

## К 90-ЛЕТИЮ ФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. П.Н. ЛЕБЕДЕВА РАН (ФИАН)

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Техника Швингера – ДеВитта в квантовой гравитации

А.О. Барвинский, В.Н. Ваховский

Предлагаемая работа состоит из двух частей. В первой представлен обзор классической техники Швингера–ДеВитта для вычисления эффективного действия в квантовой теории поля и квантовой гравитации. Последовательно излагаются методы фонового поля, теплового ядра и вычисления коэффициентов теплового ядра для минимальных операторов второго порядка, затем приложение этих методов к вычислению расходящейся части однопетлевого эффективного действия и, наконец, метод универсальных функциональных следов, применимый также к минимальным операторам высшего порядка и неминимальным операторам. Во второй части работы представлены полученные в последние годы новые результаты о внедиагональных разложениях теплового ядра для минимальных операторов высшего порядка. Показано, что эти разложения, обобщающие стандартный анзац ДеВитта, имеют вид двойного функционального ряда по некоторым новым специальным функциям, которые мы называем "обобщёнными экспоненциальными функциями". Подробно обсуждаются свойства таких функций и построенных из них разложений, в частности, наличие в них членов со сколь угодно большими отрицательными степенями собственного времени. Наконец, описываются два различных ковариантных метода вычисления коэффициентов внедиагональных разложений — с помощью "обобщённого преобразования Фурье" и по теории возмущений.

**Ключевые слова:** техника Швингера–ДеВитта, метод собственного времени, тепловое ядро, эффективное действие, теории с высшими производными, внедиагональные разложения

PACS numbers: 03.70.+k, 04.60.+m, 11.10.-z

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.02.039646>

## Содержание

1. Введение (795).
  2. Классический метод Швингера–ДеВитта и его обобщения (797).
    - 2.1. Метод фонового поля.
    - 2.2. Метод теплового ядра.
    - 2.3. Классический метод ДеВитта.
    - 2.4. Ультрафиолетовые расходимости и аномалии.
    - 2.5. Метод универсальных функциональных следов.
  3. Внедиагональные разложения теплового ядра для минимальных операторов высшего порядка (803).
    - 3.1. Размерный анализ.
    - 3.2. Обобщённые экспоненциальные функции.
    - 3.3. Степени оператора типа Лапласа.
    - 3.4. Обобщённое преобразование Фурье.
    - 3.5. Теория возмущений.
  4. Заключение (811).
- Список литературы (812).

А.О. Барвинский<sup>(1,2,\*), В.Н. Ваховский<sup>(1,\*\*)</sup></sup><sup>(1)</sup> Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация<sup>(2)</sup> Институт теоретической и математической физики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ломоносовский просп. 27, корп. 1, 119192 Москва, Российская ФедерацияE-mail: <sup>(\*)</sup> barvin@td.lpi.ru, <sup>(\*\*)</sup> vladvakh@gmail.com

Статья поступила 30 октября 2023 г., после доработки 30 января 2024 г.

## 1. Введение

В современной квантовой теории поля (КТП) чрезвычайно возросло значение функциональных методов [1, 2]. Функциональный подход в КТП основан на изучении производящих функционалов для корреляторов квантовых полей, кодирующих всю информацию о рассматриваемой модели теории поля. Они являются функционалами фоновых полей, т.е. внешних источников, либо средних полей общего вида. Использование функциональных методов в значительной мере обусловило прогресс в изучении перенормируемости различных моделей КТП, их ренормгрупповых свойств, аномалий и т.д.

Более того, поскольку сама геометрия пространства-времени может рассматриваться как такое фоновое поле, это открывает возможность для развития подхода, в котором вначале строится КТП на фиксированном классическом пространственно-временном фоне, а уже на следующем этапе рассматривается обратное воздействие квантовых полей (как полей материи, так и гравитонов) на классический искривлённый фон, на котором они живут [1, 3–5]. Хотя такой подход заведомо теряет свою применимость на планковском масштабе, он важен как с практической, так и с общетеоретической точки зрения. С практической — для изучения явлений, в которых существенны как квантовые, так и гравитацион-

ные эффекты, но которые далеки от планковского масштаба (например, физики массивных чёрных дыр и ранних стадий космологической эволюции). С общетеоретической — как необходимый шаг на пути построения полной квантовой гравитации.

Применение функциональных методов в КТП основывается на комбинации двух основных идей: метода фонового поля и метода теплового ядра, которые мы последовательно рассмотрим ниже в разделах 2.1 и 2.2. Несколько забегая вперёд, скажем, что метод теплового ядра позволяет эффективно описывать особенности квантово-полевых пропагаторов и, далее, регуляризовать и перенормировать фейнмановские интегралы. Удобство и мощь этого метода обуславливает его исключительную важность при анализе калибровочных теорий и моделей модифицированной (супер)гравитации — он лежит в основе большинства результатов об их (не)перенормируемости, ренормгрупповом поведении, аномалиях и т.д.

Однако сфера применимости метода теплового ядра в действительности выходит далеко за рамки КТП. Можно сказать, что в настоящее время этот метод является одним из ключевых и наиболее употребительных инструментов всей современной математической физики. С точки зрения чистой математики он глубоко связан с теорией псевдодифференциальных операторов [6], теоремами об индексе [7],  $K$ -теорией, спектральной и некоммутативной геометриями и т.д. Столь же широк спектр его практических приложений — от физики твёрдого тела до анализа рынков.

Прежде чем мы перейдём к конкретному описанию метода теплового ядра и его применения к КТП, полезно сделать несколько замечаний исторического характера. С самого своего зарождения он развивался по двум хотя и тесно переплетённым, но всё же различным направлениям, которые можно условно назвать "физическим" и "математическим". Начало было положено работами Адамара [8] о линейных уравнениях гиперболического типа, в которых он впервые получил своё разложение для функции Грина, и работой Фока [9], заметившего, что многие величины в квантовой теории удобно представлять в виде интегралов по вспомогательной переменной "собственного времени"  $\tau$ . Далее математическое направление получило развитие в работах Минакшисундара об операторе Лапласа на римановом многообразии [10, 11]. В свою очередь Швингер [12] развил метод собственного времени Фока для перенормировки расходящихся интегралов в КТП.

Но настоящая революция произошла в начале 1960-х годов, когда Брайс ДеВитт [1], чрезвычайно удачно скомбинировав идеи Швингера и Адамара, показал, что однопетлевое эффективное действие теории может быть выражено через коэффициенты теплового ядра её волнового оператора, и разработал свой классический метод их вычисления для минимального оператора 2-го порядка на искривлённом пространстве-времени. Метод ДеВитта лег в основу всех дальнейших приложений к КТП, мы подробно обсудим его в разделе 2.3.

Примерно в то же время появилась важная работа Сили [13] о комплексных степенях эллиптических операторов, обусловившая дальнейшее развитие математического направления. За ней последовал не прекращающийся до настоящего момента поток исследований теплового ядра, в центре которого находятся работы

Питера Гилки [14–20]. Математический подход к тепловому ядру существенно опирается на развитую теорию псевдодифференциальных операторов [6] и использование так называемых "свойств функториальности". Несмотря на всю важность этого направления, с точки зрения физиков он обладает рядом существенных недостатков. Во-первых, математический подход хорош для доказательства общих теорем и оценок, но кажется слишком абстрактным и не вполне удобен для вычислений в приложениях. Во-вторых, он с самого начала ограничен случаем только компактных многообразий, в то время как для физика, естественно, наибольший интерес представляет некомпактное физическое пространство-время. Наконец, математики обычно интересуются только следом теплового ядра, что также может быть недостаточным для физических приложений. Поэтому мы не будем останавливаться на работах математического направления подробнее, а сконцентрируемся более на вычислительном физическом подходе и его приложениях к КТП.

Метод Швингера–ДеВитта был успешно применён к полям низших спинов и калибровочным теориям Янга–Миллса [21–23], лежащим в основе современной Стандартной модели физики элементарных частиц, а также к теории гравитации и супергравитации [24–26]. Обычная эйнштейновская гравитация с действием, линейным по кривизне, как известно [1], перенормируема. Эта проблема решается путём введения в лагранжиан теории членов с высшими производными — в простейшем случае добавлением к действию членов, квадратичных по кривизне [27]. Такие модифицированные модели также анализировались в рамках общего подхода Швингера–ДеВитта. В частности, была изучена их асимптотическая свобода [28, 29]. В рамках техники Швингера–ДеВитта изучались общие свойства размерной и дзета-функциональной регуляризации [24, 30], конформная аномалия различных конформно-инвариантных на классическом уровне моделей в искривлённом пространстве [31–34], вычислялось квантовое среднее тензора энергии-импульса в метрике общего вида и на пространствах с различного вида симметриями [35–39], включая эффективный потенциал на де-ситтеровском пространстве [40]. Перенормируемая, и в частности свободная от вейлевской аномалии, конформная супергравитация изучалась в [41, 42].

Хотя такая квадратичная по кривизне гравитация служит основой предложенной Старобинским модели космологической инфляции [43], наличие высших производных приводит к появлению духов Остроградского и нарушению унитарности. Для преодоления этой проблемы в последние годы большое внимание привлекли модели типа Хоравы–Лифшица [44], в которых удаётся одновременно сохранить перенормируемость и унитарность ценой нарушения лоренц-инвариантности при высоких энергиях и которые также анализировались методом Швингера–ДеВитта и его обобщений [45–47].

Именно в этом классе моделей возникает существенная трудность, состоящая в том, что предложенный ДеВиттом способ вычисления коэффициентов теплового ядра непосредственно применим только к операторам типа Лапласа (так называемым минимальным операторам 2-го порядка). Поэтому анализ моделей с высшими производными или неминимальным оператором

потребовал развития непрямых методов вычисления, с помощью которых более сложный случай некоторым образом сводится к уже известному девиттовскому. Их изложение и применение к квантово-полевым моделям, включая так называемый метод универсальных функциональных следов, кратко обсуждаемый нами в разделе 2.5, содержится в работе Барвинского и Вилковьского [48]. Также следует выделить цикл работ Гусынина с соавторами [49–54], вычислявших коэффициенты теплового ядра с помощью преобразования Фурье. Важным развитием метода ДеВитта стала ковариантная теория возмущений, где локальный девиттовский ряд по степеням размерных тензорных структур частично пересуммируется в ряд по степеням кривизны с нелокальными формфакторами [55–60]. Дальнейшие ссылки можно найти в обзорных работах [61–63].

Предлагаемый обзор состоит из двух частей. Первая (раздел 2) посвящена изложению ставших уже классическими результатов, касающихся применения метода теплового ядра в КТП и квантовой гравитации. В ней последовательно рассмотрены методы фонового поля (раздел 2.1), теплового ядра (раздел 2.2) и вычисления коэффициентов теплового ядра для операторов типа Лапласа (раздел 2.3), затем приложение этих методов к вычислению однопетлевого эффективного действия (раздел 2.4) и, наконец, кратко обсуждаются непрямые методы (раздел 2.5). Вторая половина обзора (раздел 3) посвящена развиваемому авторами в последние годы методу внедиагональных разложений теплового ядра, применимому к минимальным операторам высшего порядка, а также к широкому классу неминимальных (причинных) операторов. Являясь, в отличие от непрямых методов, непосредственным обобщением техники ДеВитта для операторов типа Лапласа, он в то же самое время резко отличается от неё рядом непривычных особенностей, что позволяет по-новому взглянуть в том числе и на классические результаты первой части.

## 2. Классический метод Швингера – ДеВитта и его обобщения

Прежде всего несколько более конкретно опишем физические ситуации, которые мы будем обсуждать, и введём необходимые обозначения.

Любая теория поля живёт на некотором пространстве-времени  $M$ , под которым мы будем всюду подразумевать  $d$ -мерное (псевдо-)риманово многообразие с заданной на нём метрикой  $g_{ab}$ . Хотя настоящая физическая метрика лоренцева, т.е. имеет сигнатуру  $(- + \dots +)$ , на практике все вычисления обычно проводятся для евклидовой метрики с сигнатурой  $(+ + \dots +)$ , после чего осуществляется так называемый "виковский поворот", т.е. переход к физическому случаю с помощью аналитического продолжения по комплексной переменной времени  $x^0$ . В соответствии с этим мы всюду далее также рассматриваем евклидову метрику. С метрикой  $g_{ab}$  ассоциирована обычная связность Леви-Чивиты  $\nabla_a$ , для неё метрика ковариантно постоянна  $\nabla_a g_{bc} = 0$ , кручение отсутствует. Хотя обсуждаемые далее методы могут быть относительно легко распространены на более общий случай с кручением и неметричностью, в настоящем обзоре мы не будем касаться данных вопросов.

Далее, на пространстве-времени  $M$  живёт некоторый набор полей  $\varphi(x) = \varphi^A(x)$  (с математической точки зре-

ния они являются сечениями векторного расслоения над  $M$ ). Их индексы  $A$  могут быть произвольной природы: пространственно-временными, спинорными, внутренними или комбинированными. В дальнейшем, где это только возможно, мы будем опускать их, обозначая матрицы в пространстве полей шляпками. В частности,  $\hat{1} = \delta_B^A$  будет обозначать просто единичную матрицу. Тензор Римана  $R^c{}_{dab}$  и кривизна в расслоении  $\hat{\mathcal{R}}_{ab}$  определяются стандартным образом через коммутаторы ковариантных производных  $\nabla_a$ :

$$[\nabla_a, \nabla_b]v^c = R^c{}_{dab}v^d, \quad (2.1)$$

$$[\nabla_a, \nabla_b]\varphi = \hat{\mathcal{R}}_{ab}\varphi. \quad (2.2)$$

Наконец, на классическом уровне поля должны удовлетворять некоторым уравнениям движения. Предполагается, что такие уравнения определяются принципом наименьшего действия. При этом крайне удобно дополнительно ввести вспомогательные внешние источники поля  $J(x) = J_A(x)$ , с ними уравнения движения теории примут вид

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = -J, \quad (2.3)$$

где  $S[\varphi]$  — функционал классического действия теории.

### 2.1. Метод фонового поля

В основе метода фонового поля лежит разбиение полного квантового поля  $\varphi(x)$  на две части, соответствующие фоновому полю  $\Phi(x) = \langle \varphi(x) \rangle$ , где  $\langle \dots \rangle$  — квантовое среднее в присутствии внешних источников поля  $J(x)$ , и малым квантовым флуктуациям  $\phi(x)$

$$\varphi = \Phi + \phi. \quad (2.4)$$

Классическое действие удобно разложить в функциональный ряд Тейлора по малым возмущениям:

$$S[\Phi + \phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n[\Phi] \phi^n, \quad (2.5)$$

$$S_n[\Phi|x_1, \dots, x_n] = \frac{\delta^n S[\varphi]}{\delta \varphi(x_1) \dots \delta \varphi(x_n)} \Big|_{\varphi=\Phi}, \quad (2.6)$$

$$S_n[\Phi] \phi^n = \int dx_1 \dots dx_n S_n[\Phi|x_1, \dots, x_n] \phi(x_1) \dots \phi(x_n). \quad (2.7)$$

Тогда классическое линеаризованное уравнение для малых возмущений  $\phi(x)$ , распространяющихся на заданном фоне  $\Phi(x)$ , определяется вторыми вариационными производными действия

$$\hat{F}(\nabla)\phi = 0, \quad \text{где} \quad \hat{F}(\nabla)\delta(x, y) = S_2[\Phi|x, y], \quad (2.8)$$

а "классические вершины"  $S[\Phi|x_1, \dots, x_n]$  — это  $n$ -точечные функции, определяющие нелинейное взаимодействие флуктуаций. Важно отметить, что как оператор  $\hat{F}(\nabla)$ , так и вершины  $S_n[\Phi]$  являются функционалами среднего фонового поля  $\Phi(x)$ .

На квантовом уровне все вакуумные корреляторы квантовых полей  $\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle$  кодируются единственным объектом — производящим функциона-

лом:

$$\frac{Z[J]}{Z[0]} = \langle \exp(\varphi J) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle J(x_1) \dots J(x_n), \quad (2.9)$$

$$\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z[J]} \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0}, \quad (2.10)$$

который в свою очередь определяется фейнмановским функциональным интегралом<sup>1</sup>

$$Z[J] = \int D\varphi \exp \frac{1}{\hbar} (-S[\varphi] - \varphi J). \quad (2.11)$$

Далее последовательно вводятся производящий функционал связных корреляционных функций

$$W[J] = -\hbar \ln Z[J] \quad (2.12)$$

и его преобразование Лежандра — эффективное действие

$$\Gamma[\Phi] = (W[J] - \Phi J)_{J=\Gamma[\Phi]}, \quad (2.13)$$

где  $J[\Phi]$  — обращение функциональной зависимости  $\Phi[J] = \delta W[J]/\delta J$ . Тогда уравнение, описывающее обратное воздействие квантовых поправок на классический фон  $\Phi(x)$ , примет вид

$$\Gamma_1[\Phi|x] = \frac{\delta \Gamma[\Phi]}{\delta \Phi(x)} = -J(x). \quad (2.14)$$

Поэтому среднее поле  $\Phi(x)$ , эффективное действие  $\Gamma[\Phi]$  и уравнение (2.14) являются квантовыми аналогами классических поля  $\varphi(x)$ , действия  $S[\varphi]$  и уравнений движения (2.3).

Наконец, квазиклассическое (петлевое) разложение эффективного действия по степеням постоянной Планка  $\hbar$

$$\Gamma[\Phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \Gamma^{(n)}[\Phi], \quad \text{где } \Gamma^{(0)}[\Phi] = S[\Phi], \quad (2.15)$$

позволяет получить выражения для каждого порядка  $\Gamma^{(n)}[\Phi]$  в виде пространственно-временных интегралов от классического пропагатора  $\hat{G}(x, y)$ , определяющегося как ядро оператора, обратного к (2.8),

$$\hat{F}(\mathbf{V}) \hat{G}(x, y) = \hat{1} \delta(x, y), \quad (2.16)$$

и классических вершин  $S_n[\Phi]$  (2.6). Для этого выражение (2.11) переписывается в виде

$$\exp \left( -\frac{\Gamma[\Phi]}{\hbar} \right) = \int D\phi \exp \frac{1}{\hbar} (-S[\Phi + \phi] + \Gamma_1[\Phi] \phi), \quad (2.17)$$

затем в него подставляются разложения (2.5) и (2.15) и приравниваются члены при одинаковых степенях  $\hbar$ . В получающихся выражениях континуальные интегралы

являются уже гауссовыми, а потому легко берутся по теореме Вика.

Полученные таким путём результаты удобно представлять графически в виде (пространственно-временных) диаграмм Фейнмана, на которых классическая вершина  $S_n[\Phi]$  обозначается жирной точкой с  $n$  выходящими из неё линиями, а классический пропагатор  $\hat{G}(x, y)$  — линией, соединяющей соответствующие вершины. При этом оказывается, что член  $\Gamma_1[\Phi] \phi$  в (2.17) обеспечивает систематическое вычитание "головастиков" (т.е. поддиаграмм, соединённых с остальной диаграммой только одной линией). Поэтому каждый  $n$ -петлевой вклад даёт-ся совокупностью одночастично-неприводимых (ОЧН) вакуумных диаграмм с  $n$  петлями. В частности, можно показать, что

$$\Gamma^{(1)}[\Phi] = \frac{1}{2} \ln \text{Det } \hat{F}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{F}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \bigcirc, \quad (2.18)$$

$$\Gamma^{(2)}[\Phi] = \frac{1}{8} \bigcirc \bigcirc + \frac{1}{12} \bigcirc \bigcirc, \quad (2.19)$$

где Det и Tr обозначают функциональный определитель и функциональный след.

Важно ещё раз подчеркнуть, что полученные таким образом выражения представляют собой не функции импульсов частиц и констант связи, а функционалы всех средних фоновых полей рассматриваемой модели (которые могут включать скалярные, спинорные, векторные, метрику и т.д.  $\varphi = \varphi(x), \psi(x), A_a(x), g_{ab}(x), \dots$ ). Поэтому данная форма диаграммной техники определена уже не на тривиальном фоне плоского пространства-времени и исчезающих средних полей, а на произвольном фиксированном фоне.

## 2.2. Метод теплового ядра

Однако, как и следует ожидать, соответствующие фейнмановским диаграммам пространственно-временные интегралы, полученные в методе фонового поля, оказываются расходящимися, и поэтому они нуждаются в процедуре регуляризации и перенормировки. Как мы отмечали во введении, универсальным инструментом для этого является метод теплового ядра (или собственного времени). Его основная идея состоит в наблюдении, что любую степень оператора  $\hat{F}$  можно представить в виде так называемого швингеровского представления — как интеграл от операторной экспоненты  $\exp(-\tau \hat{F})$  по дополнительному параметру  $\tau$ , называемому "собственным временем":

$$\hat{F}^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{s-1} \exp(-\tau \hat{F}), \quad (2.20)$$

где  $\Gamma(s)$  — стандартная гамма-функция Эйлера. Здесь  $\hat{F}$  может быть произвольным положительно-определённым дифференциальным (или даже псевдодифференциальным) оператором, а показатель степени может принимать произвольные комплексные значения, кроме целых отрицательных  $s \neq 0, -1, -2, \dots$ . Для  $s \in \mathbb{N}$  данное соотношение может быть непосредственно проверено попеременным действием оператора  $\hat{F}$  и интегрированием по частям  $s$  раз. При этом из представления (2.20), используя свойства гамма-функций, несложно получить свойства, которые есте-

<sup>1</sup> Заметим, что, как мы обсуждали выше, мы записываем все выражения для евклидовой КТП, поэтому они отличаются от, возможно, более привычных лоренцевых обозначений отсутствием дополнительных мнимых единиц  $i$ .

ственно было бы ожидать от комплексной степени, например,  $\hat{F}^a \hat{F}^b = \hat{F}^{a+b}$ .

Обратное преобразование даётся формулой

$$\exp(-\tau \hat{F}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{w-i\infty}^{w+i\infty} \frac{\tau^{-s} \Gamma(s)}{\hat{F}^s} ds, \quad (2.21)$$

где интегрирование ведётся по контуру, параллельному мнимой оси при достаточно большом положительном  $w$ . Последнее выражение легко понять следующим образом: гамма-функция  $\Gamma(s)$  имеет в точках  $s_n = -n$  простые полюсы с вычетами  $(-1)^n/n!$ . Тогда интеграл по  $s$  сводится к сумме вычетов в этих полюсах, что в точности воспроизводит стандартное разложение в ряд Тейлора для операторной экспоненты  $\exp(-\tau \hat{F})$ .

Далее оказывается удобным перейти от операторов к их ядрам. Собственно, тепловым ядром  $\hat{K}_F(\tau|x, x')$  оператора  $\hat{F}(\nabla)$  принято называть ядро его операторной экспоненты  $\exp(-\tau \hat{F})$ :

$$\hat{K}_F(\tau|x, x') = \exp(-\tau \hat{F}(\nabla)) \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \delta(x, x'). \quad (2.22)$$

Это двухточечная (т.е. зависящая от двух точек  $x$  и  $x'$ ) матрично-значная функция. Очевидно, она является решением дифференциального уравнения теплопроводности

$$(\partial_\tau + \hat{F}_x) \hat{K}_F(\tau|x, x') = 0 \quad (2.23)$$

с начальным условием

$$\hat{K}_F(0|x, x') = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \delta(x, x'). \quad (2.24)$$

Устоявшаяся в литературе терминология ("уравнение теплопроводности", "тепловое ядро" и т.д.) исторически обусловлено тем обстоятельством, что для случая трёхмерного плоского пространства  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$ , одного скалярного поля  $\varphi(x)$  и ковариантного лапласиана в качестве оператора  $F(\nabla) = -\square = -g^{ab} \nabla_a \nabla_b$  уравнение (2.23) действительно совпадает со стандартным уравнением теплопроводности.

Если теперь мы перейдём в соотношениях (2.20) и (2.21) от операторов к их ядрам, то получим, что тепловое ядро  $\hat{K}_F(\tau|x, x')$  и функция Грина  $\hat{G}_{F^s}(x, x') = \hat{F}^{-s} \delta(x, x')$  связаны прямым и обратным преобразованиями Меллина:

$$\hat{G}_{F^s}(x, x') = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \hat{K}_F(\tau|x, x'), \quad (2.25)$$

$$\hat{K}_F(\tau|x, x') = \frac{1}{2\pi i} \int_{w-i\infty}^{w+i\infty} ds \tau^{-s} \Gamma(s) \hat{G}_{F^s}(x, x'). \quad (2.26)$$

Такие преобразования оказывается удобным использовать для регуляризации различных расходящихся величин. Замечательно, что при этом можно одинаково успешно применять и комбинировать различные методы

<sup>2</sup> Заметим, что для ковариантного лапласиана мы вместо принятой для евклидова случая  $\Delta$  используем обозначение  $\square$ , как более подходящее в свете интересующих нас приложений, а кроме того, освобождающее символ  $\Delta$  для определителя Паули–Ван Флека–Моретт (2.47).

ковариантной регуляризации: размерную (когда размерность пространства-времени формально полагается отличающейся от физической на малую величину  $d = 4 + \varepsilon$ ),  $\zeta$ -функциональную [30] (основанную на некотором специальном аналитическом продолжении), метод раздвижки точек и т.д. (подробное обсуждение и сравнение различных методов регуляризации можно найти, например, в [4]).

Чтобы показать более конкретно, как именно это делается, предположим, что обратный пропагатор теории  $\hat{F}(\nabla)$  является минимальным оператором порядка  $2\nu$ , т.е. его старший член может быть представлен в виде  $\nu$ -й степени ковариантного лапласиана:

$$\hat{F}(\nabla) = \hat{1}(-\square)^\nu + \hat{P}(\nabla), \quad (2.27)$$

где

$$\hat{P}(\nabla) = \sum_{k=0}^{2\nu-1} \hat{P}_k^{a_1 \dots a_k} \nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_k} \quad (2.28)$$

включает все члены низшего порядка по производным. Тогда хорошо известно, что функция Грина  $\hat{G}_{F^s}(x, x')$  при  $s < d/2\nu$  стремится к бесконечности в пределе совпадения  $x' \rightarrow x$ . Соответственно, и функциональный след

$$\text{Tr} \hat{F}^{-s} = \int \sqrt{g} d^d x \text{tr} \hat{G}_{F^s}(x, x) \quad (2.29)$$

не определён при достаточно малых  $s$ . Однако функциональный след теплового ядра

$$\text{Tr} \exp(-\tau \hat{F}) = \int \sqrt{g} d^d x \text{tr} \hat{K}_F(\tau|x, x) \quad (2.30)$$

во всяком случае хорошо определён при  $\tau > 0$ . В свою очередь, так называемая операторная дзета-функция определяется как его преобразование Меллина

$$\zeta_F(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \text{Tr} \exp(-\tau \hat{F}). \quad (2.31)$$

Последний интеграл сходится всюду в области  $\text{Re } s > d/2\nu$  и определяет в ней аналитическую функцию, а в область  $\text{Re } s < d/2\nu$  функция  $\zeta_F(s)$  может быть аналитически продолжена. Тогда выражение для  $\text{Tr} \hat{F}^{-s}$  может быть регуляризовано следующим образом: вместо расходящегося выражения (2.29) положим

$$\text{Tr} \hat{F}^{-s} \stackrel{\text{reg}}{=} \zeta_F(s). \quad (2.32)$$

Далее, функциональный определитель оператора  $\hat{F}(\nabla)$  также можно естественно регуляризовать с помощью операторной дзета-функции

$$\text{Det} \hat{F}(\nabla) \stackrel{\text{reg}}{=} \exp(-\zeta'_F(0)) \quad (2.33)$$

(в математике это соотношение даже часто служит исходным определением [64]), а для однопетлевого эффективного действия теории можно получить выражение

$$\Gamma^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{F}(\nabla) \stackrel{\text{reg}}{=} -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \text{Tr} \exp(-\tau \hat{F}). \quad (2.34)$$

Таким образом, однопетлевое эффективное действие для теории с обратным пропагатором  $\hat{F}(\nabla)$  может быть выражено только через диагональные элементы  $x = x'$  теплового ядра  $\hat{K}_F(\tau|x, x')$  (заметим, что если мы захотим посчитать таким же образом вклады высших петель, то в них, вообще говоря, войдут уже недиагональные элементы с  $x \neq x'$ ). В случае минимального оператора (2.27) и многообразия без границы  $\partial\mathcal{M} = \emptyset$  хорошо известно, что в пределе совпадения  $x = x'$  теплового ядра имеет степенную асимптотику при малых значениях собственного времени  $\tau \rightarrow 0$ :

$$\hat{K}_F(\tau|x, x) = \tau^{-d/2\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \tau^{m/\nu} \hat{A}_m(F|x), \quad (2.35)$$

где коэффициенты теплового ядра  $\hat{A}_m(F|x)$  построены из коэффициентов оператора  $\hat{P}_k^{a_1 \dots a_k}$ , тензора Римана  $R^a{}_{bcd}$  и кривизны в расслоении  $\hat{\mathcal{R}}_{ab}$ .

Общий вид асимптотического разложения (2.35) диагонали теплового ядра определяется размерными соображениями. Действительно, ведь в пределе совпадения единственной величиной с отрицательной размерностью является собственное время  $\tau$ . Для минимального оператора порядка  $2\nu$  имеем

$$\dim \tau = -2\nu. \quad (2.36)$$

Тогда в разложении (2.35) общий префактор  $\tau^{-d/2\nu}$  отвечает за полную размерность теплового ядра  $\dim \hat{K}_F(\tau|x, x') = d$ , а каждое произведение под знаком суммы безразмерно, откуда имеем

$$\dim \hat{A}_m(F|x) = 2m. \quad (2.37)$$

Кроме этого, в пределе совпадения положительными размерностями обладают производные фоновых полей

$$\mathfrak{R} = \{R^a{}_{bcd}, \hat{\mathcal{R}}_{ab}, \hat{P}_k^{a_1 \dots a_k}\}, \quad \text{где } \dim \nabla = 1, \quad (2.38)$$

$$\dim R^a{}_{bcd} = \dim \hat{\mathcal{R}}_{ab} = 2, \quad \dim \hat{P}_k^{a_1 \dots a_k} = 2\nu - k. \quad (2.39)$$

Тогда коэффициенты теплового ядра в пределе совпадения строятся из свёрток производных фоновых полей с учётом общей фоновой размерности

$$\hat{A}_m(F|x) \propto \sum \nabla^l \mathfrak{R}^k, \quad \text{где } \dim(\nabla^l \mathfrak{R}^k) = 2m. \quad (2.40)$$

Таким образом, с точки зрения размерного анализа разложение (2.35) можно рассматривать как разложение по возрастающим степеням фоновой размерности, а собственное время  $\tau$  — просто как параметр, осуществляющий градуировку по размерности локальных членов  $\nabla^l \mathfrak{R}^k$ .

Итак, вычисление однопетлевого эффективного действия теории с помощью метода теплового ядра сводится к вычислению коэффициентов  $\text{tr} \hat{A}_m(F|x)$  как функций фоновых полей  $\mathfrak{R}$ . В случае, если оператор  $\hat{F}(\nabla)$  является оператором типа Лапласа, т.е. минимальным 2-го порядка, простой и элегантный метод нахождения коэффициентов теплового ядра был предложен ДеВиттом, он будет описан в следующем разделе. Но данный

метод напрямую не применим к тем теориям, для которых  $\hat{F}(\nabla)$  — оператор высшего порядка либо не минимален. Этому более общему случаю будет посвящён раздел 2.5.

### 2.3. Классический метод ДеВитта

Предложенный ДеВиттом способ позволяет вычислять коэффициенты теплового ядра для оператора типа Лапласа (т.е. минимального (2.27) второго порядка  $\nu = 1$ ). Такой оператор стандартно записывается в виде

$$\hat{F}(\nabla) = -\hat{1}\square + \hat{P} + \frac{\hat{1}}{6} R, \quad (2.41)$$

где "потенциальный член"  $\hat{P}(x)$  не содержит производных, т.е. является просто матрицей (так как от члена с производными первого порядка всегда можно избавиться переопределением ковариантной производной  $\nabla_a$ ), а член с  $R/6$  традиционно добавляется в целях удобства.

Но прежде чем мы перейдём к обсуждению метода ДеВитта, введём ещё несколько стандартных определений из области дифференциальной геометрии, которыми будем постоянно пользоваться в дальнейшем. Предел совпадения  $x = x'$  для некоторой двухточечной функции  $f(x, x')$  мы будем всюду обозначать квадратными скобками:

$$[f(x, x')] = f(x, x). \quad (2.42)$$

Мы считаем, что точки  $x$  и  $x'$  достаточно близки, чтобы между ними существовала единственная геодезическая. Тогда важная мировая функция Синга  $\sigma(x, x')$  определяется как половина квадрата геодезического расстояния между данными точками. Введём следующее сокращённое обозначение для производных мировой функции:

$$\sigma_{a_1 \dots a_n} = \nabla_{a_n} \dots \nabla_{a_1} \sigma. \quad (2.43)$$

В частности,  $\sigma^a(x, x') = \nabla^a \sigma$  — просто вектор в точке  $x$ , касательный к геодезической между точками  $x$  и  $x'$ , длина которого пропорциональна геодезическому расстоянию между ними. Тогда определение мировой функции можно переписать в виде

$$\sigma_a \sigma^a = 2\sigma. \quad (2.44)$$

Дифференцируя это основное соотношение, можно получить другое важное свойство

$$\sigma^b \sigma^a{}_b = \sigma^a. \quad (2.45)$$

В пределе совпадения, очевидно, будем иметь

$$[\sigma] = 0, \quad [\sigma^a] = 0, \quad [\sigma^a{}_b] = \delta_b^a. \quad (2.46)$$

Можно показать, что определитель Паули – Ван Флека – Моретт

$$\Delta(x, x') = \frac{\det(-\nabla_a \nabla_{b'} \sigma)}{\sqrt{g(x)g(x')}} \quad (2.47)$$

связан со скоростью расхождения геодезических  $\sigma^a{}_a$  следующим соотношением:

$$\sigma^a \nabla_a \Delta = \Delta(d - \sigma^a{}_a). \quad (2.48)$$

<sup>3</sup> Известные в литературе под самыми разными названиями, связаны с именами ДеВитта [1], Адамара [8], Минакшисундарамы [10, 11], Швингера [12], Силя [13] и Гилки [14] в различных комбинациях.

Аналогично определим тензор параллельного переноса  $\hat{\mathcal{I}}(x, x')$  вдоль геодезической, соединяющей точки  $x$  и  $x'$ , соотношениями

$$\sigma^a \nabla_a \hat{\mathcal{I}} = 0, \quad [\hat{\mathcal{I}}] = \hat{1}, \quad (2.49)$$

и введём следующие сокращённые обозначения для его производных:

$$\hat{\mathcal{I}}_{a_1 \dots a_n} = \nabla_{a_n} \dots \nabla_{a_1} \hat{\mathcal{I}}. \quad (2.50)$$

Пределы совпадения  $[\sigma_{a_1 \dots a_n}]$  и  $[\hat{\mathcal{I}}_{a_1 \dots a_n}]$  могут быть вычислены с использованием только правил коммутирования ковариантных производных (2.1), (2.2).

Теперь, когда даны все необходимые определения, перейдём непосредственно к рассмотрению метода ДеВитта. Его основная идея очень проста — в случае оператора типа Лапласа (2.41) воспользуемся следующим анзацем:

$$\hat{K}_F(\tau|x, x') = \frac{\Delta^{1/2}(x, x')}{(4\pi\tau)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\sigma(x, x')}{2\tau}\right) \times \sum_{m=0}^{\infty} \tau^m \hat{a}_m(F|x, x'), \quad (2.51)$$

где двухточечные матрично-значные функции  $\hat{a}_m(F|x, x')$  (не зависящие от собственного времени  $\tau$ ) мы будем называть НаМиДеВ-коэффициентами или просто коэффициентами теплового ядра. Конкретная форма этого анзаца и, в частности, наличие в нём степени определителя Паули–Ван Флека–Моретт  $\Delta^{1/2}(x, x')$  обусловлены аналогией с квазиклассическим приближением, в которой собственное время  $\tau$  играет роль, аналогичную роли постоянной Планка  $\hbar$ . Заметим, однако, что в принципе фактор  $\Delta^{1/2}$  можно было бы изменить или вовсе убрать, переопределив коэффициенты<sup>4</sup>  $\hat{a}_m(F|x, x')$ .

Теперь подставим анзац (2.51) в уравнение теплопроводности (2.23) для оператора (2.41), потребуем, чтобы члены при различных степенях собственного времени  $\tau$  независимо обращались в нуль, и упростим полученные уравнения с помощью соотношений (2.45) и (2.48). Тогда мы получим бесконечную цепочку рекуррентных соотношений:

$$(m + \sigma^a \nabla_a) \hat{a}_m = -\Delta^{-1/2} \hat{F}(\nabla) \Delta^{1/2} \hat{a}_{m-1}, \quad (2.52)$$

с начальным условием

$$\hat{a}_0 = \hat{\mathcal{I}}. \quad (2.53)$$

Если мы будем дифференцировать рекуррентные соотношения (2.52), а затем брать предел совпадения  $x = x'$ , то можем выразить предел совпадения  $[\nabla^k \hat{a}_{m+1}]$  через  $[\nabla^l \hat{a}_m]$ ,  $l \leq k + 2$ , и пределы  $[\sigma_{a_1 \dots a_n}]$  и  $[\hat{\mathcal{I}}_{a_1 \dots a_n}]$ . Последовательно вычисляя величины  $[\nabla^k \hat{a}_m]$ , мы получим точные локальные выражения для них в виде комбинаций свёрток ковариантных производных фоновых полей  $\mathfrak{R}$  (2.38).

В частности, для простейших пределов совпадения этот метод позволяет получить следующие известные

выражения (они могут быть найдены в [1] или в [48]):

$$[\hat{a}_0] = \hat{1}, \quad [\nabla_a \hat{a}_0] = 0, \quad [\nabla_a \nabla_b \hat{a}_0] = \frac{1}{2} \hat{\mathcal{R}}_{ab}, \quad (2.54)$$

$$[\hat{a}_1] = -\hat{P}, \quad [\nabla_a \hat{a}_1] = -\frac{1}{2} \nabla_a \hat{P} - \frac{1}{6} \nabla^b \hat{\mathcal{R}}_{ba}, \quad (2.55)$$

$$[\hat{a}_2] = \frac{1}{180} (R_{abcd} R^{abcd} - R_{ab} R^{ab} + \square R) \hat{1} + \frac{1}{2} \hat{P}^2 + \frac{1}{12} \hat{\mathcal{R}}_{ab} \hat{\mathcal{R}}^{ab} - \frac{1}{6} \square \hat{P}. \quad (2.56)$$

Метод ДеВитта не позволяет получить замкнутые выражения для коэффициентов  $\hat{a}_m(x, x')$  вне предела совпадения. Однако они могут быть восстановлены по пределам совпадения  $[\nabla^k \hat{a}_m]$  с помощью разложения в ковариантный ряд Тейлора. То, что эта процедура может быть последовательно проведена, подтверждает корректность исходного выбора анзаца (2.51).

В пределе совпадения  $x = x'$  экспонента и определитель  $\Delta^{1/2}$  в разложении (2.51) исчезают и мы получаем известную асимптотику для диагонали теплового ядра (2.35) с коэффициентами

$$\hat{A}_m(F|x) = (4\pi)^{-d/2} [\hat{a}_m(F|x, x')]. \quad (2.57)$$

#### 2.4. Ультрафиолетовые расходимости и аномалии

Будем пользоваться размерной регуляризацией, формально полагая размерность пространства равной  $2\omega$ , а чётную физическую размерность  $d$ , не обязательно равную 4, считая фиксированной. Тогда снятие регуляризации будет соответствовать пределу  $\omega \rightarrow d/2$ . Кроме того, для устранения инфракрасных расходимостей введём в оператор теории (2.27) дополнительное постоянное массовое слагаемое  $\hat{1} m^2$ . Тогда взятие интеграла по собственному времени  $\tau$  в выражении (2.34) с учётом асимптотического разложения для диагонали теплового ядра (2.35), (2.57) приведёт к следующему разбиению однопетлевого эффективного действия на расходящуюся, логарифмическую и конечную части [1, 48, 65]:

$$\Gamma^{(1)} = \Gamma_{\text{div}} + \Gamma_{\text{log}} + \Gamma_{\text{fin}}, \quad (2.58)$$

каждая из которых представима в виде разложения по обратным степеням  $m^2$ :

$$\Gamma_{\text{div}} = \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \sum_{n=0}^{d/2} \left[ \frac{1}{\omega - d/2} - \psi\left(\frac{d}{2} - n + 1\right) \right] \times \frac{(-m^2)^{d/2-n}}{(d/2 - n)!} \int \sqrt{g} d^d x \text{tr} [\hat{a}_n], \quad (2.59)$$

$$\Gamma_{\text{log}} = \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \ln \frac{m^2}{\mu^2} \sum_{n=0}^{d/2} \frac{(-m^2)^{d/2-n}}{(d/2 - n)!} \int \sqrt{g} d^d x \text{tr} [\hat{a}_n], \quad (2.60)$$

$$\Gamma_{\text{fin}} = -\frac{m^d}{2(4\pi)^{d/2}} \sum_{n=d/2+1}^{\infty} \frac{\Gamma(n - d/2)}{m^{2n}} \int \sqrt{g} d^d x \text{tr} [\hat{a}_n], \quad (2.61)$$

$\psi(z)$  в выражении для  $\Gamma_{\text{div}}$  — дигамма-функция (логарифмическая производная гамма-функции), а  $\mu^2$  в выражении для  $\Gamma_{\text{log}}$  — некоторый массовый параметр, отражающий неоднозначность процедуры перенормировки.

<sup>4</sup> Как мы увидим в дальнейшем, метод обобщённого преобразования Фурье действительно порождает разложение (3.43), в которое определитель  $\Delta$  входит в другой степени.

Очевидно, это асимптотическое разложение для эффективного действия имеет смысл только в том случае, когда  $[\hat{a}_n] \ll m^{2n}$ , т.е. когда, ввиду (2.40), фоновые поля и их производные малы по сравнению с соответствующей степенью массового параметра  $\nabla^l \mathcal{R}^n \ll m^{2n+l}$ .

Простейшим примером этого локального разложения является эффективный потенциал Коулмана – Вайнберга [66] для 4-мерного скалярного поля с самодействием  $\lambda\varphi^4/12$ . В случае, когда среднее поле постоянно и эффективно играет роль массового параметра  $m^2 = \lambda\varphi^2$ , логарифмическая часть (2.60) представлена единственным ненулевым НаМиДеW-коэффициентом  $a_0 = 1$  и представляет собой интеграл эффективного потенциала по пространству-времени:

$$\Gamma_{\text{CW}} = \int d^4x \frac{\lambda^2 \varphi^4}{64\pi^2} \ln \frac{\lambda\varphi^2}{\mu^2}. \quad (2.62)$$

Важным приложением локального разложения является вычисление аномалии в следе тензора энергии-импульса, связанной с нарушением локальной вейлевской инвариантности при перенормировке ультрафиолетовых расходимостей. В случае чётной размерности  $d$  расходящаяся часть действия и аномалия следа определяются коэффициентом  $\text{tr}[\hat{a}_{d/2}]$ . В частности, при  $d = 4$  имеем

$$\Gamma_{\text{div}} = -\frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{2-\omega} \int \sqrt{g} d^4x \text{tr}[\hat{a}_2], \quad (2.63)$$

$$\langle T_a^a \rangle = \frac{2g_{ab}}{\sqrt{g}} \frac{\delta\Gamma}{\delta g_{ab}} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \text{tr}[\hat{a}_2]. \quad (2.64)$$

Точное вычисление показывает [4, 48], что для конформноинвариантной теории с  $N_0$  вещественными скалярными полями,  $N_{1/2}$  дираковскими фермионами и  $N_1$  векторными мультиплетами (включая соответствующие вклады духов Фаддеева – Попова) искомым коэффициент может быть записан в виде

$$\frac{1}{(4\pi)^2} \text{tr}[\hat{a}_2] = cW^2 - aE - b\Box R, \quad (2.65)$$

где  $W^2 = W_{abcd}W^{abcd}$  — квадрат конформного тензора Вейля, а  $E = R_{abcd}R^{abcd} - 4R_{ab}R^{ab} + R^2$  — плотность Гаусса – Бонне. Коэффициенты  $a$  и  $c$  определяются простыми формулами (показывающими, что вклад каждой частицы в аномалию определяется только её типом):

$$a = \frac{1}{360(4\pi^2)} (N_0 + 11N_{1/2} + 62N_1), \quad (2.66)$$

$$c = \frac{1}{120(4\pi^2)} (N_0 + 6N_{1/2} + 12N_1). \quad (2.67)$$

а коэффициент  $b$  при  $\Box R$  оказывается схемозависимым (он равен  $-2c/3$  при размерной регуляризации и  $-c$  при дзета-функциональной).

## 2.5. Метод универсальных функциональных следов

Однако, описанная выше техника ДеВитта существенно опирается на выбор анзаца (2.51) и непосредственно применима исключительно к операторам типа Лапласа (2.41), но не к минимальным операторам (2.27) высшего порядка  $\nu > 1$ , а тем более не к неминимальным операторам, т.е. таким, которые не могут быть представлены в виде (2.27).

Действительно, как легко можно непосредственно проверить, наивная подстановка девиговского анзаца (2.51) в уравнение теплопроводности (2.23) для минимального оператора высшего порядка (2.27) приводит к противоречивым уравнениям. А предпринимавшиеся время от времени попытки модифицировать анзац (2.51) (например, [67]) исходя из квазиклассического приближения или других соображений не увенчались успехом<sup>5</sup>.

Однако эти более общие операторы также чрезвычайно важны для приложений. Так, минимальные операторы высшего порядка возникают в теориях гравитации с высшими производными, а также в других случаях. Типичным примером являются так называемые "конформно-ковариантные дифференциальные операторы", такие как оператор Паница 4-го порядка

$$\Delta_4 = \Box^2 + 2R^{ab}\nabla_a\nabla_b - \frac{2}{3}R\Box + \frac{1}{3}(\nabla^a R)\nabla_a \quad (2.68)$$

и его аналоги, изучению операторов такого типа посвящена обширная литература (см., например, [68–70]). Неминимальные операторы возникают уже в простейшем случае электродинамики, рассматриваемой в общей лоренц-ковариантной калибровке, с оператором

$$\hat{F}(\nabla) = F_b^a(\nabla) = -\delta_b^a\Box + \lambda\nabla^a\nabla_b + \dots, \quad (2.69)$$

для широкого класса таких калибровок в обычной эйнштейновской гравитации [48] и в моделях модифицированной гравитации [28, 29].

Важность минимальных операторов высшего порядка и неминимальных операторов обусловила развитие непрямых методов, тем или иным образом сводящих задачу вычисления коэффициентов теплового ядра для этих классов операторов к более простой задаче для операторов типа Лапласа, которую уже можно решить методом ДеВитта. Наиболее общим из таких непрямых методов является так называемый метод "универсальных функциональных следов" [48, 71].

Сущность данного метода может быть пояснена на примере теории с высшими производными, обратный пропагатор которой даётся оператором (2.27). Однопетлевой функциональный детерминант такой теории

$$\text{Tr} \ln \left( \hat{1}(-\Box)^\nu + \hat{P}(\nabla) \right) = \nu \text{Tr} \ln \Box + \text{Tr} \ln \left( \hat{1} + \frac{\hat{P}(\nabla)}{(-\Box)^\nu} \right) \quad (2.70)$$

может быть разложен в ряд по степеням нелокального возмущения  $\hat{P}(\nabla)/(-\Box)^\nu$ . Если мы после этого прокоммутируем все степени  $P(\nabla)$  налево, а все обратные степени  $\Box$  — направо, то получим, что результат может быть выражен в виде бесконечного ряда пределов совпадения

$$\left[ \nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_n} \frac{1}{(-\Box)^m} \delta(x, x') \right], \quad (2.71)$$

свёрнутых с некоторыми тензорами возрастающей размерности. Универсальные функциональные следы (2.71) уже могут быть вычислены с помощью метода ДеВитта,

<sup>5</sup> Как мы увидим во второй части работы, полученные недавно результаты о наличии в данном случае слагаемых при сколь угодно больших отрицательных степенях  $\tau$  проясняют причину, по которой эти попытки изначально были обречены на неудачу.



поскольку  $m$ -я степень обратного лапласиана может быть легко получена в виде интеграла по собственному времени от теплового ядра оператора  $\square$  (см. формулу (2.25)).

Метод универсальных функциональных следов показал себя чрезвычайно эффективным, в частности, при вычислении бета-функций  $(3+1)$ -мерной проективной модели гравитации типа Хоравы [46, 47]. Эту задачу в настоящее время невозможно решить с помощью обычной диаграммной техники в импульсном пространстве над плоским фоном — в силу необходимости вычисления сотен тысяч фейнмановских диаграмм.

### 3. Внедиагональные разложения теплового ядра для минимальных операторов высшего порядка

Несмотря на то что метод универсальных функциональных следов, по крайней мере в случае однопетлевого приближения, в принципе позволяет вычислить всё, что нам необходимо, он обладает одним очень существенным недостатком — как видно из выражения (2.71), он непосредственно оперирует только с пределами совпадения. Однако структура теплового ядра  $\hat{K}_F(\tau|x, x')$  вне его диагонали при  $x \neq x'$  также может быть важна (например, если мы захотим вычислить вклады высших петель).

Кроме того, как ясно из рассмотрения метода ДеВитта, коэффициенты  $\hat{a}_m(x, x')$  входят в рекуррентные соотношения (2.52) именно как двухточечные функции, а не как пределы совпадения  $[\hat{a}_m]$ . Вычисление даже только пределов совпадения  $[\hat{a}_m]$  требует знания пределов совпадения от производных низших коэффициентов  $[\nabla^k \hat{a}_l]$ ,  $l < m$ . Таким образом, диагональ теплового ядра определяется его общей структурой вне диагонали при  $x \neq x'$ . Поэтому естественно ожидать, что прояснение и учёт деталей данной структуры могут помочь в разработке новых, более эффективных методов вычисления даже пределов совпадения  $x = x'$ . Разработанные к настоящему моменту не прямые методы просто не интересуются структурой теплового ядра вне диагонали. Это именно тот пробел, на заполнение которого направлено исследование внедиагональных разложений.

#### 3.1. Размерный анализ

Несколько лучше природу тех трудностей, с которыми мы сталкиваемся при попытке обобщить метод ДеВитта на случай операторов высшего порядка, можно понять с помощью размерного анализа. Как мы отмечали в обсуждении после формулы (2.35), общий вид асимптотического разложения диагонали теплового ядра определяется размерными соотношениями.

Однако вне предела совпадения при  $x \neq x'$  ситуация становится гораздо более сложной — поскольку в данном случае, помимо собственного времени  $\tau$ , появляются две другие величины отрицательной размерности:

$$\dim \sigma = -2 \quad \text{и} \quad \dim \sigma^a = -1, \quad (3.1)$$

из которых можно построить безразмерные комбинации

$$\frac{\sigma}{\tau^{1/v}} \quad \text{и} \quad \frac{\sigma^a}{\tau^{1/2v}}. \quad (3.2)$$

Их появление не запрещено размерными соотношениями, а потому в разложение теплового ядра вне

диагонали в принципе могут входить члены со сколь угодно высокими степенями таких безразмерных комбинаций. Но это, очевидно, приводило бы к появлению сколь угодно больших отрицательных степеней собственного времени  $\tau$ .

Если мы вернёмся в свете подобных рассуждений к девиттовскому анзацу (2.51) для случая  $v = 1$ , то поймём, что в появлении отрицательных степеней  $\tau$  вне предела совпадения в действительности нет ничего странного, оно и в самом деле происходит — для этого достаточно разложить в ряд экспоненциальный фактор  $\exp(-\sigma/2\tau)$ ! Некоторое чудо заключается как раз в обратном: в том, что в случае операторов типа Лапласа разложение теплового ядра вне предела совпадения устроено замечательным образом — все отрицательные степени  $\tau$  пересуммируются в один-единственный экспоненциальный множитель  $\exp(-\sigma/2\tau)$ , регулярный в пределе совпадения  $x = x'$  (так что, как это и должно быть, отрицательные степени  $\tau$  в нём исчезают), но имеющий существенную особенность при  $\tau \rightarrow 0$ . Во всяком случае, существование девиттовского анзаца никак не следует из размерных соображений, а потому с точки зрения одного анализа размерностей кажется просто случайным фактом.

Поэтому мы не можем *a priori* ожидать, что для минимальных операторов высшего порядка обязательно должно иметь место аналогичное пересуммирование. Это даёт простор для широкого спектра различных мнений. С одной стороны, оптимист мог бы заявить, что возможность такого пересуммирования должна следовать из квазиклассического приближения. Последнее означало бы, что общая схема метода ДеВитта может быть без существенных изменений перенесена на случай операторов высшего порядка. С другой стороны, пессимист мог бы столь же обоснованно высказать сомнения в существовании какой-либо обзримой структуры вне предела совпадения, указав на то, что степени выражения  $\sigma^a/\tau^{1/2v}$  могут приводить ко всё более сложным тензорным выражениям при всё более низких степенях  $\tau$ .

Разрешить этот воображаемый спор способно только конкретное исследование структуры теплового ядра вне предела совпадения, что обуславливает важность рассматриваемой задачи. Полученные нами в последнее время результаты показывают, что истина, как это обычно бывает, находится точно посередине — с одной стороны, пересуммирование безразмерных комбинаций  $\sigma/\tau^{1/v}$  в некоторые новые спецфункции, аналогичные экспоненте в девиттовском анзаце, действительно происходит, что приводит к по-своему красивой структуре внедиагональных разложений теплового ядра. Однако, с другой стороны, такое пересуммирование больше не является полным — разложение осуществляется теперь в виде функционального ряда по специальным функциям, причём остаются члены, в которых отрицательные степени  $\tau$  сохраняются в качестве свободных множителей<sup>6</sup>.

Таким образом, обобщение девиттовского разложения (2.51) на случай минимальных операторов высшего

<sup>6</sup> Что касается квазиклассического приближения, то его неприменимость в случае операторов высшего порядка подробно обсуждалась нами в работе [72]. Дело оказывается в том, что асимптотики теплового ядра можно получить методом перевала [73] в пределе  $z = \sigma/2\tau^{1/v} \rightarrow \infty$ . Однако при  $v > 1$  в пределе совпадения  $\sigma \rightarrow 0$  соответствующие функции оказываются сингулярными и поэтому не могут быть использованы в качестве анзаца.

порядка может быть построено. Причём оно может рассматриваться как градиентное разложение по фоновой размерности, т.е. как именно то, что необходимо для эффективной квантовой теории поля. Однако наличие в нём членов со сколь угодно большими отрицательными степенями  $\tau$  делает невозможным построение системы рекуррентных соотношений на их коэффициенты, аналогичной (2.52). Несмотря на это, мы разработали сразу два согласованных друг с другом алгоритма для вычисления таких обобщённых коэффициентов — на основе так называемого "обобщённого преобразования Фурье" и по теории возмущений. В некотором смысле наши методы дают даже больше, чем метод ДеВитта, ведь последний позволяет получать ответы в виде пределов совпадений  $[\nabla^k \hat{a}_m]$ , в то время как мы способны сразу получать замкнутые выражения для коэффициентов, как двухточечных функций при  $x \neq x'$ .

### 3.2. Обобщённые экспоненциальные функции

Начнём с объяснения очень простой идеи, ставшей, тем не менее, стартовой точкой для всего последующего исследования. Сначала в девиттовском анзаце (2.51) переопределим коэффициенты  $\hat{a}_m(F|x, x')$ , спрятав в них общий префактор  $\Delta^{1/2}(x, x')$ , а затем запишем разложение в виде функционального ряда:

$$\hat{K}_F(\tau|x, x') = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{K}_m(\sigma, \tau) \hat{a}_m(F|x, x'), \quad (3.3)$$

$$\mathbb{K}_m(\sigma, \tau) = \frac{\tau^m}{(4\pi\tau)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2\tau}\right). \quad (3.4)$$

Пока это просто переписывание, в котором нет ничего нового и которое поэтому не выглядит особенно полезным.

Однако теперь мы можем заметить, что, во-первых, функции  $\mathbb{K}_m(\sigma, \tau)$  последовательным действием ковариантной производной  $\nabla_a$  сводятся к единственной основной функции  $\mathbb{K}_0(\sigma, t)$  и что, во-вторых, последняя есть просто тепловое ядро ковариантного лапласиана  $-\square = -g^{ab}\nabla_a\nabla_b$  в плоском  $d$ -мерном пространстве.

Соответственно, если мы хотим получить какое-то обобщение девиттовского разложения (2.51) на случай минимальных операторов высшего порядка, естественно вначале найти тепловое ядро для его члена старшего порядка, т.е. для степени лапласиана  $(-\square)^v$ , также в плоском  $d$ -мерном пространстве.

В работе [74] мы получили, что соответствующее тепловое ядро имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_0^{(v,d)}(\sigma, \tau) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \exp(-\tau k^{2v} + ik_a \sigma^a) = \\ &= \frac{1}{(4\pi\tau^{1/v})^{d/2}} \mathcal{E}_{v,d/2}\left(-\frac{\sigma}{2\tau^{1/v}}\right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где функции  $\mathcal{E}_{v,\alpha}(z)$  специально выбраны именно таким образом, чтобы выполнять ту же роль, что и экспонента в привычном девиттовском разложении (2.51). Именно этим обуславливается используемое нами название "обобщённые экспоненциальные функции (ОЭФ)".

Эти обобщённые экспоненты  $\mathcal{E}_{v,\alpha}(z)$  играют ключевую роль во всём нашем дальнейшем исследовании. Поэтому ниже мы приводим краткую сводку тех их свойств, которые понадобятся нам далее. Другие их

свойства вместе с их выводом и подробным обсуждением можно найти в работе [72].

Обобщённые экспоненты могут быть определены через интеграл Меллина – Барнса:

$$\mathcal{E}_{v,\alpha}(-z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varepsilon_{v,\alpha}(s) z^{-s} ds, \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{v,\alpha}(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma((\alpha-s)/v)}{v\Gamma(\alpha-s)} = \int_0^\infty z^{s-1} \mathcal{E}_{v,\alpha}(-z) dz, \quad (3.7)$$

где контур интегрирования  $C$  проходит в комплексной плоскости таким образом, что разделяет полюсы функции  $\Gamma(s)$ , уходящие налево, и полюсы функции  $\Gamma((\alpha-s)/v)$ , уходящие направо.

Непосредственно из этого определения видно, что при  $v = 1$  ситуация сводится к уже известной:

$$\mathcal{E}_{1,\alpha}(z) = \exp z, \quad (3.8)$$

а тепловые ядра (3.5) — к функции  $\mathbb{K}_0(\sigma, t)$ .

Обобщённые экспоненты  $\mathcal{E}_{v,\alpha}(z)$  относятся к так называемым  $H$ -функциям Фокса или, точнее, к  $\Psi$ -функциям Фокса – Райта. В своём исследовании свойств  $\mathcal{E}_{v,\alpha}(z)$  мы существенно использовали развитую теорию этих специальных функций (см. [72]).

Так, если в формуле (3.6) мы замкнём контур  $C$  слева и возьмём интеграл с помощью вычетов, то получим степенной ряд

$$\mathcal{E}_{v,\alpha}(z) = \frac{1}{v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma((\alpha+m)/v)}{\Gamma(\alpha+m)} \frac{z^m}{m!}. \quad (3.9)$$

При  $v > 1/2$  этот ряд всюду сходится, и, таким образом, он является рядом Тейлора целой функции  $\mathcal{E}_{v,\alpha}(z)$ . Наоборот, если мы замкнём контур справа, то при нецелых  $v$  получим степенную асимптотику функции  $\mathcal{E}_{v,\alpha}(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  (при целых  $v$  полюсы гамма-функций в числителе и знаменателе взаимно сокращаются, и мы будем иметь уже не степенную, а экспоненциальную асимптотику). Интересно отметить, что при  $v < 1/2$  ситуация противоположна: ряд по обратным степеням  $z^{-1}$  начинает всюду сходиться, а ряд по степеням  $z$  становится асимптотическим (а при критическом значении  $v = 1/2$  функция находится точно).

Другим ключевым свойством обобщённых экспонент является замечательное правило дифференцирования:

$$\frac{d^\beta}{dz^\beta} \mathcal{E}_{v,\alpha}(z) = \mathcal{E}_{v,\alpha+\beta}(z). \quad (3.10)$$

Свойства обобщённых экспонент были очень подробно исследованы в [72]. В частности, было получено несколько могущих оказаться полезными интегральных представлений для таких функций, замечена их связь с функциями Бесселя и Бесселя – Клиффорда, получены экспоненциальные асимптотики при  $z \rightarrow \infty$  для случая целых  $v$  (что является довольно тонкой задачей) и показана их согласованность с ответом, подсказываемым более привычным методом перевала. Из любопытных свойств этих функций следует отметить то, что, в отличие от экспоненты,  $\mathcal{E}_{v,\alpha}(-z)$  при  $z \rightarrow \infty$  убывает не монотонно, а осциллирующим образом. За всеми подробностями мы отсылаем заинтересованного читателя к цитируемой работе.

Из новых свойств, которых нет в [72], для нас сейчас важна дополнительная связь между обобщёнными экспонентами при целых  $v$ . Нетрудно проверить, что в этом случае они удовлетворяют уравнению

$$\prod_{k=1}^{v-1} \left( z \frac{d}{dz} + \alpha + k \right) \mathcal{E}_{v, \alpha+v}(z) = \frac{1}{v} \mathcal{E}_{v, \alpha}(z). \quad (3.11)$$

**3.3. Степени оператора типа Лапласа**

Однако может возникнуть вопрос: даже если мы знаем, что обобщённая экспонента возникает в тепловом ядре степени лапласиана в случае плоского пространства, откуда возникает уверенность, что эти функции играют важную роль в общем случае минимальных операторов на искривлённом фоне? Частичным ответом на него является задача о нахождении разложения теплового ядра для степени оператора типа Лапласа (которая, помимо того, ляжет в основу метода, развиваемого в разделе 3.5).

Итак, пусть нам дан некоторый оператор типа Лапласа  $\hat{H}(\nabla)$  (2.41), разложение теплового ядра которого имеет вид (3.3). Мы хотим получить аналогичное разложение теплового ядра для степени данного оператора  $\hat{H}^v(\nabla) = \hat{H}^v(\nabla)$ . Это можно довольно просто сделать с помощью технического приёма с прямым/обратным преобразованием Меллина (2.25), (2.26).

Вначале, подставив разложение (3.3) в преобразование (2.25) и проинтегрировав ряд почленно, получим разложение для функции Грина:

$$\hat{G}_{H^v}(x, x') = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{G}_m(s, \sigma) \hat{a}_m(H|x, x'), \quad (3.12)$$

где базисные функции Грина  $\mathbb{G}_m(s, \sigma)$  даются интегралом

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_m(s, \sigma) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{s-1} \mathbb{K}_m(\tau, \sigma) = \\ &= \frac{\Gamma(d/2 - m - s)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(s)} \left( \frac{\sigma}{2} \right)^{s+m-d/2}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

легко берущимся с помощью замены  $z = \sigma/2\tau$  и определения гамма-функции.

Теперь в свою очередь подставим уже разложение (3.12) в преобразование (2.26) для степени оператора  $\hat{H}^v$ . Вновь проинтегрировав ряд почленно, найдём следующее разложение теплового ядра:

$$\hat{K}_{H^v}(\tau|x, x') = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{K}_m^{(v,d)}(\tau, \sigma) \hat{a}_m(H|x, x'), \quad (3.14)$$

где новые базисные ядра  $\mathbb{K}_m^{(v,d)}(\tau, \sigma)$  даются интегралом

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_m^{(v,d)}(\tau, \sigma) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{w-i\infty}^{w+i\infty} ds \tau^{-s} \Gamma(s) \mathbb{G}_m(vs, \sigma) = \\ &= \frac{\tau^{(m-d/2)/v}}{(4\pi)^{d/2}} \mathcal{E}_{v, d/2-m} \left( -\frac{\sigma}{2\tau^{1/v}} \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

с помощью замен  $z = \sigma/2\tau^{1/v}$  и  $\mu = d/2 - m - vs$  сводящемуся к определению обобщённой экспоненты (3.6).

Таким образом, мы убедились в том, что тепловое ядро для степени оператора типа Лапласа  $\hat{H}^v$  вне диагонали  $x \neq x'$  имеет разложение (3.14), аналогичное по форме девиттовскому разложению (3.3) для исходного оператора. Более того, в качестве коэффициентов в раз-

ложении для степени оператора выступают те же самые НаMiDeW-коэффициенты  $\hat{a}_m(H|x, x')$  исходного оператора  $\hat{H}(\nabla)$ .

Различие возникает только в том, что исходные базисные ядра (3.4) заменяются в нём на новые базисные ядра (3.15). Причём если в каждое исходное базисное ядро  $\mathbb{K}_m(\sigma, \tau)$  входила одна и та же экспонента  $\exp(-\sigma/2\tau)$ , которая поэтому могла быть вынесена за знак суммы, и разложение (3.3) становилось степенным рядом по собственному времени  $\tau$ , то в каждое новое базисное ядро  $\mathbb{K}_m^{(v,d)}(\tau, \sigma)$  входит уже своя собственная обобщённая экспонента  $\mathcal{E}_{v, d/2-m}(-\sigma/2\tau^{1/v})$ . Эти различные функции уже не могут быть вынесены за знак суммирования, и поэтому разложение (3.14) является уже не степенным, а функциональным рядом.

Если теперь в разложении для степени  $\hat{H}^v$  мы перейдём к пределу совпадения  $x = x'$ , подставляя значения обобщённых экспонент в нуле  $\mathcal{E}_{v, \alpha}(0) = \Gamma(\alpha/v)/v\Gamma(\alpha)$ , то получим

$$\hat{K}_{H^v}(t|x, x) = t^{-d/2v} \sum_{m=0}^{\infty} t^{m/v} \hat{A}_m(H^v|x), \quad (3.16)$$

$$\hat{A}_m(H^v|x) = \frac{\Gamma((d/2 - m)/v)}{v\Gamma(d/2 - m)} \hat{A}_m(H|x). \quad (3.17)$$

Эта формула есть полученная новым способом хорошо известная формула Фегана – Гилки [17], а свойство коэффициентов теплового ядра сохранять свою форму при возведении оператора в степень как раз и называется в математической литературе "свойством функториальности".

Рассмотрение разложений теплового ядра вне диагонали  $x \neq x'$  существенно упрощает доказательство соответствующих свойств по сравнению с обычно принятым в математической литературе подходом, оперирующим с операторными  $\zeta$ -функциями исключительно в пределе совпадения  $x = x'$ . При этом в нашем подходе не возникает ничего похожего на появление загадочных членов, логарифмических по собственному времени  $\tau$ . Вокруг таких членов в литературе долгое время ведётся дискуссия (см., например, [75]), но в свете нашего похода кажется, что они, по-видимому, представляют собой просто артефакт использовавшегося метода. Более того, приведённые выше преобразования являются только самым простым примером общей схемы рассуждений, которая может быть без серьёзных затруднений распространена на гораздо более широкую область: с операторов типа Лапласа — на общие минимальные операторы высшего порядка и даже некоторые типы неминимальных (причинных) операторов, от теплового ядра степени оператора  $\exp(-t\hat{H}^v)$  — к функциям более общего вида, например,  $\hat{H}^{-\mu} \exp(-t\hat{H}^v)$  или  $(\hat{H}^\mu + \lambda)^{-1}$  и т.д. Соответствующим вопросам, связанным с подобной "обобщённой функториальностью", будет посвящена работа [76], в настоящее время готовящаяся к публикации.

Степень оператора типа Лапласа  $\hat{H}^v(\nabla) = \hat{H}^v(\nabla)$  является простейшим минимальным оператором высшего порядка  $2v$ . Поэтому возникает сильное искушение попробовать использовать полученное для неё разложение (3.14) в качестве замены девиттовского анзаца для случая минимальных дифференциальных операторов общего вида (2.27). Однако нетрудно непосредственно убедиться, что подстановка разложения (3.14) в уравнение теплопроводности (2.23) не приводит к непротиворечивой

цепочке рекуррентных соотношений. Отсюда следует сделать тот вывод, что для минимального оператора, не представимого в виде степени, разложение в действительности имеет более сложную структуру, которая, однако, некоторым образом сводится к (3.14) в частном случае степени оператора типа Лапласа. В следующих разделах мы подтвердим такой предварительный вывод, получив разложение для общего минимального оператора сразу двумя методами: с помощью так называемого "обобщённого преобразования Фурье", а также используя результаты настоящего раздела, по теории возмущений (над степенью оператора в качестве невозмущённого случая). Помимо двух вычислительных алгоритмов, которые интересно сравнить как между собой, так и с методом универсальных функциональных следов, это позволит нам ответить на вопрос о причине неудач обобщения девиаттского метода и невозможности построить обобщённые рекуррентные соотношения в координатном представлении.

### 3.4. Обобщённое преобразование Фурье

Использование преобразования Фурье лежит в основе изучения (псевдо)дифференциальных операторов и их спектральной геометрии (см., например, [13, 14]). Однако в большинстве математических текстов оно применяется в не слишком удобной координатной форме. В полностью ковариантной форме метод преобразования Фурье на искривлённом пространстве-времени был развит в виде "символического исчисления" Гарольда Видома [77–79]. В этой форме он был успешно применён к вычислению пределов совпадения коэффициентов теплового ядра Гусыниным с соавторами [49–54].

В отличие от указанных работ, мы используем обобщённое преобразование Фурье для выяснения структуры теплового ядра вне диагонали при  $x \neq x'$ . Соответствующий алгоритм в связи с обобщёнными экспоненциальными функциями был подробно рассмотрен нами в работе [80]. В данном разделе мы воспроизведём основные этапы его получения, опуская технические детали и отсылая заинтересованного читателя к процитированной работе.

Прежде чем перейти к обсуждению самого метода, введём в целях удобства следующее сокращённое обозначение, которым будем пользоваться в дальнейшем. Мы будем систематически опускать свёртки по повторяющимся индексам, записывая вместо этого

$$\hat{F}_k * \nabla^k = \hat{F}_k^{a_1 \dots a_k} \nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_k}. \quad (3.18)$$

Тогда произвольный дифференциальный оператор порядка  $N$  (действующий на набор полей  $\varphi(x) = \varphi^A(x)$ , о чём напоминают шляпки) может быть записан в виде

$$\hat{F}(\nabla) = \sum_{k=0}^N \hat{F}_k(x) * \nabla^k. \quad (3.19)$$

Заметим, что, хотя мы в настоящей работе с самого начала ограничили себя исключительно случаем риманова пространства-времени, метод обобщённого преобразования Фурье и основанные на нём дальнейшие рассуждения применимы в гораздо более широком контексте теорий с кручением и неметричностью, когда связность  $\nabla_a$  больше не определяется метрикой  $g_{ab}$ . Обсуждение подробностей можно найти в [80], и здесь мы не будем на нём останавливаться.

Вектор  $\sigma^{a'}(x, x')$  можно рассматривать как обобщение вектора  $x' - x$  между точками в плоском пространстве. Метод обобщённого преобразования Фурье в искривлённом пространстве основывается на ковариантном представлении дельта-функции в виде интеграла по "плоским волнам"  $\exp(ik_b \sigma^{b'})$ , где  $k_b$  — кокасательный вектор в точке  $x'$ . Это представление имеет вид<sup>7</sup>

$$\hat{1}\delta(x, x') = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \exp(ik_a \sigma^{a'}) \hat{\mathcal{I}}(x, x'). \quad (3.20)$$

В действительности вместо тензора параллельного переноса  $\hat{\mathcal{I}}(x, x')$  мы, конечно же, могли бы выбрать любую другую матрично-значную двухточечную функцию, дающую в пределе совпадения единичную матрицу  $\hat{1}$ , а кроме того, обладающую правильными трансформационными свойствами по обоим аргументам  $x$  и  $x'$  (по указанной причине постоянная матрица  $\hat{1}$  не подходит для ковариантного формализма). Данному методу присуща некоторая неустранимая неоднозначность, которая, тем не менее, не должна влиять на окончательные ответы, полученные интегрированием по импульсам. В связи с этим наш выбор с тензором  $\hat{\mathcal{I}}(x, x')$  представляется наиболее простым и естественным.

Поддействуем операторной экспонентой  $\exp(-\tau \hat{F}(\nabla))$  на представление (3.20) и прокоммутируем плоские волны с оператором  $\hat{F}(\nabla)$  согласно соотношению

$$\exp(-ik_b \sigma^{b'}) \hat{F}(\nabla_a) \exp(ik_b \sigma^{b'}) = \hat{F}(\nabla_a + ik_b \sigma_a^{b'}), \quad (3.21)$$

где  $\sigma_a^{b'}(x, x') = \nabla_a \sigma^{b'}(x, x')$ . В результате получим следующее интегральное представление для теплового ядра (здесь и далее фурье-образы мы обозначаем жирным шрифтом):

$$\hat{K}(\tau|x, x') = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \exp(ik_a \sigma^{a'}) \hat{\mathbf{K}}(\tau, \mathbf{k}|x, x'), \quad (3.22)$$

$$\hat{\mathbf{K}}(\tau, \mathbf{k}|x, x') = \exp[-\tau \hat{F}(\nabla_a + ik_b \sigma_a^{b'})] \hat{\mathcal{I}}(x, x'). \quad (3.23)$$

Казалось бы, выражение (3.23) уже само по себе является решением для фурье-образа теплового ядра в замкнутой форме, и мы могли бы просто разложить соответствующую операторную экспоненту в степенной ряд. Такой способ действия, однако, не приведёт нас к конечной цели — разложению по степеням фоновой размерности  $1/l$ , поскольку оператор  $\hat{F}(\nabla_a + ik_b \sigma_a^{b'})$  содержит в себе старший член, имеющий нулевую фоновую размерность  $\dim \hat{F}_N^{a_1 \dots a_N}(x) = 0$ . Поэтому наша задача состоит в том, чтобы явно выделить из операторной экспоненты  $\mathcal{O}(1/l^0)$ -члены, в явном виде найдя решение нулевого порядка, а уже над ним строить теорию возмущений по  $1/l$ .

Поэтому вместо выражения (3.23) мы должны использовать следующий анзац для фурье-образа тепло-

<sup>7</sup> Заметим, что альтернативно мы могли бы с таким же успехом пользоваться разложением по функциям  $\exp(ik_b \sigma^b)$ . Хотя, в силу определённых причин, мы предпочитаем выбирать (3.20) и хотя вне предела совпадения эти два возможных выбора приводят к различным выражениям для коэффициентов, после перехода к пределу совпадения оба дают одинаковые локальные выражения. Поэтому сравнение результатов, полученных такими двумя способами, можно даже использовать как средство поиска ошибок.

вого ядра:

$$\hat{\mathbf{K}}(\tau, \mathbf{k}) = \exp[-\tau(\mathbf{ik})^N * \hat{\mathcal{F}}] \hat{\mathbf{T}}(\nabla) \hat{\mathcal{I}}, \quad (3.24)$$

где

$$\hat{\mathcal{F}} \equiv \hat{\mathcal{F}}^{b'_1 \dots b'_N} = \hat{F}_N^{a_1 \dots a_N} \sigma_{a_1}^{b'_1} \dots \sigma_{a_N}^{b'_N} \quad (3.25)$$

— матрично-значная двухточечная функция, являющаяся скаляром относительно точки  $x$  и тензором с  $N$  верхними индексами относительно точки  $x'$  (она играет роль главного символа оператора  $\hat{F}(\nabla)$ , обычно используемого в фурье-анализе (псевдо)дифференциальных операторов), а  $\hat{\mathbf{T}}(\nabla) \equiv \hat{\mathbf{T}}(\nabla, \tau, \mathbf{k}|x, x')$  — некоторый пока неизвестный оператор.

После аккуратного разложения по степеням импульса  $\mathbf{k}$  и выполнения всех необходимых коммутаций (см. подробности в [80]) можно получить следующую задачу на оператор  $\hat{\mathbf{T}}(\nabla, \tau, \mathbf{k})$ :

$$(\partial_\tau + \hat{\mathbf{F}}) \hat{\mathbf{T}}(\nabla, \tau, \mathbf{k}) = 0, \quad (3.26)$$

$$\hat{\mathbf{T}}(\nabla, 0, \mathbf{k}) = \hat{\mathbf{1}}, \quad (3.27)$$

где введены новые операторы

$$\hat{\mathbf{F}}(\nabla) = \hat{\mathbf{F}}(\nabla, \tau, \mathbf{k}|x, x') = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-m} \tau^n (\mathbf{ik})^{m+Nn} * \{\hat{F}\}_{m,n}, \quad (3.28)$$

$$\{\hat{F}\}_{m,n} = \sum_{k=m+n}^N \hat{F}_k(x) * \{\nabla^k\}_{m,n}, \quad (3.29)$$

а действие операции  $\{\dots\}_{m,n}$  на набор ковариантных производных  $\nabla^k = \nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_k}$  состоит из  $\binom{k}{m,n} = k!/(m!n! \times (k-m-n)!)$  членов, в каждом из которых  $m$  производных заменены на функции вида  $\sigma_a^{b'}$  и  $n$  производных — на функции вида  $-\nabla_a \hat{\mathcal{F}}$  со строгим сохранением порядка следования. Таким образом,  $\{\hat{F}\}_{m,n} = \{\hat{F}\}_{m,n}^{b'_1 \dots b'_m c'_1 \dots c'_n}$  — операторы порядка  $N-m-n$  и размерности  $N-m$  с  $m+Nm$  верхними штрихованными индексами, при этом  $\{\hat{F}\}_{N,0} = \hat{\mathcal{F}}$ .

Теперь разложим оператор  $\hat{\mathbf{T}}(\tau, \mathbf{k})$  в двойной ряд по степеням  $\tau$  и  $k$ :

$$\hat{\mathbf{T}}(\nabla, \tau, \mathbf{k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{L_n} \tau^n (\mathbf{ik})^l * \hat{T}_{n,l}(\nabla), \quad (3.30)$$

где  $\hat{T}_{n,l}(\nabla) = \hat{T}_{n,l}^{b'_1 \dots b'_l}(\nabla|x, x')$  — некоторые неизвестные операторно-значные коэффициенты, являющиеся тензорами с  $l$  верхними штрихованными индексами, а  $L_n$  — пока неизвестный предел суммирования. Подстановка разложений (3.28) и (3.30) в уравнение (3.26) приводит к следующей системе рекуррентных соотношений на операторы  $\hat{T}_{n,l}(\nabla)$ :

$$(n+1)\hat{T}_{n+1,l} = - \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-p} \{\hat{F}\}_{p,q} \hat{T}_{n-q,l-p-Nq}, \quad (3.31)$$

$$\hat{T}_{0,0} = \hat{\mathbf{1}}, \quad \hat{T}_{0,l} = 0 \text{ при } l > 0. \quad (3.32)$$

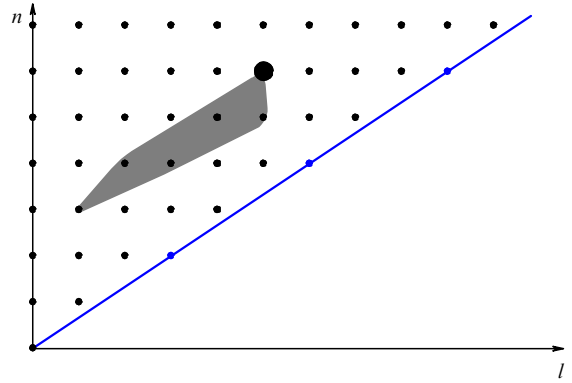


Рис. 1. Операторы  $\hat{T}_{n,l}$  для случая  $N = 2$ . Голубая линия показывает максимальное значение  $l$ ,  $L_n(N) = (N - 1/2)n$ . Каждая точка на плоскости в положении  $(n, l)$  обозначает оператор  $\hat{T}_{n,l}$ . Затенённая область показывает паттерн, по которому вычисляется оператор в левой части рекуррентных соотношений (3.31) (в данном примере  $\hat{T}_{6,5}$ ).

(В этой записи предполагается, что  $\hat{T}_{n,l} = 0$  при  $n < 0$  или  $l < 0$  и, как и должно быть, композиция тензора  $\{\hat{F}\}_{p,q}$  валентности  $(p + Nq)$  с тензором  $\hat{T}_{n-q,l-p-Nq}$  валентности  $(l - p - Nq)$  в правой части уравнения порождает тензор валентности  $l$  в левой части.) Начальные значения (3.27) и позволяют последовательно разрешить рекуррентные соотношения для всех  $\hat{T}_{n,l}$ . Также из системы (3.31), (3.32) легко получить выражение для предела суммирования в (3.30):

$$L_n(N) = \left(N - \frac{1}{2}\right)n. \quad (3.33)$$

Пример вычисления операторов  $\hat{T}_{n,l}(\nabla)$  по операторам низших порядков приведён на рис. 1 для случая  $\hat{T}_{6,5}(\nabla)$  и  $N = 2$ .

Заметим, что из рекуррентных соотношений можно получить замкнутые выражения для некоторых операторов  $\hat{T}_{n,l}(\nabla)$ , например,

$$\hat{T}_{n,l} = \frac{1}{n!} \{(-\hat{F})^n\}_l, \text{ при } l < N, \quad (3.34)$$

$$\hat{T}_{2k,(2N-1)k} = \frac{1}{2^k k!} \{(-\hat{F})_{N-1,1}^k\}. \quad (3.35)$$

Однако произвольный оператор  $\hat{T}_{n,l}(\nabla)$  не может быть получен с помощью таких простых формул. Наибольшее, что мы можем сказать о нём, — это что он представим в виде суммы членов (с некоторыми коэффициентами) вида

$$\{\hat{F}^{k_1}\}_{m_1, n_1} \dots \{\hat{F}^{k_p}\}_{m_p, n_p}, \quad (3.36)$$

где

$$\sum_{i=1}^p (k_i + n_i) = n \text{ и } \sum_{i=1}^p (Nn_i + m_i) = l. \quad (3.37)$$

После того как разложение для фурье-образа  $\hat{\mathbf{K}}(\nabla, \tau, \mathbf{k})$  получено, чтобы найти требуемое разложение теплового ядра, остаётся только проинтегрировать его по импульсам  $\mathbf{k}$ . Подставляя выражения (3.24) и (3.30) в интеграл (3.22), мы получаем следующий основной ре-

<sup>8</sup> Отметим, что по сравнению с работой [80] мы изменили обозначения: там эта операция обозначалась двойными квадратными скобками  $[\dots]_{m,n}$ , однако здесь мы обозначаем её фигурными скобками  $\{\dots\}_{m,n}$ , а двойные квадратные скобки используем далее для вложенных коммутаторов.

зультат для теплового ядра общего положительно определённого дифференциального оператора порядка  $N$ :

$$\hat{K}(\tau|x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \sum_{l=0}^{L_n} \hat{S}_l(\tau) * \hat{T}_{n,l}(\nabla) \hat{\mathcal{I}}(x, x'), \quad (3.38)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{S}_l(\tau) &= \hat{S}_{l, b'_1 \dots b'_l}(\tau|x, x') = \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (ik)^l \exp[-\tau(ik)^N * \hat{\mathcal{F}} + ik_{a'} \sigma^{a'}] \end{aligned} \quad (3.39)$$

— двухточечные матрично-значные тензоры с  $l$  нижними штрихованными индексами.

Важно отметить, что разложение (3.38) эффективно с точки зрения КТП, как разложение по размерности фоновых полей, поскольку с ростом  $n$  фоновая размерность соответствующего члена также монотонно возрастает:

$$\dim \hat{T}_{n,l}(\nabla) = nN - l \geq \frac{n}{2}. \quad (3.40)$$

В частном случае минимального оператора (2.27) высшего порядка  $2\nu$  интегралы (3.39) сводятся к единственному основному интегралу (3.5) и поэтому легко берутся в терминах обобщённых экспоненциальных функций. Вновь отсылая за простыми, но несколько громоздкими техническими деталями к [80], приведём окончательный ответ:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{l, a'_1 \dots a'_l}(\tau|x, x') &= \frac{\Delta^{-1}(x, x')}{(4\pi\tau^{1/\nu})^{d/2}} \times \\ &\times \sum_{r \geq l/2}^l \frac{S_{r, l, a'_1 \dots a'_l}}{(-2\tau^{1/\nu})^r} \mathcal{E}_{\nu, d/2+r} \left( -\frac{\sigma}{2\tau^{1/\nu}} \right) \hat{1}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где новые полностью симметричные тензорные коэффициенты  $S_{r,l} = S_{r, l, a'_1 \dots a'_l}(x, x')$ ,  $r \geq 0$  и  $l = r, \dots, 2r$ , с  $l$  нижними штрихованными индексами уже не зависят от  $\tau$ . Каждый  $S_{r,l}$  состоит из  $(2r - l)$  множителей вида  $\sigma_{a'}$  и  $(l - r)$  множителей вида  $\gamma_{a'b'} = \bar{\sigma}_{a'}^c g_{cd} \bar{\sigma}_{b'}^d$ , где  $\bar{\sigma}_{b'}^a(x, x')$  — тензор, обратный к  $\sigma_{a'}^b$ , с комбинаторными коэффициентами, равными количеству различных членов при симметризации по  $l$  индексам. Например,

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= \sigma_{a'}, & S_{1,2} &= \gamma_{a'b'}, & S_{2,2} &= \sigma_{a'} \sigma_{b'}, \\ S_{2,3} &= 3\gamma_{(a'b'} \sigma_{c')}, & S_{2,4} &= 3\gamma_{(a'b'} \gamma_{c'd')}, \\ S_{3,3} &= \sigma_{a'} \sigma_{b'} \sigma_{c'}, & S_{3,4} &= 6\gamma_{(a'b'} \sigma_{c'} \sigma_{d')} \end{aligned} \quad (3.42)$$

и т.д. Эти коэффициенты обладают следующим важным свойством: поскольку  $[\sigma_{a'}] = 0$  и  $[\gamma_{a'b'}] = g_{ab}$ , в пределе совпадения они не исчезают только при  $l = 2r$ .

Если теперь мы подставим (3.41) в разложение (3.38) и произведём пересуммирование, то получим следующий основной результат для разложения теплового ядра общего минимального дифференциального оператора порядка  $2\nu$ :

$$\hat{K}_F(\tau|x, x') = \Delta^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n \geq N_m} \mathbb{K}_{m,n}^{(\nu, d)}(\sigma, \tau) \hat{b}_{m,n}(x, x'), \quad (3.43)$$

где мы ввели новые базисные ядра

$$\mathbb{K}_{m,n}^{(\nu, d)}(\sigma, \tau) = \frac{\tau^{(m-d/2)/\nu}}{(4\pi)^{d/2}} \mathcal{E}_{\nu, d/2+n\nu-m} \left( -\frac{\sigma}{2\tau^{1/\nu}} \right). \quad (3.44)$$

Здесь нижний предел суммирования по индексу  $n$  в  $m$ -м порядке разложения по  $\tau^{1/\nu}$  даётся формулой

$$N_m(\nu) = \begin{cases} \frac{m}{\nu}, & m > 0, \\ \frac{2|m|}{2\nu-1}, & m < 0. \end{cases} \quad (3.45)$$

Двухточечные матрично-значные функции  $\hat{b}_{m,n}(x, x')$  мы называем обобщёнными HaMiDeW-коэффициентами. Они даются в виде конечных свёрток введённых выше дифференциальных операторов  $\hat{T}_{n,l}(\nabla)$  и тензорных коэффициентов  $S_{p,l}(x, x')$ :

$$\begin{aligned} \hat{b}_{m,n}(x, x') &= \frac{1}{(-2)^{m-n}} \times \\ &\times \sum_{l=n-m}^{\lfloor L_{m,n} \rfloor} S_{m-n,l}(x, x') * \hat{T}_{n,l}(\nabla) \hat{\mathcal{I}}(x, x'), \end{aligned} \quad (3.46)$$

где верхний предел суммирования по индексу  $l$  — целая часть выражения

$$L_{m,n} = 2\nu n - \max \left\{ 2m, \frac{n}{2} \right\}. \quad (3.47)$$

В частном случае коэффициентов с индексами  $m = \nu n$ , как это следует из (3.35), они выражаются особенно простым образом

$$\hat{b}_{\nu n, n}(x, x') = \hat{T}_{n,0}(\nabla) \hat{\mathcal{I}} = \frac{1}{n!} (-\hat{F})^n \hat{\mathcal{I}}. \quad (3.48)$$

Наиболее существенное отличие разложения (3.43) от разложения (2.51) для оператора второго порядка состоит в появлении сколь угодно больших отрицательных степеней  $\tau$  и в отсутствии общего экспоненциального фактора перед степенным рядом по собственному времени. Вместо этого каждый обобщённый HaMiDeW-коэффициент  $\hat{b}_{m,n}$  при степени  $\tau^{m/\nu}$  умножается на свою собственную обобщённую экспоненциальную функцию, явно зависящую от обоих индексов  $m$  и  $n$  двойного бесконечного ряда.

В силу появления сколь угодно больших отрицательных степеней  $\tau$  разложение (3.43) уже невозможно интерпретировать как разложение по малому параметру собственного времени  $\tau \rightarrow 0$ . Теперь его следует понимать как разложение по фоновой размерности, а это как раз и требуется нам для перенормировки и эффективной теории поля. Действительно, как следует из (3.40), размерности коэффициентов  $\hat{b}_{m,n}(x, x')$  всегда положительны и растут вместе с индексами  $m$  и  $n$ :

$$\dim \hat{b}_{m,n} \geq \min_{\{l\}} (\dim \hat{T}_{n,l}) = \max \left\{ 2m, \frac{n}{2} \right\}. \quad (3.49)$$

Обратим внимание на следующее существенное отличие метода обобщённого преобразования Фурье от классического метода ДеВитта. В последнем, чтобы вычислить предел совпадения  $[\hat{a}_m]$ , необходимо знать пределы совпадения для всех низших коэффициентов, а также некоторого количества их производных. В отличие от этого, в нашем методе рекуррентная процедура осуществляется не для самих обобщённых коэффициентов  $\hat{b}_{m,n}$ , а для операторов  $\hat{T}_{n,l}(\nabla)$ . А коэффициенты получаются независимо друг от друга в каждом порядке в виде свёрток данных операторов с тензорами  $S_{r,l}$  (3.46). Более

того, такая процедура генерирует не пределы совпадения  $[\hat{b}_{m,n}]$ , а коэффициенты  $\hat{b}_{m,n}(x, x')$  как точные двухточечные функции с  $x \neq x'$ .

Описанный в настоящем разделе алгоритм был реализован нами в системе символьных вычислений Wolfram Mathematica с использованием пакетов xAct и xTras и применён к оператору типа Лапласа (2.41) и минимальному оператору 4-го порядка общего вида:

$$\hat{F}(\nabla) = \hat{1}\square^2 + \hat{\Omega}^{abc}\nabla_a\nabla_b\nabla_c + \hat{D}^{ab}\nabla_a\nabla_b + H^a\nabla_a + \hat{P}. \quad (3.50)$$

Мы не будем приводить здесь детали этих вычислений, позволивших не только воспроизвести полученные ранее другими авторами пределы совпадений, но и получить результаты, которых до сих пор не было в литературе (в частности, вклады от членов третьего порядка с  $\hat{\Omega}^{abc}$ ). За подробностями мы вновь отсылаем к нашей работе [80].

Здесь же мы хотим остановиться на одном важном обстоятельстве — видимом противоречии между результатами, генерируемыми преобразованием Фурье, и стандартным методом ДеВитта. Действительно, если мы положим в формулах (3.43) и (3.46)  $v = 1$ , то получим следующее разложение для оператора типа Лапласа:

$$\hat{K}_F(\tau|x, x') = \frac{\Delta^{-1}}{(4\pi\tau)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2\tau}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tau^m \hat{b}_m(x, x'), \quad (3.51)$$

$$\hat{b}_m(x, x') = \sum_{n \geq N_m} \hat{b}_{m,n}(x, x'). \quad (3.52)$$

Как видим, в данном разложении остаются члены с отрицательными степенями по собственному времени. Однако в девиттовском анзаце никаких подобных членов просто нет! Как такое возможно?

Вычисление помогает разрешить отмеченный кажущийся парадокс. Оказывается, что в случае оператора типа Лапласа все обобщённые коэффициенты  $\hat{b}_{m,n}(x, x')$ , которые мы смогли вычислить, при  $m < 0$  (хотя это может быть и не очевидно на первый взгляд) тождественно зануляются в силу особых соотношений, существующих между тензорами  $\sigma^{b_{a_1\dots a_n}}$  и  $\hat{\mathcal{I}}_{a_1\dots a_n}$ . Пример таких соотношений можно получить, действуя на соотношения (2.45) и (2.49) оператором дифференцирования вдоль геодезической  $\sigma^a\nabla_a$  и затем упрощая полученные выражения с помощью (2.45). Это приводит к соотношениям

$$\sigma^{a_1} \dots \sigma^{a_n} \sigma^{b_{a_1\dots a_n}} = 0 \quad \text{при } n > 1, \quad (3.53)$$

$$\sigma^{a_1} \dots \sigma^{a_n} \hat{\mathcal{I}}_{a_1\dots a_n} = 0. \quad (3.54)$$

Существуют и другие, более сложные соотношения подобного рода.

Коэффициенты такого типа, тождественно зануляющиеся вне предела совпадения, мы называем ложными. Возникает естественный вопрос: не происходит ли то же самое и в случае операторов высших порядков? Не являются ли и для них все коэффициенты при отрицательных степенях  $\tau$  ложными? Символьные вычисления дают отрицательный ответ на поставленный вопрос — хотя среди коэффициентов оператора 4-го порядка также можно найти ложные, среди них есть и такие, которые не исчезают тождественно. Например, простейший коэффициент  $\hat{b}_{-1,1}$  содержит слагаемое вида  $\hat{\Omega}^{abc}\sigma_a\sigma_b\sigma_c\hat{\mathcal{I}}(x, x')$ . Это наблюдение показывает, что появление коэффициен-

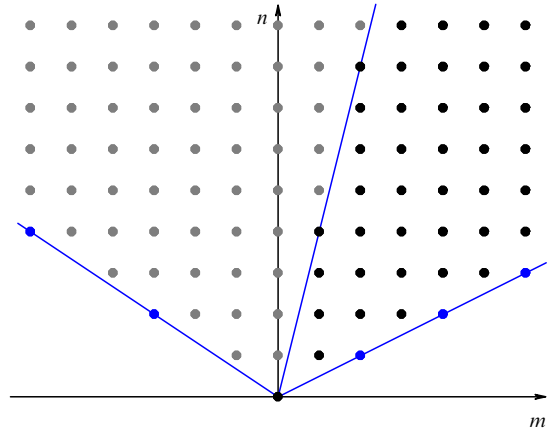


Рис. 2. Обобщённые коэффициенты  $\hat{b}_{m,n}$  для случая  $v = 2$ . Синие линии слева и справа даются выражением (3.45) для  $N_m(2)$ . Коэффициенты, обозначенные серыми точками, заведомо исчезают в пределе совпадения, а чёрными точками — могут дать ненулевой вклад, разделяющая их линия даётся условием (3.55).

тов с отрицательными степенями  $\tau$  не является просто артефактом используемого метода, а представляет собой существенную особенность разложений теплового ядра для операторов высших порядков.

С другой стороны, хотя для операторов высшего порядка и существуют нетривиальные коэффициенты при отрицательных степенях  $\tau$ , из известного разложения для диагонали теплового ядра (2.35) следует, что они должны во всяком случае зануляться в пределе совпадения. Действительно, из замечания после формулы (3.42) о том, что  $[S_{l,p}] \neq 0$ , только когда  $l = 2p$ , следует, что исчезающий вклад в сумму (3.46) по  $l$  возможен только при  $l = 2(Mn - m) \leq L_n(2M) = (2M - 1/2)n$ , откуда следует ограничение

$$[\hat{b}_{m,n}] = 0 \quad \text{при } n > 4m. \quad (3.55)$$

(На самом деле зануление пределов совпадения начинается гораздо раньше, что согласуется с более сильной оценкой (3.80), следующей из метода теории возмущений.) Обобщённые коэффициенты для случая  $v = 2$  схематически изображены на рис. 2.

Переходя в разложении (3.43) к пределу совпадения  $x = x'$  с учётом ограничения (3.55), мы вновь возвращаемся к хорошо известному разложению теплового ядра на диагонали (2.35), в котором коэффициенты  $\hat{A}_m(F|x)$  следующим образом выражаются через пределы совпадения двухточечных обобщённых коэффициентов  $[\hat{b}_{m,n}(F|x, x')]$ :

$$\hat{A}_m = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \sum_{n \geq m/v}^{4m} \frac{\Gamma((d/2 - m)/v + n)}{v\Gamma(d/2 - m + vn)} [\hat{b}_{m,n}]. \quad (3.56)$$

Как видим, предел совпадения приводит к естественному обрезанию разложения (3.43), поскольку коэффициент при каждой степени собственного времени  $\tau$  даётся лишь конечным числом членов неусечённого разложения вне диагонали.

### 3.5. Теория возмущений

Перейдём теперь ко второму способу вычисления коэффициентов теплового ядра для минимальных операторо-



ров высшего порядка. Как мы видели в разделе 3.3, если  $\hat{H}(\nabla)$  — произвольный оператор типа Лапласа (2.41), то приём с прямым/обратным преобразованием Меллина позволяет сразу же получить разложение теплового ядра (3.14) для его произвольной степени  $\hat{H}^v(\nabla)$ . Поскольку минимальный дифференциальный оператор общего вида  $\hat{F}(\nabla)$  порядка  $2v$  (2.27), вообще говоря, не может быть представлен в виде  $v$ -й степени оператора второго порядка, то и разложение теплового ядра для него не обязано иметь вид (3.14). Действительно, полученное с помощью обобщённого преобразования Фурье разложение (3.43), хотя и по-прежнему содержит обобщённые экспоненты  $\mathcal{E}_{v,\alpha}(-\sigma/2\tau^{1/v})$ , всё же имеет несколько более сложный вид: в нём появляются двойное суммирование и бесконечный ряд членов с отрицательными степенями по собственному времени.

Однако произвольный минимальный оператор  $\hat{F}(\nabla)$  порядка  $2v$  (2.27) во всяком случае можно представить в виде

$$\hat{F}(\nabla) = \hat{H}^v(\nabla) + \hat{W}(\nabla), \tag{3.57}$$

где  $\hat{H}(\nabla)$  — оператор типа Лапласа (2.41), а  $\hat{W}(\nabla)$  представляет собой некоторую добавку — произвольный дифференциальный оператор низшего порядка  $2v - 1$ . Основная идея нашего второго метода очень проста и естественна: давайте будем рассматривать в разложении (3.57) член  $\hat{H}^v(\nabla)$  как "невозмущённую часть" оператора, а член  $\hat{W}(\nabla)$  — как "возмущение" и далее будем искать разложение теплового ядра  $\hat{K}_F(\tau|x, x')$  полного оператора  $\hat{F}(\nabla)$  по теории возмущений по степеням  $\hat{W}(\nabla)$  над уже известным нам "невозмущённым ядром" оператора  $\hat{H}^v(\nabla)$ .

Итак, пользуясь аналогией с теорией возмущений в квантовой механике, перейдём в "представление взаимодействия". В нём возмущение начинает зависеть от собственного времени  $\tau$

$$\hat{W}_\tau = \exp(\tau\hat{H}^v) \hat{W}(\nabla) \exp(-\tau\hat{H}^v), \tag{3.58}$$

а "оператор эволюции"

$$\hat{U}_\tau = \exp(\tau\hat{H}^v) \exp(-\tau\hat{F}) \tag{3.59}$$

будет удовлетворять уравнению

$$(\partial_\tau + \hat{W}_\tau)\hat{U}_\tau = 0, \quad \hat{U}_0 = \hat{1}. \tag{3.60}$$

Тогда мы можем разложить оператор эволюции в ряд по степеням возмущения  $\hat{W}_\tau$ :

$$\begin{aligned} \hat{U}_\tau &= \hat{1} - \int_0^\tau dt \hat{W}_t \hat{U}_t = \bar{T} \exp\left(-\int_0^\tau dt \hat{W}_t\right) = \\ &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_{\{\tau\}} d^n t \hat{W}_{t_n} \dots \hat{W}_{t_1}, \end{aligned} \tag{3.61}$$

где  $\bar{T}$  — операция антихронологического упорядочения, а интегрирование ведётся по  $n$ -мерной гиперпирамиде  $0 < t_1 < \dots < t_n < \tau$ ,

$$\int_{\{\tau\}} d^n t = \int_0^\tau dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1. \tag{3.62}$$

Далее заметим, что, как ясно из определения (3.58), коммутация операторов  $\hat{W}_t$  и  $\exp(-\tau\hat{H}^v)$  сводится про-

сто к сдвигу параметра собственного времени

$$\exp(-\tau\hat{H}^v) \hat{W}_t = \hat{W}_{t-\tau} \exp(-\tau\hat{H}^v). \tag{3.63}$$

Из этого наблюдения и (3.59) следует, что

$$\exp(-\tau\hat{F}) = \exp(-\tau\hat{H}^v) \hat{U}_\tau = \hat{U}'_\tau \exp(-\tau\hat{H}^v), \tag{3.64}$$

где в новом операторе  $\hat{U}'_\tau$  антихронологическое упорядочение заменяется на хронологическое

$$\begin{aligned} \hat{U}'_\tau &= \bar{T} \exp\left(-\int_0^\tau dt \hat{W}_{t-\tau}\right) = T \exp\left(-\int_0^\tau dt \hat{W}_{-t}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_{\{\tau\}} d^n t \hat{W}_{-t_1} \dots \hat{W}_{-t_n}. \end{aligned} \tag{3.65}$$

На языке ядер соотношение (3.64) примет вид

$$\hat{K}_F(\tau|x, x') = \hat{U}'_\tau \hat{K}_{H^v}(\tau|x, x'). \tag{3.66}$$

Таким образом,  $\hat{U}'_\tau$  представляет собой оператор трансформации теплового ядра, вызванной введением в оператор возмущения  $\hat{W}(\nabla)$ . Операторы  $\hat{W}_{-t}$  и  $\hat{U}'_\tau$  являются интегральными, однако если разложить их в ряд по степеням  $\tau$ , то коэффициенты данного разложения будут дифференциальными операторами.

Вначале сделаем это для оператора  $\hat{W}_{-t}$ . Воспользуемся хорошо известным соотношением

$$\exp(-tB) A \exp(tB) = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} \llbracket A, B \rrbracket_k, \tag{3.67}$$

где  $\llbracket \dots, \dots \rrbracket_k$  означает вложенный коммутатор  $k$ -го порядка, определяемый соотношениями

$$\llbracket A, B \rrbracket_0 = A, \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned} \llbracket A, B \rrbracket_k &\equiv \llbracket \llbracket A, B \rrbracket_{k-1}, B \rrbracket = \\ &= \underbrace{\left[ \dots \llbracket \llbracket A, B \rrbracket, B \rrbracket, \dots, B \right]}_k, \quad k > 0. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Из соотношения (3.67) сразу же следует, что

$$\hat{W}_{-t} = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} \hat{V}_k(\nabla), \quad \text{где } \hat{V}_k(\nabla) = \llbracket \hat{W}, \hat{H}^v \rrbracket_k \tag{3.70}$$

— дифференциальные операторы порядка  $(2v - 1)(k + 1)$  и размерности  $2v(k + 1)$ .

Теперь подставим разложение (3.70) в представление (3.65). Интеграл по собственному времени берётся тривиальным образом<sup>9</sup>

$$\int_{\{\tau\}} dt^n t^\alpha = \frac{\tau^{n+|\alpha|}}{c(\alpha)}, \tag{3.71}$$

$$c(\alpha) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2 + 2) \dots (|\alpha| + n). \tag{3.72}$$

Отсюда получаем следующее разложение оператора деформации теплового ядра  $\hat{U}'_\tau$  в ряд по степеням  $\tau$ :

$$\hat{U}'_\tau = \sum_{k=0}^\infty \tau^k \hat{U}_k(\nabla), \tag{3.73}$$

<sup>9</sup> Здесь мы используем стандартные мультииндексные обозначения:  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n}$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ .



где

$$\hat{U}_k(\nabla) = \sum_{n+|\alpha|=k} \frac{(-1)^n}{\alpha!c(\alpha)} \hat{V}_{\alpha_n}(\nabla) \dots \hat{V}_{\alpha_1}(\nabla) \quad (3.74)$$

— дифференциальные операторы порядка  $(2v - 1)k$  и размерности  $2vk$ .

Теперь мы хотим представить тепловое ядро  $\hat{K}_F(\tau|x, x')$  возмущённого оператора  $\hat{F}(\nabla)$  в виде функционального ряда по обобщённым экспонентам. Для этого подставим разложения для невозмущённого ядра (3.14) и оператора деформации ядра (3.73) в формулу (3.66) и прокоммутируем операторы  $\hat{U}_k(\nabla)$  с обобщёнными экспоненциальными функциями  $\mathcal{E}_{v,d/2-m}(-\sigma/2\tau^{1/v})$ . С учётом правила дифференцирования обобщённых экспонент (3.10) введём следующее обозначение для результата коммутации дифференциального оператора порядка  $N$  с обобщённой экспонентой:

$$\begin{aligned} \hat{F}(\nabla) \mathcal{E}_{v,\alpha} \left( -\frac{\sigma}{2\tau^{1/v}} \right) &= \\ &= \sum_{n=0}^N \tau^{-n/v} \mathcal{E}_{v,\alpha+n} \left( -\frac{\sigma}{2\tau^{1/v}} \right) \langle \hat{F} \rangle_n. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Операция  $\langle \dots \rangle_n$  очень похожа на введённые нами ранее фигурные скобки  $\{ \dots \}_{n,0}$  (3.29), с той только разницей, что  $n$  ковариантных производных  $\nabla_a$  заменяются не на  $\sigma_a^{b'}$ , а на функции вида  $-\sigma_a/2$ . В остальном их свойства и правила вычисления совпадают.

После перекоммутирования всех обобщённых экспонент налево и необходимого пересуммирования (детали которого мы вновь опустим) получим искомое разложение теплового ядра вне диагонали:

$$\hat{K}_F(\tau|x, x') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n \geq K_m} \mathbb{K}_{m,n}^{(v,d)}(\sigma, \tau) \hat{a}_{m,n}(F|x, x'), \quad (3.76)$$

где двойное суммирование ведётся по тем же самым базисным ядрам (3.44), что и в разложении (3.43). А новые обобщённые коэффициенты  $\hat{a}_{m,n}(F|x, x')$  получаются действием деформирующих операторов  $\langle \hat{U}_n(\nabla) \rangle_k$  на НаМиДеВ-коэффициенты исходного оператора типа Лапласа  $\hat{H}(\nabla)$ :

$$\hat{a}_{m,n}(F|x, x') = \sum_{l \geq L_{m,n}}^{m+(v-1)n} \langle \hat{U}_n(\nabla) \rangle_k \hat{a}_l(H|x, x'), \quad (3.77)$$

где  $k = vn + l - m$ . Нижние пределы суммирования по индексам  $n$  и  $l$  даются выражениями

$$K_m = \max \left\{ 0, -\frac{m}{v-1} \right\}, \quad (3.78)$$

$$L_{m,n} = \max \{ 0, m - vn \}. \quad (3.79)$$

Индекс  $n$  здесь может быть интерпретирован как порядок теории возмущений по степеням  $\hat{W}(\nabla)$ .

Точно так же как в случае разложения (3.43), пределы совпадений коэффициентов при отрицательных степенях  $\tau$  равны нулю. Действительно, поскольку  $[\sigma_a] = 0$  и  $[\sigma_{ab}] = g_{ab}$ , оператор  $\langle \hat{U}_n(\nabla) \rangle_k$  будет давать ненулевой вклад в предел совпадения только в том случае, если каждая из  $k$  содержащихся в нём функций  $\sigma_a$  будет дополнительно продифференцирована по крайней мере ещё один раз. Поскольку оператор  $\hat{U}_n(\nabla)$  имеет порядок  $(2v - 1)n$ , "выживут" только члены с  $k \leq (v - 1/2)n$ . А так

как  $k = vn + l - m$  и  $l \geq 0$ , это в свою очередь приводит к ограничению

$$[\hat{a}_{m,n}] = 0 \quad \text{при } n > 2m, \quad (3.80)$$

существенно более сильному, чем аналогичное условие (3.55).

Можно заметить, что пределы суммирования в (3.43) и (3.76) различаются, так же как и вид входящих в них обобщённых коэффициентов  $\hat{b}_{m,n}$  и  $\hat{a}_{m,n}$ . Причина состоит в том, что оба используемых нами алгоритма являются не слишком "умными", в том смысле что механически генерируемые ими выражения могут быть существенно улучшены. Примером является появление ложных коэффициентов: очевидно, более внимательный учёт соотношений типа (3.53), (3.54), существующих между тензорами  $\sigma^b_{a_1 \dots a_n}$  и  $\hat{\mathcal{I}}_{a_1 \dots a_n}$ , позволил бы упростить многие обобщённые коэффициенты, а все ложные коэффициенты при этом бы занулились<sup>10</sup>. Другим примером является наличие членов, в которые мировая функция  $\sigma(x, x')$  входит в качестве множителя. Нетрудно понять, что с помощью уравнения (3.11), связывающего различные обобщённые экспоненты  $\mathcal{E}_{v,\alpha}(z)$ , можно систематически устранять такие члены, приводя разложение к некоторому наиболее простому каноническому виду.

#### 4. Заключение

В заключение отметим, что наряду с изложением известной техники Швингера–ДеВитта в квантовой теории поля и гравитации мы получили ряд новых недавних результатов разработки данного метода и открыли новые перспективы его развития.

Для минимальных операторов высшего порядка  $2v$  (2.27) нами впервые установлена структура теплового ядра вне диагонали (т.е. при  $x \neq x'$ ) в виде двойного функционального ряда (3.43) (или (3.76)). Это разложение является прямым обобщением девиттовского анзаца (2.51) для операторов типа Лапласа, но в то же время отличается в двух существенных моментах.

Во-первых, вместо стандартного экспоненциального фактора  $\exp(-\sigma/2\tau)$  разложение ведётся по "обобщённым экспоненциальным" функциям  $\mathcal{E}_{v,\alpha}(-z)$  безразмерного отношения  $z = \sigma/2\tau^{1/v}$ . Замечательные свойства этих новых функций, в частности правило дифференцирования (3.10) и преобразования Меллина (3.7), позволяют эффективно манипулировать ими.

Во-вторых, во внедиагональных разложениях имеются члены со сколь угодно большими отрицательными степенями собственного времени  $\tau^{m/v}$ . Как и должно быть, все соответствующие коэффициенты исчезают в пределе совпадения  $x = x'$ , благодаря чему воспроизводится известное асимптотическое разложение диагонали теплового ядра (2.35). Однако отсутствие "дна" у системы внедиагональных коэффициентов  $\hat{b}_{m,n}(F|x, x')$  делает невозможным построение для них рекуррентных соотношений.

Несмотря на это, мы разработали и реализовали в системе символьных вычислений Wolfram Mathematica

<sup>10</sup> Кажется, что метод теории возмущений в этом плане лучше преобразования Фурье, так как исходит из разложения ДеВитта для оператора типа Лапласа  $\hat{H}(\nabla)$ , в котором ложных коэффициентов нет.

два разных алгоритма получения внедиагональных коэффициентов — на основе преобразования Фурье (раздел 3.4) и по теории возмущений (раздел 3.5). Оба алгоритма дают больше классического метода ДеВитта в том смысле, что позволяют получить не только пределы совпадения  $[b_{m,n}]$ , но и замкнутые выражения для коэффициентов при  $x \neq x'$ . Разумеется, сам по себе такой выход за пределы диагонали не только не способен дать выигрыш в эффективности вычислений, но и приводит к значительному увеличению их сложности. Однако он проясняет общую внедиагональную структуру теплового ядра, аккуратный учёт которой позволит рационализировать вычисление пределов совпадения.

Другим преимуществом, которое даёт выход за пределы диагонали, является возможность более гибкого использования интегральных преобразований, обобщающих использованный в разделе 3.3 приём с почленным применением прямого и обратного преобразования Меллина. Утверждение об "обобщённой функториальности" можно нестрого сформулировать в следующем виде: для некоторого широкого класса "хороших" операторов  $\hat{F}$  и некоторого широкого класса "хороших" функций  $f$  внедиагональное разложение ядра операторной функции  $f(\hat{F})$  будет иметь вид

$$f(\hat{F}) \frac{\hat{1}}{\sqrt{g}} \delta(x, x') = \sum_m \mathbb{K}_m(f|\sigma) \hat{a}_m(F|x, x'),$$

где матрично-значные двухточечные внедиагональные коэффициенты  $\hat{a}_m(F|x, x')$  зависят только от оператора  $\hat{F}$  и геометрии пространства-времени, но не от функции  $f$ , а скалярные базисные ядра  $\mathbb{K}_m(f|\sigma)$  наоборот — зависят только от вида функции  $f$ , но не от оператора  $\hat{F}$  и не от геометрии. Наши результаты в данной области мы также планируем опубликовать в отдельной работе [76], в настоящее время находящейся в процессе написания.

Кроме того, оба алгоритма — как преобразование Фурье, так и теорию возмущений — можно относительно легко обобщить на значительно более широкий класс так называемых причинных операторов (их можно определить, например, как такие, которые при домножении на некоторый другой оператор дают минимальный оператор). Эти новые результаты будут изложены в готовящейся к публикации работе [81].

Хотя обобщающий классическую технику ДеВитта метод внедиагональных разложений пока делает свои самые первые шаги, полученных к настоящему моменту результатов достаточно для того, чтобы без преувеличений заключить, что его появление открывает новые перспективы как в исследовании теплового ядра, так и в широком спектре его потенциальных приложений, включая КТП и исследования моделей модифицированной гравитации.

**Благодарности.** Авторы выражают свою глубокую признательность А.В. Курову за помощь с компьютерными символьными вычислениями. Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 23-12-00051, <https://rscf.ru/project/23-12-00051/>.

## Список литературы

- DeWitt B S *Dynamical Theory of Groups and Fields* (New York: Gordon and Breach, 1965); Пер. на русск. яз.: ДеВитт Б С *Динамическая теория групп и полей* (М.: Наука, 1987)

- Васильев А Н *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике* (Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1976); Пер. на англ. яз.: Vasiliev A N *Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistical Physics* (Amsterdam: Gordon and Breach Sci. Publ., 1998)
- Gibbons G W "Quantum field theory in curved spacetime", in *General Relativity. An Einstein Centenary Survey* (Eds S W Hawking, W Israel) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979) pp. 639–679
- Birrell N D, Davies P C W *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982); Пер. на русск. яз.: Биррелл Н, Девис П *Квантовые поля в искривленном пространстве-времени* (М.: Мир, 1984)
- Wald R M *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (Chicago, IL: Univ. of Chicago Press, 1994)
- Шубин М А *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория* (М.: Добросвет, 2005); Пер. на англ. яз.: Shubin M A *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory* (Berlin: Springer, 2001)
- Gilkey P B *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah–Singer Index Theorem* (Boca Raton, FL: CRC Press, 1995)
- Hadamard J *Le Problème de Cauchy et les Équations aux Dérivées Partielles Linéaires Hyperboliques* (Paris: Hermann et cie, 1932); Пер. на русск. яз.: Адамар Ж *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа* (М.: Наука, 1978); Пер. на англ. яз.: Hadamard J *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential* (New York: Dover, 1952)
- Fock V *Phys. Z. Sowjetunion* **12** 404 (1937)
- Minakshisundaram S, Pleijel Å *Can. J. Math.* **1** 242 (1949) <https://doi.org/10.4153/CJM-1949-021-5>
- Minakshisundaram S *J. Indian Math. Soc.* **17** (4) 158 (1953)
- Schwinger J *Phys. Rev.* **82** 664 (1951)
- Seeley R T "Complex powers of an elliptic operator", in *Proc. of Symp. in Pure Mathematics Vol. 10 Singular Integrals* (Ed. A P Calderón) (Chicago, Ill.: Am. Math. Soc., 1967) pp. 288–307, <https://doi.org/10.1090/pspum/010>
- Gilkey P B *J. Differential Geom.* **10** 601 (1975) <https://doi.org/10.4310/jdg/1214433164>
- Gilkey P B *Compositio Math.* **38** (2) 201 (1979)
- Gilkey P B *Duke Math. J.* **47** (3) 511 (1980) <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-80-04731-6>
- Fegan H D, Gilkey P *Pacific J. Math.* **117** (2) 233 (1985) <http://dx.doi.org/10.2140/pjm.1985.117.233>
- Gilkey P B, Branson Th P, Fulling S A *J. Math. Phys.* **32** 2089 (1991)
- Gilkey P B, Grubb G *Commun. Partial Differ. Equations* **23** 777 (1998) <https://doi.org/10.1080/03605309808821365>
- Gilkey P B *Asymptotic Formulae in Spectral Geometry* (Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC, 2003) <https://doi.org/10.1201/9780203490464>
- Deser S, van Nieuwenhuizen P *Phys. Rev. D* **10** 401 (1974)
- Deser S, van Nieuwenhuizen P *Phys. Rev. D* **10** 411 (1974)
- Deser S, Tsao H-Sh, van Nieuwenhuizen P *Phys. Rev. D* **10** 3337 (1974)
- 't Hooft G, Veltman M *Ann. Inst. Henri Poincaré A* **20** (1) 69 (1974)
- Christensen S M, Du M J *Phys. Lett. B* **76** 571 (1978)
- Christensen S M et al. *Phys. Lett. B* **84** 411 (1979)
- Stelle K S *Phys. Rev. D* **16** 953 (1977)
- Fradkin E S, Tseytlin A A *Nucl. Phys. B* **201** 469 (1982)
- Avramidi I G, Barvinsky A O *Phys. Lett. B* **159** 269 (1985)
- Hawking S W *Commun. Math. Phys.* **55** 133 (1977)
- Capper D M, Du M J *Nuovo Cimento A* **23** 173 (1974) <https://doi.org/10.1007/BF02748300>
- Capper D M, Duff M J *Phys. Lett. A* **53** 361 (1975)
- Duff M J *Nucl. Phys. B* **125** 334 (1977)
- Fradkin E S, Vilkovisky G A *Phys. Lett. B* **73** 209 (1978)
- Dowker J S, Critchley R J. *Phys. A* **9** 535 (1976)
- Christensen S M, Fulling S A *Phys. Rev. D* **15** 2088 (1977)
- Bunch T S, Davies P C W *Proc. R. Soc. Lond. A* **356** 569 (1977) <https://doi.org/10.1098/rspa.1977.0151>
- Adler S L, Lieberman J, Ng Y J *Ann. Physics* **106** 279 (1977)
- Brown L S, Cassidy J P *Phys. Rev. D* **16** 1712 (1977)
- Fradkin E S, Tseytlin A A *Nucl. Phys. B* **234** 472 (1984)
- Fradkin E S, Tseytlin A A *Phys. Lett. B* **134** 187 (1984)

42. Fradkin E S, Tseytlin A A *Phys. Rep.* **119** 233 (1985)
43. Starobinsky A A *Phys. Lett. B* **91** 99 (1980)
44. Hořava P *Phys. Rev. D* **79** 084008 (2009)
45. Barvinsky A O et al. *Phys. Rev. Lett.* **119** 211301 (2017); arXiv:1706.06809
46. Barvinsky A O, Kurov A V, Sibiryakov S M *Phys. Rev. D* **105** 044009 (2022); arXiv:2110.14688
47. Barvinsky A O, Kurov A V, Sibiryakov S M, arXiv:2310.07841
48. Barvinsky A O, Vilkovisky G A *Phys. Rep.* **119** 1 (1985)
49. Gusynin V P *Phys. Lett. B* **225** 233 (1989)
50. Gusynin V P *Nucl. Phys. B* **333** 296 (1990)
51. Гусьнин В П *Укр. матем. журн.* **43** 1541 (1991); Gusynin V P *Ukr. Math. J.* **43** 1432 (1991)
52. Gusynin V P, Gorbar E V *Phys. Lett. B* **270** 29 (1991)
53. Gusynin V P, Gorbar E V, Romankov V V *Nucl. Phys. B* **362** 449 (1991)
54. Gorbar E V *J. Math. Phys.* **38** 1692 (1997)
55. Deser S, Duff M J, Isham C J *Nucl. Phys. B* **111** 45 (1976)
56. Barvinsky A O, Vilkovisky G A *Nucl. Phys. B* **282** 163 (1987)
57. Barvinsky A O, Vilkovisky G A *Nucl. Phys. B* **333** 471 (1990)
58. Barvinsky A O, Vilkovisky G A *Nucl. Phys. B* **333** 512 (1990)
59. Barvinsky A O, Gusev Yu V, Zhytnikov V V, Vilkovisky G A "Covariant Perturbation Theory (IV). Third order in the curvature", Technical Report SPIRES-HEP: PRINT-93-0274 (Winnipeg, MB: Univ. of Manitoba, 1993); arXiv:0911.1168
60. Barvinsky A O, Wachowski W *Phys. Rev. D* **108** 045014 (2023); arXiv:2306.03780
61. Buchbinder I L, Odintsov S D, Shapiro I L *Effective Action in Quantum Gravity* (Boca Raton, FL: CRC Press, 1992)
62. Vassilevich D V *Phys. Rep.* **388** 279 (2003); hep-th/0306138
63. Barvinsky A O *Scholarpedia* **10** 31644 (2015) <https://doi.org/10.4249/scholarpedia.31644>
64. Berline N, Getzler E, Vergne M *Heat Kernels and Dirac Operators* (Berlin: Springer-Verlag, 1992)
65. Barvinsky A O, Mukhanov V F *Phys. Rev. D* **66** 065007 (2002); hep-th/0203132
66. Coleman S, Weinberg E *Phys. Rev. D* **7** 1888 (1973)
67. Carinhas P A, Fulling S A "Computational asymptotics of fourth-order operators", in *Asymptotic and Computational Analysis: Conf. in Honor of Frank W.J. Olver's 65th Birthday* (Boca Raton, FL: CRC Press, 1990) p. 601, <https://doi.org/10.1201/9781003072584>
68. Paneitz S M "A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo-Riemannian manifolds (Summary)", in *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA). Proc. of the 2007 Midwest Geometry Conf. in Honor of Thomas P. Branson, May 18–20, 2007, Iowa City, USA* (Eds M Eastwood, A Rod Gover); *SIGMA* **4** 036 (2008) <https://doi.org/10.3842/SIGMA.2008.036>; arXiv:0803.4331
69. Branson T *Commun. Math. Phys.* **178** 301 (1996)
70. Erdmenger J *Class. Quantum Grav.* **14** 2061 (1997)
71. Jack I, Osborn H *Nucl. Phys. B* **234** 331 (1984)
72. Barvinsky A O, Pronin P I, Wachowski W *Phys. Rev. D* **100** 105004 (2019); arXiv:1908.02161
73. Maslov V P, Fedoriuk M V *Semi-classical Approximation in Quantum Mechanics* (Mathematical Physics and Applied Mathematics, Vol. 7) (Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1981)
74. Ваховский В Н, Пронин П И *Вестн. Московского ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия* (1) 17 (2019); Wachowski W N, Pronin P I *Moscow Univ. Phys. Bull.* **74** (1) 17 (2019)
75. Bär C, Moroianu S *Int. J. Math.* **14** (04) 397 (2003) <https://doi.org/10.1142/S0129167X03001788>
76. Barvinsky A O, Wachowski W "Off-diagonal heat kernel expansions and generalized functoriality", Work in progress
77. Widom H "Families of pseudodifferential operators", in *Topics in Functional Analysis: Essays Dedicated to M.G. Krein on the Occasion of His 70th Birthday* (Advances in Mathematics: Supplementary Studies, Vol. 3, Eds I Gohberg, M Kac) (New York: Academic Press, 1978) pp. 345–395
78. Widom H "Szegő's theorem and a complete symbolic calculus for pseudo-differential operators", in *Seminar on Singularities of Solutions of Linear Partial Differential Equations, AM-91* (Ed. L Hörmander) (Princeton: Princeton Univ. Press, 1979) pp. 261–283, <https://doi.org/10.1515/9781400881581-010>
79. Widom H *Bull. Sci. Math.* **104** (1) 19 (1980)
80. Barvinsky A O, Wachowski W *Phys. Rev. D* **105** 065013 (2022); arXiv:2112.03062
81. Barvinsky A O, Kurov A V, Wachowski W "Off-diagonal heat kernel expansion for causal operators", Work in progress

## Schwinger–DeWitt technique in quantum gravity

A.O. Barvinsky<sup>(1,2,\*), W. Wachowski<sup>(1,\*\*)</sup></sup>

<sup>(1)</sup> Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation

<sup>(2)</sup> Institute for Theoretical and Mathematical Physics, Lomonosov Moscow State University,

Lomonosovskii prosp. 47/1, 119192 Moscow, Russian Federation

E-mail: (\*) [barvin@td.lpi.ru](mailto:barvin@td.lpi.ru), (\*\*) [vladvakh@gmail.com](mailto:vladvakh@gmail.com)

This paper consists of two parts. The first is a review of the classical Schwinger–DeWitt technique for calculating the effective action in quantum field theory and quantum gravity. We systematically present the background field and heat kernel methods and the calculation of heat kernel coefficients for minimal second-order operators, and apply these methods to calculations of the divergent part of the one-loop effective action. We then discuss the method of universal functional traces, which is also applicable to higher-order minimal and nonminimal operators. In the second part, we discuss new results obtained recently on off-diagonal heat kernel expansions for higher-order minimal operators. These expansions, which generalize the standard DeWitt ansatz, are shown to have the form of a double functional series in some new special functions, which we call the generalized exponential functions. The properties of these functions and expansions constructed from them are discussed in detail, including the presence of terms with arbitrarily large negative powers of the proper time. Finally, we discuss two different covariant methods for calculating the coefficients of off-diagonal expansions: a generalized Fourier transformation and the perturbation theory.

**Keywords:** Schwinger–DeWitt technique, proper-time method, heat kernel, effective action, higher-order theories, off-diagonal expansions

PACS numbers: **03.70. + k**, **04.60. + m**, **11.10. – z**

Bibliography — 81 references

Received 30 October 2023, revised 30 January 2024

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **194** (8) 795–813 (2024)

*Physics – Uspekhi* **67** (8) (2024)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.02.039646>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2024.02.039646>