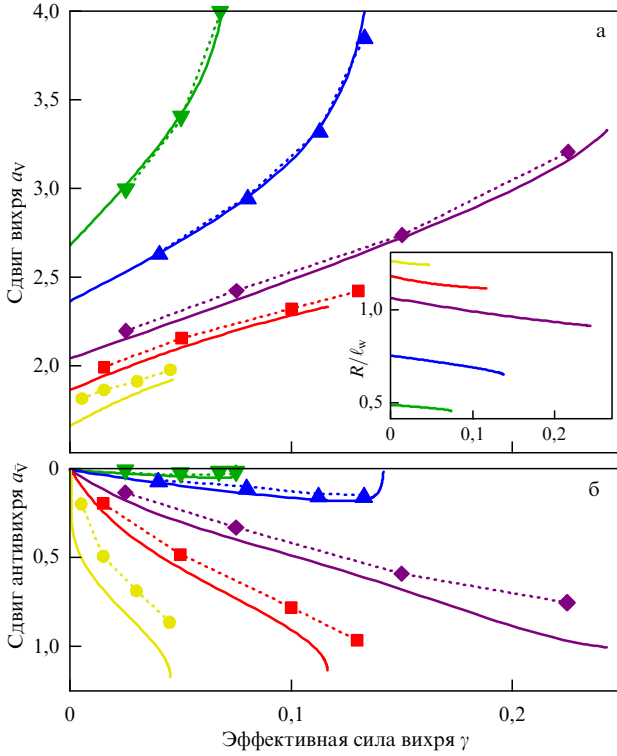


Рис. 10. Зависимости сдвига центров вихря a_V (а) и антивихря $a_{\bar{V}}$ (б) относительно центра скирмиона, а также радиуса R скирмиона (вставка) от эффективной силы вихря γ при нескольких значениях параметра ВДМ $\epsilon = 0,35; 0,41; 0,46; 0,475; 0,485$ (кривые сверху вниз на рис. а, б и снизу вверх на вставке). Сплошные кривые показывают результаты применения вариационного подхода, а точки извлечены из микромагнитного моделирования.

на расстояние $\bar{a}_{\min} = 4\lambda/\sqrt{\beta/3} \gg \lambda \gg \ell_w$ (см. раздел 5.2) и его влияние на скирмион фактически отсутствует. Но следует отметить качественное различие в этих режимах при $\gamma \approx \gamma_{cr}^*(\epsilon)$.

В первом режиме вихрь удаляется от пары скирмион – антивихрь постепенно, т.е. расстояние a_V может принимать произвольное промежуточное значение в зависимости от γ . Во втором режиме антивихрь удаляется от пары скирмион – вихрь в ограниченных пределах, т.е. расстояние $a_{\bar{V}}$ ограничено сверху величиной $a_{\bar{V},cr}$ порядка ℓ_w , что соответствует максимуму энергии как функции расстояния $a_{\bar{V}}$. Наличие такого максимума можно понять следующим образом. При малых γ , когда можно пренебречь изменением размера скирмиона, зависимость энергии от $a_{\bar{V}}$ входит только в две энергии: $\mathcal{F}_{\bar{V}-Sk}(a_{\bar{V}})$ и $\mathcal{F}_{V-\bar{V}}(a_V + a_{\bar{V}})$. Первая из указанных энергий имеет порядок γ и достигает максимума при некотором конечном значении расстояния $a_{\bar{V}}$, а вторая имеет порядок γ^2 и монотонно убывает с ростом $a_{\bar{V}}$ (см. рис. 9). Это означает, что их сумма также имеет максимум. При увеличении γ роль второго слагаемого становится более существенной и, кроме того, зависимость от $a_{\bar{V}}$ проявляется через изменение размера и формы скирмиона, однако наличие максимума сохраняется вплоть до γ_{cr}^* . При больших значениях γ максимум в зависимости энергии от $a_{\bar{V}}$ исчезает и антивихрь вынужден удаляться сразу на расстояние $\bar{a}_{\min} \gg \lambda \gg \ell_w$, минуя промежуточные положения.

В нижней части рис. 8 изображена область параметров (ϵ, γ) , в которой могут существовать стабильные конфигурации скирмион – вихрь – антивихрь. Легко видеть,

что область имеет характерную треугольную форму, где две наклонные линии соответствуют двум вышеописанным режимам. Ромбики отмечают критическое значение γ_{cr}^* , извлечённое из микромагнитного моделирования. Видно, что аналитическое предсказание достаточно хорошо соответствует результатам моделирования.

6. Скирмионы высокого порядка в магнитном поле вихря Пирла

В этом разделе, следуя статьям [65, 73], мы покажем, что поля рассеяния сверхпроводящего вихря Пирла могут формировать стабильные конфигурации со скирмионами высокого порядка (СВП) за счёт орбитальных эффектов неоднородного магнитного поля. Скирмионы, рассмотренные в предыдущих разделах, имели топологический заряд $|Q| = 1$ (см. определение топологического заряда в уравнении (26)), здесь же мы обратим внимание на СВП, для которых $n = |Q| \geq 2$ (см. уравнение (27)).

6.1. Трёхспиновое взаимодействие

Для изучения таких состояний следует учесть дополнительный вклад в свободную энергию ферромагнитной плёнки, который вызван так называемым скалярным киральным, или трёхспиновым, взаимодействием [64]:

$$\mathcal{F}_K = \int d^2 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathcal{K}(|\mathbf{r} - \mathbf{a}|), \quad (80)$$

где $\rho(\mathbf{r})$ обозначает плотность топологического заряда (см. уравнение (26)), а явный вид выражения для ядра $\mathcal{K}$,

$$\mathcal{K}(|\mathbf{r} - \mathbf{a}|) = \mathcal{K}_0 \sin \left[\frac{\pi \phi_\Delta (|\mathbf{r} - \mathbf{a}|)}{\phi_0} \right], \quad (81)$$

может быть получен для модели Хаббарда в режиме сильных электронных корреляций в третьем порядке теории возмущений при учёте орбитальных эффектов [64]. Здесь $\mathcal{K}_0$ — некоторая константа, ϕ_Δ — поток компоненты магнитного поля B_z пирловского вихря через элементарную ячейку треугольной решётки ферромагнетика, а центр вихря расположен в точке $\mathbf{a}$. Практически везде, кроме области, близкой к центру вихря, аргумент $\sin$ в уравнении (81) оказывается малым и $\sin$ может быть заменён на его аргумент. Влияние области центра вихря оказывается малым, что показывают результаты численного счёта [65], поэтому можно использовать упрощённое выражение, которое подразумевает прямую пропорциональность между ядром $\mathcal{K}$ и поперечной проекцией B_z магнитного поля, $\mathcal{K} \propto B_z$.

Подставляя намагниченность СВП, заданного уравнением (27) при $n \geq 2$, в выражения (1), (9) и (80) для энергий свободного ферромагнетика, Зеемана и трёхспинового взаимодействия соответственно и вычисляя интеграл по азимутальному углу относительно центра скирмиона, получаем:

$$\frac{\mathcal{F}_{\text{magn}}}{2\pi d_F A} = \int_0^\infty \frac{dr r}{\ell_w^2} \left[\left(\frac{n^2 \ell_w^2}{r^2} + 1 \right) \sin^2 \theta + \ell_w^2 (\partial_r \theta)^2 \right], \quad (82)$$

$$\frac{\mathcal{F}_Z}{2\pi d_F A} = -2\gamma \int_0^\infty \frac{dr r}{\ell_w^2} \left[\bar{b}_{r,n}^a \sin \theta - 2\bar{b}_z^a \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right], \quad (83)$$

$$\frac{\mathcal{F}_K}{2\pi d_F A} = -\kappa \gamma n \int_0^\infty dr \bar{b}_z^a(r) \partial_r [\cos \theta(r)]. \quad (84)$$

Здесь $\bar{b}_z^a(r)$ — z -проекция нормированного магнитного поля вихря, смещённого в точку $\mathbf{a}$ и усреднённого по азимутальному углу ϕ вокруг центра скирмиона (см. уравнение (65)), а $\bar{b}_{r,n}^a(r, \phi_0)$ представляет собой аналогичную радиальную проекцию, но усреднённую с весом множителем $\cos \phi^{(n)}$ (см. уравнение (27)),

$$\bar{b}_{r,n}^a(r, \phi_0) = (-1)^n \frac{\cos(n-1)\phi_0}{(r/\ell_w)(r/a)^{n-1}} \Theta(r-a). \quad (85)$$

Безразмерный параметр κ в уравнении (84) равен

$$\kappa = \frac{\sqrt{3}\pi\kappa_0 d^2}{2M_s\phi_0 d_F}, \quad (86)$$

где d — параметр ионной решётки ферромагнетика.

Обратим внимание, что в выражении (82) для энергии свободного ферромагнетика отсутствуют слагаемые, вызванные взаимодействием Дзялошинского–Мории. Дело в том, что для радиально симметричного скирмиона с $n \geq 2$, заданного уравнением (27), этот вклад исчезает благодаря множителю $\cos \phi^{(n)}$, который при усреднении по азимутальному углу даёт 0. Поэтому в приближении, рассматриваемом в статье [65], взаимодействие Дзялошинского–Мории не влияет на общую энергию системы скирмиона и вихря. Однако следует заметить, что отклонение формы СВП от радиально симметричной, аналогичное обсуждаемому в разделе 4.1.1, может давать вклад порядка γ^2 и влиять на положение a скирмиона. Кроме того, в работе [74] показано, что сверхпроводящая плёнка может наводить эффективное ВДМ, обладающее пространственной дисперсией, в плёнке ферромагнетика. Такое эффективное ВДМ может давать более существенный вклад при рассмотрении СВП, хотя "обычное" ВДМ проявляется слабо.

6.2. Стабильные конфигурации

Для определения стационарных конфигураций СВП – вихрь следует минимизировать полную энергию. В такой конфигурации существует оптимальное значение спиральности, задаваемое углом ϕ_0 , которое определяется только порядком скирмиона n и задаётся соотношением $\cos(n-1)\phi_0 = (-1)^n$, возникающим при минимизации первого слагаемого в уравнении (83) в случае эксцентрической конфигурации (в соосной конфигурации ϕ_0 может принимать произвольное значение вследствие симметрии).

Далее, следуя работе [65], мы ограничимся приближённым выражением для скирмионного угла в форме анзаца доменной стенки. Такой подход может привести к количественной ошибке, поскольку не учитывает изменение формы скирмиона, однако даёт качественное описание для изменения размера R и δ и положения a скирмиона относительно вихря.

Для анализа стабильности соосной конфигурации проведём вычисления при малых $a \ll \ell_w$ и доминировании обменного взаимодействия, $A \gg \kappa_0 \sim K$. Полную энергию в этом приближении можно представить в виде

$$\mathcal{F}_{\text{tot}} \approx \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1 a^{z_n} + \mathcal{F}_2 a^2, \quad (87)$$

где $\mathcal{F}_{0,1,2} > 0$ — константы, выраженные через параметры задачи и оптимальные значения R и δ для $a = 0$, причём второе слагаемое возникает из зеемановской энергии. При $n = 2$ степень $\alpha_{n=2} = 1$ и соосное состояние всегда нестабильно, поскольку при малых a свободная

энергия уменьшается с ростом a . При $n = 3, 4$ степень $\alpha_{n=3,4} \approx 2$, а значит, второе и третье слагаемые конкурируют. В последнем случае для выяснения типа стабильной конфигурации требуется более детальный анализ, частично проведённый в [73], а также учёт изменения формы скирмиона под действием магнитного поля вихря. В случае $n \geq 5$ ожидается формирование соосных конфигураций СВП с вихрем Пирла [73], но для верификации такого эффекта необходимо проведение численного моделирования.

7. Обсуждение

7.1. Экспериментальные исследования

Как оказалось, экспериментальное обнаружение связанных пар вихря в сверхпроводнике и скирмиона в киральном магнетике, образованных из-за магнитных полей рассеяния, является непростой задачей [80]. Впервые сосуществование сверхпроводящих вихрей и неелевских скирмионов было обнаружено в многослойной магнитной структуре $[\text{Ir}_1\text{Fe}_{0.5}\text{Co}_{0.5}\text{Pt}_1]_{10}/\text{Nb}$, где нижний индекс 10 означает, что гетероструктура $\text{Ir}_1\text{Fe}_{0.5}\text{Co}_{0.5}\text{Pt}_1$ была повторена 10 раз [18]. Диэлектрический слой MgO использовался для подавления сверхпроводящего эффекта близости. Скирмионы неелевского типа в структуре были стабилизированы с помощью внешнего магнитного поля и визуализированы с помощью магнитно-силовой микроскопии. На основании нелинейного характера зависимости намагниченности образца от приложенного магнитного поля авторы работы [18] сделали вывод о том, что наличие скирмионов приводит к спонтанному рождению антивихрей в сверхпроводнике. Под антивихрем понимается сверхпроводящий вихрь, магнитное поле которого в коре направлено против направления внешнего магнитного поля. Спонтанное рождение антивихря находится в согласии с предсказанием работы [41] и с результатами, представленными выше. Позже на аналогичной структуре с другим составом железа и кобальта, $[\text{Ir}_1\text{Fe}_{0.3}\text{Co}_{0.7}\text{Pt}_1]_{10}/\text{NbPt}$, с помощью магнитно-силовой микроскопии были измерены радиусы неелевских скирмионов при двух температурах: выше и ниже температуры сверхпроводящего перехода T_c [19]. Оказалось, что в сверхпроводящем состоянии у части скирмионов радиус увеличился примерно на 3 %, что авторами было связано со спонтанным рождением сверхпроводящих антивихрей. Такое изменение радиуса скирмиона находится в согласии с предсказаниями работы [41] и с результатами, представленными в данном обзоре.

Недавно аналогичный эксперимент по магнитно-силовой микроскопии при температурах выше и ниже сверхпроводящей температуры был проведён на гетероструктуре $[\text{Ta}/\text{Ir}/\text{CoFeB}/\text{MgO}]_7/\text{Nb}$ [20]. Авторами было обнаружено, что приложение небольшого магнитного поля, противонаправленного однородной намагниченности ферромагнетика, приводит при температурах ниже T_c к появлению скирмионов с радиусом, увеличенным почти в 2 раза по сравнению с радиусом скирмионов при температурах выше T_c . В то же время при противоположном направлении магнитного поля на месте скирмионов большого радиуса появлялись скирмионы с таким же радиусом, как при температурах выше T_c . Подобное поведение авторами работы [20] было объяснено тем, что в первом случае появляется сверхпроводя-

Таблица. Экспериментальные данные для константы обменного взаимодействия (A), постоянной магнитной анизотропии (K), постоянной силы ВДМ (D) и намагниченности насыщения (M_s). На основе этих параметров также рассчитаны характерный масштаб задачи ℓ_w (см. уравнение (6)), безразмерная константа ВДМ ϵ (см. уравнение (6)), безразмерный параметр ферромагнитной плёнки ζ (см. уравнение (37))

	$A, 10^{-12} \text{ Дж м}^{-1}$	$K, 10^6 \text{ Дж м}^{-3}$	$D, 10^{-3} \text{ Дж м}^{-2}$	$M_s, 10^6 \text{ А м}^{-1}$	$\ell_w, 10^{-9} \text{ м}$	ϵ	ζ
[IrFeCoPt] ₁₀ [18]	13,9	1,4	2,1	1,45	3,15	0,24	8,6
[Ta/Ir/CoFeB/MgO] ₇ [20]	19	0,164	1,7	1,37	11	0,48	5,8
Pt/Co/AlO _x [75]	16	0,39	2,2	1,1	6,4	0,44	5,6
Ir/Co/Pt [76]	~ 10	0,17	1,9	0,96	~ 8	~ 0,6	~ 8
[Co/Pd] _n [77]	10	0,24	2,0	0,88	6	0,6	7,8
Ta/CoFeB/MgO [78]	10	1,3	0,22	1,2	7	0,03	3,9
Pt/Co/Ni/Co [79]	20	0,6	3	0,6	6	0,43	2,3

щий вихрь (в работах [18, 19] он назывался антивихрь) и образует соосную конфигурацию со скирмионом, что приводит к увеличению радиуса последнего, тогда как во втором случае появляется антивихрь, который отталкивается от скирмиона. Такое поведение системы находится в полном качественном согласии с теоретическими результатами, представленными в обзоре. Однако для количественного сравнения теории и эксперимента требуется учесть, что сверхпроводящая плёнка была достаточно толстой, а значит, магнитное поле сверхпроводящего вихря не описывается в пирловском приближении. Также большое количество слоёв в реальной гетероструктуре означает более сложное распределение полей рассеяния, чем то, что используется в нашей теории.

Подводя итог обсуждению экспериментальных исследований, в таблице мы приводим значения различных констант для киральных магнетиков, поддерживающих существование скирмионов типа Нееля. Наш анализ показывает, что характерный масштаб ℓ_w составляет порядка 5–10 нм, в то время как величина ζ лежит в диапазоне 2–9. Большое значение параметра ζ позволяет эффективно менять константу $\gamma = \zeta \ell_w / \lambda = \zeta \ell_w w_w d_s / \lambda_L^2$ в широких пределах путём изменения толщины сверхпроводящей плёнки. Например, для сверхпроводника Nb, который использовался в экспериментах [18, 20], лондоновская глубина проникновения $\lambda_L \simeq 40$ нм [81]. Соответственно, пирловская глубина проникновения в плёнках Nb толщиной около 10 нм будет порядка $\lambda \simeq 160$ нм, а параметр γ при такой толщине сверхпроводящей плёнки Nb для материалов в таблице будет меняться в интервале 0,1–0,4.

7.2. Дальнейшие направления теоретических исследований

В настоящем обзоре мы рассматривали случай тонкой сверхпроводящей плёнки. Однако разработанная теория применима к любой пространственной зависимости неоднородного магнитного поля, в том числе и создаваемого вихрем в толстой сверхпроводящей плёнке. В работе [39] численно изучалось влияние сверхпроводящего антивихря в толстой сверхпроводящей плёнке на скирмион и было обнаружено, что он стабилизируется в соосной конфигурации с увеличенным радиусом. Это указывает на то, что физические эффекты, которые обсуждались выше: увеличение радиуса скирмиона и изменение киральности в соосной конфигурации, изменение формы скирмиона в эксцентрической конфигурации, стабилизация скирмиона пары вихрь–антивихрь — возможны и в толстых сверхпроводящих плёнках. Однако, конечно, проверка

данного предположения требует дальнейших детальных исследований.

Интересным является вопрос о динамике пары скирмион–вихрь в ситуации, когда вихрь или скирмион начинают двигаться за счёт протекающего тока в сверхпроводящей или ферромагнитной плёнке соответственно. В первом случае задача численно изучалась в работе [39] для пары скирмион–антивихрь. Оказалось, что при достижении пороговой величины сверхтока пара разрывается и антивихрь продолжает движение без скирмиона. Интересной задачей было бы найти это значение порогового тока с учётом возможного изменения формы скирмиона при движении пары.

Отметим также, что изменение размера скирмиона возможно при движении скирмиона вблизи различных дефектов, как было показано в [82] с использованием простого анзаца доменной стенки. Однако представляется интересным применить результаты вариационного метода с более точной формой анзаца для изучения отклонения формы и уточнения полученных в [82] результатов.

Мощным инструментом исследования магнитного состояния системы является изучение спиновых волн. В последнее время был достигнут существенный прогресс в контроле и манипуляции спиновыми волнами за счёт внешних (градиент намагниченности [83]) или внутренних (доменные стенки [84–87], скирмионы [88–90]) неоднородностей в профилях намагниченности. В случае гетероструктуры сверхпроводник–ферромагнетик магнитный спектр испытывает влияние сверхпроводящей плёнки. Существует несколько механизмов для такого влияния: 1) из-за изменения полей рассеяния сверхпроводящей плёнкой [91–97], 2) из-за существования вихревой решётки в сверхпроводнике [98, 99] и 3) из-за механизма спинового вращательного момента [100]. Известно [89], что на скирмионе существуют локализованные состояния магнонов. Также локализованные состояния магнонов возникают из-за магнитного поля вихря Пирла и искажения намагниченности, им вызванного [101]. Было бы интересно изучить, какие локализованные состояния возникают в комплексах скирмион–вихрь и скирмион–вихрь–антивихрь.

Как было показано в разделе 5, наличие скирмиона влияет на взаимодействие вихря и антивихря в сверхпроводящей плёнке. В связи с этим интересной задачей является изучение взаимодействия скирмионных и вихревых решёток. Недавно в работе [102] такая задача рассматривалась в рамках численного решения уравнений движения для сверхпроводящих вихрей и скирмионов.

Было найдено существование большого количества различных фаз. Однако при этом скирмион рассматривался как жёсткий объект, параметры которого не меняются из-за наличия вихрей. В дальнейшем было бы интересно учесть эффекты изменения формы скирмиона при взаимодействии с вихрями. Для решёток это можно было бы сделать с помощью подхода стереографической проекции, развиваемого в работах [90, 103, 104].

Хорошо известно [105–107], что неоднородный профиль намагниченности в ферромагнетиках может приводить к магнитоэлектрическому эффекту, т.е. к возникновению электрической поляризации, $\mathbf{P} \propto (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{m} - \mathbf{m}(\nabla\mathbf{m})$. Во внешнем электрическом поле $\mathbf{E}$ это приводит к появлению дополнительного члена в свободной энергии ферромагнитной плёнки, $\int d^2\mathbf{r} \mathbf{r} \mathbf{P} \mathbf{E} / 2$. Таким образом, появляется возможность управлять неоднородной магнитной структурой с помощью внешнего электрического поля, что было продемонстрировано экспериментально, например, в работах [108–110]. Представленный в обзоре подход интересно было бы применить для изучения влияния внешнего неоднородного электрического поля, например, создаваемого заряженным наконечником, как в экспериментах [108–110], на форму и киральность скирмиона. С учётом того что скирмион может быть связан в пару со сверхпроводящим вихрем, возникает возможность опосредованного управления сверхпроводящим вихрем с помощью локального электрического поля.

8. Заключение

В настоящем обзоре представлены результаты теоретического изучения влияния неоднородного магнитного поля сверхпроводящего вихря на неелевский скирмион в тонких гетероструктурах сверхпроводник–киральный ферромагнетик. Детально изложен аналитический вариационный подход к этой задаче на основе анзаца для профиля намагниченности скирмиона, который учитывает изменение профиля из-за влияния магнитного поля вихря. Такой подход позволил проанализировать условия устойчивости соосной конфигурации пары вихрь–скирмион, объяснить и предсказать ряд новых эффектов, вызванных влиянием неоднородного магнитного поля вихря. В случае соосной конфигурации сверхпроводящий вихрь может вызывать изменение киральности скирмиона и значительное увеличение скирмионного радиуса (вплоть до максимально возможного) при сохранении киральности. В случае эксцентрических конфигураций неоднородное поле сверхпроводящего вихря приводит к деформации цилиндрически-симметричного профиля скирмиона, что оказывается важным для правильного расчёта равновесного расстояния между центрами скирмиона и вихря. Разработанный в работе подход также был применён для анализа стабильности тройного комплекса вихрь–антивихрь–скирмион. Все теоретические предсказания подтверждаются результатами микромагнитного моделирования. Также в обзоре кратко рассматривается вопрос о влиянии сверхпроводящего вихря на скирмионы высокого порядка, обсуждаются недавние эксперименты по изучению влияния сверхпроводящих вихрей на неелевские скирмионы и возможные дальнейшие направления теоретических исследований.

Благодарности. Авторы благодарны П. Воробьёву, Д. Каткову и О. Третьякову за совместную работу. Авторы бла-

годарны А. Калашниковой, Р. Мамину, А. Садовникову, Я. Фоминову, А. Фраерману, М. Шустину за полезные обсуждения. Авторы благодарны за возможность доступа к компьютерному кластеру Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, на котором были получены представленные результаты численного моделирования. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 24-12-00357. Работа частично поддержана Программой фундаментальных исследований Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики". И.С. Бурмистров и С.С. Апостолов благодарят за личную поддержку Фонд развития теоретической физики и математики "БАЗИС".

Список литературы

1. Skyrme T H R *Proc. R. Soc. London A* **260** 127 (1961) DOI:10.1098/rspa.1961.0018
2. Skyrme T H R *Proc. R. Soc. London A* **262** 237 (1961) DOI:10.1098/rspa.1961.0115
3. Skyrme T H R *Nucl. Phys.* **31** 556 (1962)
4. Sondhi S L et al. *Phys. Rev. B* **47** 16419 (1993)
5. Khawaja U A, Stoof H *Nature* **411** 918 (2001)
6. Volovik G E *The Universe in a Helium Droplet* (Oxford: Clarendon Press, 2003)
7. Богданов А Н, Яблонский Д А *ЖЭТФ* **95** 178 (1989); Bogdanov A N, Yablonskii D A *Sov. Phys. JETP* **68** 101 (1989)
8. Борисов А Б *УФН* **190** 291 (2020); Borisov A B *Phys. Usp.* **63** 269 (2020)
9. Abrikosov A A *Fundamentals of the Theory of Metals* (Amsterdam: North-Holland, 1988); Пер. с русск. яз.: Абрикосов А А *Основы теории металлов* (М.: Наука, 1987)
10. Ryazanov V V et al. *J. Low Temp. Phys.* **136** 385 (2004)
11. Lyuksyutov I F, Pokrovsky V L *Adv. Phys.* **54** 67 (2005)
12. Buzdin A I *Rev. Mod. Phys.* **77** 935 (2005)
13. Bergeret F S, Volkov A F, Efetov K B *Rev. Mod. Phys.* **77** 1321 (2005)
14. Eschrig M *Rep. Prog. Phys.* **78** 104501 (2015)
15. Back C et al. *J. Phys. D* **53** 363001 (2020)
16. Göbel B, Mertig I, Tretiakov O A *Phys. Rep.* **895** 1 (2021)
17. Zlotnikov A O, Shustin M S, Fedoseev A D *J. Supercond. Nov. Magn.* **34** 3053 (2021)
18. Petrović A P et al. *Phys. Rev. Lett.* **126** 117205 (2021)
19. Machain P "Skyrmion-vortex interactions in chiral-magnet/superconducting hybrid systems", Doctoral Thesis (Singapore: Nanyang Technological Univ., 2021)
20. Xie Y-J et al. *Phys. Rev. Lett.* **133** 166706 (2024)
21. Yokoyama T, Linder J *Phys. Rev. B* **92** 060503 (2015)
22. Pershoguba S S, Nakosai S, Balatsky A V *Phys. Rev. B* **94** 064513 (2016)
23. Pöyhönen K et al. *Phys. Rev. B* **94** 214509 (2016)
24. Туманов В А, Зайцева В Е, Прошин Ю Н *Письма в ЖЭТФ* **116** 443 (2022); Tumanov V A, Zaitseva V E, Proshin Yu N *JETP Lett.* **116** 449 (2022)
25. Chen W, Schnyder A P *Phys. Rev. B* **92** 214502 (2015)
26. Yang G et al. *Phys. Rev. B* **93** 224505 (2016)
27. Güngördü U, Sandhoefner S, Kovalev A A *Phys. Rev. B* **97** 115136 (2018)
28. Mascot E et al. *Phys. Rev. B* **100** 184510 (2019)
29. Rex S, Gornyi I V, Mirlin A D *Phys. Rev. B* **100** 064504 (2019)
30. Garnier M, Mesaros A, Simon P *Commun. Phys.* **2** 126 (2019)
31. Rex S, Gornyi I V, Mirlin A D *Phys. Rev. B* **102** 224501 (2020)
32. Güngördü U, Kovalev A A *J. Appl. Phys.* **132** 041101 (2022)
33. Nothhelfer J et al. *Phys. Rev. B* **105** 224509 (2022)
34. Konakanchi S T et al. *Phys. Rev. Research* **5** 033109 (2023)
35. Hals K M D, Schechter M, Rudner M S *Phys. Rev. Lett.* **117** 017001 (2016)
36. Baumard J et al. *Phys. Rev. B* **99** 014511 (2019)
37. Dahir S "Ferromagnetic superconducting heterostructures with magnetic skyrmions", Master's Thesis (Bochum: Ruhr-Univ. Bochum, 2018)
38. Dahir S M, Volkov A F, Eremin I M *Phys. Rev. Lett.* **122** 097001 (2019)
39. Menezes R M et al. *Phys. Rev. B* **100** 014431 (2019)
40. Dahir S M, Volkov A F, Eremin I M *Phys. Rev. B* **102** 014503 (2020)
41. Andriyakhina E S, Burmistrov I S *Phys. Rev. B* **103** 174519 (2021)

42. Андрияхина Е С, Апостолофф С, Бурмистров И С *Письма в ЖЭТФ* **116** 801 (2022); Andriyakhina E S, Apostoloff S, Burmistrov I S *JETP Lett.* **116** 825 (2022)
43. Apostoloff S S et al. *Phys. Rev. B* **107** L220409 (2023)
44. Apostoloff S S, Andriyakhina E S, Burmistrov I S *Phys. Rev. B* **109** 104406 (2024)
45. Nayak C et al. *Rev. Mod. Phys.* **80** 1083 (2008)
46. Kitaev A Yu *Usp. Fiz. Nauk* **171** (Suppl. 10) 131 (2001) DOI:10.1070/1063-7869/44/10S/S29
47. Kitaev A Yu *Ann. Physics* **303** 2 (2003)
48. Oreg Y, Refael G, von Oppen F *Phys. Rev. Lett.* **105** 177002 (2010)
49. Lutchyn R M, Sau J D, Das Sarma S *Phys. Rev. Lett.* **105** 077001 (2010)
50. Sau J D et al. *Phys. Rev. Lett.* **104** 040502 (2010)
51. Mourik V et al. *Science* **336** 1003 (2012)
52. Das A et al. *Nature Phys.* **8** 887 (2012)
53. Sun K, Shah N *Phys. Rev. B* **91** 144508 (2015)
54. Sato M, Ando Y *Rep. Prog. Phys.* **80** 076501 (2017)
55. Nakosai S, Tanaka Y, Nagaosa N *Phys. Rev. B* **88** 180503 (2013)
56. Everschor-Sitte K et al. *J. Appl. Phys.* **124** 240901 (2018)
57. Hassan M et al. *Nature Phys.* **20** 615 (2024)
58. Kuznetsov M A, Mukhamatchin K R, Fraerman A A "Effective interfacial Dzyaloshinskii–Moriya interaction and skyrmion stabilization in ferromagnet/paramagnet and ferromagnet/superconductor hybrid systems" *Phys. Rev. B* **107** 184428 (2023); arXiv:2212.07315
59. Pearl J *Appl. Phys. Lett.* **5** 65 (1964)
60. Carneiro G, Brandt E H *Phys. Rev. B* **61** 6370 (2000)
61. Seng B et al. *Adv. Funct. Mater.* **31** 2102307 (2021)
62. Yang L et al. *Adv. Mater.* **36** 2403274 (2024)
63. Kathyat D S, Sengupta P *Phys. Rev. B* **110** 144409 (2024)
64. Shustin M S, Stepanenko V A, Dzebisashvili D M *Phys. Rev. B* **107** 195428 (2023)
65. Федосеев А Д, Шустин М С, Дзебисашвили Д М *Письма в ЖЭТФ* **120** 539 (2024); Fedoseev A D, Shustin M S, Dzebisashvili D M *JETP Lett.* **120** 517 (2024)
66. Miltat J E, Donahue M J "Numerical micromagnetics: Finite difference methods", in *Handbook of Magnetism and Advanced Magnetic Materials* (New York: John Wiley and Sons, 2007) DOI:10.1002/9780470022184.hmm202
67. Donahue M J, Porter D G "OOMMF User's Guide, Version 1.0", Report NISTIR 6376 (Gaithersburg, MD: National Institute of Standards and Technology, 1999) DOI:10.6028/NIST.IR.6376
68. Beg M, Lang M, Fangohr H *IEEE Trans. Magn.* **58** 7300205 (2022)
69. Brown W F *Micromagnetics* (New York: Interscience Publ., 1963)
70. Landau L, Lifshitz E *Phys. Z. Sowjetunion* **8** 153 (1935)
71. Gilbert T L *IEEE Trans. Magn.* **40** 3443 (2004)
72. Tanguy C "Counting the number of bound states of two-dimensional screened Coulomb potentials: A semiclassical approach", cond-mat/0106184
73. Федосеев А Д, Шустин М С, Дзебисашвили Д М *Физика твердого тела* **67** 1298 (2025)
74. Кузнецов М А, Фраерман А А *ЖЭТФ* **164** 514 (2023); Kuznetsov M A, Fraerman A A *J. Exp. Theor. Phys.* **137** 442 (2023)
75. Pizzini S et al. *Phys. Rev. Lett.* **113** 047203 (2014)
76. Moreau-Luchaire C et al. *Nature Nanotechnol.* **11** 444 (2016)
77. Pollard S et al. *Nature Commun.* **8** 14761 (2017)
78. Cao J et al. *Sci. Rep.* **8** 1355 (2018)
79. Ryu K-S et al. *Nature Commun.* **5** 3910 (2014)
80. Petrović A P et al. "Colloquium: Quantum properties and functionalities of magnetic skyrmions" *Rev. Mod. Phys.* **97** 031001 (2025); arXiv:2410.11427
81. Maxfield B W, McLean W L *Phys. Rev.* **139** A1515 (1965)
82. Liu L, Chen W, Zheng Y *Phys. Rev. Lett.* **131** 246701 (2023)
83. Davies C S et al. *Phys. Rev. B* **92** 020408 (2015)
84. Braun H-B *Phys. Rev. B* **50** 16485 (1994)
85. Hertel R, Wulfhekel W, Kirschner J *Phys. Rev. Lett.* **93** 257202 (2004)
86. Hämäläinen S J et al. *Nature Commun.* **9** 4853 (2018)
87. Laliena V, Athanasopoulos A, Campo J *Phys. Rev. B* **105** 214429 (2022)
88. Iwasaki J, Beekman A J, Nagaosa N *Phys. Rev. B* **89** 064412 (2014)
89. Schütte C, Garst M *Phys. Rev. B* **90** 094423 (2014)
90. Aristov D N, Kravchenko S S, Sorokin A O *Письма в ЖЭТФ* **102** 511 (2015); *JETP Lett.* **102** 455 (2015)
91. Golovchanskiy I A et al. *Adv. Funct. Mater.* **28** 1802375 (2018)
92. Golovchanskiy I A et al. *J. Appl. Phys.* **127** 093903 (2020)
93. Yu T, Bauer G E W *Phys. Rev. Lett.* **129** 117201 (2022)
94. Silaev M *Phys. Rev. Applied* **18** L061004 (2022)
95. Golovchanskiy I A et al. *Phys. Rev. Applied* **19** 034025 (2023)
96. Borst M et al. *Science* **382** 430 (2023)
97. Kharlan J et al. *Phys. Rev. Applied* **21** 064007 (2024)
98. Dobrovolskiy O V et al. *Nature Phys.* **15** 477 (2019)
99. Niedzielski B, Jia C L, Berakdar J *Phys. Rev. Applied* **19** 024073 (2023)
100. Bobkova I V et al. *Commun. Mater.* **3** 95 (2022)
101. Катков Д С, Апостолов С С, Бурмистров И С *Письма в ЖЭТФ* **120** 681 (2024); Katkov D S, Apostoloff S S, Burmistrov I S *JETP Lett.* **120** 655 (2024)
102. Neta J F, de Souza Silva C C *Phys. Rev. Lett.* **128** 057001 (2022)
103. Timofeev V E, Sorokin A O, Aristov D N *Phys. Rev. B* **103** 094402 (2021)
104. Timofeev V E, Aristov D N *Phys. Rev. B* **105** 024422 (2022)
105. Барьяхтар В Г, Львов В А, Яблонский Д А *Письма в ЖЭТФ* **37** 565 (1983); Bar'yakhtar V G, L'vov V A, Yablonskii D A *JETP Lett.* **37** 673 (1983)
106. Mostovoy M *Phys. Rev. Lett.* **96** 067601 (2006)
107. Dzyaloshinskii I "Magnetoelectricity in ferromagnets" *Europhys. Lett.* **83** 67001 (2008)
108. Logginov A S et al. *Appl. Phys. Lett.* **93** 182510 (2008)
109. Пятаков А П и др. *УФН* **185** 1077 (2015); Pyatakov A P et al. *Phys. Usp.* **58** 981 (2015)
110. Pyatakov A P et al. *J. Magn. Magn. Mater.* **383** 255 (2015)

Effect of Pearl vortices on shape and position of Néel-type skyrmions in superconductor–chiral ferromagnet heterostructures

S.S. Apostoloff^(1,2), E.S. Andriyakhina^(3,a), I.S. Burmistrov^(1,b)

⁽¹⁾ Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences,

prosp. Akademika Semenova 1a, 142432 Chernogolovka, Moscow region, Russian Federation

⁽²⁾ National Research University Higher School of Economics, ul. Myasnitskaya 20, 101000 Moscow, Russian Federation

⁽³⁾ Dahlem Center for Complex Quantum Systems and Physics Department, Freie Universität Berlin, Arnimallee 14, Berlin, 14195, Germany

E-mail: ^(a) esandriyakhina@itp.ac.ru, ^(b) burmi@itp.ac.ru

This review presents recent work carried out at the Landau Institute for Theoretical Physics of the Russian Academy of Sciences on the study of the effect of superconducting vortices on the shape and position of Néel-type skyrmions in superconductor–chiral ferromagnet heterostructures. Based on analytical and numerical approaches, a number of effects caused by the inhomogeneous magnetic field of the vortex have been predicted: a significant increase in the skyrmion radius, a change in its chirality in the case of a coaxial configuration of the vortex and skyrmion, and modification of the skyrmion shape in the case of an eccentric configuration. Recent experiments studying these effects are discussed.

Keywords: superconductors, chiral ferromagnets, vortices, skyrmions

PACS numbers: 12.39.Dc, 74.78.Fk, **75.70. –i**

Bibliography — 110 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **195** (11) 1157–1178 (2025)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.05.039936>

Received 7 March 2025, revised 29 April 2025

Physics – Uspekhi **68** (11) (2025)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2025.05.039936>