

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

О полосах "кота Шрёдингера"

В.Л. Горшенин, Б.Н. Нугманов, Ф.Я. Халили

Негауссовские квантовые состояния, функции Вигнера которых могут принимать отрицательные значения, важны как для фундаментальных тестов квантовой физики, так и для активно развивающихся в последнее время квантовых информационных технологий. Типичным примером негауссовского состояния является так называемое состояние кота Шрёдингера. Его очень интересная особенность — это то, что в нём "классическая" часть (два гауссовских максимума) геометрически отделена от "неклассической" (интерференционных полос). В настоящей работе рассматривается несколько методических вопросов, связанных с этими полосами.

Ключевые слова: кот Шрёдингера, функция Вигнера, негауссовские состояния

PACS numbers: 03.65.Ta, 03.65.Ud, 42.50. – p

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.05.039686>

Содержание

1. Введение (994).
 2. Функция Вигнера обобщённого состояния кота Шрёдингера (995).
 3. Интерференционные полосы (996).
 4. О возможности наблюдения полос кота Шрёдингера (996).
 5. Заключение (998).
- Список литературы (998).

1. Введение

Знаменитый мысленный эксперимент, сформулированный Шрёдингером в работе [1], представляет собой, возможно, самую яркую демонстрацию основной методической проблемы квантовой физики, а именно проблемы отсутствия гладкого предельного перехода от квантового описания мира к классическому. В этом мысленном эксперименте предлагается совершенно корректный с точки зрения квантовой механики способ преобразования состояния суперпозиции микроскопического объекта (атома) в состояние суперпозиции макроскопического объекта ("кота", точнее, составной системы "атом + кот"). Но "очевидно", что макроскопические объекты не могут находиться в состоянии суперпозиции, поэтому с квантовой механикой что-то не так?

Все существующие интерпретации квантовой механики как-то решают эту проблему. В частности, в копенгагенской интерпретации "лишние" ветви волновой функции случайным образом отсекаются посредством редукции квантового состояния. В многомировой интерпретации Эверетта все ветви эволюции сосуществуют, но не могут общаться друг с другом в силу линейности уравнения Шрёдингера.

В последние два-три десятилетия интерес к квантовым состояниям, представляющим собой суперпозицию двух хорошо различимых волновых функций, перешёл в практическую плоскость в связи с быстрым прогрессом технологий квантовой обработки и передачи информации. Безусловно, пока речь не идёт о состояниях "кота Шрёдингера" (КШ) для реально макроскопических объектов. Основная часть работ в этой области имеет дело с состояниями оптического поля, представляющими собой суперпозицию вида

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (|\alpha\rangle + \exp(i\theta)|-\alpha\rangle), \quad (1)$$

где $|\alpha\rangle$ и $|-\alpha\rangle$ — когерентные состояния, N — нормировочный множитель (см. обзор [2] и цитированную в нём литературу). В настоящее время удаётся генерировать состояния КШ со значениями $\alpha^2 \sim 3$ [3, 4]. Предложены также методы получения состояний КШ с амплитудами до $\alpha \sim 4-5$ [5, 6]. В последние годы аналогичные состояния были продемонстрированы и для поступательных механических степеней свободы (см., например, работу [7]).

Состояния КШ являются типичным примером так называемых негауссовских квантовых состояний, т.е. таких, функции Вигнера [8] которых имеют форму, отличную от двумерного гауссовского колокола. Известно, что негауссовские состояния являются "более квантовыми", чем гауссовские (например, когерентные) состояния. В частности, гауссовские состояния не могут быть

В.Л. Горшенин^(1,2), Б.Н. Нугманов^(1,2), Ф.Я. Халили^(1,*)

⁽¹⁾ Российский квантовый центр, Инновационный центр "Сколково",
Большой бульвар 30, стр. 1, 121205 Москва,
Российская Федерация

⁽²⁾ Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Институтский пер. 9, 141701 Долгопрудный, Московская обл.,
Российская Федерация

E-mail: ^(*) farit.khalili@gmail.com

Статья поступила 22 февраля 2024 г.,
после доработки 25 апреля 2024 г.

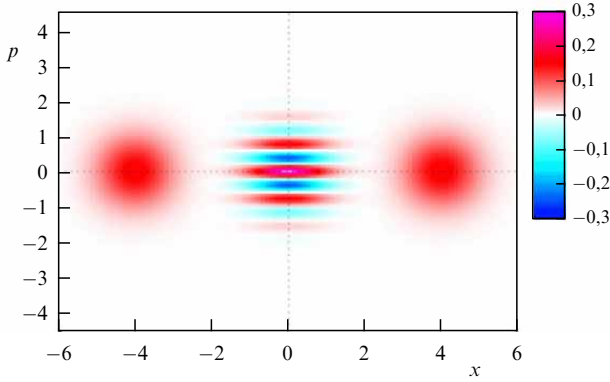


Рис. 1. Функция Вигнера состояния (1) для $\alpha = 2\sqrt{2}$ и $\theta = 0$.

ортогональны друг другу; они допускают классическое описание в терминах локальных скрытых переменных [9]; протоколы квантовой обработки информации, использующие только гауссовские состояния, могут эффективно симулироваться классическими компьютерами [10].

Известно также, что свойства ортогональности состояний КШ, вытекающие из их негауссовской природы, позволяют эффективно использовать эти состояния в оптических интерферометрических измерениях [11].

Очень интересной особенностью функций Вигнера состояний типа КШ является то, что в них "классическая" часть, т.е. два гауссовских максимума, соответствующих "живому" и "мёртвому" статусам кота, геометрически отделена от "неклассической", известной как "интерференционные полосы" КШ. Пример функции Вигнера состояния (1) приведён на рис. 1. Упомянутые три части в нём чётко различимы. Данная особенность делает состояния типа КШ полезным объектом для изучения, например, влияния диссипации на негауссовские квантовые состояния.

В настоящей работе рассматривается несколько методических вопросов, связанных с полосами КШ. В разделе 2 вводится удобный инструмент для последующего анализа, а именно обобщённое состояние КШ (4), а также получается простая универсальная формула (7), выражающая функцию Вигнера такого состояния через функцию Вигнера соответствующего базисного состояния $\psi(x)$. В разделе 3 обсуждается вопрос, что же, собственно, интерферирует в состояниях КШ, образуя полосы. Далее в разделе 4 обсуждается возможность прямого (не томографического) наблюдения этих полос. Наконец, в разделе 5 кратко резюмируются представленные результаты.

2. Функция Вигнера обобщённого состояния кота Шрёдингера

Следуя принятой в квантовой оптике конвенции, мы будем использовать безразмерные нормированные координату и импульс, определяемые соотношениями

$$\hat{a} = \frac{\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i, \quad (2)$$

где \hat{a} — оператор уничтожения. В случае механического гармонического осциллятора x и p связаны с "обычными" размерными координатой и импульсом форму-

лами

$$x = \sqrt{\frac{m\Omega_0}{\hbar}} X, \quad p = \frac{P}{\sqrt{\hbar m\Omega_0}}, \quad (3)$$

где m — масса, Ω_0 — собственная частота осциллятора.

Предположим для простоты, что параметр α в формуле (1) является действительным. Общность при этом не ограничивается, так как любое комплексное α может быть преобразовано в действительное унитарным вращением на фазовой плоскости. Далее рассмотрим обобщение такого состояния, задаваемое волновой функцией, имеющей в координатном представлении следующий вид:

$$\Psi(x) = \langle x | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} [\psi(x - \xi) + \psi(x + \xi) \exp(i\theta)], \quad (4)$$

где $\psi(x)$ — произвольная базисная волновая функция, ξ — действительный параметр. Нормировочный множитель N в этом случае равен

$$N = 2(1 + \varkappa), \quad (5)$$

где

$$\varkappa = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x - \xi) \psi(x + \xi) \exp(i\theta) dx. \quad (6)$$

Для целей данной методической заметки преимуществом состояния (4) является то, что его базисная функция ψ может быть подобрана так, чтобы перекрытие компонентов $\psi(x - \xi)$ и $\psi(x + \xi)$ было строго равно нулю (см. раздел 3).

Исходя из определения (4) можно получить универсальное замкнутое выражение для функции Вигнера обобщённого состояния КШ. Непосредственно используя определение функции Вигнера (см., например, монографию [12]), легко показать, что для любых состояний вида (4) она может быть представлена как

$$W(x, p) = \frac{1}{N} [W_0(x - \xi, p) + W_0(x + \xi, p) + 2W_1(x, p)], \quad (7)$$

где

$$W_0(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(\frac{x-y}{2}\right) \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) \exp(-ipy) dy \quad (8)$$

— функция Вигнера базисного состояния $\psi(x)$ и

$$W_1(x, p) = W_0(x, p) \cos(2p\xi + \theta). \quad (9)$$

Отметим, также, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_1(x, p) dx dp = \varkappa. \quad (10)$$

Формула (7) обобщает структуру функции Вигнера состояния КШ, показанную на рис. 1. Как и последняя, она включает две смещённые и масштабированные копии функции Вигнера W_0 базисного состояния ψ_0 , а также интерференционные полосы, образованные ещё одной (несмещённой) копией W_0 , промодулированной осциллирующим множителем $\cos(2p\xi + \theta)$.

3. Интерференционные полосы

Из формулы (7) видно, что интерференционный член W_1 не зануляется, даже если функции $\psi(x + \xi)$ и $\psi(x - \xi)$ не перекрываются, т.е. если для любого x

$$\psi^*(x - \xi)\psi(x + \xi) = 0. \tag{11}$$

В частности, отсюда следует, что (вопреки распространённому мнению) интерференционные полосы не пропадают с увеличением расстояния 2ξ между "живой" и "мёртвой" компонентами кота; при этом лишь растёт частота модуляции функции W_1 .

Здесь может возникнуть вопрос, а что же, собственно, интерferирует, если функции $\psi(x - \xi)$ и $\psi(x + \xi)$ не перекрываются? Ответ достаточно очевиден. Волновая функция Вигнера определена в фазовом пространстве (x, p) , и для неё волновые функции в импульсном представлении столь же важны, как и в координатном. Функция (4) в импульсном представлении имеет вид

$$\Phi(p) = \langle p | \Psi \rangle = \frac{\phi(p)}{\sqrt{N}} [\exp(-ip\xi) + \exp(ip\xi + \theta)], \tag{12}$$

где

$$\phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \exp(-ipx) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{13}$$

— волновая функция базисного состояния в импульсном представлении. Для соответствующего распределения вероятностей получаем:

$$|\Phi(p)|^2 = \frac{2|\phi(p)|^2}{N} [1 + \cos(2p\xi + \theta)] \tag{14}$$

(ср. с формулой (7)). При этом узкая координатная волновая функция с шириной $\Delta x \ll \xi$ даёт широкую импульсную волновую функцию с шириной

$$\Delta p \sim \frac{1}{\Delta x} \gg \frac{1}{\xi}, \tag{15}$$

при этом на интервале Δp помещается много периодов модуляции π/ξ .

В качестве примера рассмотрим случай "сжатого" кота Шрёдингера, базисная волновая функция которого равна

$$\psi(x) = \frac{1}{(\pi s)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right), \tag{16}$$

где s — фактор сжатия. В этом случае

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi s N} \left[\exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{s}\right) + \exp\left(-\frac{(x + \xi)^2}{s}\right) + 2 \exp\left(-\frac{x^2}{s}\right) \cos(2p\xi + \theta) \right] \exp(-sp^2). \tag{17}$$

Такое базисное состояние, с одной стороны, является гауссовским и поэтому не усложняет рассмотрение дополнительными (помимо полос кота) отрицательно-

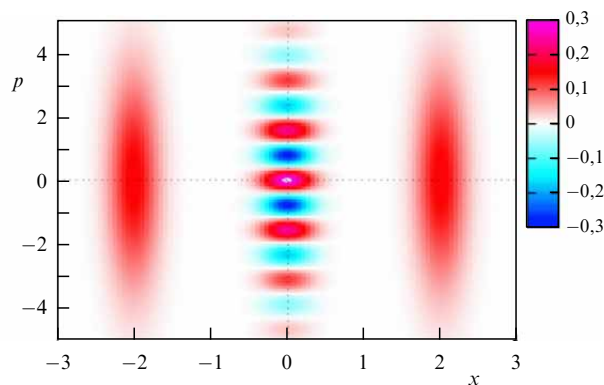


Рис. 2. Функция Вигнера (17) для $s = 0,1$, $\xi = 2$ и $\theta = 0$.

значными областями. С другой стороны, уменьшая фактор s , можно обеспечить экспоненциально малые значения коэффициента перекрытия (11) для любого заданного ξ .

График функции Вигнера (17) для характерных значений параметров s и ξ приведён на рис. 2. Хорошо заметно укорочение интерференционных полос, связанное с сужением функции $W_1(x, p)$ в координатном направлении.

4. О возможности наблюдения полос кота Шрёдингера

Возможно ли экспериментальное наблюдение полос КШ? Казалось бы, очевидный ответ — да, можно, поскольку процедура квантовой томографии [13, 14] позволяет, в принципе, восстановить функцию Вигнера любого квантового состояния. Однако квантовая томография является в принципе ансамблевой процедурой, что, собственно, и даёт возможность точного (в идеальном случае) восстановления любого квантового состояния без каких-либо ограничений, связанных с соотношением неопределённости Гейзенберга. Однако по той же самой причине квантовая томография не может быть использована, например, для обнаружения внешнего воздействия на единичный объект. Поэтому поставим вопрос иначе: может ли структура полос проявиться в результатах "обычного" прямого измерения, ограниченного соотношением неопределённости?

Очевидно, что требуемая процедура должна давать информацию одновременно как о координате, так и об импульсе объекта. Каноническим примером является так называемое когерентное измерение [15, 16], характеризующееся одинаковыми ошибками измерения для координаты и импульса, $\Delta x = \Delta p = 1/\sqrt{2}$, и описываемое операторной вероятностной мерой (ПОВМ) [17] вида

$$\hat{\Pi}(\tilde{x}, \tilde{p}) = \frac{1}{2\pi} |\tilde{\alpha}\rangle \langle \tilde{\alpha}|. \tag{18}$$

Здесь $|\tilde{\alpha}\rangle$ — кет-вектор когерентного состояния с параметром $\tilde{\alpha}$, равным

$$\tilde{\alpha} = \frac{\tilde{x} + i\tilde{p}}{\sqrt{2}}, \tag{19}$$

и \tilde{x} , \tilde{p} — результаты измерения. Статистика результатов когерентного измерения задаётся функцией

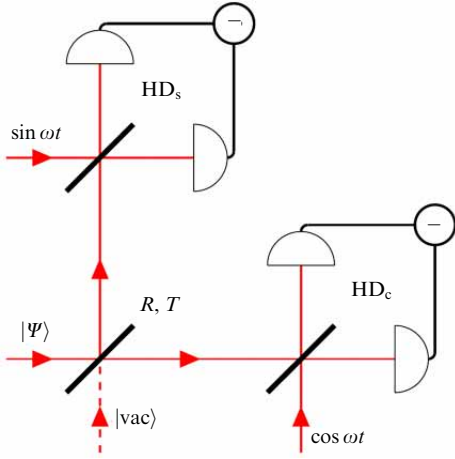


Рис. 3. Возможная реализация ПОВМ (18) и (22). Здесь исследуемое квантовое состояние $|\Psi\rangle$ сбивается на светоделителе с вакуумным полем. В выходных портах светоделителя располагаются два гомодинных детектора HD_c и HD_s , измеряющие соответственно косинусную и синусную квадратуру выходных лучей. R, T — коэффициенты отражения и пропускания светоделителя.

Хусими [18]:

$$Q(\tilde{x}, \tilde{p}) = \langle \Psi | \hat{\Pi}(\tilde{x}, \tilde{p}) | \Psi \rangle, \quad (20)$$

которая представляет собой размытую симметрично по всем направлениям на фазовой плоскости функцию Вигнера [19].

Для оптической волны такая процедура может быть реализована путём её деления на симметричном ($R = T$) светоделителе с последующим измерением двух ортогональных квадратур выходных лучей с помощью двух гомодинных детекторов, размещённых в выходных портах светоделителя (рис. 3).

Очевидно, однако, что для разрешения полос КШ ошибки измерения координаты и импульса должны быть согласованы с геометрией этих полос и, в частности, могут отличаться друг от друга:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{s_m}{2}}, \quad \Delta p = \frac{1}{\sqrt{2s_m}}, \quad (21)$$

где s_m — мера асимметрии Δx и Δp (измерительный фактор сжатия). Такое измерение, которое мы будем называть сжатым когерентным, тоже может быть реализовано с помощью схемы, показанной на рис. 3, однако светоделитель в ней теперь должен быть несимметричным, $R \neq T$. ПОВМ в этом случае будет иметь следующий вид:

$$\hat{\Pi}(\tilde{x}, \tilde{p}, s_m) = \frac{1}{2\pi} |\tilde{\alpha}, s_m\rangle \langle \tilde{\alpha}, s_m|, \quad (22)$$

где $|\tilde{\alpha}, s_m\rangle$ — смещённое сжатое состояние:

$$\langle x | \tilde{\alpha}, s_m \rangle = \frac{1}{(\pi s_m)^{1/4}} \exp \left[-\frac{(x - \tilde{x})^2}{2s_m} + i\tilde{p}x \right], \quad (23)$$

(ср. с формулой (16)).

Соответствующее распределение вероятностей для результатов измерения будет иметь вид

$$Q(\tilde{x}, \tilde{p}, s_m) = \langle \Psi | \hat{\Pi}(\tilde{x}, \tilde{p}, s_m) | \Psi \rangle. \quad (24)$$

При $s_m = 1$ оно совпадает с обычной функцией Хусими (20). При $s_m \neq 1$ мы получаем "сжатую" функцию Хусими, размытую преимущественно либо по координате (при $s_m > 1$), либо по импульсу (при $s_m < 1$). При $s_m \ll 1$ она вырождается в одномерное координатное распределение вероятностей, а при $s_m \gg 1$ — в импульсное. Во всех случаях функция (24) остаётся всюду неотрицательной.

Вернёмся к случаю состояния КШ (4), предполагая, что базисное состояние является сжатым (см. формулу (16)). В этом случае из формулы (24) следует, что

$$Q(\tilde{x}, \tilde{p}, s_m) = \frac{1}{N} \left[Q_0(\tilde{x} - \xi, \tilde{p}, s_m) + Q_0(\tilde{x} + \xi, \tilde{p}, s_m) + 2Q_0(\tilde{x}, \tilde{p}, s_m) \exp \left(-\frac{\xi^2}{s + s_m} \right) \cos \left(\frac{2s_m \xi \tilde{p}}{s + s_m} + \theta \right) \right], \quad (25)$$

где

$$Q_0(\tilde{x}, \tilde{p}, s_m) = \frac{\sqrt{ss_m}}{\pi(s + s_m)} \exp \left[-\frac{\tilde{x}^2 + ss_m \tilde{p}^2}{s + s_m} \right] \quad (26)$$

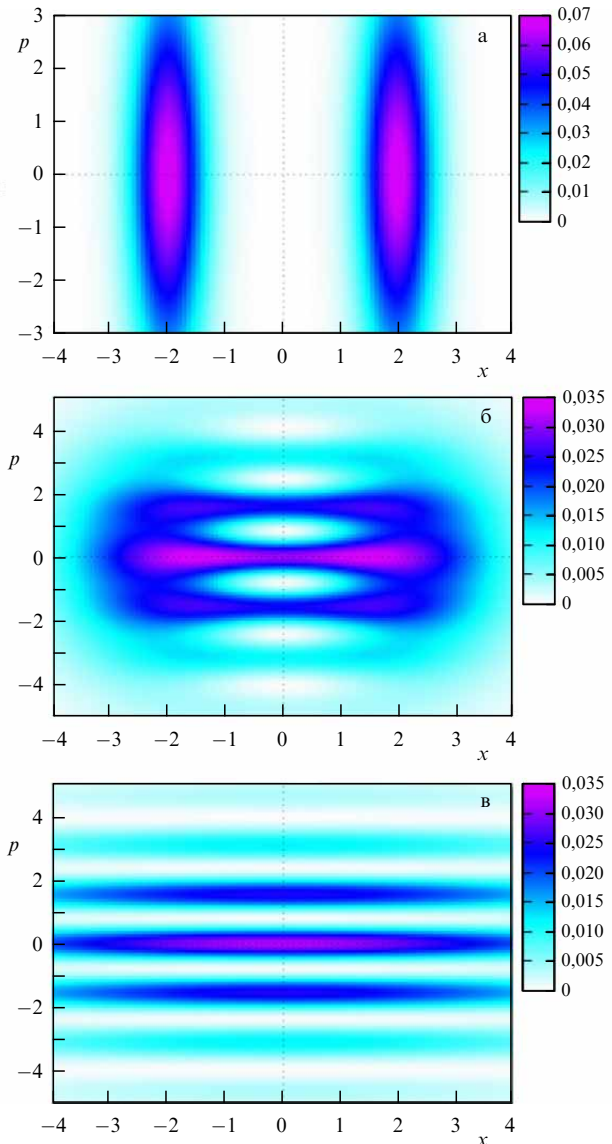


Рис. 4. Распределения вероятностей (25) для (а) $s_m = 0,3$, (б) $s_m = 3$ и (в) $s_m = 30$. Остальные параметры равны: $s = 0,1$, $\xi = 2$ и $\theta = 0$.

— "сжатая" функция Хусими базисного состояния. Легко видеть, что в целом структура формулы (25) совпадает со структурой соответствующей функции Вигнера (17), с одной существенной разницей: в случае (25) интерференционное слагаемое может быть подавлено множителем $\exp[-\xi^2/(s+s_m)]$. Чтобы избежать этого, фактор s_m должен быть достаточно велик. С другой стороны, если он существенно превышает расстояние 2ξ между "живой" и "мёртвой" компонентами КШ, то в функции Q пропадает двугорбая структура координатного распределения.

Описанные три характерных случая показаны на рис. 4. Из него видно, что значение s_m может быть подобрано так, чтобы как полосы, так и два классических максимума были чётко различимы.

5. Заключение

В представленной работе предлагается удобное общее выражение для функции Вигнера состояний типа "кота Шрёдингера". Опираясь на него, мы обсуждаем несколько методически интересных свойств таких состояний, в частности причину возникновения их характерных интерференционных полос. Показано также, что существует процедура нетомаграфического измерения, а именно сжатое когерентное измерение, позволяющая визуализировать полосы "кота Шрёдингера".

Данная работа поддержана госкорпорацией "Росатом" в рамках Дорожной карты по квантовым вычислениям (контракт № 868-1.3-15/15-2021 от 5 октября 2021 г.), а также грантом № 23-1-1-39-1 Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС".

On "Schrödinger's cat" fringes

V.L. Gorshenin^(1,2), B.N. Nugmanov^(1,2), F.Ya. Khalili^(1,*)

⁽¹⁾ Russian Quantum Center, Innovation Center Skolkovo, Bol'shoi bul'var 30, str. 1, 121205 Moscow, Russian Federation

⁽²⁾ Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),

Institutskii per. 9, 141701 Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation

E-mail: ^(*) farit.khalili@gmail.com

Non-Gaussian quantum states whose Wigner functions can take negative values are important both for fundamental tests of quantum physics and for the quantum information technologies that have been under active development recently. A typical example of a non-Gaussian state is the so-called Schrödinger's cat state. Its very interesting feature is that its "classical" part (two Gaussian maxima) is geometrically separated from the "nonclassical" part (interference fringes). In this paper, several methodological issues related to these fringes are considered.

Keywords: Schrödinger's cat, Wigner functions, non-Gaussian states

PACS numbers: 03.65.Ta, 03.65.Ud, **42.50.-p**

Bibliography — 19 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **194** (9) 994–998 (2024)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.05.039686>

Список литературы

1. Schrödinger E *Naturwissenschaften* **23** 807 (1935)
2. Lvovsky A I et al. "Production and applications of non-Gaussian quantum states of light", arXiv:2006.16985
3. Huang K et al. *Phys. Rev. Lett.* **115** 023602 (2015)
4. Sychev D V et al. *Nature Photon.* **11** 379 (2017)
5. Kuts D A et al. *Phys. Scr.* **97** 115002 (2022)
6. Podoshvedov M S, Podoshvedov S A, Kulik S P *Sci. Rep.* **13** 3965 (2023)
7. Bild M et al. *Science* **380** 274 (2023)
8. Wigner E *Phys. Rev.* **40** 749 (1932)
9. Bell J S *Speakable and Unspeakeable in Quantum Mechanics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987)
10. Mari A, Eisert J *Phys. Rev. Lett.* **109** 230503 (2012)
11. Gorshenin V L *Laser Phys. Lett.* **21** 065201 (2024)
12. Schleich W P *Quantum Optics in Phase Space* (Berlin: Wiley-VCH, 2001); Пер. на русск. яз.: Шляйх В П *Квантовая оптика в фазовом пространстве* (М.: Физматлит, 2005)
13. Vogel K, Risken H *Phys. Rev. A* **40** 2847 (1989)
14. Lvovsky A I, Raymer M G *Rev. Mod. Phys.* **81** 299 (2009)
15. Stratonovich R L *Stochastics* **1** 87 (1973)
16. Belavkin V P, Vantsyan A G "On the sufficient optimality condition for quantum information processing", quant-ph/0511043; оригинальная публикация: Белавкин В П, Ванцян А Г *Радиотехника и электроника* **19** 1391 (1974); Belavkin V P, Vantsyan A G *Radio Eng. Electron. Phys.* **19** (7) 39 (1974)
17. Helstrom C W *Quantum Detection and Estimation Theory* (New York: Academic Press, 1976); Пер. на русск. яз.: Хелстром К *Квантовая теория проверки гипотез и оценивания* (М.: Мир, 1979)
18. Husimi K *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan. 3rd Ser.* **22** 264 (1940) https://doi.org/10.11429/ppmsj1919.22.4_264
19. Lütkenhaus N, Barnett S M *Phys. Rev. A* **51** 3340 (1995)

Received 22 February 2024, revised 25 April 2024

Physics – Uspekhi **67** (9) (2024)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2024.05.039686>