

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Квантовая оптическая метрология

А.П. Алоджанц, Д.В. Царёв, Д.А. Куц, С.А. Подошведов, С.П. Кулик

Приведён обзор актуальных работ, выполненных в области оптической квантовой метрологии за последнее время. Основной акцент сделан на анализе современного уровня теоретических и экспериментальных исследований, посвящённых генерации, преобразованию и измерению неклассических состояний света, таких как $N00N$ -сжатых, а также гибридных состояний, одновременно сочетающих в себе методы преобразования и дискретных, и непрерывных переменных квантованного светового поля. Показано, каким образом они могут быть полезными для повышения точности измерения и оценки неизвестных фазовых параметров как в линейной, так и нелинейной метрологии. Важное место в настоящем обзоре занимает описание реальных схем квантовой метрологии, учитывающих потери частиц, неэффективности детекторов фотонов и пр. Выделены предельные (фундаментальные) ограничения, налагаемые квантово-механическими неопределённостями соответствующих величин при измерении, а также ограничения, обусловленные влиянием классических шумов на процесс распространения и измерения квантованного поля. Особое внимание уделено возможностям квантовой метрологии, основанной на спонтанном параметрическом рассеянии света, являющемся вот уже более 50 лет незаменимым инструментом достижения ключевых результатов в квантовой оптике и смежных направлениях, связанных с фотоникой, — квантовой криптографии, квантовых вычислениях и квантовой сенсорике. В связи с этим нами анализируется современное состояние дел по использованию широко известного эффекта антикорреляции фотонов Хонга–Оу–Манделя, по интерференции бифотонов в различных схемах квантовой метрологии, связанных с измерением температуры, длины, концентрации веществ и т.д. Вместе с тем в обзоре обсуждается использование бифотонов в фотометрии, радиометрии и сенсорике для задач абсолютной калибровки современных детекторов счёта фотонов, а также измерений яркостной температуры для горячих источников излучения. Обсуждаемые в обзоре явления, методы и подходы квантовой метрологии в свете новейших достижений в области квантовых источников излучения, его детектирования послужат важным инструментом в разработке и практической реализации новых схем и алгоритмов по квантовой обработке и передаче информации.

Ключевые слова: квантовые измерения, квантовая интерферометрия, спонтанное параметрическое рассеяние света, квантовая сенсорика, фотометрия, радиометрия, неклассические состояния света, бифотоны, квантовая информация и вычисления

PACS numbers: 03.67.–а, 06.20.–f, 42.50.–р, 42.50.Dv

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFN.2024.01.039634>

Содержание

1. Введение (712).

2. Физические основы квантовой оптической метрологии (715).

2.1. Квантовая метрология: основные цели и задачи. 2.2. Элементы теории оценивания неизвестного параметра в квантовой

механике. 2.3. Преимущества неклассических состояний при оценивании неизвестного параметра в линейной метрологии. 2.4. Предельные оценки фазовых параметров в нелинейной метрологии.

3. Предельные измерения и детектирование фазовых параметров в квантовой оптике (722).

3.1. Квантовые измерения со сжатыми состояниями света. 3.2. Детектирование квантовых состояний с предельной чувствительностью. 3.3. Предельные возможности квантовой сенсорики.

4. Квантовая метрология на основе максимально запутанных состояний фотонов (726).

4.1. Эффект Хонга–Оу–Манделя. 4.2. Влияние классических шумов на эффект Хонга–Оу–Манделя и неразличимость фотонов. 4.3. Классический предел эффекта Хонга–Оу–Манделя. 4.4. Квантовая сенсорика с $N00N$ -состояниями и проблема их приготовления при $N > 2$.

5. Квантовая метрология с потерей частиц (731).

5.1. Метод фиктивных светоделителей. 5.2. Оценка точности метрологии в условиях диссипации числа частиц. Оптимальные состояния.

А.П. Алоджанц^(1,2,a), Д.В. Царёв^(1,2,b), Д.А. Куц^(2,c),
С.А. Подошведов^(2,d), С.П. Кулик^(2,3,e)

⁽¹⁾ Университет ИТМО,

Кронверкский просп. 49А, 197101 Санкт-Петербург,
Российская Федерация

⁽²⁾ Южно-Уральский государственный университет,
просп. Ленина 76, 454080 Челябинск, Российская Федерация

⁽³⁾ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Центр квантовых технологий,

Ленинские горы 1, стр. 35, 119991 Москва, Российская Федерация

E-mail: ^(a) alexander_ap@list.ru, ^(b) dmitriy_93@mail.ru,

^(c) tpmchel@yandex.ru, ^(d) podoshvedovsa@susu.ru,

^(e) sergei.kulik@physics.msu.ru

Статья поступила 28 сентября 2023 г.,
после доработки 25 декабря 2023 г.

6. Квантовая фотометрия, радиометрия и сенсорика (734).

6.1. Абсолютная калибровка фотодетекторов. 6.2. Вакуумные флуктуации в качестве репера яркости света в метрологии.

7. Заключение (737).

Список литературы (737).

1. Введение

Повышение точности первичных измерительных технологий (сенсоров, преобразователей) и их калибровка приобретает всё возрастающее значение для современной промышленности и передовых технологий развитых стран, что закреплено в соответствующих дорожных картах (см., например, [1, 2]), а также иных национальных программах развития [3]. К такому можно причислить точное приборостроение, технологии позиционирования и навигации (GPS, ГЛОНАСС), мобильной связи, телекоммуникации, используемые в промышленности, науке, медицине и других областях человеческой деятельности. Классические оптические измерения традиционно играют здесь весьма важную роль в плане измерений малых смещений (порядка нанометров и менее), в контроле и калибровке устройств и приборов, участвующих в современных технологических процессах [4]. В основе таких измерений лежат универсальные принципы интерферометрии, известные из классической оптики достаточно давно [5] и активно развиваемые для квантовых состояний светового излучения [6, 7].

В метрологии как науке об измерениях существует два подхода к описанию результатов эксперимента: в одном используют понятия истинного значения и погрешности (отклонение от истинного значения), в другом используют понятия оценки и неопределённости (меры сомнения в оценке)¹. Неопределённость измерения, согласно данным стандартам, — это параметр, относящийся к результату измерения и характеризующий разброс значений, которые могли бы быть обоснованно приписаны измеряемой величине.

С практической точки зрения точность классических измерений физических параметров определяется шумами, обусловленными различными дефектами технических средств измерения, которые могут быть потенциально устранимы. В результате задачей классической метрологии традиционно является повышение точности измерений на основе разработки новых методов и подходов, обеспечивающих устранение таких неидеальностей.

С ростом требований к возможностям современных технологий в мире повышаются также и требования к точности и единству подходов к измерениям различных физических величин, что является одной из задач метрологии как науки в целом [8]. В связи с этим становится очевидной неприменимость классических методов и подходов в измерениях, осуществляемых на уровне квантовых ограничений, имеющих фундаментальную природу [9] и называемых в литературе стандартным квантовым пределом (СКП) таких измерений [6]. Здесь следует заметить, что изначально концепция СКП была сфор-

мулирована в работе [10] В.Б. Брагинским в связи с проблемой проверки принципа эквивалентности при оценках предельной чувствительности квантово-механического макроскопического осциллятора, находящегося под действием физически слабых сил. Позднее данная концепция была обобщена на квантованное электромагнитное излучение в когерентном состоянии, флуктуации которого определяют так называемый уровень дробового шума в схеме балансного гомодинамирования [11]. С физической точки зрения это оправданно, поскольку квадратуры квантованного поля являются полными аналогами импульса и координаты квантово-механического осциллятора [12]. Однако при наличии в физической схеме измерения наряду с квантованным полем излучения также "настоящего" квантово-механического осциллятора (например, тонкой мембраны в экспериментах с оптомеханикой) СКП измерения с подобным осциллятором и с квантованным излучением следует различать (ср. с [13]).

Квантовая метрология имеет дело с шумами, связанными с разного рода соотношениями неопределённостей, накладывающими ограничения на точность квантовых измерений (ср. с [12]). Неклассические состояния светового поля за последние 20 лет стали незаменимым инструментарием квантовой оптической метрологии, что позволяет управлять флуктуациями канонически сопряжённых величин — эрмитовых квадратурных компонент, являющихся непрерывными наблюдаемыми параметрами электромагнитного поля [14].

Важно отметить, что парадигма измерений в квантовой теории, затрагивающая фундаментальные её основы, традиционно является предметом жарких дискуссий (не только в физике) и служит источником различных парадоксов в квантовой механике и за её пределами [15]. Роль "прибора", представляющего, по сути, определённый физический процесс в квантовых измерениях, существенно выше той, которая отводится ему в классическом случае [16]. Таким образом, задачей квантовой метрологии является не только устранение (или сведение к минимуму) классических шумов, обусловленных техническими, конструкционными особенностями измерительных устройств и схем, но и повышение абсолютной точности измерений на основе управления соотношениями неопределённостей сопряжённых физических величин, задействованных в ходе измерительного процесса.

Наиболее ярким примером последних лет является наблюдение и регистрация гравитационных волн, которое стало бы невозможным без измерения физически малых смещений (порядка $\delta L \simeq 10^{-18}$ м и менее), выполненных на основе уникального с технической точки зрения интерферометра Майкельсона (ИМ) [18] (рис. 1). Эти эксперименты основаны на методах и подходах измерения слабых сил в природе, впервые предложенных и исследованных в группе В.Б. Брагинского [19] и затем развитых в различных лабораториях по всему миру [17, 20, 21].

Особая роль в таких измерениях отводится когерентному сжатому вакуумному (Coherent-Squeezed-Vacuum, CSV) состоянию, которое было предложено в [6] и более 10 лет успешно используется в гравитационно-волновых детекторах [14]. CSV-состояния относят к непрерывным наблюдаемым, которые могут содержать макроскопически большое число фотонов за счёт когерентной составляющей поля, что позволяет их использовать в таких

¹ Подход, связанный с оценками и неопределённостями, используется международной организацией по стандартизации (ISO/IEC Guide 98.3:2008), а в России соответствующий ГОСТ 34100.3-2017, дающий руководство по выражению неопределённости измерения, введён 1 сентября 2018 г. в качестве национального стандарта.

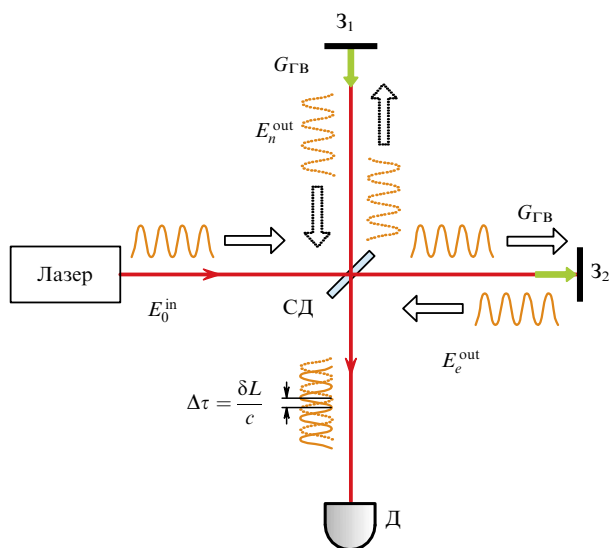


Рис. 1. Схематическое изображение интерферометра Майкельсона для регистрации гравитационных волн (ГВ), действие которых обозначено как $G_{ГВ}$ и сводится к появлению малых физических смещений, отражающихся на разности хода волн δL в плечах интерферометра, имеющих длину 4 км [17]. E_0^{in} — поле от лазерного источника, $E_{e,n}^{out}$ — поля, отражённые от зеркал $Z_{1,2}$, Д — детектор, СД — полупрозрачный светоделитель, зелёные стрелки обозначают малые физические смещения, обусловленные действием ГВ.

уникальных экспериментах, как, например, [22]. Отметим также работу [23], где с позиций имеющихся достижений в экспериментах по регистрации гравитационных волн проанализирована специфика применения сжатых состояний света для увеличения чувствительности гравитационных антенн.

Стоит заметить, что на сегодня оптические методы и подходы квантовой метрологии успешно применяются для разработки квантовых стандартов частоты [24], квантовых сенсоров магнитного поля — магнетометров [25], квантовой визуализации (imaging) [26], а также во многих других областях той деятельности, которую принято связывать с квантовыми технологиями (см., например, [27]). С практической точки зрения эти методы и подходы, разработанные в оптике, оказались настолько универсальными, что стали основой различных метрологических приложений с атомами, а также другими материальными объектами, демонстрирующими при соответствующих физических условиях волновую природу (см., например, [28–30]).

Квантовые сенсоры магнитного поля обладают разрешением энергии на полосу пропускания порядка величины постоянной Планка \hbar и ниже, что количественно характеризует пространственное, временное и полевое разрешение сенсора магнитного поля. В практическом плане назначение таких устройств весьма разнообразно: например, оно учитывает минимально возможное изменение электромагнитного поля, разрешаемое сенсором и определяемое отношением сигнал/шум, полосу пропускания, продолжительность измерения, размер области сенсора, его рабочую температуру и т.д. (см., например, [25]). Огромную роль в современной квантовой сенсорике играют методы генерации и измерения однофотонного света в видимом и ближнем инфракрасном (ИК) диапазонах. Здесь приведём ссылку на не теряющий актуальность обзор [31], который сочетает глубокий ана-

лиз таких экспериментальных методов, а также методические и интерпретационные аспекты исследования квантовых оптических эффектов, связанных с квантованием поля, его статистических свойств и спецификой детектирования в разных режимах и использования в квантовой метрологии.

В атомной оптике разрабатываемые устройства — оптические часы, гравиметры, магнитометры — преимущественно работают на основе ультрахолодных атомных ансамблей, помещённых в оптические решётки и управляемых электромагнитными импульсами (ср. с [32]). Здесь достигнута точность в определении частоты на уровне $2,5 \times 10^{-19}$ или 100 мкГц на оптической частоте [33]. Выйти за рамки СКП удаётся, если управлять квантовыми атомными флуктуациями с помощью неклассических состояний света — для этого можно применять как оптические сжатые состояния света, о которых речь пойдёт ниже, так и атомно-сжатые состояния, использующие спиновое сжатие (spin squeezing) и к тому же позволяющие достичь атомного запутывания [34, 35]. За счёт измерений, проводимых за уровнем СКП, такие устройства демонстрируют высокую стабильность по частоте, но уже с меньшим числом атомов. Среди подобных систем следует выделить атомные часы [36] и сенсоры магнитных полей [37]. В частности, ячейки, содержащие макроскопическое число атомов $N \simeq 10^{12}$, позволяют добиться чувствительности измерения магнитного поля менее 1 фТл Гц $^{-1/2}$ [38], что сопоставимо с магнитометрами, содержащими существенно большее число атомов [39].

С недавних пор в мире развиваются технологии изготовления атомных чипов, содержащих бозе-эйнштейновские конденсаты (БЭК) атомов и использующих эффекты гравитации. Они могут быть задействованы для квантовой метрологии и сенсорики [40, 41]. Именно такие системы являются перспективными для гравиметров, размещаемых на орбите [28]. Преимуществами атомных чипов являются их компактность и возможность создавать достаточно глубокие магнитные ловушки. Основные сложности в работе этих систем связаны с необходимостью поддержания низких температур (десятки мК и ниже), которые обеспечивают физическую когерентность атомной системы в целом. Разумеется, исследование подобных систем представляет большой интерес для развития квантовой метрологии в России, но требует отдельного рассмотрения и анализа, поскольку их использование на практике связано с немалыми капиталовложениями, направленными на создание необходимой инфраструктуры, отработки технологии её использования и пр. [28]. Кроме того, оптическая метрология является неотъемлемой частью квантовой сенсорики [42, 43] — субтехнологии высокотехнологичного направления "Квантовые технологии", активно развивающегося в последние годы во всём мире.

Настоящий обзор посвящён актуальным вопросам квантовой метрологии, основанной на использовании оптических систем, способных уже сегодня обеспечить достаточно высокую точность измерений как на уровне стандартного квантового предела, так и превосходя его для современных задач фотоники, лазерных технологий, обработки и передачи квантовой информации.

Преодоление СКП при измерении малых фазовых сдвигов теоретически предсказывалось и было продемонстрировано экспериментально для различных опти-

ческих систем, содержащих две эффективно взаимодействующие (интерферирующие) моды и использующих неклассические сжатые или запутанные квантовые состояния в качестве исходных для интерферометров Маха–Цендера (ИМЦ) [6, 7, 44], гироскопов (интерферометры Саньяка) [45], литографов [46, 47], радаров [48], лидаров [49, 50]. Отдельное внимание уделяется вопросам, связанным с реализацией устройств так называемого "квантового освещения" (Quantum Illumination) [51], которые хотя и выходят за пределы области квантовой сенсорики/метрологии, но основаны на методах генерации и детектирования неклассического света и активно обсуждаются в связи с возможными применениями.

В частности, как показано в работах [52–54], при малом среднем числе фотонов CSV-состояния способны преодолеть СКП и насыщать так называемый предел Гейзенберга (ПГ) при измерении неизвестного фазового параметра с помощью ИМЦ. Вместе с тем даже интуитивно понятно, что сама постановка задачи квантовой метрологии должна в определённой степени учитывать корпускулярные свойства светового излучения. В данном отношении минимальным ресурсом таких измерений являются отдельные фотоны, часто рассматриваемые в научной литературе как системы с дискретными переменными (ДП) квантованного светового поля. Поскольку в основе схем высокоточных квантовых измерений (применяющихся также в современных квантовых оптических информационных технологиях) лежит квантовая N -фотонная интерференция (см., например, [55]), чрезвычайно важной задачей квантовой метрологии является проблема приготовления коррелированных состояний двух (и более) фотонов. На это в своё время обратил внимание Д.Н. Клышко в работе [56], в которой предлагалось использовать связь между спонтанными и вынужденными двухфотонными переходами для определения спектральной яркости и эффективной температуры некогерентного света. Затем данная методика измерений была верифицирована экспериментально [57] и на сегодняшний день по праву занимает достойное место в фотометрии, в задачах калибровки детекторов света [31, 58], являясь примером простого и доступного способа оценки спектральных распределений квантовой эффективности. К сожалению, несмотря на то что абсолютная квантовая фотометрия была предложена и апробирована достаточно давно, указанная технология до сих пор не вышла на метрологический уровень. Прежде всего это обусловлено трудностями, связанными с учётом неидеальностей предлагаемых оптических схем — потерь, согласования и заполнения мод и др. Очевидно, данная методика вполне может быть усовершенствована в свете имеющихся достижений современной квантовой оптики и насущных практических задач по измерению температур горячих (существенно выше комнатной температуры) источников излучения в широком диапазоне.

Ниже будет представлен анализ современных направлений в области оптических квантовых измерений, их практических возможностей в решении задач квантовой метрологии. Здесь необходимо отметить, что эти направления тесно связаны с другими (не оптическими) методами высокоточных измерений и сенсорики в атомной физике, сверхпроводящих системах, микро- и наноструктурах, которым посвящено достаточно много работ в последнее время (см., например, [59]). Однако

именно парадигма квантовых оптических измерений, связанная с проявлением когерентности и интерференции, во многих случаях даёт простое и наглядное понимание сути предлагаемых высокоточных измерений [29].

Материал обзора распределён следующим образом. Во введении обозначены основные передовые направления развития квантовой метрологии и сенсорики, оказывающие существенное влияние на развитие квантовых, информационных, цифровых и других технологий, имеющих первостепенное значение для современного научного сообщества. В разделе 2 с единых позиций обсуждаются основные цели и задачи современной квантовой метрологии как фундаментальной и в то же время прикладной науки о квантовых измерениях. Для наглядности приведены полуклассические (основанные на когерентном свете) методы измерения малых фазовых сдвигов в оптике и выявлены при этом основные ограничения, связанные с СКП. Кроме того, в разделе 2 представлены основы теоретического описания методов и подходов на языке теории оценок, а также квантовой информации Фишера, устоявшихся в настоящее время при оценке (предельно допустимой) метрологической точности измерений, в том числе и с различными неклассическими состояниями светового поля, анализируемыми далее в работе. В разделе 3 обсуждаются практические вопросы генерации и детектирования сжатых состояний света, как правило, описываемых непрерывными переменными (НП) квантованного светового излучения, а также так называемых максимально запутанных по пространственным модам $N00N$ -состояний, для которых теория предсказывает минимально допустимую погрешность в измерении и оценке неизвестного фазового параметра. Выявление такой погрешности в эксперименте возможно на основе детектирования чётности числа фотонов, которое может быть выполнено с помощью современных детекторов с разрешением числа фотонов, что делает данные состояния практически полезными уже сегодня. В разделе 4 основной акцент сделан на вопросах приготовления и использования $N00N$ -состояний в квантовой метрологии и сенсорики. Спонтанное параметрическое рассеяние света (СПРС) в настоящее время является основным ресурсом современных квантовых оптических технологий. Поэтому не случайно особое место в настоящем обзоре уделено использованию квантовых свойств СПРС, которые могут проявляться в эффекте сжатия дисперсий флуктуаций квадратурных компонент оптического НП-состояния, а также в эффекте Хонга–Оу–Манделя (Hong–Ou–Mandel) для бифотона соответственно. Обсуждаются современные достижения и проблемы квантовой сенсорики с $N00N$ -состояниями, получаемыми посредством СПРС. Раздел 5 посвящён реальным возможностям рассматриваемых в работе схем квантовой метрологии с учётом неизбежных на практике потерь фотонов. В связи с этим обсуждается универсальный метод фиктивных светоделителей, позволяющий выявить точности измерений и оценки неизвестных фазовых параметров с учётом потерь фотонов. В разделе 6 обозначены актуальные проблемы квантовой фотометрии, радиометрии и сенсорики с включением СПРС в схемы абсолютной калибровки современных фотодетекторов, а также в схемы измерения и оценки температуры с использованием вакуумных флуктуаций в качестве репера яркости света в метрологии. В заключении мы подводим итог обсуждаемым в обзоре методам и

подходам современной квантовой метрологии и сенсорики, позволяющим на практике выявить "квантовое превосходство" неклассических состояний света по сравнению с классическими. Также намечены актуальные задачи и пути развития квантовой метрологии и сенсорики в ближайшей перспективе.

2. Физические основы квантовой оптической метрологии

2.1. Квантовая метрология: основные цели и задачи

Целью физической квантовой метрологии является разработка методов и подходов, а также создание соответствующих приборов и устройств, осуществляющих измерение физических величин на уровне квантовых ограничений, определяемых методами квантовой механики. Пусть в наиболее общем случае мы имеем некоторый априорно неизвестный параметр ϕ , который требуется оценить методами квантовой метрологии. Общий способ достижения поставленной цели базируется на трёхэтапной процедуре приготовления, измерения и последующей статистической оценки. Алгоритм квантовой метрологии, формально представленный на рис. 2, является универсальным и уже устоявшимся (здесь подразумевается, что все классические (технические) шумы в системе подавлены, и декогеренция отсутствует) (ср. с [60]).

Как следует из рис. 2а, на первом этапе готовится пробное квантовое состояние $|\psi_{in}\rangle$ светового поля. В дальнейшем пробное состояние подвергается действию унитарного преобразования, которое уже содержит в себе неизвестный параметр ϕ , что генерирует состояние $|\psi_{out}\rangle = \hat{U}_\phi |\psi_{in}\rangle$, где \hat{U}_ϕ — эволюционный оператор, содержащий информацию о неизвестном параметре ϕ .

Практическая реализация квантовой метрологии показана на рисунке рис. 2б, где ИМЦ используется для приготовления $|\psi_{out}\rangle$. Отметим, что ИМЦ физически полностью аналогичен ИМ (ср. с рис. 1). Различие между этими интерферометрами чисто конструктивное: в ИМЦ оптические пучки проходят в общем случае через

два различных светоделителя $СД_1$ и $СД_2$, а в ИМ пучки проходят дважды через один и тот же светоделитель $СД$: при входе и при выходе из интерферометра соответственно. По данной причине использование ИМ на практике предпочтительно (оно не требует калибровки положения светоделителей друг относительно друга) (ср. с [18, 61]). ИМЦ более удобен для теоретических исследований, а также в квантовых технологиях при создании фотонных чипов современными методами интегральной оптики (см. [62]). Теория ИМЦ позволяет наглядно изобразить эволюцию квантового состояния двухмодовой системы в представлении Шрёдингера или, эквивалентно, операторов — в представлении Гейзенберга.

Таким образом, основные проблемы квантовой оптической метрологии можно сформулировать в следующем виде.

- Какое пробное квантовое состояние $|\psi_{in}\rangle$ может быть использовано для оптической квантовой метрологии?
- Каким должно быть преобразование \hat{U}_ϕ для достижения оценки неизвестного (малого) параметра ϕ с минимально возможной неопределённостью?
- Как провести точечную оценку неизвестного параметра по измерительным исходам и как оценка неизвестного параметра ϕ зависит от измерения состояния $|\psi_{out}\rangle$?

Мы постараемся дать ответы на эти (и сопутствующие) вопросы в настоящем обзоре с учётом существующих реалий и достижений как в теории, так и эксперименте. Заметим, что различные аспекты квантовой интерференции и её применения в задачах квантовой метрологии и квантовой обработки информации также обсуждаются в обзоре [63].

2.2. Элементы теории оценивания неизвестного параметра в квантовой механике

Начнём обсуждение методов оптической квантовой метрологии с ответа на третий вопрос из тех, что сформулированы в разделе 2.1. Рассмотрим проблему оценивания одного неизвестного физического параметра системы ϕ посредством использования уже подготовленного пробного состояния, описываемого оператором

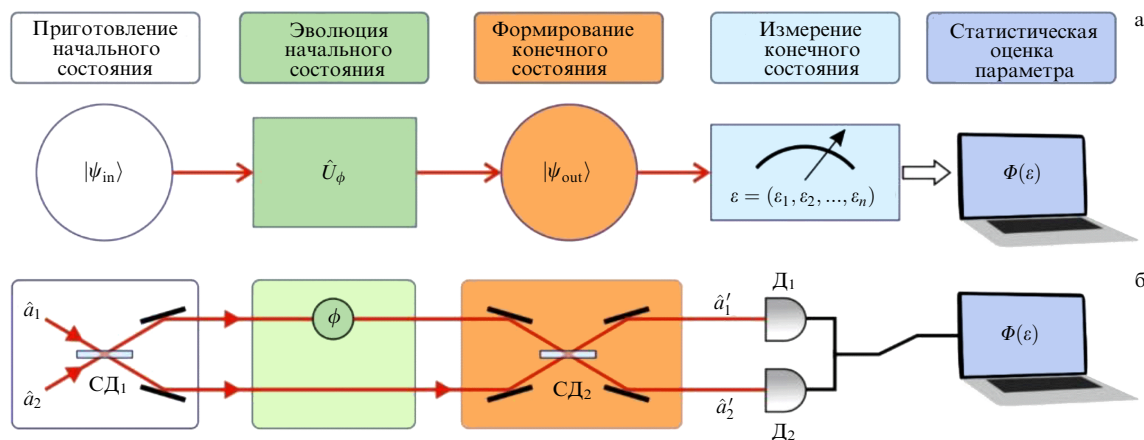


Рис. 2. (а) Принципиальная схема оптической метрологии с измерением и оценкой неизвестного фазового параметра ϕ , основанная на поэтапном преобразовании начального квантового состояния системы $|\psi_{in}\rangle$ и детектировании её конечного состояния $|\psi_{out}\rangle = \hat{U}_\phi |\psi_{in}\rangle$ в двухмодовом приближении, ϵ — измерительные исходы, $\Phi(\epsilon)$ — статистическая точечная оценка (СТО) неизвестного параметра ϕ . (б) Оптический ИМЦ, реализующий такое измерение; \hat{a}_1, \hat{a}_2 и \hat{a}'_1, \hat{a}'_2 — моды поля на входе и выходе ИМЦ соответственно; $D_{1,2}$ — детекторы, $СД_{1,2}$ — полупрозрачные светоделители.

плотности $\hat{\rho}$. Предположим, параметризация данного пробного состояния $\hat{\rho}_\phi \equiv \hat{U}_\phi \hat{\rho} \hat{U}_\phi^\dagger$ уже произведена. Отметим только, что в общем случае параметризация состояния может быть реализована посредством применения квантовой операции, и не только унитарной. Измерение пробного параметризованного состояния $\hat{\rho}_\phi$ позволяет получить набор измерительных исходов, на базе которого по некоторому правилу реализуется оценка $\tilde{\phi}$ неизвестного параметра ϕ . Естественно, в общем случае такая оценка не может быть точной, $\tilde{\phi} \neq \phi$, и разность точечной оценки и неизвестного параметра $|\tilde{\phi} - \phi|$ определяет точность используемой процедуры. Помимо данной величины, полученной оценке также приписывается некоторая неопределённость. Погрешность результата измерения является фундаментальной и связана с соотношением неопределённостей Гейзенберга, для квантово-механической частицы имеющим вид

$$\Delta q^2 \Delta p^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (2.1)$$

где $\Delta q^2 \equiv \langle (\Delta \hat{q})^2 \rangle$ и $\Delta p^2 \equiv \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle$ — дисперсии координаты и импульса частицы, характеризующие неопределённость её физического состояния в фазовом пространстве [12]. Таким образом, нас будет интересовать проблема нахождения минимальной неопределённости оцениваемой величины ϕ и условий, при которых она имеет место. Причём существуют разные методы постизмерительной обработки измерительных исходов ε , реализуемые с помощью функции $\Phi(\varepsilon)$ — статистической точечной оценки (СТО). Различные аспекты выбора СТО (в английской литературе используется термин estimator) являются предметом изучения математической статистики и поэтому детально не рассматриваются. Отметим только то, что метод функции максимального правдоподобия часто реализуется в оптической квантовой метрологии; в дальнейшем именно эту функцию мы будем подразумевать под $\Phi(\varepsilon)$. Применение метода функции максимального правдоподобия позволяет в некоторых случаях получить аналитическое значение оценки $\tilde{\phi}$ в зависимости от измерительных исходов, а также её стандартное отклонение.

Используемый ниже анализ применим к различным физическим системам, включая оптические среды. Для извлечения условной информации из заранее подготовленного состояния $\hat{\rho}_\phi$ рассмотрим квантовое измерение, которое определяется набором своих положительных операторов $\hat{\Pi}(\varepsilon_i) \geq 0$, так называемых POVM (Positive Operator-Valued Measure) элементов, удовлетворяющих условию нормировки $\sum_{i=1}^m \hat{\Pi}(\varepsilon_i) = \hat{\mathbf{I}}$, где $\hat{\mathbf{I}}$ — единичный оператор, а ε_i — набор измерительных исходов (для простоты мы рассматриваем дискретный набор значений ε_i ; в целом, данное рассмотрение применимо и к случаю, когда набор значений ε принимает непрерывные значения). Тогда значение условной вероятности может быть оценено как

$$P(\varepsilon_i|\phi) = \text{tr}(\hat{\Pi}(\varepsilon_i)\hat{\rho}_\phi). \quad (2.2)$$

Если начальное состояние состоит из v некоррелированных подсистем $\hat{\rho}_\phi = \hat{\rho}_\phi^{(1)} \otimes \hat{\rho}_\phi^{(2)} \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_\phi^{(v)}$ с одинаковой параметризацией, то условная вероятность данного сепарабельного состояния, составленного из v частей, оценивается как $P^{(v)}(\varepsilon_i|\phi) = \prod_{i=1}^v P(\varepsilon_i|\phi)$.

Рассмотрим случай одного измерения с результатом измерения ε , что позволяет экспериментатору получить оценку $\Phi(\varepsilon) = \tilde{\phi}$ и приписать её неизвестному параметру ϕ . Но данная оценка может быть верной только в среднем,

$$\langle \Phi \rangle = \sum_i \Phi(\varepsilon_i) P(\varepsilon_i|\phi), \quad (2.3)$$

когда измерение идентично подготовленным состояниям повторяется большое число раз в случае использования несмещённой (unbiased) СТО $\langle \Phi \rangle = \phi$. Информация о неопределённости оценивания неизвестного параметра ϕ содержится в дисперсии СТО, которая может быть стандартно оценена как

$$\langle \Delta \Phi^2 \rangle \equiv \Delta \Phi^2 = \sum_i (\Phi(\varepsilon_i) - \langle \Phi \rangle)^2 P(\varepsilon_i|\phi). \quad (2.4)$$

Величины $\langle \Phi \rangle$ и $\langle \Delta \Phi^2 \rangle$ могут зависеть от ϕ , но мы опускаем их аргумент. Аппарат математической статистики позволяет оценить нижнюю границу дисперсии СТО. Удивительно, что граничное значение можно получить посредством несложных алгебраических преобразований. Для этого можно воспользоваться двумя величинами, а именно, производной средней величины от статистической оценки $\partial \langle \Phi \rangle / \partial \phi = \langle \Phi \partial L(\varepsilon_i|\phi) / \partial \phi \rangle$, где $L(\varepsilon_i|\phi) = \ln P(\varepsilon_i|\phi)$ — логарифмическая условная вероятность [60], усреднённой логарифмической производной $\langle \partial L / \partial \phi \rangle = 0$, а также неравенством Коши – Шварца для операторов $\langle \hat{A} \hat{B} \rangle^2 \leq \langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle$. Тогда цепочка преобразований

$$\begin{aligned} \left(\frac{d \langle \Phi \rangle}{d \phi} \right)^2 &= \left(\left\langle \Phi \frac{\partial L}{\partial \phi} - \langle \Phi \rangle \frac{\partial L}{\partial \phi} \right\rangle \right)^2 = \\ &= \left(\left\langle (\Phi - \langle \Phi \rangle) \frac{\partial L}{\partial \phi} \right\rangle \right)^2 \leq \langle (\Phi - \langle \Phi \rangle)^2 \rangle \left\langle \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \right)^2 \right\rangle = \\ &= \Delta \Phi^2 F(\phi) \end{aligned} \quad (2.5)$$

позволяет оценить нижнюю границу (граница Крамера – Рао (ГКР)) среднеквадратичного отклонения СТО $\Delta \Phi_{\text{CR}}$ для полученного распределения вероятностей (2.2)

$$\Delta \Phi \geq \Delta \Phi_{\text{CR}} = \frac{1}{\sqrt{F(\phi)}} \frac{d \langle \Phi \rangle}{d \phi}, \quad (2.6)$$

где использовано выражение для информации Фишера

$$F(\phi) = \left\langle \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \right)^2 \right\rangle = \sum_i \frac{1}{P(\varepsilon_i|\phi)} \left(\frac{d P(\varepsilon_i|\phi)}{d \phi} \right)^2. \quad (2.7)$$

В случае использования несмещённой СТО ($d \langle \Phi \rangle / d \phi = 1$) получаем широко используемое в литературе выражение ГКР (см., например, [11, 60, 64])

$$\Delta \Phi_{\text{CR}} = \frac{1}{\sqrt{v F(\phi)}} \quad (2.8)$$

для сепарабельного состояния $\hat{\rho}_\phi$ с набором измерительных исходов $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_v)$, так как в данном случае информация Фишера становится аддитивной величиной, $F_v = vF$. Отметим, что оценка (2.8) проистекает из теоремы об асимптотической достижимости ГКР в случае использования метода максимального правдоподобия в качестве СТО $\Phi(\varepsilon)$. Можно доказать, что в

предельном случае $\nu \rightarrow \infty$ измерительных исходов асимптотическое распределение $\Phi(\varepsilon)$ является нормальным со средним значением ϕ и дисперсией $1/\nu F(\phi)$, что можно условно представить как $\Phi(\varepsilon) \sim P_n(\phi, 1/\nu F(\phi))$, где под символом P_n понимается стандартное нормальное распределение, а символ \sim используется в том смысле, что асимптотическое распределение $\Phi(\varepsilon)$ приближается к нормальному распределению в случае $\nu \rightarrow \infty$.

Семейство измерений с набором своих измерительных элементов $\{P(\varepsilon_i)\}$ является бесконечным, что делает актуальным вопрос о поиске измерения, которое максимизирует информацию Фишера используемого состояния $\hat{\rho}_\phi$, т.е. $F_q(\phi) = \max_{\{P(\varepsilon_i)\}} F(\phi)$, и данная величина называется квантовой информацией Фишера (КИФ). Можно показать, что процедура максимизации по измерительным элементам ведёт к уменьшению нижней границы оценивания неизвестного параметра до своего предельного фундаментального предела $\Delta\Phi_{\text{QCR}}$ (квантовая граница Крамера–Рао (КГКР)) и в случае несмещённой СТО имеют место следующие неравенства:

$$\Delta\Phi \geq \Delta\Phi_{\text{CR}} \geq \Delta\Phi_{\text{QCR}} = \frac{1}{\sqrt{\nu F_q(\phi)}}. \quad (2.9)$$

Таким образом, для квантовой метрологии и сенсорики принципиальным является нахождение КИФ $F_q(\phi)$, напрямую связанной с процедурой измерения неизвестного параметра ϕ и его дисперсии. Ниже будут разобраны физические схемы квантовой метрологии, в которых $F_q(\phi)$ может быть максимизирована.

В свою очередь, КИФ F_q — это дисперсия эрмитова оператора симметричной логарифмической производной $F_q(\phi) = \Delta D^2 = \text{tr}(\hat{\rho}_\phi \hat{D}^2)$, так как $\langle \hat{D} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho}_\phi \hat{D}) = 0$. Данный оператор удовлетворяет уравнению $d\hat{\rho}_\phi/d\phi = (\hat{\rho}_\phi \hat{D} + \hat{D} \hat{\rho}_\phi)/2 = \{\hat{\rho}_\phi, \hat{D}\}/2$, где символ $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ означает антикоммутатор двух операторов. Решение последнего уравнения, реализуемое при приведении начального состояния в диагональное представление $\hat{\rho}_\phi = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$, всегда существует: $\hat{D} = 2 \sum_{i,j} \{\hat{\rho}_\phi, \hat{D}\}_{ij} \times |\psi_i\rangle \langle \psi_j| / (\lambda_i + \lambda_j)$, что позволяет рассчитать квантовый предел информации Фишера как

$$F_q(\hat{\rho}_\phi) = \text{tr}(\hat{\rho}_\phi \hat{D}^2) = \sum_i \frac{(\partial_\phi \lambda_i)^2}{\lambda_i} + 2 \sum_{i,j} \frac{(\lambda_i - \lambda_j)^2}{\lambda_i + \lambda_j} |\langle \partial_\phi \psi_i | \psi_j \rangle|^2, \quad (2.10)$$

символ ∂_ϕ здесь и далее означает производную функции или состояния по параметру ϕ . КИФ уже не зависит от типа выбранного измерения и полностью определяется пробным состоянием $\hat{\rho}_\phi$. Зная вид оператора симметричной логарифмической производной, всегда можно выбрать собственные состояния этого оператора $\hat{D} = \sum_i \lambda_i^{(D)} |\psi_i^{(D)}\rangle \langle \psi_i^{(D)}|$, которые могут также зависеть и от параметра ϕ , в качестве измерительных элементов $\{P(\varepsilon_i) = |\psi_i^{(D)}\rangle \langle \psi_i^{(D)}|\}$, таким образом уменьшая неопределённость СТО до значения КГКР. Отметим, что выбор собственных состояний оператора \hat{D} не является единственным POVM измерением, с помощью которого достигается КГКР, но в целом поиск таких операторов является сложной задачей. Возможна ситуация, когда

экспериментатор может догадываться, какие значения может принимать неизвестный параметр ϕ в результате предварительных "грубых" измерений, для того чтобы "подправить" измерительный базис последующих измерений. Но такие сложные адаптивные стратегии не входят в рассмотрение нашего обзора. Выражение для КИФ (2.10) может зависеть от ϕ достаточно сложным образом, поэтому выбор пробного состояния $\hat{\rho}_\phi$ может стать удачным в определённом диапазоне изменения ϕ . И наоборот, использование этого же состояния $\hat{\rho}_\phi$ не гарантирует того, что данное состояние может стать полезным при оценивании ϕ в другом диапазоне его изменения.

Вычисление КИФ (2.10) может оказаться довольно сложной технической проблемой, которую, тем не менее, можно упростить в двух часто используемых случаях. Так, вид оператора симметричной логарифмической производной упрощается до более простого выражения $\hat{D} = 2\partial_\phi \hat{\rho}_\phi$ в случае чистого состояния $\hat{\rho}_\phi = |\psi_{\text{out}}\rangle \langle \psi_{\text{out}}|$, что доказывается непосредственно из определения оператора \hat{D} и условия $\hat{\rho}_\phi = \hat{\rho}_\phi^2$ для чистых состояний. Тогда КИФ чистого состояния переходит в выражение

$$F(\psi_{\text{out}}) = 4 \left(\langle \partial_\phi \psi_{\text{out}} | \partial_\phi \psi_{\text{out}} \rangle - |\langle \partial_\phi \psi_{\text{out}} | \psi_{\text{out}} \rangle|^2 \right), \quad (2.11)$$

которое наиболее часто в современной научной литературе принимается за определение КИФ (ср. с [11, 60, 64]).

Второе допущение, являющееся отчасти ответом на второй вопрос, — это возможность унитарной "кодировки" пробного состояния

$$\hat{U}_\phi = \exp(-i\phi \hat{G}) \quad (2.12)$$

с помощью эрмитова генератора \hat{G} (ср. с [64]). Оператор \hat{U}_ϕ определяет преобразование чистого состояния $|\psi_{\text{out}}\rangle = \hat{U}_\phi |\psi_{\text{in}}\rangle$, а также в общем случае пробного смешанного состояния, $\hat{\rho}_\phi = \hat{U}_\phi \hat{\rho} \hat{U}_\phi^\dagger$ и удовлетворяет уравнению фон Неймана $i\partial_\phi \hat{\rho}_\phi / \partial \phi = [\hat{G}, \hat{\rho}_\phi]$, где $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ — коммутатор двух операторов. Таким образом, КИФ можно вычислить как учетверённую дисперсию наблюдаемой \hat{G}

$$F_q(\psi_{\text{out}}, \hat{G}) = 4(\langle \hat{G}^2 \rangle - \langle \hat{G} \rangle^2) \equiv 4\Delta G^2 \quad (2.13)$$

для чистого состояния и

$$F_q(\hat{\rho}_\phi, \hat{G}) = 2 \sum_{i,j} \frac{(\lambda_i - \lambda_j)^2}{\lambda_i + \lambda_j} |\langle \psi_i | \hat{G} | \psi_j \rangle|^2 \quad (2.14)$$

для смешанного состояния $\hat{\rho}_\phi$ в наиболее часто встречающемся случае $\partial_\phi \lambda_i = 0$, когда не используется классический вклад $\hat{\rho}_\phi$ в эту величину. Выражение (2.14) может показаться "странным" при попытке использовать его, например, для чистого или сбалансированного $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_i = 1/N$ состояний. Все "странности" исчезают при использовании полноты базисных состояний $|\psi_i\rangle$, а также двух очевидных преобразований: $(\lambda_i - \lambda_j)^2 = (\lambda_i + \lambda_j)^2 - 4\lambda_i \lambda_j$ и $\langle \partial_\phi \psi_i | \psi_j \rangle = -\langle \psi_i | \partial_\phi \psi_j \rangle$, что позволяет записать (2.14) в виде

$$F_q(\hat{\rho}_\phi, \hat{G}) = 4 \left(\sum_i \lambda_i \langle \psi_i | \hat{G}^2 | \psi_i \rangle - 2 \sum_{i,j} \frac{\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} |\langle \psi_i | \hat{G} | \psi_j \rangle|^2 \right). \quad (2.15)$$

Отметим также важные свойства выпуклости и аддитивности КИФ

$$F_q\left(\hat{\rho}_\phi = \sum_i \lambda_i \hat{\rho}_\phi^{(i)}\right) \leq \sum_i \lambda_i F_q(\hat{\rho}_\phi^{(i)}), \quad (2.16)$$

$$F_q(\otimes \hat{\rho}_\phi^{(i)}) \leq \sum_i F_q(\hat{\rho}_\phi^{(i)}), \quad (2.17)$$

а также неравенство

$$F_q(\hat{\rho}_\phi, \hat{G}) \leq 4\Delta G^2, \quad (2.18)$$

которое можно качественно объяснить так: добавление классической информации при формировании смешанного состояния $\hat{\rho}_\phi$ уменьшает общее количество информации, которое можно получить при его измерении. Последний шаг по определению точной границы оценивания неизвестного параметра заключается в максимизации КИФ (2.15) по пробным состояниям, т.е. поиску такого состояния $\hat{\rho}$, которое обеспечило бы максимальное значение КИФ $\max_{\hat{\rho}_\phi} F(\hat{\rho}_\phi)$, что уже выходит за рамки нашего обзора, но отчасти будет освещено ниже на некоторых примерах.

Оценки (2.13), (2.14) получены при наличии соответствующего генератора \hat{G} физической системы. В этой связи рассмотрим практический важный случай оценки физически малого параметра ϕ . В данном пределе оценка неопределённости параметра $\Delta\phi \ll 1$ может быть выполнена на основе формулы набега ошибки (см. [11, 64])

$$\Delta\phi = \frac{\Delta I}{\partial I / \partial \phi}, \quad (2.19)$$

в которой используются среднеквадратичное отклонение $\Delta I \equiv (\langle \hat{I}^2 \rangle - \langle \hat{I} \rangle^2)^{1/2}$, а также среднее значение $I = \langle \hat{I} \rangle$ оператора детектируемого (случайного) сигнала \hat{I} . Как видно из (2.19), при всех прочих идеальных условиях повышение точности измерения малых смещений требует, во-первых, увеличения отношения сигнал–шум и, во-вторых, максимального угла наклона кривой, определяемой величиной $\partial I / \partial \phi$. Уменьшение величины ΔI возможно до уровня дробового шума [65], обусловленного эффективностью детекторов сигнала. Этот шум определяет СКП классических измерений.

Условие малости $\phi \ll 1$ позволяет аппроксимировать преобразование оператора наблюдаемой величины $\hat{I}' = \hat{U}_\phi^\dagger \hat{I} \hat{U}_\phi$ как

$$\hat{I}' = \exp(i\phi \hat{G}) \hat{I} \exp(-i\phi \hat{G}) \approx \hat{I} - i\phi [\hat{I}, \hat{G}]. \quad (2.20)$$

Поскольку для любой пары операторов \hat{I} и \hat{G} можно записать соотношение неопределённости в виде

$$\Delta I \Delta G \geq \frac{1}{2} |[\hat{I}, \hat{G}]|, \quad (2.21)$$

то выражение для набега ошибки фазы (2.19) приобретает вид

$$\Delta\phi = \frac{\Delta I}{|\partial \langle \hat{I} \rangle / \partial \phi|} = \frac{\Delta I}{|[\hat{I}, \hat{G}]|} \geq \Phi_{\text{QCR}} = \frac{1}{2\Delta G}, \quad (2.22)$$

что совпадает с КГКР (2.9), (2.11). В теории оценивания соотношения (2.22) физически выражают принцип не-

определённости (ср. с [64]). Таким образом, в квантовой метрологии величина $\Delta\phi$ подлежит минимизации посредством выбора соответствующего оператора физической величины \hat{G} и пробного квантового состояния светового поля, по которым проводятся усреднения.

2.3. Преимущества неклассических состояний при оценивании неизвестного параметра в линейной метрологии

Рассмотрим теперь ответ на первый вопрос, представленный в разделе 2.1. Именно использование неклассических состояний света в оптической квантовой метрологии позволяет исследователям получить тот дополнительный "квантовый" ресурс, который и даёт решающее преимущество квантовых технологий над классическими при сверхточном оценивании неизвестного параметра [66]. Такие состояния составляют предмет квантовой оптики: за последние три десятилетия развития она предоставила значительное число неклассических состояний, а также способов их преобразований, приготовления и измерения [22, 67].

В классической оптике ключевым параметром является разность фаз, например, между плечами ИМЦ, определяющая выходную интерференцию (см. рис. 2). При этом разность фаз рассматривается как классический параметр, а не как квантовая наблюдаемая, что составляет за данным параметром возможность его оценивания, а не измерения. Детальное обсуждение проблемы фазы в квантовой оптике, существование эрмитова оператора фазы электромагнитного поля и связанных с ним методов детектирования можно найти в других работах (см., например, [68, 69]).

Во многих практически важных случаях разность фаз двух световых пучков, за поведением которой мы наблюдаем, может быть представлена как сумма "классической" части фазового сдвига (референтной фазы) ϕ_0 , априорно известной из условий приготовления изначального квантового состояния (либо из результатов предшествующего классического измерения), а также ϕ — его неизвестной части, т.е. в виде $\phi_0 + \phi$. "Дополнительный" набег фазы световой волны ϕ образуется в случае размещения в одном из плеч ИМЦ прозрачной среды с неизвестным показателем преломления, зависящим от материальных параметров среды, температуры и т.д., как раз и являющихся конечной целью измерения и оценки в метрологии и сенсорике. В таком случае погрешность измерения разности фаз $\Delta(\phi_0 + \phi) = \Delta\phi$ полностью определяется величиной $\Delta\phi$. О её измерении и оценке речь пойдёт ниже. Выбор значения референтной фазы ϕ_0 при этом определяется условием минимизации результирующей погрешности измерения. Время задержки фотонов τ в интерферометре Хонга–Оу–Манделя может быть ещё одним примером неизвестного параметра, который может быть оценён методами квантовой механики.

Оценим неопределённость измерения разности фаз в ИМЦ, изображённом на рис. 2б, с использованием выражения (2.19). В представлении Гейзенберга входные и выходные каналы интерферометра могут быть описаны бозонными операторами уничтожения \hat{a}_1 , \hat{a}_2 и \hat{a}'_1 , \hat{a}'_2 соответственно, которые подчиняются стандартным бозонным коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = [\hat{a}'_i, \hat{a}'_j^\dagger] = \delta_{ij}. \quad (2.23)$$

Математически распространение полей в ИМЦ удобно представить с помощью группы вращений $SU(2)$, для операторов квазиспина двухмодовой системы (ср. с [70]):

$$\begin{aligned}\hat{J}_X &= \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1), \\ \hat{J}_Y &= \frac{1}{2i}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1), \\ \hat{J}_Z &= \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2),\end{aligned}\quad (2.24)$$

которые подчиняются коммутационным соотношениям алгебры $SU(2)$

$$[\hat{J}_X, \hat{J}_Y] = i\hat{J}_Z, \quad [\hat{J}_Y, \hat{J}_Z] = i\hat{J}_X, \quad [\hat{J}_Z, \hat{J}_X] = i\hat{J}_Y. \quad (2.25)$$

Действие ИМЦ может быть описано как последовательность вращений в абстрактном (спиновом) пространстве, определяемых унитарным оператором $\hat{U}_\Theta = \exp(-i\Theta \hat{\mathbf{J}}\mathbf{n})$ ($\hat{\mathbf{J}} = \{\hat{J}_X, \hat{J}_Y, \hat{J}_Z\}$, Θ и \mathbf{n} — углы и вектор оси вращения), аналогично угловым моментам в квантовой механике (см., например, [71]). В таком случае преобразование операторов квазиспина в схеме на рис. 2б можно записать в виде

$$\hat{J}'_j = \hat{U}_{\text{MZ}}^\dagger \hat{J}_j \hat{U}_{\text{MZ}}, \quad j = X, Y, Z, \quad (2.26)$$

где оператор

$$\hat{U}_{\text{MZ}} = \hat{U}_{\text{BS}}^\dagger \hat{U}_\phi \hat{U}_{\text{BS}} \quad (2.27)$$

описывает эволюцию состояний в ИМЦ [11, 70, 72]. В (2.27) оператор $\hat{U}_{\text{BS}} = \exp(-i(\pi/2)\hat{J}_X)$ является оператором равновесного светоделителя, а оператор эволюции фазового параметра имеет вид

$$\hat{U}_\phi = \exp(-i\phi \hat{J}_Z). \quad (2.28)$$

Можно показать, что оператор ИМЦ (2.27) в данной конфигурации трансформируется в $\hat{U}_{\text{MZ}} = \exp(-i\phi \hat{J}_Y)$. Детекторы на выходе ИМЦ измеряют числа фотонов $\hat{N}_{1,2}^{\text{out}}$, с помощью которых можно определить эрмитову наблюдаемую — оператор разности числа фотонов $\hat{I} = \hat{N}_2^{\text{out}} - \hat{N}_1^{\text{out}} = \hat{a}_2'^\dagger \hat{a}_2' - \hat{a}_1'^\dagger \hat{a}_1' = -2\hat{J}'_Z$. Таким образом, среднеквадратичное отклонение

$$\Delta I = 2\Delta \hat{J}'_Z = 2\sqrt{\langle \hat{J}'_Z{}^2 \rangle - \langle \hat{J}'_Z \rangle^2}$$

будет ограничивать точность измерения фазового параметра ϕ .

В квантовой оптике интерферометр, построенный на группе вращений $SU(2)$, легко можно реализовать с помощью линейных оптических элементов: светоделителей, фазовращателей и т.д. (см., например, [73]). На основе соотношений (2.26) среднее значение измеряемой в эксперименте величины $\langle \hat{J}'_Z \rangle$ может быть выражено через значения операторов (2.24), которые усреднены по входному квантовому состоянию $|\psi_{\text{in}}\rangle$:

$$\langle \hat{J}'_Z \rangle = \cos(\phi) \langle \hat{J}_Z \rangle_{\text{in}} - \sin(\phi) \langle \hat{J}_X \rangle_{\text{in}}. \quad (2.29)$$

Расчёт величины $\Delta \hat{J}'_Z$ приводит к выражению для дисперсии $\Delta \hat{J}'_Z{}^2$ в виде

$$\Delta \hat{J}'_Z{}^2 = \cos^2(\phi) \Delta \hat{J}_Z{}^2 + \sin^2(\phi) \Delta \hat{J}_X{}^2 - \sin(2\phi) \text{cov}(\hat{J}_Z, \hat{J}_X), \quad (2.30)$$

где $\text{cov}(\hat{J}_Z, \hat{J}_X)$ — параметр ковариантности операторов \hat{J}_Z и \hat{J}_X , определяемый как

$$\text{cov}(\hat{J}_Z, \hat{J}_X) = \frac{1}{2} \langle (\hat{J}_Z \hat{J}_X + \hat{J}_X \hat{J}_Z) \rangle_{\text{in}} - \langle \hat{J}_X \rangle_{\text{in}} \langle \hat{J}_Z \rangle_{\text{in}}. \quad (2.31)$$

Тогда формула (2.22) преобразуется в

$$\Delta \phi = \frac{\Delta \hat{J}'_Z{}^2}{|\partial \langle \hat{J}'_Z \rangle / \partial \phi|} \quad (2.32)$$

в ИМЦ-представлении при измерении наблюдаемой величины $I = \langle 2\hat{J}'_Z \rangle$ (ср. с (2.19)).

Рассмотрим частные примеры. В квазиклассическом пределе на вход 1 подаётся когерентное (лазерное) излучение, а вход 2 оставлен "пустым", т.е. в вакуумном состоянии, так что $|\psi_{\text{in}}\rangle = |\alpha\rangle_1 |0\rangle_2 \equiv |\alpha, 0\rangle$, где $|0\rangle$ — вакуумное состояние,

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.33)$$

— когерентное состояние ($|\alpha|^2 = \langle \hat{N} \rangle \equiv N$ — среднее число фотонов в интерферометре). В данном случае из (2.32) получаем

$$\Delta \phi = \frac{1}{\sqrt{N} |\sin(\phi)|}. \quad (2.34)$$

Выражение (2.34) может быть оптимизировано около значения референтной фазы $\phi \simeq \phi_0 = \pi/2$, что даёт нам следующую оценку для когерентных состояний

$$\Delta \phi_{\text{coh}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \equiv \Delta \phi_{\text{SQL}}. \quad (2.35)$$

Значение (2.35) определяет в квантовой метрологии СКП измерений, известный в эксперименте также как предел дробового шума [14]. Физически это и есть предельная точность классической интерферометрии, имеющей дело с когерентными источниками лазерного излучения при $|\alpha|^2 \gg 1$, при полном отсутствии потерь излучения в ИМЦ. Чтобы преодолеть СКП в (2.35), необходимо использовать существенно неклассические квантовые состояния, которые мы рассматриваем ниже. Но прежде заметим, что тот же результат (2.35) можно получить из (2.18) как $\Delta \phi_{\text{coh}} = 1/2\Delta \hat{J}_Z$, поскольку для состояния (2.33) $\Delta \hat{J}_Z = (1/2)|\alpha| = (1/2)\sqrt{N}$.

Рассмотрим классические одномодовые состояния $\hat{\rho}_{\text{cl}} = \int d^2\alpha P_{\text{cl}}(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha|$, где квазираспределение Глаубера — Сударшана $P_{\text{cl}}(\alpha)$ является классической плотностью вероятности $P_{\text{cl}}(\alpha) \geq 0$. Тогда, воспользовавшись неравенством (2.18), можно получить следующую оценку КИФ для генератора $\hat{G} \equiv \hat{N}/2 = \hat{a}^\dagger \hat{a}/2$

$$F_q\left(\hat{\rho}_{\text{cl}}, \frac{\hat{N}}{2}\right) \leq \Delta \hat{N}_{\text{cl}}^2 = \int d^2\alpha P_{\text{cl}}(\alpha) |\alpha|^2 = \text{Tr}(\hat{\rho}_{\text{cl}} \hat{N}) = N_{\text{cl}}. \quad (2.36)$$

Выражение (2.36) позволяет оценить нижнюю границу среднеквадратичного отклонения фазы в случае измерения классического состояния в одном измерении $v = 1$

$$\Delta \phi_{\text{QCR}} \geq \frac{1}{\sqrt{N_{\text{cl}}}}. \quad (2.37)$$

Тогда, для того чтобы получить меньшее значение неопределённости параметра $\Delta\phi_{\text{OCR}}$, требуется обеспечить выполнение условия $F_q(\hat{\rho}, \hat{N}/2) > N_\rho$. Следовательно, измеряемое состояние $\hat{\rho}$ должно быть неклассическим, что в сочетании с неравенством (2.18) позволяет получить необходимое (но не достаточное) условие $\Delta N_\rho^2 > N_\rho$ для преодоления стандартного квантового предела. Интересно отметить, что требуемое неклассическое состояние $\hat{\rho}$ должно обладать суперпуассоновской статистикой, чтобы удовлетворить условию (2.37), а это означает, что не любое неклассическое состояние может быть полезным в оптической квантовой метрологии.

Далее в качестве примеров неклассических состояний рассмотрим одномодовое сжатое вакуумное (OMCB) состояние с действительным значением параметра сжатия квадратурной компоненты $r > 0$, которое представим в следующем виде:

$$|\text{SMSV}(y)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{\sqrt{(2n)!}} \frac{(2n)!}{n!} |2n\rangle, \quad (2.38)$$

где $y = \tanh(r)/2$. Если пропустить данное состояние через светоделитель с произвольными действительными амплитудами пропускания T и отражения R , то выходное состояние преобразуется в гибридное запутанное состояние [74, 75]

$$BS_{12}(|\text{SMSV}(y)\rangle_1 |0\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \sum_{l=0}^{\infty} c_l^{(0)}(y_1, B) \sqrt{Z^{(l)}(y_1)} |\Psi_l^{(0)}(y_1)\rangle_1 |l\rangle_2 \quad (2.39)$$

с амплитудами $c_l^{(0)}(y_1, B) = (-1)^l (y_1 B)^{l/2} / \sqrt{l!}$, где входной параметр сжатия y становится равным $y_1 = yT^2 = y/(1+B) \leq y$ с параметром светоделителя, равным $B = (1-T^2)/T^2$; $Z^{(n)}(y_1) = d^n Z(y_1) / dy_1^n$ есть n -я производная функции $Z(y_1) = 1/(1-4y_1^2)^{1/2}$ с $n = 2m, 2m+1$. Состояния определённой чётности определяются как

$$|\Psi_{2m}(y_1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z^{(2m)}(y_1)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_1^n}{\sqrt{(2n)!}} \frac{(2(n+m))!}{(n+m)!} |2n\rangle, \quad (2.40)$$

$$|\Psi_{2m+1}(y_1)\rangle = \sqrt{\frac{y_1}{Z^{(2m+1)}(y_1)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_1^n}{\sqrt{(2n+1)!}} \times \frac{(2(n+m+1))!}{(n+m+1)!} |2n+1\rangle \quad (2.41)$$

и получаются из гибридного запутанного состояния (2.39) посредством извлечения из него $2m, 2m+1$ фотонов.

Гибридное состояние (2.39), а также так называемые измерительно-индуцированные (measurement-induced), как чётные (2.40), так и нечётные (2.41), состояния, которые основаны на приготовлении требуемого состояния за счёт измерений, проводимых над "частью" получаемого в схеме состояния (ср. с [76]), представляют несомненный интерес для оптической квантовой метрологии; измерительно-индуцированное приготовление $N00N$ -состояния будет рассмотрено ниже, в разделе 4.4. Увеличение числа извлечённых фотонов ведёт к значительному увеличению среднего числа частиц в измерительно-индуцированных состояниях, что позволяет получить значение неопределённости оцениваемого па-

раметра, меньшее по сравнению со значением неопределённости с исходным состоянием (2.38) [75]. Кроме того, измерительно-индуцированные состояния (2.40), (2.41) могут аппроксимировать как чётные оптические состояния котов Шрёдингера

$$|\text{SCS}_+(\alpha)\rangle = 2N_+(\alpha) \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} |2n\rangle, \quad (2.42)$$

так и нечётные

$$|\text{SCS}_-(\alpha)\rangle = 2N_-(\alpha) \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle, \quad (2.43)$$

обладающие амплитудой $\alpha > 5$ с точностью более 0,99, где $N_{\pm}(\alpha) = 1/[2(1 \pm \exp(-2|\alpha|^2))]^{1/2}$ — нормировочный коэффициент [74]. Состояния оптических котов Шрёдингера являются ещё одним примером состояний с непрерывной наблюдаемой, которые могут быть использованы в оптической квантовой метрологии.

В качестве примера двухмодового состояния важное значение в квантовой метрологии играет максимально запутанное $N00N$ -состояние

$$|N00N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|N, 0\rangle + |0, N\rangle), \quad (2.44)$$

а также различные типы сепарабельных состояний, составленные из представленных одномодовых состояний. Например, можно воспользоваться сепарабельным состоянием $|\text{SMSV}\rangle_1 |n\rangle_2$ на входе в ИМЦ, где число n может принимать значения как $n=0$, так и $n \neq 0$. Входным состоянием также может быть произвольная смесь когерентного или теплового состояния с фотонным состоянием $\hat{\rho} = \hat{\rho}_a \otimes |N\rangle_b \langle N|$ [77]. Использование запутанных состояний на входе в ИМЦ может дать дополнительный ресурс для сверхточного оценивания неизвестного параметра.

В таблице 1 приведены аналитические выражения квантовой информации Фишера для некоторых отмеченных состояний в случае использования генератора $\hat{G} \equiv \hat{J}_Z$

Таблица 1. Квантовая информация Фишера некоторых неклассических и когерентного состояний в случае применения операторов фазового сдвига $\hat{U}_\phi = \exp(-i\phi\hat{J}_Z)$ к исходному (пробному) чистому состоянию $|\psi_{\text{in}}\rangle$, т.е. $|\psi_{\text{out}}\rangle = \hat{U}_\phi |\psi_{\text{in}}\rangle$ или $|\psi_{\text{out}}\rangle = \hat{U}_\phi |\psi_{\text{in}}\rangle \otimes |0\rangle$ соответственно. Для удобства некоторые оценки приведены в единицах среднего числа частиц $N \equiv \langle \hat{N} \rangle$

Пробное состояние $ \psi_{\text{in}}\rangle$	Среднее число частиц $\langle \hat{N} \rangle \equiv N$	Квантовая информация Фишера, $F_q(\psi_\phi, \hat{G}) \equiv 4\Delta G^2$, $\hat{G} \equiv \hat{J}_Z$
Фоковское состояние $ N\rangle$	N	0
Когерентное состояние $ \alpha\rangle$	$ \alpha ^2$	N
Одномодовое сжатое вакуумное состояние $ \text{SMSV}\rangle$	$\sinh^2(r)$	$2(N^2 + N)$
$N00N$ -состояние $ N00N\rangle$	N	N^2
Чётное состояние кота Шрёдингера $ \text{SCS}_+(\alpha)\rangle$	$ \alpha ^2 \tanh(\alpha ^2)$	$N + \frac{ \alpha ^4}{\cosh^2(\alpha ^2)}$
Нечётное состояние кота Шрёдингера $ \text{SCS}_-(\alpha)\rangle$	$ \alpha ^2 \coth(\alpha ^2)$	$N - \frac{ \alpha ^4}{\sinh^2(\alpha ^2)}$

с входным состоянием $|\psi_{\text{in}}\rangle_1|0\rangle_2$, трансформирующимся в $|\psi_{\text{out}}\rangle = \hat{U}_\phi|\psi_{\text{in}}\rangle_1|0\rangle_2 = \exp(-i\phi\hat{J}_Z)|\psi_{\text{in}}\rangle_1|0\rangle_2$. Как видно из таблицы, только фоковское состояние и нечётное состояние кота Шрёдингера не могут преодолеть СКП. Более того, одномодовое сжатое вакуумное состояние может также преодолеть и предел Гейзенберга, речь о котором пойдёт ниже, так как $\Delta n_{\text{SMSV}}^2 \geq \langle n \rangle_{\text{SMSV}}^2$. С другой стороны, для состояний кота Шрёдингера слагаемое $\propto |\alpha|^4$ представляет собой поправку, исчезающую при $N \gg 1$. Несмотря на то что неклассические состояния света могут преодолеть СКП, реализовать данное преимущество на практике — непростая экспериментальная задача, имеющая ограничения, обусловленные уровнем развития современных квантовых оптических технологий (об этом речь пойдёт в следующих разделах).

Интересно заметить, что в контексте метрологических применений определённый интерес может вызывать так называемый *четырёхмодовый* скалярный свет, для которого степень поляризации равна нулю, поскольку суммарные средние от стоксовых операторов также равны нулю [77]. Однако вопрос их использования для задач квантовой метрологии требует отдельных исследований, выходящих за рамки данного обзора.

2.4. Предельные оценки фазовых параметров в нелинейной метрологии

До сих пор молчаливо предполагалось, что фаза ϕ не зависит от числа частиц. Однако при более общей постановке проблемы ϕ следует полагать малым параметром, но зависящим от числа фотонов. Физически эта ситуация может соответствовать, к примеру, измерению и оценке параметра кубичной нелинейности прозрачной среды, помещённой в одном из плеч ИМЦ и вызывающей дополнительный нелинейный набег фаз.

Поскольку вычисление нижней границы КР в данном случае представляет открытую проблему в современной квантовой теории, представим лишь предельные оценки точности измерения фазовых параметров, которые можно получить, интуитивно полагаясь на использование неклассических состояний, полезных в случае линейной метрологии. В связи с этим рассмотрим генераторы двух видов: соответствующие линейным (сепарабельным) и нелинейным (несепарабельным) преобразованиям. Такие генераторы могут быть представлены как сумма $\hat{G}_L = \sum_{i=1}^k \hat{g}_i$ и произведение $\hat{G}_{\text{NL}} = \prod_{i=1}^k \hat{g}_i$ k генераторов соответственно. Дисперсии указанных генераторов могут быть представлены в виде [79, 80]

$$\Delta G_L = \frac{k}{2}(\lambda_{\text{max}} - \lambda_{\text{min}}), \quad \Delta G_{\text{NL}} = \frac{1}{2}(\lambda_{\text{max}}^k - \lambda_{\text{min}}^k), \quad (2.45)$$

где λ_{max} и λ_{min} — максимальное и минимальное собственные значения \hat{g}_i . Поскольку чаще всего в качестве \hat{g}_i выступают операторы числа частиц, для которых $\lambda_{\text{max}} = N$ и $\lambda_{\text{min}} = 0$, можно записать:

$$\Delta G_L = \frac{k}{2} N, \quad \Delta G_{\text{NL}} = \frac{1}{2} N^k, \quad (2.46)$$

откуда имеем

$$\Delta\phi_L \geq \frac{1}{kN}, \quad \Delta\phi_{\text{NL}} \geq \frac{1}{N^k}. \quad (2.47)$$

Отметим также следующую терминологию, устоявшуюся в квантовой метрологии. При $k = 1$ гамильтониан физического процесса, соответствующего эволю-

ции неизвестного (фазового) параметра, линейно зависит от числа частиц, т.е. $\hat{H} \propto \phi\hat{N}$, в связи с чем уместно говорить о *линейной квантовой метрологии*. При этом максимально достижимой точностью измерения ϕ является предел Гейзенберга (ПГ) $\Delta\phi \geq N^{-1}$.

Генераторы преобразования \hat{G}_{NL} (2.46) со значениями $k > 1$ относятся к *нелинейной метрологии* некоторого фазового параметра, участвующего в процессе нелинейного набега фазы, $\hat{H} \propto \phi\hat{N}^k$, так что выражение

$$\Delta\phi \geq \frac{1}{N^k} \quad (2.48)$$

представляет супергейзенберговский предел (СГП) измерения (оценки) фазового параметра. Выражение (2.48) позволяет единым образом описать предельную точность как линейной ($k = 1$), так и нелинейной ($k > 1$) квантовой метрологии. Для простоты в дальнейшем мы будем говорить о (2.48) как об обобщённом пределе Гейзенберга (ОПГ).

Таким образом, предельная (без учёта потерь) метрологическая точность, которой можно достичь, с учётом (2.47) находится в интервале значений

$$\frac{1}{N^k} \leq \Delta\phi \leq \frac{1}{N^{k-1/2}}. \quad (2.49)$$

Правая часть неравенства (2.49) представляет обобщение СКП в нелинейной метрологии и может быть получена с помощью пробных когерентных состояний (2.49) при том же условии нелинейного набега фазы $\hat{H} \propto \phi\hat{N}^k$ (см. [79, 80]). Интересно заметить, что погрешность $\Delta\phi$ измерения неизвестного параметра ϕ в нелинейной метрологии на порядки N преодолевает СКП $\Delta\phi = 1/\sqrt{N}$ даже с когерентными состояниями на входе интерферометра.

С практической точки зрения важным предельным случаем (2.49) является оценка неизвестного параметра кубичной нелинейности среды, для которого $k = 2$, что соответствует процессу самовоздействия плоской (световой) волны в такой среде. Однако, как было показано в работах [44, 81], квантовая нелинейная метрология с (пространственными) светлыми солитонами приводит к оценке метрологического "окна" квантовых измерений параметра керровской нелинейности в виде

$$\frac{1}{N^3} \leq \Delta\phi \leq \frac{1}{N^{2.5}}, \quad (2.50)$$

что формально соответствует значению $k = 3$ в (2.49). С физической точки зрения данная ситуация имеет место благодаря пространственным нелинейным эффектам, ответственным за формирование светлых солитонов. Практически важным вкладом стало бы экспериментальное подтверждение неравенств (2.50) на основе оптических или атомных светлых солитонов. Однако пока для этого существуют объективные сложности в получении квантовых режимов для таких солитонов с относительно небольшим (мезоскопическим) числом частиц. В оптике с учётом малого параметра керровской нелинейности солитоны содержат, как правило, макроскопически большое число фотонов, $N \simeq 10^6$ [82] и более, обладают существенной (для таких задач) декогеренцией. Имеются определённые надежды на использование полупроводниковых сред, обладающих большой кубичной нелинейностью. В эксперименте с неравновесными экситон-поляритонными конденсатами оказы-

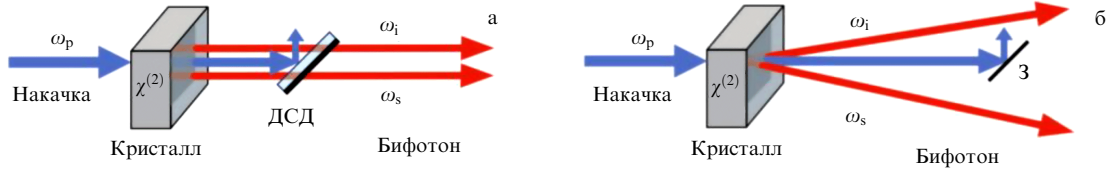


Рис. 3. (а) Вырожденное и (б) невырожденное спонтанное параметрическое рассеяние света в кристалле с квадратичной нелинейностью $\chi^{(2)}$, позволяющие получать одномодовое (а) и двухмодовое (б) сжатые состояния соответственно. ДСД — дихроичный светоделитель, З — зеркало, ω_p , ω_i и ω_s — круговые частоты фотонов накачки, холостого и сигнального соответственно.

вадается возможным получение светлых солитонов с мезоскопическим (сотни) числом частиц [83]. Однако подобные среды являются "сильно шумящими" (по крайней мере при температурах наблюдения в несколько кельвинов) в связи с возбуждением большого резервуара экситонов, а также конечным временем жизни фотонов в микрорезонаторе [84].

В атомной оптике конденсаты Бозе–Эйнштейна, обладающие отрицательной длиной рассеяния, позволяют получать солитоны с мезоскопическим числом атомов $N \simeq 10^3$ [85]. Однако такие эксперименты являются пока уникальными, поскольку светлые солитоны образуются в достаточно узком диапазоне числа частиц, удовлетворяющем условию стабильности солитонов.

Таким образом, выражение (2.49) показывает, что возможности нелинейной метрологии с ростом параметра $k > 1$ становятся существенно шире с точки зрения преодоления СКП. Однако использование сугубо нелинейных сред, формирующих соответствующие фазовые параметры, в общем случае сопряжено с увеличением шумов, диссипацией, тепловыми флуктуациями и пр. Применение квантовых метрологических схем, имеющих в своей основе сильно нелинейные среды, должно быть физически обосновано в каждом отдельном случае [86].

3. Предельные измерения и детектирование фазовых параметров в квантовой оптике

3.1. Квантовые измерения со сжатыми состояниями света

Исторически сжатые (по флуктуациям) состояния электромагнитного поля явились одними из первых предложенных для измерения малых смещений в ИМ за СКП [6]. На сегодняшний день имеется достаточно много обзоров, посвящённых сжатым и коррелированным состояниям светового поля; среди них выделим один из последних [87]. В работах, относящихся к 1980–1990 гг., основной акцент делался на различных фундаментальных свойствах неклассических состояний света, а также измерений с ними (см., например, [88–96]). В настоящее время такие состояния вызывают большой практический интерес с точки зрения различных приложений, как в квантовой метрологии и сенсорике, так и в квантовой коммуникации и квантовых вычислениях [74, 97–101]. Как и когерентные состояния (2.33), они относятся к состояниям с непрерывными переменными поля, которые можно охарактеризовать некоторым комплексным числом $\zeta \equiv r \exp(i\theta)$, где r и θ — параметр и фаза сжатия соответственно. Так, уже упомянутое выше ОМСВ-состояние (2.38) в общем виде может быть реализовано в результате применения оператора сжатия $\hat{S}(\zeta) =$

$\exp[(1/2)\zeta^* \hat{a}^2 - (1/2)\zeta \hat{a}^{\dagger 2}]$ к вакуумному состоянию, т.е. в $|\text{SMSV}\rangle = \hat{S}(\zeta)|0\rangle$.

С физической точки зрения ОМСВ-состояние может быть получено в результате вырожденного по частоте спонтанного параметрического рассеяния света, когда фотон поля накачки распадается на два фотона-"близнеца", идентичных по частоте (и поляризации) (рис. 3).

В более общем случае, когда фотоны 1 и 2 различаются хотя бы по поляризации, такой процесс описывается оператором сжатия $\hat{S}_{12}(\zeta) = \exp[\zeta^* \hat{a}_1 \hat{a}_2 - \zeta \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger]$, который позволяет получить двухмодовое сжатое вакуумное состояние (ДСВС)

$$|\text{TMSV}\rangle_{12} = \hat{S}_{12}(\zeta)|0\rangle_1|0\rangle_2 = \frac{1}{\cosh(r)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tanh^n(r) \exp(in\theta) |n\rangle_1 |n\rangle_2. \quad (3.1)$$

Из выражений (2.38) и (3.1) ясно видно, что соответствующие состояния светового излучения на выходе из нелинейного кристалла $|\text{TMSV}\rangle_{12}$ (за исключением вакуума) всегда содержат чётное число фотонов. Эти состояния обладают целым рядом замечательных статистических свойств, которые хорошо известны и позволяют их использовать в различных приложениях современных оптических квантовых технологий [98]. Так, например, квантовые свойства ОМСВ-состояния связаны с поведением эрмитовых квадратур светового поля — аналогов координаты \hat{q} и импульса \hat{p} в квантовой механике (ср. с (2.1))

$$\hat{Q} = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad \hat{P} = \frac{i}{2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (3.2)$$

Коммутационное соотношение $[\hat{Q}, \hat{P}] = i/2$ между операторами (3.2) приводит к соотношению неопределённостей Гейзенберга

$$\Delta Q^2 \Delta P^2 \geq \frac{1}{16}, \quad (3.3)$$

означающее невозможность одновременного и точного измерения соответствующих квадратур светового поля. При выборе оптимального значения фазы сжатия θ для дисперсий (3.3) ОМСВ-состояния можно получить выражения

$$\Delta Q^2 = \frac{1}{4} \exp(\mp 2r), \quad \Delta P^2 = \frac{1}{4} \exp(\pm 2r), \quad (3.4)$$

которые соответствуют фазе сжатия $\theta = 0$ (верхние знаки в (3.4)) и $\theta = \pi$ (нижние знаки).

Выражения (3.4) демонстрируют эффект сжатия, заключающийся в экспоненциальном убывании одной из дисперсий квадратур, и антисжатия — роста дисперсии

флуктуаций в фазово-сопряжённой квадратуре с увеличением параметра сжатия r . Коэффициент $1/4$ в (3.4) указывает на значение дисперсии для вакуумных или когерентных состояний света при $r = 0$. Это позволяет интерпретировать сжатые состояния как подавление флуктуаций ниже уровня дробового шума. Заметим, что соотношение неопределённостей, справедливое для дисперсий квадратур (3.3), принимает минимальное значение и не нарушается ни при каких значениях θ и r .

Параметр r в (3.1) описывает эффективность процесса СПРС и зависит от толщины кристалла L , величины его квадратичной нелинейности $\chi^{(2)}$, а также амплитуды классической волны накачки $\sqrt{I_p}$ (I_p — её интенсивность), так что $r \propto \chi^{(2)} \sqrt{I_p} L$ [101]. Как следует из (3.1), идеального (100 %) сжатия $\langle (\Delta \hat{Q})^2 \rangle \rightarrow 0$ можно добиться лишь в пределе $r \rightarrow \infty$, что физически требует бесконечно больших значений обозначенных выше параметров. В экспериментах со сжатым светом нелинейный кристалл помещают в резонатор, чтобы эффективно увеличить L (ср. с [14]). На практике дисперсии квадратур всегда ограничены с учётом потерь излучения, а также конечного значения r . При этом уровень сжатия непосредственно связан с параметром сжатия, который в свою очередь определяется мощностью накачки нелинейного кристалла. Данный уровень принято измерять в дБ, рассчитывая по формуле

$$[\text{дБ}] = -10 \log_{10} \left(\frac{\Delta X^2}{\Delta X_{\text{vac}}^2} \right) = -10 \log_{10} (\exp(-2r)), \quad (3.5)$$

где $\hat{X} = \{\hat{Q}, \hat{P}\}_{\min}$ — минимальная из двух квадратур, $\Delta X_{\text{vac}}^2 \equiv \langle (\Delta \hat{X})^2 \rangle_{\text{vac}}$ — значение дисперсии для вакуумного состояния. Последнее равенство в (3.5) записано с учётом выражений (3.4). Так, например, величина сжатия в 15 дБ, полученная экспериментально в [102], формально соответствует параметру сжатия $r \simeq 1,73$, рассчитанному согласно (3.5).

Потери в схемах со сжатым светом могут быть оценены с помощью метода фиктивных светоделителей (см. раздел 5). Суть метода состоит в том, что в схему добавляются (фиктивные) светоделители, отклоняющие часть фотонов; это эквивалентно учёту потерь и/или взаимодействию с оружающей средой, представляемой в виде квантовых мод (осцилляторов), находящихся в вакуумном состоянии.

В результате измеряемая дисперсия квадратур (без учёта эффективности детекторов) приобретает вид (ср. с [101])

$$\Delta X_{\text{means}}^2 = \eta \Delta X^2 + \frac{1 - \eta}{4}, \quad (3.6)$$

где $\hat{X} = \{\hat{Q}, \hat{P}\}$, η — коэффициент пропускания схемы ($0 \leq \eta \leq 1$). В идеальном случае $\Delta X_{\text{means}}^2 = \Delta X^2$ при $\eta = 1$. Заметим, что с учётом (3.6) минимальное произведение дисперсий (3.3) становится уже недостижимым.

За последние 20 лет в экспериментах со сжатым светом достигнут существенный прогресс с применением новой компонентной базы как линейных, так и нелинейных элементов, допускающих интегральное исполнение на чипе (см., например, [103, 104]). На рисунке 4 приведена упрощённая схема эксперимента по генерации ОМСВ-состояний [105]. Она включает четыре основных блока. Волоконный лазер формирует рабочую (для ОМСВ) длину волны, используемую в схемах с регистра-

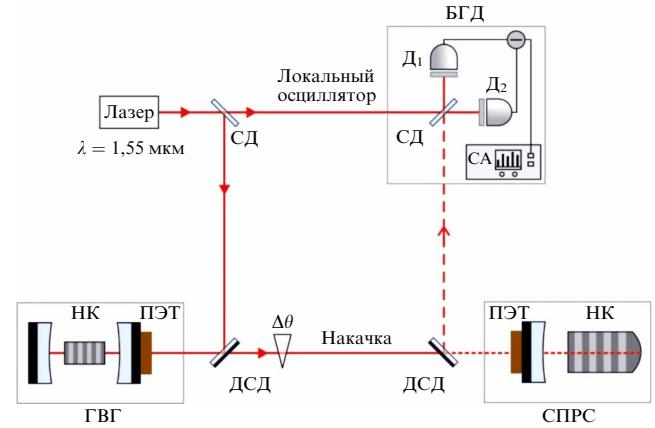


Рис. 4. Упрощённая схема генерации и регистрации ОМСВ-состояний [105]: ГВГ — блок генерации второй гармоники, СПРС — блок со спонтанным параметрическим рассеянием, БГД — балансный гомодинный детектор, ДСД — дихроичный светоделитель, СД — полупрозрачный светоделитель, ПЭТ — пьезоэлемент, СА — анализатор спектра, НК — нелинейный кристалл, $\Delta\theta$ — элемент управления фазой накачки.

цией гравитационных волн. Его когерентное излучение (состояние $|\alpha\rangle_1$) используется в качестве поля локального осциллятора (опорного генератора) в блоке балансного гомодинного детектора при регистрации ОМСВ-состояний. Блок генерации второй гармоники (ГВГ) позволяет сформировать накачку на длине волны 0,775 мкм, используемую затем в блоке СПРС, в котором и происходит формирование состояния $|\text{SMSV}\rangle_2$ (см. (2.38)). Заметим, что как в блоке ГВГ, так и в СПРС используются резонаторы с помещёнными внутри квадратично-нелинейными кристаллами РРКТР (периодически поляризованный кристалл титанил-фосфата калия, КТР). В результате основными факторами, ограничивающими сжатие одной из квадратур, является эффективность преобразования излучения в этих средах. А именно, для теоретических оценок схемы на рис. 4 для оптимизированной по фазе дисперсии ΔX^2 одной из квадратур сжатого света используется выражение

$$\Delta X^2 = 1 + \eta \frac{4\sqrt{P/P_{\text{thr}}}}{(1 - \sqrt{P/P_{\text{thr}}})^2 + 4\Omega^2}, \quad (3.7)$$

где $\eta \simeq 0,965$ — параметр, учитывающий эффективность детекторов и СПРС, $P_{\text{thr}} \simeq 221$ мВт — пороговая мощность параметрической генерации в нелинейном кристалле, P — мощность накачки, Ω — отношение частоты, на которой измеряется сжатый свет (в диапазоне от единиц до десятков МГц), к потерям в резонаторе с кристаллом СПРС. В результате в работе было получено сжатие, по величине равное – 12,3 дБ.

Обсудим, каким образом сжатые состояния света используются для повышения точности измерений в оптических интерферометрах (ср. с [14, 18]). В связи с этим проанализируем точность измерения в ИМЦ, если начальное состояние на первом светоделителе ИМЦ (рис. 2б) есть комбинация когерентного света и ОМСВ, т.е. $|\psi_{\text{in}}\rangle = |\alpha\rangle_1 |\text{SMSV}\rangle_2$, что соответствует квантовой метрологии с CSV-состоянием, для которого среднее число фотонов есть

$$\langle \hat{N} \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2(r). \quad (3.8)$$

Первая часть выражения (3.8) соответствует когерентной части поля на входе ИМЦ, а вторая — среднему числу шумовых фотонов, образующихся в ходе СПРС (вторая часть — это среднее число фотонов в ОМСВ-состоянии, что отмечено в табл. 1). В данном случае, полагая ζ для простоты вещественным и проведя вычисления, аналогичные (2.29)–(2.32), для области интерференционной картины, образуемой на детекторах ИМЦ (при $\phi_0 = \pi/2$), можно получить набег ошибки фазового параметра $\Delta\phi$ в виде (ср. с [11, 52])

$$\Delta\phi = \frac{\sqrt{|\alpha|^2 \exp(-2r) + \sinh^2(r)}}{||\alpha|^2 - \sinh^2(r)|}. \quad (3.9)$$

Предположим, что когерентная составляющая поля на входе в ИМЦ существенно больше шумовой, т.е. $N \simeq |\alpha|^2 \gg \sinh^2(r)$. Тогда из (3.9) имеем

$$\Delta\phi \simeq \frac{\exp(-r)}{\sqrt{N}}, \quad (3.10)$$

что означает принципиальную возможность преодоления СКП с помощью ОМСВ (ср. с [6]). Зависимость от r в (3.10) подтверждалась в эксперименте. Так, уже в одной из первых работ [106], посвящённых применению сжатых состояний в метрологии, было достигнуто подавление квадратур в 2 дБ. В основе эксперимента лежала всё та же схема с ИМЦ, в одно из плеч которого помещён квадратично-нелинейный кристалл с СПРС, позволяющий получать ОМСВ-состояния. На сегодняшний день рекордные значения подавления дисперсии квадратуры светового излучения, достигнутые в [102], были получены с квадратично-нелинейным кристаллом РРКТР длиной 9,3 мм. Сжатый свет измерялся стандартным образом, с помощью балансного гомодинного детектирования и откалиброванных InGaAs p-i-n фотодиодов с 99,5 % эффективностью.

Важно заметить, что выражения (3.9), (3.10) являются, по сути, результатом применения формулы (2.19), характеризующей распространение ошибки измерения фазы в описанных выше экспериментах с использованием ОМСВ. На вопрос, в какой мере (3.9), (3.10) соответствуют предельно допустимым измерениям фазового параметра, формула (2.19) ответа не даёт, поскольку не учитывает различных стратегий измерения, детектирования и оценки фазового параметра. Поэтому более корректным подходом следует полагать оценку предельной точности измерений в формализме информации Фишера (2.10), (2.11), которая не привязана к конкретной схеме измерения/детектирования и позволяет оценить максимальную информацию, получаемую в ходе оценки априорно неизвестного фазового параметра. Эти вопросы активно обсуждались в работах [52, 53]. В частности, использование выражения (2.7) для расчёта информации Фишера позволяет получить выражение для погрешности и оценки фазы $\Delta\phi$, как оказалось, уже не зависящей от значения самой фазы ϕ :

$$\Delta\phi = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2 \exp(2r) + \sinh^2(r)}}, \quad (3.11)$$

так что "классическая" (реперная) фаза ϕ_0 может принимать значения в интервале $0 \leq \phi_0 \leq \pi$. Из (3.11) следует, что $\Delta\phi$ достигает СКП в пределе $|\alpha|^2 = 0$, $\sinh^2(r) = N$,

когда исходное состояние есть только ОМСВ. Аналогично, если изначально имеем только когерентное состояние $N = |\alpha|^2$ ($r = 0$), то из (3.11) следует СКП (2.35). Оптимальной же с точки зрения метрологии является ситуация, когда

$$|\alpha|^2 \simeq \sinh^2(r) \simeq \frac{\exp(2r)}{4} \simeq \frac{N}{2}. \quad (3.12)$$

В этом случае оценка фазового параметра приводит к ПГ $\Delta\phi = 1/N$. Поскольку на практике параметр сжатия r невелик, то выражение (3.12) накладывает существенные ограничения и на амплитуду когерентного поля α . Так, например, в условиях получения ощутимого сжатия одной из квадратур в 15 дБ параметр сжатия составляет $r \simeq 1,73$ (ср. с [107]), и среднее число фотонов в когерентном поле должно составлять $|\alpha|^2 \simeq 8$, что существенно меньше значений, соответствующих интенсивностям лазерного поля в схемах с регистрацией гравитационных волн [6]. Несколько преодолеть обозначенные ограничения (по крайней мере, в теории) можно с помощью более сложных несбалансированных интерферометров с симметрией SU(1, 1), содержащих квадратично-нелинейные кристаллы вместо светоделителей (см. [54]). Однако такие схемы требуют аккуратного экспериментального подбора фазовых параметров, параметров сжатия (и антисжатия), потерь и т.д.

В обзоре мы рассматриваем главным образом интерферометры SU(2), позволяющие проводить высокоточные измерения неизвестных фазовых параметров как с макроскопическим, так и небольшим числом фотонов в своей основе. Для последнего случая, с учётом развивающихся технологий детектирования квантовых состояний света (см., например, [31]), о которых речь пойдёт ниже, представляют интерес запутанные состояния с фиксированным (общим) числом фотонов, и в частности, $N00N$ -состояния.

3.2. Детектирование квантовых состояний с предельной чувствительностью

Выясним, каким физическим критериям должны удовлетворять источники светового излучения, а также схемы его детектирования, чтобы достичь ПГ. Физически ОПГ (2.48) может быть достигнут при использовании на входе интерферометра максимально запутанного (по пространству) так называемого $N00N$ -состояния. Как видно из (2.44), $N00N$ -состояние представляет собой суперпозицию двух фоковских состояний: имеется N фотонов в канале 1 и ни одного фотона в канале 2, и наоборот — N фотонов в 2, ни одного в 1. Более детально вопрос об особенностях получения и использования состояния (2.44) на практике будет рассмотрен в следующих разделах обзора. Здесь мы обсудим лишь детектирование квантового состояния на выходе из ИМЦ с анализом интерференционной картины и оценки фазы ϕ . А именно, предположим, что имеется единственный детектор одиночных фотонов, который помещён в плечо 2 ИМЦ (рис. 2б). Допустим, что этот детектор может различить, сколько фотонов на него падает одновременно. В таком случае он сможет измерять и чётность числа фотонов, упавших на него, т.е. величину, описываемую оператором

$$\hat{P}_2 = (-1)^{\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2} = \exp(i\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) = \exp(i\pi \hat{J}) \exp(-i\pi \hat{J}_Z), \quad (3.13)$$

где $\hat{J} = \hat{N}/2$. Эволюция состояния $|\psi_{in}\rangle \equiv |N00N\rangle$ (2.44) в ИМЦ, изображённом на рис. 2б, описывается оператором

$$\hat{U}_{MZ} = \hat{U}_{BS}^\dagger \hat{U}_\varphi = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\hat{J}_X\right) \exp(-i\varphi\hat{J}_Z) \quad (3.14)$$

и (с точностью до общей фазы) приводит к соотношению

$$|\psi_{out}\rangle = \hat{U}_{MZ}|\psi_{in}\rangle = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\hat{J}_X\right) \frac{|N, 0\rangle + \exp(iN\varphi)|0, N\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (3.15)$$

где φ — фазовый набег в ИМЦ, учитывающий референтную фазу ϕ_0 , а также содержащий информацию об измеряемом параметре ϕ . В простейшем случае, при $\phi_0 = 0$, $\varphi = \phi$ (ср. с (2.27), (2.28)). Следовательно, среднее значение оператора (3.13) по состоянию на выходе из ИМЦ может быть описано как

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Pi}_2 \rangle &= \langle \psi_{in} | \hat{U}_{MZ}^\dagger \hat{\Pi}_2 \hat{U}_{MZ} | \psi_{in} \rangle = \langle \psi_{in} | \exp(i\pi\hat{J}) \exp(i\varphi\hat{J}_Z) \times \\ &\times \left[\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\hat{J}_X\right) \exp(-i\pi\hat{J}_Z) \exp\left(i\frac{\pi}{2}\hat{J}_X\right) \right] \exp(-i\varphi\hat{J}_Z) | \psi_{in} \rangle. \end{aligned} \quad (3.16)$$

После несложных вычислений [72, 108] можно получить

$$\langle \hat{\Pi}_2 \rangle = \begin{cases} (-1)^{N/2} \cos(\varphi N), & \text{если } N \text{ — чётное,} \\ (-1)^{(N+1)/2} \sin(\varphi N), & \text{если } N \text{ — нечётное.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Далее, с учётом того что $\hat{\Pi}_2^2 \equiv \hat{\mathbf{1}}$ — единичный оператор, не меняющий состояние, на которое он воздействует, для дисперсии оператора (3.13), усредняемой по состоянию (2.44), имеем

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_2^2 &= \langle \hat{\Pi}_2^2 \rangle - \langle \hat{\Pi}_2 \rangle^2 = \\ &= \begin{cases} \sin^2(\varphi N), & \text{если } N \text{ — чётное,} \\ \cos^2(\varphi N), & \text{если } N \text{ — нечётное.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Выражения (3.17), (3.18) имеют важный физический смысл. Детекторы чётности позволяют выявить N -фотонные события, а именно, интерференцию N фотонов. Исходя из формулы набег ошибки (2.32) погрешность измерения фазового параметра ϕ , от которого зависит фаза φ , получается в виде

$$\Delta\phi = \frac{\Delta\Pi_2}{|\partial\langle\hat{\Pi}_2\rangle/\partial\phi|} = \frac{1}{N} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \right|^{-1}. \quad (3.19)$$

Из (3.19) следует, что с помощью ИМЦ, изображённого на рис. 2б, при измерении малой фазы ϕ в рамках линейной метрологии, когда $\varphi = \phi_0 + \phi$, достигается предел Гейзенберга

$$\Delta\phi = \frac{1}{N}. \quad (3.20)$$

В случае задач нелинейной метрологии, когда в плечо ИМЦ помещена среда с неизвестной керровской нелинейностью, фазу φ следует полагать зависящей от числа фотонов N , так что $\varphi = N^{k-1}(\phi_0 + \phi)$, и из (3.19) следует супергейзенберговский предел

$$\Delta\phi = \frac{1}{N^k} \quad (3.21)$$

(ср. с (2.48), (2.47)).

Таким образом, именно детектор чётности позволяет в нашем случае добиться максимальной метрологической точности от исходного (пробного) $N00N$ -состояния.

Измерение чётности в настоящее время представляет собой одно из важных практических направлений развития квантовой оптики и квантовой информации [109]. В более общем случае оно основано на детекторе, который должен быть "настроен" на измерение фоковских состояний, т.е. различать падающие на него фотоны. Наиболее востребованными сегодня здесь можно полагать детекторы, принцип действия которых основан на свойствах сверхпроводимости [110]. Очевидный прогресс в данном направлении за последние 10 лет виден из сравнительного анализа работ [111–117]. Основным преимуществом рассматриваемых детекторов является их высокая квантовая эффективность (свыше 98 %) в широком спектральном диапазоне, быстроедействие (способность к повторному измерению) — на уровне наносекунд и менее, низкий уровень темновых шумов [118], а также способность к увеличению числа измеряемых фотонов. Так, например, в работе [111] совсем недавно экспериментально была измерена корреляционная функция $g^{(N)}$ с $N = 15$. Недостатком таких детекторов по-прежнему является необходимость поддержания сверхнизких температур (до 100 мК), а также уменьшение эффективности детектирования с ростом числа фотонов N . Сюда же следует отнести и высокую стоимость подобных устройств по сравнению с полупроводниковыми аналогами. Очевидно, что с развитием квантовых технологий в целом сверхпроводящие детекторы станут вполне доступными для применений в интегральной фотонике, оперирующей с мезоскопическим числом фотонов, составляющим десятки частиц. В этом отношении особые надежды можно связывать с новыми (сверхпроводящими) материалами, демонстрирующими высокую чувствительность при умеренно низких (до 25 К) температурах [119].

3.3. Предельные возможности квантовой сенсорики

Выражения (3.17), (3.18) показывают возможность наблюдения интерференционной картины с периодом, в N раз меньшим, чем с одним фотоном, что означает суперразрешение фазы ϕ (при $\phi_0 = 0$), т.е. её сверхчувствительность [120, 121]. Эта интерференционная картина может быть усилена в N^k раз в общем случае нелинейной метрологии.

В реальности, однако, интерференционная картина имеет вполне конечную видность V , изменяющуюся в пределах $0 \leq V \leq 1$, а также эффективность измерения $0 \leq \eta \leq 1$. Вероятность N -фотонной интерференции (в рамках линейной метрологии) при одном измерении с учётом этих величин выглядит как

$$p = \frac{\eta}{2} (1 + V \sin(\varphi N)) \quad (3.22)$$

(ср. с (3.17), а также [122]).

Оценка фазы в таком случае определяется средней частотой N -фотонных событий в ν испытаниях, т.е.

$$C_\nu = \nu p. \quad (3.23)$$

В эксперименте число испытаний ν всегда конечно, так что величина C_ν имеет среднеквадратичное отклонение

$$\Delta C_\nu = \sqrt{\nu p(1-p)}. \quad (3.24)$$

Величину (3.24) можно связать с фазовой сверхчувствительностью S , определяемой в ходе детектирования интерференции N фотонов в виде

$$S = \frac{1}{\sqrt{vN} \Delta\phi}, \tag{3.25}$$

где $\Delta\phi$ — погрешность измерения фазы ϕ , которую можно определить через ΔC_v с помощью распространения ошибки фазы как

$$\Delta\phi = \frac{\Delta C_v}{|\partial C_v / \partial \phi|}. \tag{3.26}$$

Выражению (3.25) можно придать и другой смысл, если воспользоваться определением КГКР (2.8). В этом случае получаем оценку параметра S при измерении в виде

$$0 \leq S \leq \sqrt{\frac{F_q}{N}}, \tag{3.27}$$

где F_q — КИФ, связанная с точностью измерения ϕ . Воспользовавшись (2.48), приходим к верхней границе параметра S_{\max} для чувствительности измерения фазы:

$$S_{\max} = N^{k-1/2}. \tag{3.28}$$

С другой стороны, в условиях классических измерений из (3.27) можно получить

$$0 \leq S_{cl} \leq 1, \tag{3.29}$$

где значение $S_{cl} = 1$ соответствует СКП измерения фазы с полностью когерентным светом. Таким образом, квантовая чувствительность сенсора, действие которого основано на точности измерения фазового параметра ϕ , соответствует области изменения

$$1 < S_q \leq N^{k-1/2}, \tag{3.30}$$

где $k = 1, 2, \dots$

В рассматриваемом выше случае неидеальной интерференционной картины, описываемой вероятностью N -фотонного детектирования (3.22), параметр S даётся выражением [122]

$$S = \frac{\sqrt{0,5\eta NV} |\cos(\phi_0 N)|}{\sqrt{(1 + V \sin(\phi_0 N))(1 - 0,5\eta(1 + V \sin(\phi_0 N)))}}. \tag{3.31}$$

Из (3.30) видно, что S достигает максимального значения при фазе ϕ_0 , удовлетворяющей условию $|\cos(\phi_0 N)| = 1$, так что

$$S = \frac{\sqrt{0,5\eta NV}}{\sqrt{1 - 0,5\eta}}. \tag{3.32}$$

Таким образом, (3.32) зависит от видности интерференционной картины V и эффективности измерения η : в пределе идеальной видности и детектирования $V\eta \rightarrow 1$, имеем $S \rightarrow \sqrt{N}$, что соответствует ПГ чувствительности оценки фазы (3.28) при $k = 1$.

4. Квантовая метрология на основе максимально запутанных состояний фотонов

4.1. Эффект Хонга–Оу–Манделя

Практически важным ресурсом квантовой оптической метрологии, позволяющим проводить измерения на уровне ПГ, является $N00N$ -состояние, содержащее $N = 2$ фотона (см. (2.44)). В основе приготовления таких состояний лежит интерферометр Хонга–Оу–Манделя (ХОМ) (рис. 5а), который позволяет выявить эффект ХОМ, являющийся одним из фундаментальных и наиболее практически значимых квантовых эффектов, связанных с (деструктивной) квантовой интерференцией фотонов на светоделителе [55].

Эксперимент по наблюдению эффекта ХОМ основан на процессе спонтанного параметрического рассеяния света в нелинейном кристалле, в ходе которого фотон лазерной накачки с частотой ω_p распадается на два фотона (так называемые бифотоны): сигнальный с частотой ω_s и холостой с частотой ω_i . В общем случае эти частоты имеют распределение, отличное от дельта-функции: в стационарном случае частоты связаны между собой соотношением $\bar{\omega}_s + \bar{\omega}_i = \omega_p$. Далее фотоны разводятся по двум плечам интерферометра (см. рис. 5а, а также [123]).

Разность времени хода бифотонов τ может быть вызвана различными физическими процессами, например: удлинение оптического волокна, помещённого в нагретую/охлажденную среду, сдвиг элементов установки и др. Так, если принять время хода холостого фотона за эталон, то рассматривается только изменение времени хода сигнального фотона τ . Дисперсия среды, в которой распространяется бифотонное поле, также приводит к временному сдвигу τ . Наконец, сама интерферо-

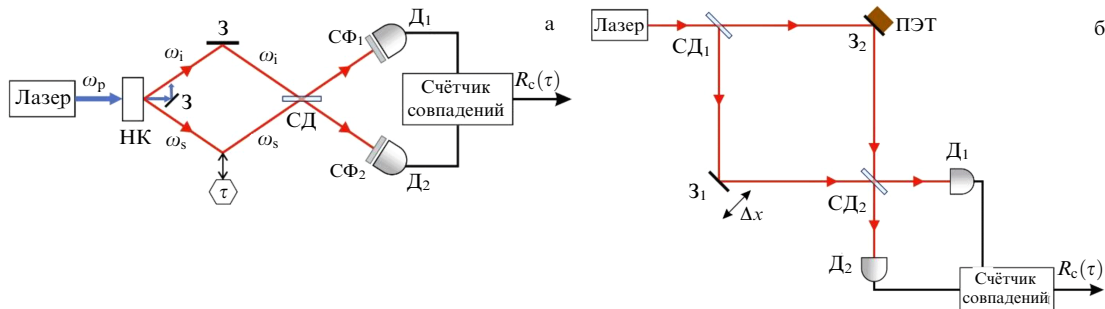


Рис. 5. Схемы (а) эксперимента ХОМ и (б) его аналога со слабыми когерентными импульсами света [127]: НК — квадратично-нелинейный кристалл бета-бората бария; ω_p , ω_s и ω_i — частоты фотонов накачки, сигнального и холостого соответственно; З — зеркала; СД — светоделитель, СФ_{1,2} — спектральные фильтры, Д_{1,2} — детекторы, τ — разность времени хода сигнального и холостого фотонов, $\Delta x = c\tau$ — оптическая разность хода фотонов (c — скорость света в вакууме), $R_c(\tau)$ — искомая функция числа счета совпадений детекторов за время наблюдения; ПЭТ — пьезоэлемент.

метрическая схема тоже может вводить некоторое смещение и обусловленную им задержку τ_0 . После смешения сигнального и холостого фотона на светоделителе СД, фотоны регистрируются детекторами в режиме счёта числа совместных срабатываний. Иными словами, регистрируется вероятность $R_c(\tau)$ события, при котором одновременно на два детектора придёт по одному фотону — квантовое состояние $|1, 1\rangle$. Минимум функции $R_c(\tau)$, известный в литературе как "провал" ХОМ, и образующийся при $\tau = 0$, как раз связывают с эффектом ХОМ [124]. При этом форма антикорреляционного "провала" соответствует вдвое сжатой и перевёрнутой огибающей корреляционной функции первого по интенсивности (второго по полю) порядка $g^{(1)}(\tau)$ [125]

$$R_c \sim 1 - g^{(1)}(2\tau), \tag{4.1}$$

связанной теоремой Винера–Хинчина со спектральной плотностью поля [126].

В важном с точки зрения эксперимента случае использования узкополосных фильтров², установленных перед детекторами, спектральное пропускание которых описывается гауссовой функцией с шириной σ_p , форма "провала" определяется этой гауссоидой, однако она всё равно оказывается в $\sqrt{2}$ раз уже, чем соответствующая корреляционная функция $g^{(1)}(\tau)$:

$$R_c \sim 1 - \frac{1}{2\pi} \int \exp\left(-\frac{\Omega^2}{4\sigma_p^2}\right) \cos(\Omega\tau) d\Omega. \tag{4.2}$$

Здесь $\Omega = \omega - \omega_0$ — частотная отстройка от центральной частоты спектра СПР ω_0 в вырожденном режиме ($2\omega_0 = \omega_p$).

Чтобы разобраться в причинах возникновения "провала", а также оценить его величину в эксперименте, полезно рассмотреть простую физическую картину с двумя фотонами, которые приготавливаются с помощью нелинейного кристалла и падают на полупрозрачный светоделитель СД, как это показано на рис. 5а. В таком случае начальное состояние на входе СД есть

$$|\psi_{in}\rangle = |1, 1\rangle = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle. \tag{4.3}$$

Состояние на выходе СД зависит от их различимости, а также статистики (см. [55]). Так, при $\tau = 0$ в общем случае можно записать

$$|\psi_{out}\rangle = \frac{1}{2}((\hat{a}_1^\dagger)^2 - (\hat{a}_2^\dagger)^2)|0\rangle + \frac{1}{2}(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger)|0\rangle. \tag{4.4}$$

Выражение (4.4) достаточно универсально: оно описывает не только рассматриваемый здесь эксперимент с фотонами (являющимися бозонами) по прохождению частиц через СД, но и возможный аналогичный эксперимент с фермионами [55]. Ввиду неразличимости бозонов последнее слагаемое в (4.4) становится равным нулю. В этом случае вероятности зарегистрировать по одному фотону на каждом из детекторов $P(1, 1) = |\langle 1, 1 | \psi_{out} \rangle|^2$, а также два фотона $P(2, 0) = P(0, 2) = |\langle 2, 0 | \psi_{out} \rangle|^2$ на каком-либо из детекторов соответственно даётся выражением:

$$P_{11} \equiv P(1, 1) = 0, \quad P_{20} \equiv P(2, 0) = P(0, 2) = \frac{1}{2}. \tag{4.5}$$

Таблица 2. Элементарные физические процессы преобразования (прохождения/отражения) двух фотонов в полупрозрачном светоделителе, дающие вклад в отдельные вероятности их детектирования на его выходе в квантовом и классическом случаях. Второй столбец (P_{11}) характеризует вероятности событий одновременной регистрации по одному фотону на выходе из СД; третий столбец ($P_{20/02}$) соответствует случаю прохождения и отражения обоих фотонов

Частицы	Вероятности регистрации фотонов	
	P_{11}	$P_{20/02}$
Квантовые (бозоны), неразличимые		
Классические, полностью различимые		

Из таблицы 2 видно, что вычитание соответствующих амплитуд вероятностей приводит к деструктивной интерференции на СД, которая и даёт "провал" ХОМ (рис. 6). Кроме того, поскольку $(\hat{a}_1^\dagger)^2 |0\rangle = \sqrt{2}|2\rangle$, состояние фотонов на выходе СД, отбрасывая общий множитель, можно записать в виде

$$|\psi_{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 0\rangle - |0, 2\rangle), \tag{4.6}$$

что с точностью до знака (фазового множителя $\exp(i\pi) = -1$) у второго слагаемого совпадает с $N00N$ -состоянием (2.44) с $N = 2$. Таким образом, анализируя всю схему на рис. 5а целиком, можно говорить, что в идеальном (квантовом) случае процесс спонтанной параметрической конверсии частоты вниз, происходящий при СПРС в кристалле ВВО, порождает два идентичных фотона с частотами $\omega_s = \omega_i = \omega_p/2$, при $\tau = 0$ одновременно попадающих на СД, и вследствие интерференции на его выходе образуется двухфотонное $N00N$ -состояние (4.6), которое в случае идеального срабатывания детекторов обеспечивает максимальный "провал" функции $R_c(0) = 0$ (см. красную кривую на рис. 6а).

4.2. Влияние классических шумов на эффект Хонга–Оу–Манделя и неразличимость фотонов

В реальном эксперименте вследствие неизбежных классических шумов невозможно полностью со 100%-ной надёжностью приготовить два идентичных фотона; можно лишь гарантировать равенство средних частот $\bar{\omega}_s = \bar{\omega}_i = \omega_p/2$ в серии таких экспериментов и выполнение закона сохранения энергии $\omega_s + \omega_i = \omega_p$. В результате неидентичности сигнального и холостого фотонов нарушается интерференция на СД, и "провал" теряет глубину $R_c(0) > 0$; в эксперименте этому соответствует уменьшение видности интерференционной картины.

Таким образом, в эксперименте частицы могут быть частично или даже полностью различимы, например, по частоте, поляризации и т.д. Чтобы учесть этот фактор, следует рассматривать фотоны как одночастичные волновые пакеты в виде

$$|\psi_{in}\rangle = \iint d\omega_s d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) \hat{a}_1^\dagger(\omega_s) \hat{a}_2^\dagger(\omega_i) |0\rangle, \tag{4.7}$$

где $\hat{a}_1^\dagger(\omega_s)$ — оператор рождения сигнального фотона в плече 1 с частотой ω_s , $\hat{a}_2^\dagger(\omega_i)$ — аналогичный оператор

² Имеется в виду случай, когда спектр фильтра уже, чем спектр СПР.

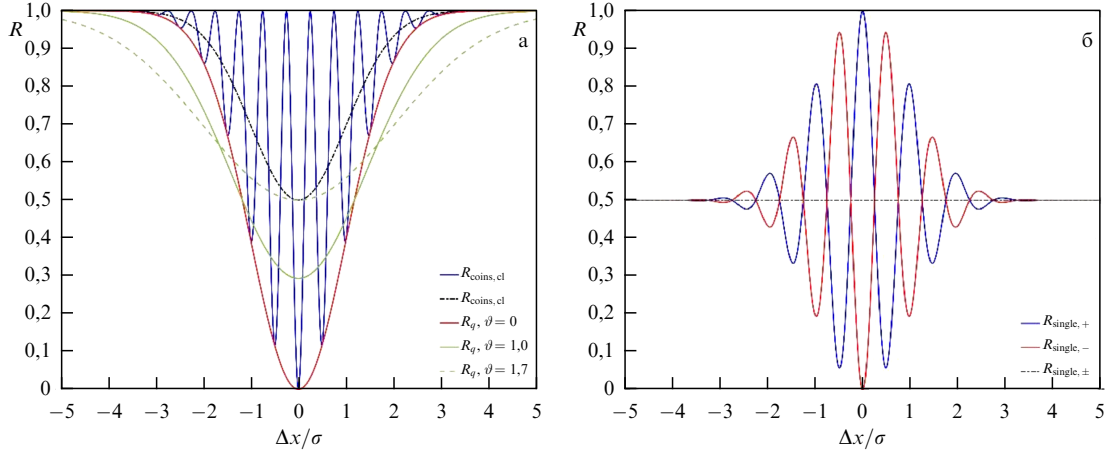


Рис. 6. Квантовая интерференция одиночных фотонов в эксперименте ХОМ и его "классическом" аналоге со слабыми когерентными импульсами света. Вероятность (а) совместных и (б) одиночных срабатываний детекторов (см. рис. 5). Красная сплошная и зелёные линии на рис. а получены из квантовых (бозонных) вероятностей с учётом классических шумов (см. (4.13)). Чёрные штрихпунктирные линии соответствуют классическому пределу метрологии с усреднением быстро осциллирующих компонент при $\sigma \gg \lambda_0$ (σ — ширина "провала" ХОМ на высоте $e^{-1/2}$). Осциллирующие кривые на рис. б (см. выражение (4.16)), а также синяя кривая на рис. а (см. выражение (4.17)) построены как результат интерференции для состояния (4.15), $\sigma = 1000\lambda_0$.

для холостого фотона в плече 2;

$$[\hat{a}_k^\dagger(\omega_1), \hat{a}_l(\omega_2)] = \delta_{kl}\delta(\omega_1 - \omega_2). \quad (4.8)$$

В (4.7) $f(\omega_s, \omega_i)$ — функция совместной спектральной интенсивности (ССИ) (joint spectral intensity), которую в самом общем виде можно записать как

$$f(\omega_s, \omega_i) = C f_s(\omega_s + \omega_i) f_{pm}(\omega_s, \omega_i), \quad (4.9)$$

где C — нормировочная постоянная, $f_s(\omega_s + \omega_i)$ — профиль спектра накачки, $f_{pm}(\omega_s, \omega_i)$ — функция фазового согласования (phase-matching):

$$f_{pm}(\omega_s, \omega_i) = \text{sinc}\left(\frac{L}{2}(k_p(\omega_s + \omega_i) - k_s(\omega_s) - k_i(\omega_i))\right) \times \exp\left(-i\frac{L}{2}(k_p(\omega_p) - k_s(\omega_s) - k_i(\omega_i))\right). \quad (4.10)$$

Здесь $k_p(\omega_p)$ — дисперсия волнового числа накачки, аналогично $k_s(\omega_s)$ для сигнального и $k_i(\omega_i)$ для холостого фотонов; L — толщина кристалла.

В случае, если накачка узкополосная (ширина спектральной линии $\sigma_p \ll 10$ ТГц, или в терминах длины волны $\Delta\lambda \ll 1$ нм), функция ССИ совпадает по модулю с гауссовым профилем накачки:

$$f(\omega_s, \omega_i) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(\omega_s - \bar{\omega}_s) + (\omega_i - \bar{\omega}_i)}{\sigma_p}\right)^2\right) \times \exp\left(-i\frac{L}{2}\left(\frac{1}{v_p} - \frac{1}{v_s}\right)(\omega_s - \bar{\omega}_s) - i\frac{L}{2}\left(\frac{1}{v_p} - \frac{1}{v_i}\right)(\omega_i - \bar{\omega}_i)\right). \quad (4.11)$$

Фазовый множитель в (4.11) возникает вследствие неодинаковости групповых скоростей фотонов накачки, холостого и сигнального — v_p , v_i и v_s [128, 129]. Вообще, критерием узкополосности накачки является условие $\sigma_p \ll v_j/L$, где L — толщина оптического кристалла, $j = p, i, s$.

С физической точки зрения потеря квантовой неразличимости частиц означает негативное влияние класси-

ческих шумов на видность интерференционной картины. Такое влияние можно учесть, если предположить, что между фотонами дополнительно возникает случайный фазовый сдвиг $\exp(i\epsilon\omega_s)$, испытываемый, к примеру, сигнальным фотоном. Здесь ϵ — классическая случайная (флуктуирующая) величина, описываемая нормальным (гауссовым) распределением:

$$g(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\epsilon} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2\sigma_\epsilon^2}\right). \quad (4.12)$$

После несложных вычислений с участием функции ССИ можно получить выражение (ср. с [130])

$$R_q(\tau) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\vartheta^2}} \exp\left(-\frac{1}{1+\vartheta^2} \frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (4.13)$$

где $\Delta x \equiv c(\tau - \tau_0)$; τ_0 определяет положение минимума и σ — ширина "провала" ХОМ в идеальном случае без шумов, определяемая шириной спектра накачки, а также нелинейными свойствами ВВО; $\vartheta \equiv \sigma_\epsilon/\sigma \geq 0$ — относительная "величина" шумов (случай $\vartheta = 0$ соответствует отсутствию шумов). На рисунке 6а приведены соответствующие зависимости (4.13) для $\vartheta = 0$ (красная сплошная кривая), $\vartheta = 1$ (зелёная сплошная) и $\vartheta = 1,7$ (зелёная штриховая кривая) соответственно. Видно, что наличие классических шумов ($\vartheta \neq 0$) уменьшает глубину "провала" в $\sqrt{1+\vartheta^2}$ раз и пропорционально увеличивает его ширину.

Интересный с точки зрения метрологии эксперимент выполнен в работе [131]. В нём на основе оценки информации Фишера и использования метода максимального правдоподобия продемонстрировано измерение оптической задержки 4,97 нм с точностью 0,89, определяемой границей Крамера–Рао. При этом спектральная ширина бифотонного поля была около 160 нм (кристалл РРКТР, синхронизм типа I).

4.3. Классический предел эффекта Хонга–Оу–Манделя

Для полноты понимания поведения "провала" ХОМ рассмотрим тот же эксперимент с фотонами на входе

СД, полагая их полностью классическими (различаемыми) частицами. В своё время эти вопросы на разных уровнях анализа (в том числе и метафизических) рассматривались в [132]. В последнее время здесь наметился также прогресс, связанный с использованием эффекта ХОМ в схемах с выборкой бозонов (boson sampling) (см., например, [132]).

Для наглядности представим, что оба фотона на рис. 5б — классические частицы, одновременно падающие с разных сторон на СД, который с некоторой классической вероятностью отражает или пропускает по отдельности эти частицы. В данном случае, если СД идеально полупрозрачный, то возможны *четыре* равновероятных исхода такого эксперимента: каждый из фотонов отразился на СД, каждый из фотонов прошёл СД, и наконец, по два фотона отразились от СД и по два его прошли. В результате имеем следующие выражения для классических вероятностей (ср. с (4.5)):

$$P_{11} = \frac{1}{2}, \quad P_{20} = \frac{1}{4}. \quad (4.14)$$

Как видно из (4.14) и табл. 2, вероятность P_{11} события, при котором по одному фотону (не важно, какому) окажется на каждом из детекторов, есть сумма вероятностей их прохождения и отражения по отдельности, и она больше тех, что соответствуют регистрации двухфотонных событий P_{20} . Таким образом, полная неразличимость квантовых частиц, позволяющая оперировать с амплитудами квантовых вероятностей, а не с самими вероятностями, приводят к "провалу" в видности интерференционной картины на рис. 6а. Частичная различимость соответствует сплошной зелёной кривой на том же рисунке.

В работе [127] недавно был описан элегантный эксперимент: фотоны, получаемые от слабых когерентных импульсов света, приготавливаются в состоянии, которому соответствуют классические вероятности (4.14) (рис. 5б). Пусть на вход интерферометра подаётся когерентное излучение $|\psi_{in}\rangle = |\alpha\rangle_1$, далее на светоделителе СД₁ (используемом вместо СПРС в оригинальной схеме ХОМ (рис. 5а)) оно расщепляется на два когерентных пучка в состояниях $|\alpha\rangle_1$ и $|\alpha\rangle_2$ (рис. 5б). Если входящий когерентный пучок достаточно слабый и содержит в среднем лишь два фотона ($N = |\alpha|^2 = 2$), то данную схему можно рассматривать как определённый ("классический") аналог эксперимента ХОМ. Тогда на выходе из СД₁ будут сформированы двухфотонные состояния двух типов. Первый соответствует случаю, когда оба фотона окажутся в одном плече интерферометра, что соответствует двухфотонному $N00N$ -состоянию (4.6). Второй тип состояний соответствует случаю, когда два фотона окажутся в разных плечах, т.е. состоянию $|1, 1\rangle$. Таким образом, состояния на выходе из СД₁ можно записать в виде

$$|\psi_{out}\rangle = \frac{1}{2}(|2, 0\rangle - \exp(i2\phi)|0, 2\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 1\rangle, \quad (4.15)$$

где $\phi = 2\pi\Delta x/\lambda_0$ — относительный фазовый сдвиг в плечах интерферометра, зависящий от оптической разности хода пучков Δx ; λ_0 — центральная длина волны излучения накачки. Двойка в (4.15) возникает, поскольку $N = 2$ (рис. 5б). Из (4.15) ясно видно, что редукция состояния $|\psi_{out}\rangle$ в какое-либо из состояний $|1, 1\rangle$ или

$|2, 0\rangle$, $|0, 2\rangle$ приводит к результатам, аналогичным классическим вероятностям (4.14). Однако данный факт вовсе не делает схему на рис. 5б полностью классической; состояние (4.15) является квантовым. Действительно, после смешения на СД₂ пучки попадают на детекторы, работающие в режиме счёта одиночных срабатываний (когда срабатывает лишь один из двух детекторов) либо в режиме счёта числа совпадений (когда срабатывают оба детектора одновременно). В первом случае число срабатываний детекторов за время экспозиции можно оценить как [127]

$$R_{\text{single}, \pm}(\Delta x) \propto \frac{1}{2} \left[1 \pm \cos(\phi) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\sigma^2}\right) \right], \quad (4.16)$$

а во втором — как

$$R_{\text{coins, cl}}(\Delta x) \propto 1 - \frac{1}{2}(1 + \cos(2\phi)) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\sigma^2}\right), \quad (4.17)$$

где σ определяется шириной гауссова профиля входного когерентного пучка $|\alpha\rangle_1$.

Как видно из (4.16), интерферометрия на основе лазерных пучков малой интенсивности приводит к квантовой интерференции слабых когерентных импульсов света (осцилляции на рис. 6б), воспроизводя при этом эффект ХОМ с "провалом" в виде перевернутой гауссоиды, ширина которой определяется шириной изначального волнового пакета (см. раздел 4.1).

Полностью классический предел (4.16), (4.17) соответствует исчезновению интерференционной картины, что получается из (4.16), (4.17) при усреднении функции косинус по быстрым (в пространстве) осцилляциям, приводящим к выражениям

$$\bar{R}_{\text{single}, \pm}(\Delta x) \propto \frac{1}{2}, \quad \bar{R}_{\text{coins, cl}}(\Delta x) \propto 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\sigma^2}\right). \quad (4.18)$$

Формулы (4.18) проиллюстрированы на рис. 6 в виде чёрных (штрихпунктирных) линий. На рисунке 6а интересно увидеть разницу в поведении вероятностей совместных срабатываний детекторов для схемы ХОМ в условиях влияния классических шумов (зелёная прерывистая кривая при $\vartheta = 1,7$) и предельной (классической) усреднённой зависимостью $\bar{R}_{\text{coins, cl}}$ (4.18); в обоих случаях максимальная величина "провала" одинакова и составляет $R = 1/2$. Таким образом, данный подход позволяет отличать квантовый эффект ХОМ от классического аналога даже в условиях классических шумов.

4.4. Квантовая сенсорика с $N00N$ -состояниями и проблема их приготовления при $N > 2$

На сегодняшний день $N00N$ -состояния занимают особое место в квантовой оптической метрологии, поскольку они позволяют достичь предела Гейзенберга на любом двухмодовом устройстве: интерферометре, гироскопе, литографе и т.д.

На рисунке 7 приведена схема по измерению и оценке фазы ϕ с помощью $N00N$ -состояния с $N = 2$. Она, по сути, представляет собой совмещение интерферометра ХОМ с ИМЦ: на выходе из первого светоделителя готовится состояние (4.6), которое затем используется в измерении ϕ (ср. с [133]).

В экспериментальной работе [134] схема, аналогичная приведённой на рис. 7, была задействована для измере-

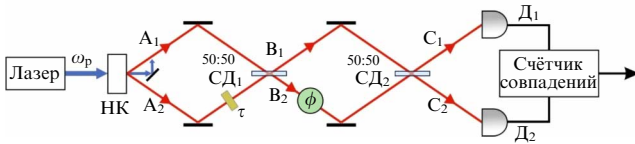


Рис. 7. Схема квантовой метрологии неизвестного фазового параметра ϕ , основанная на интерферометре ХОМ, который принимает на вход бифотоны (пучки A_1 и A_2) и служит для приготовления состояния (4.7) (пучки B_1 и B_2), и совмещённом с ним ИМЦ, завершающем приготовление конечного состояния (пучки C_1 и C_2).

ния концентрации бычьего сывороточного альбумина (БСА) в водном растворе, образец которого был помещён в одно из плеч ИМЦ (зелёный кружок на рис. 7). Кроме того, сначала проводились измерения с дистиллированной водой, чтобы оценить уровень потерь, а также определить значение референтной фазы $\phi_0 = \pi/2$. При прохождении фотона в плече интерферометра, содержащем образец с БСА, было обнаружено, что изменение показателя преломления Δn_s линейно зависит от неизвестной фазы ϕ , так что

$$\Delta n_s = \frac{\lambda}{2\pi L} \phi, \quad (4.19)$$

где $\lambda = 0,785$ мкм — длина волны, $L = 0,55$ мкм — размер микроканала с образцом БСА. В (4.19) фазовый набег $\phi \propto C_s$ линейно зависит от концентрации БСА C_s . Авторы [134] получили наклон прямой $dn_s/dC_s = (1,79 \pm 0,04) \times 10^{-3}$, что согласуется с результатами $dn_s/dC_s = 1,82 \times 10^{-3}$, полученными на длине волны $\lambda = 0,578$ мкм другими методами [135].

В ходе измерений в [134] детектировались все комбинации состояний $|2, 0\rangle$, $|0, 2\rangle$ и $|1, 1\rangle$, что позволяло сравнить видности интерференционных картин и оценить уровень потерь. Выявлено, что имеются асимметричные потери в плечах интерферометра, которые приводят к ограниченности измеряемой видности двухфотонной интерференционной картины — $V \simeq 82\%$. Полученное значение оказалось выше видности $V \simeq 70,7\%$, соответствующей измерениям на уровне СКП, рассчитанным по описанной в разделе 2.4 методике для данной экспериментальной схемы. Относительно небольшой выигрыш в точности измерения, связанный с V , авторы [134] объясняли неидеальностью фотодетекторов.

В работе [136] было показано, что по описанной здесь методике, основанной на эффекте ХОМ, может быть выполнен сенсор температуры. В этом случае плечо ИМЦ, содержащее участок кварцевого волокна, погружалось в печь с контролируемым изменением температуры. Даже при незначительном изменении температуры оболочка волокна термально расширялась, меняя тем самым рефрактивный индекс. В результате измерений была проведена оценка величины $dL/dT \simeq 4,8 \times 10^{-7}$ м град $^{-1}$ с точностью 0,12 градуса (где L — длина волокна), что также находилось в согласии с полученными ранее данными [137].

Заметим, что помимо эффектов потерь, неидеальной эффективности детекторов и пр. принципиальная ограниченность рассматриваемых методов связана с использованием $N00N$ -состояний с двумя ($N = 2$) фотонами. В связи с этим актуальной и до конца не изученной задачей современных квантовых технологий в целом является получение устойчивых (к потерям) $N00N$ -состояний с

$N \geq 2$. Точнее, здесь речь идёт о состояниях, не являющихся строго $N00N$ -состояниями, а представляющих собой суперпозицию запутанных фокковских состояний (ср. с [138]). Получение таких состояний основано в той или иной мере на нелинейных элементах СПР света, а также на линейных оптических элементах: светоделителях, фазовых пластинках, поляризаторах, анализаторах и пр. (см., например, [60, 139]). С недавних пор "конструирование" состояний с желаемыми квантовыми свойствами стало возможным на основе методов машинного обучения [140, 141]. Примечательно, что в качестве основных базовых элементов для таких состояний машинный агент предложил активно использовать решения, которые были в своё время предложены в работе [142].

Важно иметь в виду, что ограниченность возможностей современных детекторов по измерению фокковских состояний с большим числом фотонов, а также хрупкость $N00N$ -состояний в процессе измерений делает привлекательным решение обозначенной здесь задачи квантовых технологий методами современной интегральной оптики [143, 144]. На сегодняшний день уже имеется возможность создавать волноводы и элементы линейной оптики с ультранизким уровнем потерь, до 0,1 дБ см $^{-1}$ [145], а также эффективные параметрические генераторы запутанных фотонных пар [146]. Здесь мы остановимся на широко используемом в последнее время способе получения $N00N$ -состояний с использованием непрерывных переменных света. С физической точки зрения речь идёт о гибридных способах обработки информации в рамках одной оптической схемы, позволяющей получать гибридные состояния светового поля, сочетающие в себе как дискретные, так и непрерывные переменные поля (см., например, [147]). Основной проблемой в таких схемах является необходимость исключения "лишних" состояний, присутствующих в суперпозиции наряду с $N00N$ -компонентами. Это можно осуществить с помощью приготовления кондиционного состояния (частичной редукции квантового состояния) и/или постселекции — при обработке результатов измерений.

В работе [148] впервые теоретически было предсказано, что интерференция между когерентным лазерным излучением и излучением СПР позволяет сформировать $N00N$ -состояния для больших N с надёжностью, большей 90%. Этот метод экспериментально был реализован в схеме сверхчувствительного микроскопа, основанного на ИМЦ [149]. В его основе осуществляется смещение когерентного состояния с ОМСВ на первом светоделителе ИМЦ (рис. 8), которое позволяет на его выходе сформировать состояние (ср. с [150])

$$|\psi_{BS, out}\rangle = \sum_{m=0}^N A_m |N-m, m\rangle, \quad (4.20)$$

где $|N-m, m\rangle \equiv |N-m\rangle_1 |m\rangle_2$ — фокковское состояние с известным числом фотонов N , распределённым по двум модам; вероятностные коэффициенты A_m подчиняются условию нормировки $\sum_{m=0}^N |A_m|^2 = 1$. Полученная в [151] интерференционная картина, регистрируемая на основе измерения вероятностей совпадений $N-m$ фотонов на одном детекторе и m фотонов на другом, свидетельствует о том, что от "лишних" состояний в сумме (4.20) удаётся избавиться, т.е. $A_1 = A_2 = \dots = A_{N-1} = 0$. При этом важной является "настройка" ключевых парамет-

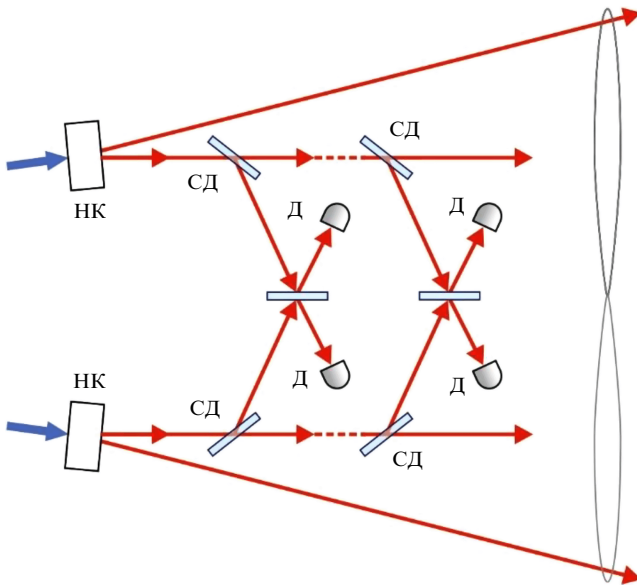


Рис. 8. Схема приготовления удалённого $N00N$ -состояния: НК — нелинейный кристалл, СД — полупрозрачный светоделитель, Д — детектор. Синими стрелками обозначены накачки кристаллов.

ров системы — фазы $\theta_c \simeq \pi/2$ когерентного состояния $\alpha = |\alpha| \exp(i\theta_c)$, а также комбинации параметров $\xi = |\alpha|^2/r$ (r — параметр сжатия). В [151] интерференционная картина наблюдалась для значений N вплоть до $N = 5$, при котором $\xi \simeq 2,16$. Дальнейшее увеличение N в [151] ограничивалось потерями, неэффективностью детекторов и пр., что авторы указанной работы оценили с помощью эффективного коэффициента пропускания η для всей установки: величина η оказалась порядка $\eta \simeq 0,12$ при $N = 5$.

Заметим, что более сложная схема, основанная на условном (измерительно-индуцированном) приготовлении $N00N$ -состояний с использованием эффекта ХОМ, была предложена ещё в [152] (ср. с [76]). В работе [150] авторы впервые реализовали метод удалённого приготовления $N00N$ -состояний. А именно, было предложено использовать два одинаковых источника ДСВС, на выходе которых получалось четырёхмодовое квантовое состояние попарно запутанных фотонов. Затем по одной моде от каждого источника ДСВС направлялись по квантовому каналу, обладающему пропускной способностью η , на блок, состоящий из последовательности $N/2$ светоделителей, на выходе которых происходит детектирование фотонов, а следовательно, и частичная редукция исходного состояния до $N00N$ -состояния остальных двух мод, содержащих чётное число фотонов (в обсуждаемой работе анализировались случаи с $N = 2, 4$ и 6). В условиях малости параметра сжатия, $r \ll 1$, в [150] показано, что надёжность (fidelity) приготовления $N00N$ -состояний составляет

$$F_f \simeq 1 - (N + 2)r^2. \quad (4.21)$$

При относительно небольших N это позволяет получать $N00N$ -состояния с высокой надёжностью. Определённой проблемой предложенного метода следует считать небольшую общую амплитуду $N00N$ -состояний (до соответствующей нормировки), убывающую как r^N , что определяет оптимальную вероятность приготовления

такого состояния как (см. детали в [150])

$$p_r \simeq \sqrt{8\pi N} \exp(-N) r^{2N} \eta^{N/2}. \quad (4.22)$$

Очевидно, что для малых значений r и $\eta \ll 1$ (канал с потерями) величина данной вероятности чрезмерно мала при больших N , а последнее ограничивает практическое применение предложенного метода.

Подведём краткий итог существующих проблем с получением $N00N$ -состояний. Результаты экспериментов показывают реалистичность получения $N00N$ -состояний с числом фотонов $N < 10$ методами квантовой оптики. Получение же необходимых мезо- ($N \propto 10^2 - 10^3$) и макрокопических ($N \gg 10^3$) $N00N$ -состояний в оптике — нетривиальная и пока не решённая задача. Существует, как минимум, два принципиальных обстоятельства, которые затрудняют использование $N00N$ -состояний с относительно большим числом фотонов N на практике и существенно снижают видность N -фотонной интерференционной картины.

Во-первых, как уже обсуждалось ранее, детектирование состояний, содержащих определённое (большое) число фотонов, представляет пока не решённую технологическую проблему.

Во-вторых, существенную проблему представляет чувствительность $N00N$ -состояний к потерям фотонов. Действительно, если учесть, что $N00N$ -состояние — максимально пространственно-запутанное состояние, свойства которого связаны с неопределённостью в нахождении фотонов относительно двух пространственных мод, потеря единственного фотона (что с точки зрения квантовой механики эквивалентно проведению измерения) приведёт к коллапсу состояния (2.44) с равной вероятностью $1/2$ в фоксовское состояние $|N - 1, 0\rangle$ или $|0, N - 1\rangle$, уже не обладающее какими-либо преимуществами для квантовой метрологии. Поэтому имеет смысл исследовать критические значения числа фотонов, при которых $N00N$ -состояния всё ещё могут быть полезными для задач квантовой метрологии при разумном (с точки зрения эксперимента) уровне потерь.

5. Квантовая метрология с потерей частиц

5.1. Метод фиктивных светоделителей

Исследование влияния потери числа фотонов в ИМЦ на точность измерений может быть выполнено в достаточно общем виде на основе рассмотренного выше метода фиктивных светоделителей (ФСД), как показано на рис. 9. Назначение данных элементов — описание взаимодействия интерферометра с окружающей средой, сопровождающегося декогеренцией и потерей небольшого числа частиц из каналов интерферометра. В частности, метод ФСД использовался для исследования применимости $N00N$ -состояний для задач практической квантовой метрологии (см., например, [153–156]). Предложенные в указанных работах различные стратегии достижения максимально доступной точности оценки априорно неизвестной фазы свидетельствуют о том, что при наличии потерь идеальное (симметричное) $N00N$ -состояние может быть неоптимальным. При этом более полезными оказываются запутанные фоксовские состояния, асимметричные $N00N$ -состояния и некоторые особые двухмодовые состояния [154, 155, 157]. Важно

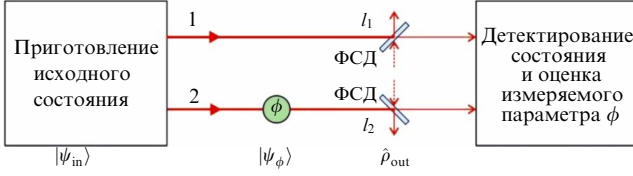


Рис. 9. Эффективная схема квантовой метрологии с потерей частиц. Взаимодействие с окружающей средой в каждом канале обеспечивается с помощью фиктивных светоделителей (ФСД), удаляющих случайным образом l_1 и l_2 частиц из соответствующих каналов. Пунктирными стрелками показаны вакуумные шумы, которые вносятся в систему измерения окружающей среда.

отметить, что в оптическом эксперименте по исследованию диссипативной квантовой метрологии возможно применение настоящих (не фиктивных) светоделителей для управляемой декогеренции системы.

Рассмотрим схему, приведённую на рис. 9 и отражающую процедуру измерения фазового сдвига ϕ в условиях потерь. Пусть на вход интерферометра подаётся некоторое двухмодовое состояние (4.20) (ср. с [158]). Далее, учтём фазовый сдвиг в плечах интерферометра, для простоты считая первую моду опорной. В таком случае лишь вторая мода аккумулирует фазовый сдвиг ϕ , что описывается оператором

$$\hat{U}_\phi = \exp(i\phi(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2)^k) \quad (5.1)$$

и приводит к состоянию $|\psi_{\text{out}}\rangle = \hat{U}_\phi |\psi_{\text{in}}\rangle$,

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = \sum_{m=0}^N A_m \exp(i\phi m^k) |N-m, m\rangle, \quad (5.2)$$

где, как и ранее, k — "степень нелинейности" квантовой метрологии. Стоит отметить, что при $k=1$ оператор (5.1) физически эквивалентен использованному ранее оператору (2.28). После двух ФСД состояние (5.2) преобразуется следующим образом (см. [155]):

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = \sum_{l_1=0}^N \sum_{l_2=0}^{N-l_1} \sum_{m=l_2}^{N-l_1} A_m \sqrt{B_{l_1, l_2}^m} \exp(i\phi m^k) \times |N-m-l_1, m-l_2\rangle \otimes |l_1, l_2\rangle, \quad (5.3)$$

где $l_{1,2}$ — число фотонов, выбывших из каналов 1 и 2 вследствие потерь соответственно, $|l_1, l_2\rangle$ — фоковское состояние потерянных фотонов. В (5.3) также введён коэффициент

$$B_{l_1, l_2}^m = C_{N-m}^{l_1} C_m^{l_2} \eta_1^{N-m} (\eta_1^{-1} - 1)^{l_1} \eta_2^m (\eta_2^{-1} - 1)^{l_2}, \quad (5.4)$$

характеризующий соответствующие амплитуды вероятности фоковских мод при наличии потерь частиц [157]; C_n^k — биномиальный коэффициент. В (5.4) $\eta_{1,2} \leq 1$ — коэффициенты пропускания ФСД в соответствующих каналах интерферометра. Важно отметить, что оператор фазового сдвига (например, (2.28)) коммутирует с оператором ФСД [11]. Последнее означает, что ФСД в схеме на рис. 9 могут формально находиться в любом месте от приготовления исходного состояния до детектирования конечного состояния $|\psi_{\text{out}}\rangle$. То есть не имеет значения, были ли потеряны частицы до, во время или после набега фазы — точность измерения от этого не изменится.

Поскольку потерянные частицы $l_{1,2}$ не детектируются, от состояний $|l_1, l_2\rangle$ в (5.3) удобно избавиться. Для этого перейдём к формализму матрицы плотности $|\psi_{\text{out}}\rangle\langle\psi_{\text{out}}|$ и возьмём от неё след по состоянию $|l_1, l_2\rangle$. В результате получим матрицу плотности смешанного двухмодового (по пространству) состояния частиц, оставшихся в интерферометре и участвующих в измерении [155]:

$$\hat{\rho}_{\text{out}} = \sum_{l_1=0}^N \sum_{l_2=0}^{N-l_1} p_{l_1, l_2} |\xi_{l_1, l_2}(\phi)\rangle\langle\xi_{l_1, l_2}(\phi)|, \quad (5.5)$$

где

$$|\xi_{l_1, l_2}(\phi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_{l_1, l_2}}} \sum_{m=l_2}^{N-l_1} A_m \sqrt{B_{l_1, l_2}^m} \exp(i\phi m^k) \times |N-m-l_1, m-l_2\rangle, \quad (5.6)$$

а $p_{l_1, l_2} \equiv \sum_{m=l_2}^{N-l_1} |A_m|^2 B_{l_1, l_2}^m$. Состояние (5.5) представляет собой универсальный инструмент для описания квантовой метрологии на основе двухмодовых состояний с учётом потерь частиц. Амплитудные коэффициенты A_m в (5.6) позволяют однозначно описать квантовое состояние системы как в начальный момент (5.2), так и после потерь частиц (5.5), (5.6) и вычислить КИФ, как будет показано ниже.

5.2. Оценка точности метрологии в условиях диссипации числа частиц. Оптимальные состояния

Оценим предельную точность квантовой метрологии в условиях диссипации частиц через квантовую ГКР (2.8). Для простоты ограничимся линейной квантовой метрологией, положив $k=1$ в (5.6). Поскольку мы имеем дело со смешанными состояниями, для вычисления КИФ необходимо воспользоваться выражением (2.10), такое вычисление в общем случае нетривиально. Однако для случая, когда матрица плотности представлена в стандартном виде (5.5), в работе [155] предложен способ оценки КИФ смешанного состояния в виде взвешенной суммы КИФ смешанных по отдельности для каждого слагаемого (5.5):

$$\tilde{F}_q = 4 \sum_{l_1=0}^N \sum_{l_2=0}^{N-l_1} p_{l_1, l_2} \left(\langle \partial_\phi \xi_{l_1, l_2} | \partial_\phi \xi_{l_1, l_2} \rangle - |\langle \partial_\phi \xi_{l_1, l_2} | \xi_{l_1, l_2} \rangle|^2 \right). \quad (5.7)$$

Во всех случаях $F_q \leq \tilde{F}_q$ вследствие свойств выпуклости (2.16) и аддитивности (2.17) КИФ (см. также [155]). Важно отметить, что применительно к квантовой метрологии разность $F_q - \tilde{F}_q$ формируется из-за неортогональности векторов $|\xi_{l_1, l_2}(\phi)\rangle$ при фиксированном полном числе потерянных частиц $l = l_1 + l_2$ (см. (5.6)). В свою очередь такая неортогональность связана с нехваткой информации о том, сколько именно частиц было потеряно из каждого плеча ИМЦ. Указанная проблема отсутствует в том случае, если потери в принципе наблюдаются лишь из одного плеча интерферометра, например, $\eta_2 < 1 = \eta_1$ в случае, если потери полностью связаны с набегом фазы и/или детектированием чётности числа частиц в плече 2: при этом $\tilde{F}_q = F_q$. Кроме того, $\tilde{F}_q = F_q$ для $N00N$ -состояния (2.44), поскольку в данном случае потеря частицы из одного или из другого плеча ИМЦ может быть однозначно распознана по фоковскому состоянию, в которое $N00N$ -состояние редуцируется. В

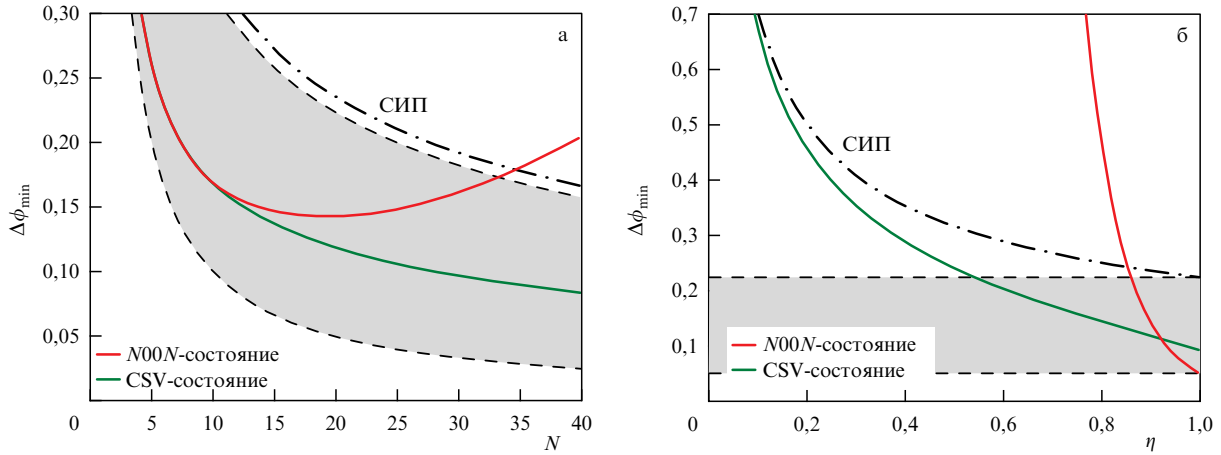


Рис. 10. Точность квантовой интерферометрии с потерями частиц (а) в зависимости от начального среднего числа фотонов N при фиксированных $\eta_1 = \eta_2 = 0,9$ и (б) от коэффициента пропускания ИМЦ η для фиксированного $N = 20$. Для сжатых состояний принято $r = 0,88$, что даёт хорошую аппроксимацию $\Delta\phi_{\min}$ при $N \gg 1$. Затенённые области обозначают фундаментальные границы точности квантовой метрологии в пределах СКП (сверху) и ПГ (внизу) соответственно. СИП — стандартный интерферометрический предел (5.11).

иных рассматриваемых здесь случаях $\tilde{F}_q \leq F_q$. Однако, как опять же показано в [155], \tilde{F}_q и F_q весьма близки и такое приближение оправдано. Подставляя (5.5) в (5.7), получаем

$$\tilde{F}_q = 4 \left[\sum_{m=0}^N m^2 A_m^2 - \sum_{l_2=0}^N \sum_{l_1=0}^{N-l_2} \frac{(\sum_{m=l_2}^{N-l_1} m A_m^2 B_{l_1, l_2}^m)^2}{\sum_{m=l_2}^{N-l_1} A_m^2 B_{l_1, l_2}^m} \right]. \quad (5.8)$$

В условиях потерь частиц, когда коэффициент пропускания интерферометра $\eta < 1$, полезно ввести классическую границу точности квантовой метрологии с учётом потерь — так называемый стандартный интерферометрический предел (СИП), являющийся, по сути, *пределом классической метрологии с потерями* и учитывающий пропускательную способность схемы интерферометра η [155, 157]. Вычислить СИП можно, подставив в (5.8) двухмодовое состояние с биномиальным распределением, так что

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sqrt{C_N^m}. \quad (5.9)$$

Тогда

$$\Delta\phi_{\text{SIL}} = \frac{\sqrt{\eta_1} + \sqrt{\eta_2}}{2\sqrt{\eta_1 \eta_2 N}}. \quad (5.10)$$

Заметим, что для состояния с распределением (5.9) $F_q = \tilde{F}_q$, поэтому выражение (5.10) есть полный аналог СКП в условиях потерь частиц. В пределе равных потерь в плечах ИМЦ значения коэффициентов пропускания плеч ИМЦ равны, т.е. $\eta_1 = \eta_2 \equiv \eta$, выражение (5.10) упрощается до

$$\Delta\phi_{\text{SIL}} = \frac{1}{\sqrt{\eta N}} \quad (5.11)$$

(ср. с (2.35)).

Физический смысл (5.11) весьма прост: ηN — среднее число частиц, прошедших через интерферометр и участвующих в измерении, тогда как в классическом пределе для когерентного состояния $S_{\text{cl}} \equiv F_q/N = 1$ (см. (3.29)).

С другой стороны, для $N00N$ -состояния

$$A_m = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & m = 0, N, \\ 0, & 0 < m < N, \end{cases} \quad (5.12)$$

и (5.8) даёт $F_q = \tilde{F}_q = \eta^N N^2$, так что КГКР (2.8) в этом случае (при $v = 1$)

$$\Delta\phi_{\text{QCR}} = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{\eta_1^N + \eta_2^N}{2\eta_1^N \eta_2^N}}, \quad (5.13)$$

а в условиях равных значений коэффициентов пропускания в плечах ИМЦ

$$\Delta\phi_{\text{QCR}} = \frac{1}{N\sqrt{\eta^N}}. \quad (5.14)$$

Ухудшение КИФ в η^N раз отражает хрупкость $N00N$ -состояний: измерение возможно лишь в том случае, когда все N частиц "пройдут" через ФСД, а η^N — вероятность такого события. Выражение (5.14) позволяет вычислить число частиц, при котором достигается максимальная точность квантовой метрологии с $N00N$ -состояниями при заданном уровне потерь η (рис. 10). Вычисляя производную КИФ $F_q = N^2 \eta^N$ по N , это число частиц N_c можно оценить как

$$N_c = -\frac{2}{\ln(\eta)}. \quad (5.15)$$

В работе [157] численно решалась задача оптимизации входных состояний для максимизации точности квантовой метрологии с учётом потерь частиц. Фактически, выражение (5.8) максимизировалось варьированием A_m для различных η . Было показано, что $N00N$ -состояния являются оптимальными при значениях коэффициента пропускания ИМЦ, удовлетворяющих неравенству $\eta > \eta_c \simeq \exp(-1/N)$. Так, для экспериментально достижимого значения $N = 20$ $\eta_c \simeq 0,95$, что означает требуемый уровень потерь $\gamma_c = 1 - \eta_c$, не превышающий 10 %, чтобы квантовая метрология с $N00N$ -состояниями оставалась пригодной в эксперименте.

На рисунке 10 изображена точность метрологии $\Delta\phi_{\min}$ с различными неклассическими состояниями при условии равных значений коэффициентов пропускания плеч ИМЦ $\eta_1 = \eta_2 \equiv \eta$. Пределу квантовой метрологии соответствуют кривые, находящиеся в затенённых областях, определяемых СКП и ПГ без потерь. Красная кривая обозначает величину $\Delta\phi_{\min}$, получаемую с $N00N$ -состояниями (5.14); зелёная кривая соответствует схемам квантовой метрологии с CSV-состояниями, рассмотренными в разделе 2, в пределе $|\alpha|^2 \gg \sinh^2(r)$, при этом (ср. с (3.10) и [14])

$$\Delta\phi \geq \sqrt{\frac{\eta \exp(-2r) + 1 - \eta}{\eta N}}, \quad (5.16)$$

где $N \approx |\alpha|^2$. Для рисунка 10 взято небольшое значение коэффициента сжатия $r = 0,88$, так что $\sinh^2(r) \approx 1$, и обозначенный выше предел выполняется в области $N \geq 9$, для которой построена зелёная кривая на рис. 10а.

Из рисунка 10а видно, что уже при $N \geq 15$ для заданных значений коэффициента пропускания ИМЦ η CSV-состояния обеспечивают лучшую точность $\Delta\phi_{\min}$ по сравнению с $N00N$ -состояниями. С другой стороны, как это следует из рис. 10б, при малых (общих) потерях (т.е. при $\eta \geq \eta_c \simeq 0,95$) фотонов в схеме пробные $N00N$ -состояния являются более предпочтительными в квантовой метрологии, чем CSV-состояния.

6. Квантовая фотометрия, радиометрия и сенсорика

6.1. Абсолютная калибровка фотодетекторов

На сегодняшний день фотометрия как часть квантовой метрологии является одной из наиболее интересных областей, где используются корпускулярные свойства светового излучения в практических целях. Для некогерентного света полная энергия фотона и энергия фотона, приходящаяся на одну моду, являются ключевыми характеристиками в фотометрии, когда речь идёт о единицах энергии и спектральной яркости. С точки зрения измерения предельных характеристик светового излучения, связанных с фундаментальными константами (постоянная Планка, постоянная Больцмана и пр.), имеет смысл рассматривать измерения, не зависящие от начального числа фотонов и определяемые только фундаментальными ограничениями, налагаемыми вакуумными флуктуациями светового поля. Ещё в 1970-е годы было обращено внимание на то, что для этих целей вполне подходит процесс параметрического рассеяния света, позволяющий получать шумовые фотоны на одну моду для сигнального и холостого полей на выходе из нелинейного кристалла с квадратичной нелинейностью [56]. В то время было предложено множество интересных и важных применений СПРС, связанных с фотометрией, обусловленной измерением генерацией состояний с определённым числом фотонов и т.д. Основным "недостатком" первых экспериментов, подтверждающих эти идеи, была невысокая эффективность детекторов одиночных фотонов³, которая по сути делала предлагаемые методы

и подходы фотометрии неэффективными на практике. Однако в настоящее время с учётом имеющегося прогресса в плане разработки и создания новых высокоэффективных детекторов фотонов наблюдается тенденция возврата к ранним предложениям квантовой фотометрии, но уже на современном витке развития квантовых оптических технологий в мире. В обзоре мы только лишь обозначим принципиальные и практически важные для современной квантовой метрологии и сенсорики направления.

Рассмотрим распространение фотонов сигнального (s) и холостого (i) поля в среде с квадратичной восприимчивостью. Для краткости в представлении Гейзенберга и в двухмодовом приближении рассмотрим среднее число фотонов, приходящихся на каждую моду на выходе из среды, которое можно представить в виде (ср. с [159])

$$\langle \hat{n}_s(t) \rangle = \langle \hat{n}_s(0) \rangle \cosh^2(\Gamma t) + \langle \hat{n}_i(0) \rangle \sinh^2(\Gamma t) + \sinh^2(\Gamma t), \quad (6.1)$$

$$\langle \hat{n}_i(t) \rangle = \langle \hat{n}_i(0) \rangle \cosh^2(\Gamma t) + \langle \hat{n}_s(0) \rangle \sinh^2(\Gamma t) + \sinh^2(\Gamma t), \quad (6.2)$$

где $\langle \hat{n}_{s,i}(0) \rangle$ — среднее число фотонов сигнального и холостого поля на входе в кристалл (в момент времени $t = 0$), Γ — инкремент усиления, пропорциональный амплитуде классической накачки кристалла и его эффективной квадратичной восприимчивости. В (6.1), (6.2) опущены "смешанные" корреляторы операторов рождения/уничтожения фотонов, принадлежащих разным модам, поскольку далее мы рассматриваем только вакуумные и/или тепловые состояния светового излучения на входе в среду. Последнее слагаемое в (6.1), (6.2) не зависит от начального числа фотонов и обусловлено вкладом вакуумных флуктуаций ПР. Они играют ключевую роль в различных измерительных устройствах, использующих квантовые свойства излучения СПРС, когда в (6.1), (6.2) $\langle \hat{n}_{s,i}(0) \rangle = 0$.

Поскольку каждое событие рождения бифотона в процессе ПР происходит в одной пространственно-временной "точке", это позволяет использовать бифотоны для абсолютной калибровки детекторов. На рисунке 11 приведена схема абсолютной калибровки детекторов на основе СПРС. Идея данного метода достаточно проста. Пусть за некоторое время наблюдения $t = \tau_{\text{obs}}$ СПРС испускает в среднем N пар бифотонов. Затем два независимых детектора с неизвестными квантовыми эффективностями $\eta_{s,i}$ измеряют среднее число фотонов $\langle \hat{n}_{s,i} \rangle$ в каждом поле, так что

$$\langle \hat{n}_s(\tau_{\text{obs}}) \rangle = \eta_s N, \quad \langle \hat{n}_i(\tau_{\text{obs}}) \rangle = \eta_i N. \quad (6.3)$$

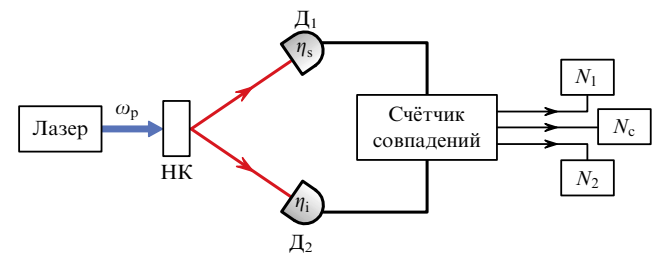


Рис. 11. Схема абсолютной калибровки детекторов одиночных фотонов, получаемых на основе СПРС, $\eta_{s,i}$ — эффективности детекторов, НК — нелинейный кристалл, $N_{1,2}$ — числа срабатываний детекторов 1 и 2, N_c — число совместных срабатываний.

³ В 1970–1990-х годах основным инструментом регистрации сверхслабых световых полей были фотоэлектронные умножители (ФЭУ), квантовая эффективность которых составляла около 10–15%.

Помимо этого, на выходе из кристалла за то же время измеряется число совпадений $\langle \hat{n}_c \rangle$, которое есть

$$\langle \hat{n}_c(\tau_{\text{obs}}) \rangle = \eta_s \eta_i N. \quad (6.4)$$

Из (6.3), (6.4) следует, что эффективности детекторов имеют вид

$$\eta_s = \frac{\langle \hat{n}_c(\tau_{\text{obs}}) \rangle}{\langle \hat{n}_s(\tau_{\text{obs}}) \rangle}, \quad \eta_i = \frac{\langle \hat{n}_c(\tau_{\text{obs}}) \rangle}{\langle \hat{n}_i(\tau_{\text{obs}}) \rangle} \quad (6.5)$$

и не зависят от N . Важно заметить, что выражения (6.5), строго говоря, определяют не эффективности самих детекторов, а эффективность измерения всей схемы на рис. 11, включая возможные потери на оптических элементах и пр.

В работе [118] проводится сравнительный анализ методов калибровки детекторов традиционным способом, основанным на измерении мощности излучения (метод замещения), а также на основе рассматриваемого здесь метода калибровки детекторов с помощью коррелированных фотонных пар. Разобрано влияние деструктивных процессов, влияющих на ошибку измерения. В целом общая относительная неопределённость измерений для метода замещения и метода коррелированных фотонных пар составляет 0,17 % и 0,18 % соответственно. Преимуществом последнего является то, что параметры одного из детекторов (например, в канале холостой волны) могут быть известны априорно (к примеру, из других измерений), и тогда определению подлежат свойства неизвестного детектора в другом канале сигнальной волны. В этом случае можно калибровать как полупроводниковые лавинные диоды, не различающие число фотонов, так и детекторы, разрешающие число фотонов — TES (Transition-Edge Sensor). Относительно недавно рассматриваемый метод коррелированных фотонных пар был адаптирован для калибровки TES детекторов с относительной неопределённостью в 10^{-3} [160].

Заметная часть работ посвящена безэталонной калибровке не счётных, а аналоговых фотодетекторов, в том числе и в терагерцевом диапазоне частот. При использовании аналоговых детекторов регистрируется ток, который представляет собой результат наложения многих фотоимпульсов или откликов детектора на внешнее световое поле [161]:

$$i(t) = \sum_{k=1}^m q_k f(t - t_k), \quad (6.6)$$

где q_k — заряд, переносимый однофотонным импульсом-откликом, а f — функция, описывающая его временную форму. В таких экспериментах, как правило, используется параметрическое рассеяние света в режиме большого усиления — так называемый режим "пучков-близнецов". Удобными мерами неклассичности здесь выступают ковариация ($C = \langle \delta i_s \delta i_i \rangle / (\langle i_s \rangle + \langle i_i \rangle)$) и/или фактор подавления шума разностного фототока (Noise Reduction Factor, NRF), пропорциональный коэффициенту двухмодового сжатия. Эти меры вычисляются из данных измерений тока на выходе оптических детекторов в сигнальном (s) и холостом (i) каналах.

Так, в работах [162, 163], рассматривается NRF и относительная ковариация токов, измеренных в сигналь-

ном и холостом каналах ПР с помощью обычных аналоговых фотоприёмников. Получены общие выражения, которые позволяют разработать подходы для безэталонного измерения квантовой эффективности чувствительных элементов широкого класса обычных аналоговых детекторов. Оказывается, что для определения их квантовой эффективности, помимо прямых измерений токового NRF, потребуется дополнительное привлечение нескольких аппроксимационных процедур: заранее определить параметры однофотонных откликов детекторов — средний заряд $\langle q_k \rangle$ и дисперсию Δq_k . Значительно более удобной и точной может стать процедура определения квантовой эффективности аналоговых детекторов по ковариации сигнального и холостого токов [164].

Заметим, что, хотя метод безэталонной калибровки широко апробирован на счётных и аналоговых детекторах, пока не было работ, где он масштабируется на детекторы с разрешением по числу фотонов, для которых эффективность детектирования зависит от самого числа фотонов [118]. Более того, в квантовой теории измерение произвольной наблюдаемой величины представляет самостоятельную и зачастую нетривиальную задачу. В этом отношении особое значение приобретают процедуры измерения некоторого множества POVM-операторов $\{\hat{P}_k\}$, характеризующих исходное квантовое состояние, описываемое оператором плотности $\hat{\rho}$, и позволяющих при детектировании получить некоторое значение k с вероятностью

$$p_k = \text{tr}[\hat{P}_k \hat{\rho}], \quad (6.7)$$

где $\hat{P}_k \geq 0$, $\sum \hat{P}_k = 1$.

В настоящее время для калибровки фотоноразрешающих детекторов, позволяющих детектировать определённое число фотонов, продемонстрирована процедура квантовой томографии детекторов с пробным когерентным излучением, для которого оператор плотности есть $\hat{\rho} = |\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|$. В таком случае (6.7) может быть записано в виде матричного уравнения, так что

$$p_{j,k} = \sum_{n=0}^M F_{j,n} P_{n,k}, \quad (6.8)$$

где $F_{j,n} \equiv \exp(-|\alpha_j|^2) |\alpha_j|^{2n} / n!$, $P_{n,k}$ — диагональные элементы оператора $\hat{P}_k = \sum_{n=0}^M P_{n,k} |n\rangle\langle n|$, взятые в базисе фоковских состояний, M — максимальное число фотонов, которое может разрешить данный детектор. Таким образом, инвертирование (6.7), позволяет по результатам измеренных вероятностей $p_{j,k}$, а также с учётом известных пробных (когерентных) состояний — элементов $F_{j,n}$, восстановить неизвестные элементы $P_{n,k}$. При этом их число зависит от того, используем ли мы фазу когерентного поля α_j (фазово-чувствительная томография), или нет — процедура фазово-нечувствительной томографии. В первом случае матрица $P_{n,k}$ содержит $N \times M^2$ элементов, а во втором — $N \times M$ элементов. В работе [165] авторам удалось реконструировать элементы $P_{n,k}$ для детектора, разрешающего до восьми фотонов. Оказалось, что процедура томографии достаточно устойчива к флуктуациям энергии импульсов начального состояния. Использование смеси когерентных состояний, распределённых по Гауссу в качестве пробных с шириной распределения $0,02|\alpha_j|^2$ вместо

чистых состояний, привело в конечном итоге лишь к относительной ошибке 0,7% в определении $P_{n,k}$.

На наш взгляд, метод квантовой томографии актуален, когда число разрешаемых детектором фотонов M относительно невелико. С ростом M процедура томографии требует достаточно много измерений, и в перспективе создания детекторов, разрешающих большое число фотонов, становится длительной и достаточно громоздкой. Очевидно, что в этом случае актуальной задачей будет оптимизация такой процедуры на основе методов и подходов квантового машинного обучения, которые уже сейчас применяются при томографии квантовых состояний светового поля [166].

6.2. Вакуумные флуктуации

в качестве репера яркости света в метрологии

С недавних пор измерение и квантовая оценка температуры как (флуктуирующего) параметра физических систем различной природы вызывает всё возрастающий интерес (см., например, [167, 168]).

В частности, в [167] показано, что СКП-измерения (оценки) параметра $\beta = (k_B T)^{-1}$, обратной температуре, для "термометра", состоящего из N пробных частиц (мод), может быть задан в виде

$$\Delta\beta \geq \frac{1}{\sqrt{N} \sqrt{|d\bar{\epsilon}/d\beta|}}, \quad (6.9)$$

где $\bar{\epsilon}$ — средняя внутренняя энергия, приходящаяся на одну частицу (моду). Улучшение измерения температуры также возможно с использованием пробных $N00N$ -состояний (см. с [136]).

В контексте рассматриваемых в обзоре оптических методов квантовой метрологии стоит отметить, что обсуждаемые выше TES-детекторы фотонов представляют, по сути, те же сенсоры, которые различают энергию фотонов, но работают в области низких (100 мК и ниже) температур [169]. Их эффективность приближается уже к 100%: например, для TES, выполненного на основе титана, эта эффективность составляет 98% на длине волны 850 нм [170].

В области высоких (комнатных и выше) температур разработка квантовых сенсоров пока набирает обороты. В связи с этим интересно отметить работу [171], где авторам удалось достичь точности 80 нК Гц^{-1/2} при измерении температуры с использованием термооптического эффекта мод шепчущей галереи для микрорезонатора CaF₂; дополнительный фазовый сдвиг для выбранных мод обусловлен изменением показателя преломления за счёт нагрева материала. В данном отношении интересно было бы развить такую методику измерений, совместив её с интерферометром ХОМ, позволяющим использовать $N00N$ -состояния для прецизионной оценки температуры, как сделано в [136] (см. также рис. 12).

Здесь мы остановимся на более простом, на наш взгляд, использовании процесса параметрического рассеяния в квантовой метрологии и сенсорике, который позволяет проводить оценку достаточно высокой (в несколько раз выше комнатной) яркостной температуры на уровне вакуумных флуктуаций света. С учётом появления фотоноразрешающих детекторов такие системы представляют интерес не только с фундаментальной, но и с практической точки зрения.

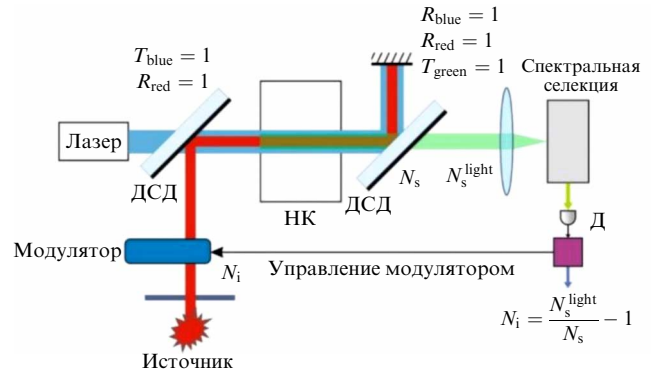


Рис. 12. Схема фотометра для измерения яркостной температуры неизвестного источника теплового излучения с числом фотонов на моду N_i . Лазерное, сигнальное и холостое излучение обозначено соответственно синим (blue), зелёным (green) и красным (red) цветом. T и R — коэффициенты пропускания и отражения двух зеркал (до и после кристалла) на соответствующих длинах волн; ДСД — дихрочный светоделитель, НК — нелинейный кристалл; $N_{i,s}$ — средние числа детектируемых холостых и сигнальных фотонов.

На рисунке 12 представлена схема фотометра измерения яркостной температуры неизвестного некогерентного источника светового поля [57, 172, 173]. Измерение происходит в два этапа; интерес представляет измерение сигнального числа фотонов $\langle \hat{n}_s(t) \rangle$ на одну моду за некоторое время наблюдения $t = \tau_{\text{obs}}$. В первом случае измерение проводится в режиме СПРС, когда измеряется число фотонов $\langle \hat{n}_s(\tau_{\text{obs}}) \rangle$ (на одну моду) при $\langle \hat{n}_s(0) \rangle = 0$, $\langle \hat{n}_i(0) \rangle = 0$. На втором этапе в сигнальном поле измеряется среднее число фотонов $\langle \hat{n}'_s(\tau_{\text{obs}}) \rangle$, когда порт холостой волны на входе кристалла освещается неизвестным источником теплового излучения со средним числом фотонов

$$\langle \hat{n}_i(0) \rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\omega_i/(k_B T)) - 1}, \quad (6.10)$$

где T — температура излучения. Таким образом, начальное среднее число фотонов $\langle \hat{n}_i(0) \rangle$ в холостой волне можно определить из отношения результатов измерений

$$\frac{\langle \hat{n}'_s(\tau_{\text{obs}}) \rangle}{\langle \hat{n}_s(\tau_{\text{obs}}) \rangle} = \langle \hat{n}_i(0) \rangle + 1 = \frac{\exp(\hbar\omega_i/(k_B T))}{\exp(\hbar\omega_i/(k_B T)) - 1}, \quad (6.11)$$

где правая часть выражения записана с учётом (6.10).

Выражения (6.9) и (6.10) позволяют оценить температуру T излучения неизвестного теплового источника (см. рис. 12). Важным свойством применения данного метода является предел, при котором в холостой волне содержится в среднем всего один (тепловой) фотон на моду, т.е. $\langle \hat{n}_i(0) \rangle \simeq 1$. В таком случае речь идёт об измерениях температуры на уровне вакуумных флуктуаций, для длины волны холостого поля в 1 мкм составляющей $T \simeq 2,1 \times 10^4$ К. Указанное обстоятельство позволяет использовать фотометр в качестве сенсора температур для источников излучения, обладающих высокими яркостными характеристиками. Однако при реализации этого метода в метрологических целях возникают упомянутые выше трудности, связанные с правильным учётом заселения "подсвечиваемых" мод. К тому же метод тре-

бует аккуратного независимого измерения потерь на отражение всех элементов калибруемого тракта.

В схеме, изображённой на рис. 12, измеряется число фотонов N_i , пропорциональное спектральной яркости источника. При этом числа фотонов в сигнальной моде

$$N_s = F_s(0 + 1) = F_s, \quad (6.12)$$

$$N_s^{\text{light}} = F_s(N_i + 1) \quad (6.13)$$

измеряются соответственно при закрытом и открытом положениях модулятора интенсивности, а величина

$$F_s = 4\pi^2 \omega_s \omega_i c^{-2} \chi^{(2)}(\omega_s = \omega_p - \omega_i) |E_p|^2 l^2 \quad (6.14)$$

— так называемый коэффициент параметрического преобразования ($\chi^{(2)}$ — квадратичная восприимчивость кристалла, E_p — амплитуда поля лазерной накачки, l — длина кристалла).

Интересным развитием данного метода, требующего усовершенствования в наши дни, является использование многомодового N режима, который даже в случае независимых мод способен дать выигрыш в \sqrt{N} раз, соответствующий СКП. Более важный случай может быть получен уже в рамках использования запутанных состояний этих мод, что позволит преодолеть СКП измерения и оценки температуры и выйти на сугубо квантовые ограничения её измерения. Адаптация метода измерения спектральной яркости на терагерцевый диапазон рассматривается в работе [174].

7. Заключение

В обзоре проведён анализ уровня развития современной квантовой оптической метрологии и её возможного влияния на развитие других направлений, которые принято связывать в настоящее время с квантовыми технологиями. Представлены актуальные теоретические подходы к квантовой оценке неизвестных параметров в оптике, а также экспериментальные методы их измерения, основанные на ROVM наблюдаемых величин, измерении чётности числа фотонов, позволяющие достичь минимальной погрешности в измерении и оценке априорно неизвестного фазового параметра. Особое внимание уделено получению и использованию в таких измерениях неклассических (сжатых, максимально запутанных по пространству, макроскопических суперпозиционных и др.) состояний светового излучения; основные сведения по ним для квантовой информации Фишера сведены в табл. 1. Для достижения максимальной (по числу фотонов) точности измерений неизвестных фазовых параметров обсуждаются схемы как линейной, так и нелинейной квантовой метрологии, когда неизвестный фазовый параметр зависит от числа фотонов.

В практическом аспекте в обзоре обсуждаются различные схемы квантовой метрологии: интерферометры Маха–Цендера, Майкельсона, Хонга–Оу–Манделя, а также их комбинации, используемые в настоящее время для измерения на уровне квантовых ограничений характерной разности длин, вариации температур, концентрации веществ и т.д. Особое внимание уделено анализу точности измерений в условиях потерь фотонов, неидеальностей оптической элементной базы, детекторов и пр. В связи с этим немалая часть обзора посвящена новым возможностям квантовой метрологии, которые откры-

лись с недавних пор с применением различных фотоноразрешающих детекторов.

Несмотря на достаточно большую содержательную часть обзора, существует достаточно много важных направлений квантовой метрологии и сенсорики, не вошедших в данную работу. В первую очередь здесь следует отметить квантовые измерения и метрологию, проводимые с атомными средами. Во введении мы лишь обозначили те направления: оптические часы, гироскопы, гравиметры, магнитометры — которые на сегодняшний день активно развиваются в мире и могут быть полезны в навигации, мониторинге окружающей среды, поиске полезных ископаемых и т.д.

В обзоре не обсуждается проблема квантовой метрологии с участием двух и более (априорно неизвестных) фазовых параметров. Такая задача имеет большой практический интерес и перспективу именно ввиду создания пространственно-распределённых сетей квантовых сенсоров (см., например, [175]). Как показывает теоретический анализ, многомодовое $N00N$ -состояние в данном случае уже не насыщает КФИ [176]. Кроме того, в силу тех же причин стратегии оптимальных квантовых оценок и измерений здесь представляются более разнообразными [177], требующими многопараметрического сжатия или запутывания (см., например, [178]). Ввиду этого анализ многопараметрической квантовой метрологии и сенсорики требует отдельного своего рассмотрения с указанием конкретных областей применения, которые пока находятся в стадии становления. Очевидно, настоящий обзор, сочетающий современные теоретические и экспериментальные методы и подходы в квантовой метрологии с уровнем развития квантовых технологий в целом, может быть отправной точкой для подобного рода исследований в будущем.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации на базе ФГАОУ ВО "ЮУрГУ (НИУ)" (соглашение № 075-15-2022-1116 от 01.07.2022 г.). С.П.К. благодарен поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета "Фотонные и квантовые технологии. Цифровая медицина".

Список литературы

1. Imkamp D, Schmitt R, Berthold J *Tech. Messen* **79** (10) 433 (2012) <https://doi.org/10.1524/teme.2012.0251>
2. Imkamp D et al. *J. Sens. Sens. Syst.* **5** 325 (2016) <https://doi.org/10.5194/jsss-5-325-2016>
3. Pendrill L R, NCSLI Measure, <https://www.euramet.org/>
4. Catalucci S et al. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* **120** 4271 (2022)
5. Born M, Wolf E *Principles of Optics* (Oxford: Pergamon Press, 1968); Пер. на русск. яз.: Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1973)
6. Caves C M *Phys. Rev. D* **23** 1693 (1981)
7. Unruh W G, in *Quantum Optics, Experimental Gravity, and Measurement Theory* (Eds P Meystre, M O Scully) (New York: Plenum Press, 1983) p. 647
8. Nawrocki W *Introduction to Quantum Metrology: Quantum Standards and Instrumentation* (Cham: Springer, 2015)
9. Lawall J, Kessler E *Rev. Sci. Instrum.* **71** 2669 (2000)
10. Брагинский В Б *ЖЭТФ* **53** 1434 (1967); Braginskii V B *Sov. Phys. JETP* **26** 831 (1968)
11. Demkowicz-Dobrzański R, Jarzyna M, Kolodyński J *Prog. Opt.* **60** 345 (2015)
12. Додонов В В, Манько В И, в сб. *Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем* (Труды ФИАН, Т. 183) (М.: Наука, 1987); Пер. на англ. яз.: Dodonov V V, Man'ko V I *Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems*

- (Proc. of the Lebedev Physics Institute, Vol. 183) (Commack, NY: Nova Science, 1989)
13. Thompson J D et al. *Nature* **452** 72 (2008)
 14. Schnabel R *Phys. Rep.* **684** 1 (2017)
 15. Zurek W H, in *Complexity, Entropy and The Physics of Information* (Ed. W H Zurek) (Santa Fe: SFI Press, 2023) p. 437
 16. Unruh W G *Ann. New York Acad. Sci.* **480** 242 (1986) <https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1986.tb12427.x>
 17. Danilishin S L, Khalili F Ya, Miao H *Living Rev. Relativ.* **22** 2 (2019) <https://doi.org/10.1007/s41114-019-0018-y>
 18. Aasi J et al. *Nature Photon.* **7** 613 (2013) <https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.17>
 19. Брагинский В Б *Физические эксперименты с пробными телами* (М.: Наука, 1970)
 20. Press W H, Thorne K S "Gravitational-wave astronomy", Preprint (Pasadena, CA: California Institute of Technology, 1972); Пер. на русск. яз.: Пресс У, Торн К *УФН* **110** 569 (1973)
 21. Abbott B P et al. (KAGRA Collab., LIGO Scientific Collab., Virgo Collab.) *Living Rev. Relativ.* **23** 3 (2020) <https://doi.org/10.1007/s41114-020-00026-9>
 22. Scully M O, Zubairy M S *Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997); Пер. на русск. яз.: Скалли М О, Зубайри М С *Квантовая оптика* (М.: Физматлит, 2003)
 23. Халили Ф Я *УФН* **186** 1059 (2016); Khalili F Ya *Phys. Usp.* **59** 968 (2016)
 24. Ludlow A D et al. *Rev. Mod. Phys.* **87** 637 (2015)
 25. Mitchell M W, Palacios Alvarez S *Rev. Mod. Phys.* **92** 021001 (2020)
 26. Ono T, Okamoto R, Takeuchi S *Nat. Commun.* **4** 2426 (2013) <https://doi.org/10.1038/ncomms3426>
 27. Acin A et al. *New J. Phys.* **20** 080201 (2018)
 28. Bongs K et al. *Nat. Rev. Phys.* **1** 731 (2019)
 29. Pezzè L et al. *Rev. Mod. Phys.* **90** 035005 (2018)
 30. Degen C L, Reinhard F, Cappellaro P *Rev. Mod. Phys.* **89** 035002 (2017)
 31. Migdall A et al. (Eds) *Single-Photon Generation and Detection: Physics and Applications* (Experimental Methods in the Physical Sciences, Vol. 45) (Boston: Academic Press, 2013)
 32. Bloch I *Nature Phys.* **1** 23 (2005)
 33. Marti G E et al. *Phys. Rev. Lett.* **120** 103201 (2018)
 34. Gross C et al. *Nature* **464** 1165 (2010)
 35. Wolfgramm F et al. *Phys. Rev. Lett.* **105** 053601 (2010)
 36. Leroux I D, Schleier-Smith M H, Vuletić V *Phys. Rev. Lett.* **104** 250801 (2010)
 37. Jackson Kimball D F et al. "Optical magnetometry with modulated light", in *Optical Magnetometry* (Eds D Budker, D F Jackson Kimball) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013) p. 104, <https://doi.org/10.1017/CBO9780511846380.007>
 38. Wasilewski W et al. *Phys. Rev. Lett.* **104** 133601 (2010)
 39. Lee S K et al. *Appl. Phys. Lett.* **89** 214106 (2006)
 40. Afanasiev A E et al. *Opt. Laser Technol.* **148** 107698 (2022)
 41. Sewell R J et al. *J. Phys. B* **43** 051003 (2010)
 42. Degen C L, Reinhard F, Cappellaro P *Rev. Mod. Phys.* **89** 035002 (2017)
 43. Кулик С П *Наука и инновации* (8) 31 (2023)
 44. Tsarev D V et al. *New J. Phys.* **21** 083041 (2019)
 45. Starodumov A N et al. *Appl. Phys. Lett.* **70** 19 (1997)
 46. Boto A N et al. *Phys. Rev. Lett.* **85** 2733 (2000)
 47. Kok P, Braunstein S L, Dowling J P *J. Opt. B* **6** S811 (2004)
 48. Ball P *Physics* **8** 18 (2015) <https://doi.org/10.1103/Physics.8.18>
 49. Dowling J P, Seshadreesan K P *J. Lightwave Technol.* **33** 2359 (2015)
 50. Cohen L et al. *Phys. Rev. Lett.* **123** 203601 (2019)
 51. Shapiro J H *IEEE Aerospace Electron. Syst. Mag.* **35** 8 (2020)
 52. Pezzè L, Smerzi A *Phys. Rev. Lett.* **100** 073601 (2008)
 53. Lang M D, Caves C M *Phys. Rev. Lett.* **111** 173601 (2013)
 54. Manceau M, Khalili F, Chekhova M *New J. Phys.* **19** 013014 (2017)
 55. Tichy M C *J. Phys. B* **47** 103001 (2014)
 56. Клышко Д Н *Квантовая электроника* **4** 1056 (1977); Klyshko D N *Sov. J. Quantum Electron.* **7** 591 (1977)
 57. Клышко Д Н, Пенин А Н *УФН* **152** 653 (1987); Klyshko D N, Penin A N *Sov. Phys. Usp.* **30** 716 (1987)
 58. Zwinkels J C et al. *Metrologia* **47** R15 (2010)
 59. Chu Y et al. *Appl. Phys. Lett.* **118** 240401 (2021)
 60. Polino E et al. *AVS Quantum Sci.* **2** 024703 (2020)
 61. Dowling J P *Contemp. Phys.* **49** 125 (2008)
 62. Baburin A S et al., in *2022 Intern. Conf. Laser Optics, ICLO, Saint Petersburg, Russian Federation, 20–24 June 2022* (Piscataway, NJ: IEEE, 2022) <https://doi.org/10.1109/ICLO54117.2022.9839948>
 63. Chekhova M V, Ou Z Y *Adv. Opt. Photon.* **8** 104 (2016)
 64. Helstrom C W *Quantum Detection and Estimation Theory* (New York: Academic Press, 1976); Пер. на русск. яз.: Хелстром К *Квантовая теория проверки гипотез и оценивания* (М.: Мир, 1979)
 65. Ахманов С А, Дьяков Ю Е, Чиркин А С *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (М.: Наука, 1981)
 66. Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L *Phys. Rev. Lett.* **96** 010401 (2006)
 67. Vachor H-A, Ralph T C *A Guide to Experiments in Quantum Optics* (Weinheim: Wiley-VCH, 2004) <https://doi.org/10.1002/9783527619238>
 68. Мурзахметов Б К, Чижов А В *ЭЧАЯ* **27** 747 (1996); Murzakmetov B K, Chizhov A V *Phys. Part. Nucl.* **27** 309 (1996)
 69. Alodjants A P, Arakelian S M *J. Mod. Opt.* **46** 475 (1999)
 70. Yurke B, McCall S L, Klauder J R *Phys. Rev. A* **33** 4033 (1986)
 71. Zare R N *Angular Momentum: Understanding Spatial Aspects in Chemistry and Physics* (New York: Wiley, 1988); Пер. на русск. яз.: Зар Р *Теория углового момента: О пространственных эффектах в физике и химии* (М.: Мир, 1993)
 72. Gerry C C, Benmoussa A, Campos R A *J. Mod. Opt.* **54** 2177 (2007)
 73. Клышко Д Н *ЖЭТФ* **111** 1955 (1997); Klyshko D N *J. Exp. Theor. Phys.* **84** 1065 (1997)
 74. Podoshvedov M S, Podoshvedov S A, Kulik S P *Sci. Rep.* **13** 3965 (2023)
 75. Podoshvedov M S, Podoshvedov S A *Laser Phys. Lett.* **20** 045202 (2023)
 76. Costanzo L S et al. *Phys. Rev. Lett.* **119** 013601 (2017)
 77. Pezzè L, Smerzi A *Phys. Rev. Lett.* **110** 163604 (2013)
 78. Карасев В П, Масалов А В *Оптика и спектроскопия* **74** 928 (1993); Karasev V P, Masalov A V *Opt. Spectrosc.* **74** 551 (1993)
 79. Luis A *Phys. Lett. A* **329** 8 (2004)
 80. Luis A *Phys. Rev. A* **76** 035801 (2007)
 81. Tsarev D V et al. *Opt. Express* **26** 19583 (2018)
 82. Zhang J et al. *Opt. Express* **15** 7682 (2007)
 83. Sich M et al. *Nature Photon.* **6** 50 (2012)
 84. Deng H, Haug H, Yamamoto Y *Rev. Mod. Phys.* **82** 1489 (2010)
 85. Khaykovich L et al. *Science* **296** 1290 (2002)
 86. Hall M J W, Wiseman H M *Phys. Rev. X* **2** 041006 (2012)
 87. Захаров Р В, Тихонова О В *УФН* **193** 406 (2023); Zakharov R V, Tikhonova O V *Phys. Usp.* **66** 381 (2023)
 88. Walls D F *Nature* **306** 141 (1983)
 89. Голубев Ю М, Соколов И В *ЖЭТФ* **87** 408 (1984); Golubev Yu M, Sokolov I V *Sov. Phys. JETP* **60** 234 (1984)
 90. Смирнов Д Ф, Трошин А С *УФН* **153** 233 (1987); Smirnov D F, Troshin A S *Sov. Phys. Usp.* **30** 851 (1987)
 91. Loudon R, Knight P L *J. Mod. Opt.* **34** 709 (1987)
 92. Ахманов С А и др. *Новые физические принципы оптической обработки информации* (Под ред. С А Ахманова, М А Воронцова) (М.: Наука, 1990)
 93. Клилин С Я *Квантовая оптика: поля и их детектирование* (Минск: Наука і тэхніка, 1990)
 94. Teich M C, Saleh B E A *Quantum Opt.* **1** 153 (1989); Пер. на русск. яз.: Тайш М К, Салэ Б Э А *УФН* **161** (4) 101 (1991)
 95. Клышко Д Н, Масалов А В *УФН* **165** 1249 (1995); Klyshko D N, Masalov A V *Phys. Usp.* **38** 1203 (1995)
 96. Dodonov V V *J. Opt. B* **4** R1 (2002)
 97. Mikheev E V et al. *Sci. Rep.* **9** 14301 (2019)
 98. Braunstein S L, van Loock P *Rev. Mod. Phys.* **77** 513 (2005)
 99. Andersen U L et al. *Nature Phys.* **11** 713 (2015)
 100. Takeda S, Furusawa A *APL Photonics* **4** 060902 (2019)
 101. Lvovsky A I, in *Photonics: Scientific Foundations, Technology and Applications* (Ed. D L Andrews) (New York: John Wiley and Sons, 2015) p. 121, <https://doi.org/10.1002/9781119009719.ch5>
 102. Vahlbruch H et al. *Phys. Rev. Lett.* **117** 110801 (2016)
 103. Dutt A et al. *Phys. Rev. Appl.* **3** 044005 (2015)
 104. Mondain F et al. *Photon. Res.* **7** (7) A36 (2019)
 105. Mehmet M et al. *Opt. Express* **19** 25763 (2011)
 106. Grangier P et al. *Phys. Rev. Lett.* **59** 2153 (1987)
 107. Demkowicz-Dobrzański R, Banaszek K, Schnabel R *Phys. Rev. A* **88** 041802 (2013)
 108. Campos R A, Saleh B E A, Teich M C *Phys. Rev. A* **40** 1371 (1989)
 109. Birrittella R J, Alsing P M, Gerry C C *AVS Quantum Sci.* **3** 014701 (2021)
 110. Goltsman G N et al. *Appl. Phys. Lett.* **79** 705 (2001)
 111. Cheng R et al. *Nature Photon.* **17** 112 (2023)
 112. Lita A E et al. *J. Lightwave Technol.* **40** 7578 (2022)
 113. Cahall C et al. *Optica* **4** 1534 (2017)
 114. Sahin D et al. *Appl. Phys. Lett.* **103** 111116 (2013)

115. Marsili F et al. *Nature Photon.* **7** 210 (2013)
116. Hadfield R H *Nature Photon.* **3** 696 (2009)
117. Eaton M et al. *Nature Photon.* **17** 106 (2023)
118. Polyakov S V *Exp. Meth. Phys.* **45** 257 (2013)
119. Charaev I et al. *Nat. Nanotechnol.* **18** 343 (2023)
120. Mitchell M W, Lundeen J S, Steinberg A M *Nature* **429** 161 (2004)
121. Resch K J et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 223601 (2007)
122. Okamoto R et al. *New J. Phys.* **10** 073033 (2008)
123. Mandel L, Wolf E *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995); Пер. на русск. яз.: Мандель Л, Вольф Э *Оптическая когерентность и квантовая оптика* (М.: Физматлит, 2000)
124. Hong C K, Ou Z Y, Mandel L *Phys. Rev. Lett.* **59** 2044 (1987)
125. Burlakov A V et al. *Phys. Rev. A* **64** 041803 (2001)
126. Клышко Д Н *Физические основы квантовой электроники* (М.: Наука, 1986); Пер. на англ. яз.: Klyshko D *Physical Foundations of Quantum Electronics* (Eds M Chekhova, S Kulik) (Singapore: World Scientific, 2011)
127. Kim H, Kwon O, Moon H S *Sci. Rep.* **11** 20555 (2021)
128. Grice W P, Walmsley I A *Phys. Rev. A* **56** 1627 (1997)
129. Grice W P, U'Ren A B, Walmsley I A *Phys. Rev. A* **64** 063815 (2001)
130. Scott H et al. *Phys. Rev. A* **104** 053704 (2021)
131. Singh S et al., arXiv:2304.13300
132. Клышко Д Н *УФН* **164** 1187 (1994); Klyshko D N *Phys. Usp.* **37** 1097 (1994)
133. Yang Y, Xu L, Giovannetti V *Sci. Rep.* **9** 10821 (2019)
134. Crespi A et al. *Appl. Phys. Lett.* **100** 233704 (2012)
135. Barer R, Tkaczyk S *Nature* **173** 821 (1954)
136. Chen Y et al. *npj Quantum Inf.* **5** 43 (2019)
137. Tateda M, Tanaka S, Sugawara Y *Appl. Opt.* **19** 770 (1980)
138. Tsarev D et al. *New J. Phys.* **22** 113016 (2020)
139. Kim H, Park H S, Choi S-K *Opt. Express* **17** 19720 (2009)
140. Melnikov A A et al. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **115** 1221 (2018)
141. Melnikov A et al. *Adv. Phys. X* **8** 2165452 (2023)
142. Клышко Д Н *УФН* **154** 133 (1988); Klyshko D N *Sov. Phys. Usp.* **31** 74 (1988)
143. Pelucchi E et al. *Nat. Rev. Phys.* **4** 194 (2022)
144. Wang J et al. *Nature Photon.* **14** 273 (2020)
145. Matthews J C F et al. *Nature Photon.* **3** 346 (2009)
146. Silverstone J W et al. *Nature Photon.* **8** 104 (2014)
147. van Loock P *Laser Photon. Rev.* **5** 167 (2011)
148. Hofmann H F, Ono T *Phys. Rev. A* **76** 031806 (2007)
149. Israel Y, Rosen S, Silberberg Y *Phys. Rev. Lett.* **112** 103604 (2014)
150. Ulanov A E et al. *Nat. Commun.* **7** 11925 (2016)
151. Afek I, Ambar O, Silberberg Y *Science* **328** 879 (2010)
152. Kok P, Lee H, Dowling J P *Phys. Rev. A* **65** 052104 (2002)
153. Bohmann M, Sperling J, Vogel W *Phys. Rev. A* **91** 042332 (2015)
154. Huver S D, Wildfeuer C F, Dowling J P *Phys. Rev. A* **78** 063828 (2008)
155. Demkowicz-Dobrzanski R et al. *Phys. Rev. A* **80** 013825 (2009)
156. Rubin M A, Kaushik S *Phys. Rev. A* **75** 053805 (2007)
157. Dorner U et al. *Phys. Rev. Lett.* **102** 040403 (2009)
158. Haigh T J, Ferris A J, Olsen M K *Opt. Commun.* **283** 3540 (2010)
159. Shen Y R *The Principles of Nonlinear Optics* (New York: J. Wiley, 1984); Пер. на русск. яз.: Шен И Р *Принципы нелинейной оптики* (М.: Наука, 1989)
160. Avella A et al. *Opt. Express* **19** 23249 (2011)
161. Brida G et al. *J. Opt. Soc. Am. B* **23** 2185 (2006)
162. Prudkovskii P A, Safronenkov D A, Kitaeva G Kh *Opt. Lett.* **47** 4842 (2022)
163. Новикова Т И, Леонтьев А А, Китаева Г Х *Письма в ЖЭТФ* **116** 343 (2022); Novikova T I, Leontyev A A, Kitaeva G Kh *JETP Lett.* **116** 353 (2022)
164. Prudkovskii P et al. *Sensors* **21** 4964 (2021)
165. Lundeen J S et al. *Nature Phys.* **5** 27 (2009)
166. Hsieh H Y et al. *Symmetry* **14** 874 (2022)
167. Stace T M *Phys. Rev. A* **82** 011611 (2010)
168. Campbell S et al. *New J. Phys.* **19** 103003 (2017)
169. Rosenberg D et al. *Phys. Rev. A* **71** 061803 (2005)
170. Fukuda D et al. *Opt. Express* **19** 870 (2011)
171. Weng W et al. *Phys. Rev. Lett.* **112** 160801 (2014)
172. Китаева Г Х и др. *ДАН СССР* **247** 586 (1979); Kitaeva G Kh et al. *Sov. Phys. Dokl.* **24** 564 (1979)
173. Власенко М Ф, Китаева Г Х, Пенин А Н *Квантовая электроника* **7** 441 (1980); Vlasenko M F, Kitaeva G Kh, Penin A N *Sov. J. Quantum Electron.* **10** 252 (1980)
174. Kitaeva G Kh et al. *Appl. Phys. B* **116** 929 (2014)
175. Ge W et al. *Phys. Rev. Lett.* **121** 043604 (2018)
176. Humphreys P C et al. *Phys. Rev. Lett.* **111** 070403 (2013)
177. Pezzè L *Nature Photon.* **15** 74 (2021)
178. Gessner M, Smerzi A, Pezzè L *Nat. Commun.* **11** 3817 (2020)

Quantum optical metrology

A.P. Alodjants^(1,2,a), D.V. Tsarev^(1,2,b), D.A. Kuts^(2,c), S.A. Podoshvedov^(2,d), S.P. Kulik^(2,3,e)

⁽¹⁾ ITMO University, Kronverksky prosp. 49A, 197101 St. Petersburg, Russian Federation

⁽²⁾ South Ural State University, prosp. Lenina 76, 454080 Chelyabinsk, Russian Federation

⁽³⁾ Lomonosov Moscow State University, Quantum Technology Center, Leninskie gory 1, str. 35, 119991 Moscow, Russian Federation

E-mail: ^(a) alexander_ap@list.ru, ^(b) dmitriy_93@mail.ru, ^(c) tpmchel@yandex.ru,

^(d) podoshvedovsa@susu.ru, ^(e) sergei.kulik@physics.msu.ru

We review recent progress in the field of optical quantum metrology, with a focus on the analysis of the current level of theoretical and experimental research on the generation, transformation, and measurement of nonclassical states of light, such as $N00N$, squeezed, and hybrid states, which combine transformations of both discrete and continuous variables of a quantized light field. We show how such states can be used to improve the measurement accuracy and to estimate unknown phase parameters in both linear and nonlinear metrology. Significant attention is paid to the description of actual quantum metrology schemes that take the loss of particles, the limited fidelity of photon detectors, and other factors into account. We therefore identify both the ultimate (fundamental) bounds imposed by quantum mechanical uncertainties of the quantities being measured and the bounds due to the effect of classical noise on the propagation and measurements of a quantized field. Of special importance are quantum metrology options based on spontaneous parametric light scattering, which, for more than 50 years, has been an indispensable tool for key accomplishments in quantum optics and related areas of photonics: quantum cryptography, quantum computing, and quantum sensing. In this regard, we analyze the current status of the use of the well-known Hong–Ou–Mandel photon anticorrelation effect and biphoton interference in various quantum metrology approaches in measuring temperature, length, material concentration, and so on. We also discuss the use of biphotons in photometry, radiometry, and sensing for the absolute calibration of modern photon-count detectors, as well as for measurements of the brightness temperature of hot radiation sources. The quantum metrology phenomena, methods, and approaches discussed here in light of the most recent progress on sources and detectors of quantum radiation will be an important tool in developing and practically implementing new schemes and algorithms for quantum processing and information transmission.

Keywords: quantum measurement, quantum interferometry, spontaneous parametric light scattering, quantum sensing, photometry, radiometry, nonclassical states of light, biphotons, quantum information and computing

PACS numbers: **03.67.** – a, **06.20.** – f, **42.50.** – p, 42.50.Dv

Bibliography — 178 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **194** (7) 711–739 (2024)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.01.039634>

Received 28 September 2023, revised 25 December 2023

Physics – Uspekhi **67** (7) (2024)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2024.01.039634>