Март 2024 г. **Том 194, № 3**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Интегрируемые структуры в теории струн

К.А. Губарев, Э.Т. Мусаев

Представлен набор различных методов и наблюдений, относящихся к структурам в трёхмерных системах, подобных тем, которые отвечают за интегрируемость двумерных систем. Особое внимание уделяется структурам Намбу и петлевым переменным, естественным образом возникающим в динамике мембран. При более подробном рассмотрении каждой темы подчёркивается их связь друг с другом и обсуждается возможная связь с интегрируемостью мембран.

Ключевые слова: интегрируемость, структура Намбу, алгебры петель, мембраны, М-теория

PACS numbers: 02.30.Ik, **04.65.+e**, **11.25.–w** DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2023.06.039407

Содержание

1. Введение

В самом общем случае говорят, что динамическая система интегрируема, если число степеней свободы, необходимое для описания её динамики, в два раза меньше размерности фазового пространства. Другими словами, система имеет набор сохраняющихся зарядов, позволяющий интегрировать динамические уравнения по соответствующим направлениям. Тогда как для механических систем с конечным фазовым пространством такое понимание интегрируемости применимо напрямую, для теорий поля вышеизложенное становится слишком расплывчатым, и приходится вводить более строгие критерии. В частности, говорят о классической интегрируемости в смысле Лиувилля, когда можно получить бесконечное множество сохраняющихся зарядов, используя подход пары Лакса. Определённо не самым простым, но имеющим отношение к данному обсуждению примером классически интегрируемой теоретико-полевой системы является суперструна Грина – Шварца на фоне $AdS_5\times\mathbb{S}^5$, т.е. двумерная суперсимметричная сигма-модель. Понятие интегрируемости естественным образом обобщается на квантовые системы, где оно означает существование бесконечного набора коммутирующих операторов, один из которых может быть выбран в роли гамильтониана системы. Такой набор может быть порождён квантовыми операторами Лакса, построенными с использованием алгебраического анзаца Бете и соотношений Янга – Бакстера, термодинамического анзаца Бете или путём построения квантовой спектральной кривой. Существует множество вводных лекций и обзоров, объясняющих понятие квантовой интегрируемости и упомянутые подходы (см., например, [1 – 5]). Здесь основное внимание мы будем уделять структурам, отвечающим за классическую интегрируемость.

Сюжеты настоящего обзора развиваются из интегрируемости суперструны Грина – Шварца на пространстве-времени $AdS_5\times\mathbb{S}^5$, её деформаций, сохраняющих интегрируемость, и алгебраических структур, отвечающих этой процедуре. Впервые интегрируемость такой системы была показана в работе [6] путём явного построения плоской связности Лакса, порождающей бесконечное множество сохраняющихся токов. В частности, интерес к интегрируемости струны на определённых фонах, заявленный в этой работе, был связан с расширением дуальности AdS/CFT за пределы соответствия между струнами в режиме слабой связи и калибровочными

К.А. Губарев [1,2,a], **Э.Т. Мусаев** [1,b]
[1] Московский физико-технический институт, (национальный исследовательский университет), Институтский пер. 9, 141701 Долгопрудный, Московская обл., Российская Федерация
[2] Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", пл. Академика Курчатова 1, 123182 Москва, Российская Федерация
E-mail: [a] kirill.gubarev@phystech.edu, [b] musaev.et@phystech.edu

Статья поступила 20 января 2023 г., после доработки 7 июня 2023 г.

теориями в режиме сильной связи. Серьёзным признаком в пользу интегрируемости струны является предполагаемая интегрируемость её голографического партнёра $\mathcal{N}=4$ $d=4$ $\mathrm{SU}(N)$ суперсимметричной теории Янга – Миллса. В свою очередь, это утверждение первоначально было основано на наблюдении, что оператор дилатации для калибровочной теории в пределе большого N, ограниченный сектором операторов, построенных из скаляров, может рассматриваться как гамильтониан интегрируемой квантовой спиновой цепочки [7]. Известно, что струна на фоне $\mathrm{AdS}_5\times\mathbb{S}^5$ принадлежит семейству интегрируемых сигма-моделей, которые можно получить путём её деформации определённого вида. В частности, обнаруживается так называемый β-деформированный фон Лунина – Малдасены [8], двойственный некоторой деформации Ли – Штрасслера $\mathcal{N}=4$ $d=4$ суперсимметричной теории Янга – Миллса [9]. Интегрируемость струны на фоне Лунина – Малдасены была показана в работах [10, 11] (неинтегрируемость для комплексных деформаций была показана в работе [12]). Обзор связи между AdS/CFT-соответствием и интегрируемостью представлен в [13]. В случае открытой суперструны Грина – Шварца можно найти граничные условия, сохраняющие интегрируемость [14], что позволяет рассматривать интегрируемые конфигурации D-бран. В частности, определённая система D3 – D5-бран, интегрируемость которой известна [15], дуальна конформной теории поля на дефекте, а определённая система D2 – D4-бран дуальна теории ABJM в присутствии 1/2 – BPS доменной стенки, которая также интегрируема [16]. При поднятии до M-теории последняя отвечает системе M2 – M5-бран, что убедительно говорит в пользу возможности определения интегрируемости мембран. Однако следует обратить внимание на работы [17, 18], где была показана неинтегрируемость движения струн на определённых фонах D-бран. Эти результаты могут либо ограничить возможность определения интегрируемых структур для D-бран, либо указать на необходимость лучшего выбора переменных.

Более систематический подход к получению интегрируемых двумерных сигма-моделей основан на деформациях Янга – Бакстера сигма-моделей и был впервые применён в работе [19] для главных киральных моделей и в [20] для сигма-моделей на симметричных пространствах. В работе [21] представлена интегрируемая деформация Янга – Бакстера суперструны на фоне $\mathrm{AdS}_5\times\mathbb{S}^5$, что дало важный импульс развитию методов, описанных в настоящем обзоре. Янг-бакстерова деформация параметризуется матрицей r, являющейся решением классического уравнения Янга – Бакстера (CYBE) [22, 23]

$$r^{b_1[a_1}r^{a_2|b_2|}f_{b_1b_2}{}^{a_3]}=0\,, \tag{1.1}$$

где $f_{ab}{}^c$ — структурные константы (супер)алгебры [1]. Естественный вопрос, можно ли интерпретировать деформированную сигма-модель как суперструну на фоне супергравитации, нашёл ответ в работе [25], где был представлен соответствующий фон, и показано, что уравнения $\mathrm{D}=10$ супергравитации не выполняются. Надлежащая система уравнений, которым удовлетворяет такой фон, в настоящее время называемый ABF (Arutyunov, Borsato, Frolov), была найдена в [26] и теперь называется обобщённой супергравитацией [27]. Мы не будем здесь рассматривать такие обобщения уравнений супергравитации, заинтересованный читатель может найти более подробную информацию в обзоре [28] и ссылках в нём. Здесь для нас важен результат работ [29, 30], где сформулировано правило применения деформаций Янга – Бакстера к фонам общего вида, не являющимся групповыми многообразиями, или фактор-пространствами. Правило основано на отображении открытых-замкнутых струн, которое удобнее сформулировать как локальное преобразование O(10,10), порождённое бивектором $\beta=r^{a_1a_2}k_{a_1}\wedge k_{a_2}$, где $k_a=k_a{}^{\mu}\partial_\mu$ — набор векторов Киллинга исходного фона. Бивектор $\beta^{\mu\nu}$ играет роль параметра некоммутативности, соответствующего отображению открытых-замкнутых струн. В работах [31, 32] показано, что для того, чтобы деформированный фон удовлетворял уравнениям супергравитации, достаточно наложить классическое уравнение Янга – Бакстера на $r^{a_1a_2}$ и так называемое условие унимодулярности $r^{a_1a_2}f_{a_1a_2}{}^b=0$, впервые обнаруженное в [33]. Нарушение последнего даёт решения уравнений уже обобщённой супергравитации. Важным побочным замечанием здесь является то, что именно классическая матрица Янга – Бакстера r может использоваться для генерации скобок Пуассона интегрируемой системы по заданной паре операторов Лакса (см. раздел 1.2).

Записанные в виде линейных преобразований из группы $\mathrm{O}(10,10)$ деформации Янга – Бакстера 10D-фонов (2D σ-модель) естественным образом обобщаются на деформации 11D-фонов (3D σ-модель), что было сделано в [34 – 36]. Соответствующее обобщение классического уравнения Янга – Бакстера (gCYBE) было получено в работах [37, 38] в рамках алгебраического подхода, основанного на так называемой исключительной алгебре Дринфельда, обобщающей классический дубль Дринфельда [2]. Проверка того, что gCYBE (вместе с условием унимодулярности) достаточно для того, чтобы деформация генерировала решение, была выполнена в [36] для фона произвольного вида. В случае 11-мерных фонов деформация параметризуется тривектором $\Omega=\rho^{a_1a_2a_3}k_{a_1}\wedge k_{a_2}\wedge k_{a_3}$, для которого теперь требуется объект $\rho^{a_1a_2a_3}$ с тремя индексами вместо матрицы $r^{a_1a_2}$. На данный момент интерпретация gCYBE как классического предела уравнения, подобного квантовому уравнению Янга – Бакстера, неизвестна, хотя в [39] были сделаны определённые попытки построить квантовое уравнение вручную, а в [35] сделаны попытки (неудачные) связать gCYBE с уравнением тетраэдра Замолодчикова. Несмотря на это, можно сделать побочный комментарий, аналогичный приведённому выше: скобка Намбу динамической системы может быть получена таким же образом с помощью $\rho^{a_1a_2a_3}$ и тройки операторов Лакса.

[1] Важно отметить, что деформация [21] не определяет однозначно деформированную теорию, и свобода в определении r-матрицы остаётся. В [24] построена унимодулярная η-деформация фона $\mathrm{AdS}_5\times\mathbb{S}^5$, удовлетворяющая неоднородному (модифицированному) уравнению Янга – Бакстера, и показано, что она порождает решение уравнений супергравитации.

[2] Ранее это условие было найдено в [34] в виде условия, достаточного для обращения в нуль R-потока. Однако, поскольку полученное условие было достаточным, а не необходимым, некоторые члены могли быть добавлены, и окончательная форма уравнения gCYBE всё ещё должна быть определена.

Естественным образом возникает ряд вопросов. Является ли эта система интегрируемой в некотором смысле? Можно ли сформулировать интегрируемость по Лиувиллю для трёхмерных теоретико-полевых систем? Сохраняет ли трёхвекторная деформация интегрируемость двумерной σ-модели в обычном смысле? Целью данного обзора является сбор и описание на едином языке разнообразных попыток осмысления трёхмерной интегрируемости и интегрируемости систем Намбу–Пуассона, поскольку они, по-видимому, имеют близкое отношение к алгебраическим структурам, возникающим при трёхвекторных деформациях фонов М-теории. Мы постараемся подчеркнуть эти отношения в каждом случае и порассуждать о возможном дальнейшем развитии каждого сюжета. Текст обзора выстроен следующим образом. В этом разделе кратко рассматривается стандартный подход к интегрируемости по Лиувиллю с использованием пар Лакса и связности Лакса, главным образом для того, чтобы ввести обозначения и сделать текст вполне самодостаточным. В разделе 2 обсуждаются системы Намбу и подходы к их интегрируемости. В качестве конкретного примера, относящегося к трёхмерной интегрируемости, мы сосредоточимся на иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП). В разделе 3 мы кратко рассматриваем интегрируемость суперструны, уделяя основное внимание интегрируемым деформациям и их интерпретации как Т-дуальности Пуассона–Ли. Раздел 4 описывает трёхвекторные деформации и связанные с ними алгебраические структуры и содержит описание нескольких подходов к интегрируемости трёхмерной мембраны. Мы описываем подходы к динамике мембран, основанные на петлевых переменных, которые кажутся естественными, и подчёркиваем, что для мембран тензор деформации $\Omega^{a_1a_2a_3}$ можно интерпретировать как параметр некоммутативности петель, а действие деформации описывается теми же формулами, что и отображение открытых-замкнутых мембран. В конце раздела 4 мы обсуждаем возможные связи с тетраэдрическим уравнением Замолодчикова и конкретный способ определения поверхности Вильсона в терминах упорядоченных петель. Наконец, в разделе 5 результаты и наблюдения, обсуждаемые в основном тексте, сведены в списки, чтобы представить картину настолько ясно, насколько это возможно.

1.1. Интегрируемость по Лиувиллю

Начнём с краткого обзора стандартного подхода пар Лакса к классической интегрируемости механических систем по Лиувиллю. Представленное описание в основном следует [40], схожий материал можно найти в любом обзоре или учебнике по интегрируемым системам. Мы начнём с рассмотрения динамической системы, определяемой набором уравнений движения $\dot{x}^i = f^i(x)$. При помощи гамильтониана H системы уравнения движения можно записать в виде

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{1.2}$$

Эквивалентно $\dot{p}_i = \{H, p_i\}$, $\dot{q}^i = \{H, q^i\}$, где скобка Пуассона для пары произвольных функций $f(p,q)$ и $g(p,q)$ динамических переменных определяется, как обычно:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p}. \tag{1.3}$$

Предположим, что система имеет нетривиальные интегралы движения, определённые как $\dot{I}_i = 0$ или эквивалентно уравнением

$$\{H, I_i\} = 0. \tag{1.4}$$

Каждый интеграл движения I позволяет перейти к так называемым переменным действие–угол и полностью проинтегрировать динамические уравнения для заданной пары координат (p,q). Следовательно, если число интегралов движения равно полному числу степеней свободы, то система вполне интегрируема. Таким образом, система с $2n$-мерным фазовым пространством называется интегрируемой по Лиувиллю, если она обладает n интегралами движения I_i, все из которых находятся в инволюции, т.е. выполнено $\{I_i, I_j\} = 0$.

Рассмотрим более подробно переменные действие–угол, для которых возьмём один интеграл движения, заданный функцией $F(p,q) = f = \mathrm{const}$. Решим это уравнение относительно p и определим 1-форму

$$\alpha = p\,\mathrm{d}q, \tag{1.5}$$

где под p понимается функция $p = p(q,f)$ от координаты q и интеграла движения f. Тогда 2-форма $\omega = \mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$ определяет симплектическую форму на фазовом пространстве. Теперь определим действие S следующим образом:

$$S[q,f] = \int_{q_0}^{q} \alpha = \int_{q_0}^{q} p(q,f)\,\mathrm{d}q. \tag{1.6}$$

По построению действие является функцией двух переменных q и f, и можно определить новые динамические переменные, написав

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \qquad \psi = \frac{\partial S}{\partial f}, \tag{1.7}$$

где первое равенство очевидно, а второе просто определяет угловую переменную ψ. Легко видеть, что так определённое преобразование переменных (p,q) в переменные действие–угол (f,ψ) является каноническим, т.е. сохраняет симплектическую форму. Действительно, учитывая

$$0 \equiv \mathrm{d}^2 S = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q - \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\psi, \tag{1.8}$$

видим, что симплектическая форма не меняется.

В терминах так определённых переменных действие–угол, позволяющих явно решать уравнения движения для интеграла $I = F(p,q)$, динамика системы становится особенно простой. Действительно, уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \{H, f\} = 0, \\ \dot{\psi} &= \{H, \psi\} = \frac{\partial H}{\partial f} = \omega(f) = \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Они могут быть легко решены в явном виде, что даёт

$$\begin{aligned} f &= \mathrm{const}, \\ \psi &= \omega(f)\,t + \psi_0, \end{aligned} \tag{1.10}$$

т.е. угловая переменная ψ, соответствующая действию, заданному интегралом движения f, эволюционирует линейно со временем. Для заданных n интегралов движения описанную выше процедуру можно повторить для всех n пар переменных (p_i, q^i), что позволяет полностью решить уравнения движения в терминах соответствующих переменных действие – угол (f_i, ψ^i). По сути, это явное проявление интегрируемости системы: линейная эволюция и отсутствие хаоса.

В качестве простейшего примера, иллюстрирующего изложенный общий принцип, рассмотрим одномерный гармонический осциллятор $H = (1/2)(p^2 + \omega^2 q^2)$. Гамильтоновы уравнения движения записываются как

$$\dot{p} = -\omega^2 q\,, \qquad \dot{q} = p\,. \tag{1.11}$$

Такая система имеет только один интеграл движения — энергию $H(p,q) = E$. Решая это уравнение, получаем для p следующее:

$$p = \sqrt{2E - \omega^2 q^2}\,. \tag{1.12}$$

Тогда действие имеет вид $S = \int_0^q \sqrt{2E - \omega^2 z^2}\,\mathrm{d}z$, а угловая переменная записывается следующим образом:

$$\psi = \frac{\partial S}{\partial E} = \int_0^q \frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{2E - \omega^2 z^2}} = \frac{1}{2\omega} \arctan\left(\frac{\omega q}{p}\right), \tag{1.13}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\omega} \arctan\left(\frac{\omega q}{p}\right) = \frac{1}{2}\, t\,, \\ &p^2 + \omega^2 q^2 = 2E\,, \end{aligned} \tag{1.14}$$

что даёт стандартное решение $q = \sin(\omega t)$, $p = \omega \cos(\omega t)$.

1.2. Пара Лакса

Поскольку очевидно, что описанная процедура не является алгоритмической, так как имеет дело с решением дифференциальных уравнений на различных шагах, хотелось бы сформулировать подход, позволяющий генерировать интегралы движения из одного выражения и тем самым гарантировать интегрируемость в рассматриваемом смысле. Такой подход известен как формализм Лакса – Захарова – Шабата и начинается с предположения, что нам удалось записать уравнения движения динамической системы в виде

$$\dot{L} = [L, M]\,, \tag{1.15}$$

где L, M — некоторые матрицы, которые могут дополнительно зависеть от некоторого (спектрального) параметра(ов) u. Тогда интегралы движения можно получить, просто взяв след различных матричных степеней L, т.е.

$$F_k := \operatorname{Tr} L^k \implies \dot{F}_k = 0\,. \tag{1.16}$$

Пара матриц L, M называется парой Лакса. В целом из приведённых выше уравнений следует, что зависимость от времени для этих матриц определяется выражением

$$\begin{aligned} &L(t) = g(t) L(0) g(t)^{-1}\,, \\ &M(t) = \dot{g}(t) g(t)\,. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Грубо говоря, если нам удалось найти пару Лакса для динамической системы, т.е. переписать её уравнения движения, как указано выше, то система является интегрируемой. Конечно, этот шаг не более алгоритмичен, чем стандартный метод действий – переменных, однако, как только пара Лакса найдена, интегралы движения генерируются автоматически. Например, для одномерного гармонического осциллятора пару Лакса можно выбрать следующим образом:

$$\begin{aligned} &L = p\sigma_3 + \omega q \sigma_1 = \begin{bmatrix} p & \omega q \\ \omega q & -p \end{bmatrix}, \\ &M = -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\,\omega \\ \frac{1}{2}\,\omega & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — стандартные матрицы Паули. Тогда единственным интегралом движения является $H = (1/4)\operatorname{Tr} L^2$.

Чтобы проверить, находятся ли интегралы $\{F_i\}$ в инволюции, нужно убедиться, что $\{F_i, F_j\} = 0$. Для дальнейшего обсуждения удобно взять за отправную точку пару Лакса и сгенерировать скобку Пуассона для системы, используя классическую r-матрицу Янга – Бакстера. Для этого начнём с матрицы $L \in \mathfrak{gl}(d)$ и определим скобку Пуассона следующим образом:

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2]\,, \tag{1.19}$$

где $[\,,]$ — обычный коммутатор в алгебре $\mathfrak{gl}(d)$, а матрицы $L_{1,2}$ определяются как

$$\begin{aligned} &L_1 = L \otimes \mathbb{1}\,, \\ &L_2 = \mathbb{1} \otimes L\,. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Другими словами, и L_1, и L_2 принадлежат $\mathfrak{gl}(d) \otimes \mathfrak{gl}(d)$. Так заданная скобка является антисимметричной по построению и должна дополнительно удовлетворять уравнению Якоби, что обеспечивается (модифицированным) классическим уравнением Янга – Бакстера для матрицы r. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим три экземпляра алгебры $\mathfrak{gl}(d)$, для которых мы определим

$$\begin{aligned} &L_1 = L \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}\,, \\ &L_2 = \mathbb{1} \otimes L \otimes \mathbb{1}\,, \\ &L_3 = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes L\,, \end{aligned} \tag{1.21}$$

и аналогично для r-матрицы, т.е. $r_{12} = r \otimes \mathbb{1}$ и т.д. Тождество Якоби для скобки Пуассона требует

$$\big\{L_1, \{L_2, L_3\}\big\} + \big\{L_3, \{L_1, L_2\}\big\} + \big\{L_2, \{L_3, L_1\}\big\} = 0\,. \tag{1.22}$$

Используя определение (1.19) из приведённого выше тождества Якоби, мы получаем следующее уравнение [41]

$$\begin{aligned} &\big[L_1, \{L_2, r_{13}\} - \{L_3, r_{12}\} + [r_{12}, r_{13} + r_{23}] + [r_{32}, r_{13}]\big] + \\ &+ \big[L_2, \{L_3, r_{21}\} - \{L_1, r_{23}\} + [r_{23}, r_{21} + r_{31}] + [r_{13}, r_{21}]\big] + \\ &+ \big[L_3, \{L_1, r_{32}\} - \{L_2, r_{31}\} + [r_{31}, r_{32} + r_{12}] + [r_{21}, r_{32}]\big] = 0\,. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Для случая постоянной и антисимметричной матрицы $r_{ij} = -r_{ji}$ уравнение (1.23) выполнено, если выполняется классическое уравнение Янга – Бакстера (CYBE)

$$[r_{23}, r_{12}] + [r_{23}, r_{13}] + [r_{13}, r_{12}] = 0\,. \tag{1.24}$$

Чтобы убедиться в этом, начнём с первого члена, который даёт

$$\begin{aligned}\{L_1, \{L_2, L_3\}\} &= [r_{23}, \{L_1, L_2\}] + [r_{23}, \{L_1, L_3\}] = \\ &= [r_{23}, [r_{12}, L_1]] + [r_{23}, [r_{12}, L_2]] + [r_{23}, [r_{13}, L_1]] + \\ &+ [r_{23}, [r_{13}, L_3]]\,.\end{aligned} \tag{1.25}$$

Записывая две другие циклические перестановки, обеспечивающие тождество, мы находим три типа членов: те, которые действуют на L_1, L_2 и L_3, и видим, что все они имеют одинаковую форму. Рассматривая для конкретности первый, получим

$$[r_{23}, [r_{12}, L_1]] + [r_{23}, [r_{13}, L_1]] + [[r_{13}, r_{12}], L_1] = 0\,, \tag{1.26}$$

где мы использовали тождество Якоби для коммутатора. Теперь заметим, что справедливо следующее

$$[r_{23}, [r_{12}, L_1]] = [[r_{23}, r_{12}], L_1]\,, \tag{1.27}$$

поскольку r_{23} действует только на вторую и третью копии $\mathfrak{gl}(d)$, r_{12} действует только на первую и вторую копии, а L_1 принадлежит первой копии. Следовательно, грубо говоря, коммутаторы независимы. Это позволяет, наконец, написать уравнение

$$\begin{aligned}&[[r_{23}, r_{12}], L_1] + [[r_{23}, r_{13}], L_1] + [[r_{13}, r_{12}], L_1] = \\ &\quad = -c^2[[L_2, L_3], L_1]\,,\end{aligned} \tag{1.28}$$

называемое (модифицированным) классическим уравнением Янга – Бакстера ((m)CYBE). Его правая часть вместе с оставшимися двумя циклическими перестановками даёт нуль благодаря тождеству Якоби для коммутатора. При $c = 0$ модифицированное CYBE становится обычным CYBE и может быть записано в следующем красивом виде:

$$[r_{23}, r_{12}] + [r_{23}, r_{13}] + [r_{13}, r_{12}] = 0\,, \tag{1.29}$$

который будет полезен позже.

Несложно проверить, что интегралы F_i действительно находятся в инволюции относительно так определённой скобки Пуассона. Конечно, эта скобка определяет ту же эволюцию, что и (1.15):

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \{F_k, L\} = [M_k, L]\,, \qquad M_k = -k\,\mathrm{Tr}_1\,[L_1{}^{k-1} r_{21}]\,, \tag{1.30}$$

где нижний индекс указывает, что след взят по первому фактору. Теорема утверждает, что собственные значения матрицы Лакса L (сохраняющиеся величины F_k) находятся в инволюции тогда и только тогда, когда существует функция r_{21}, удовлетворяющая CYBE и определяющая скобку Пуассона, как указано выше. Подробности теоремы см. в лекциях [40], здесь мы лишь упомянем, что r-матрица является естественным атрибутом классической интегрируемой системы.

В качестве последнего замечания в этом разделе приведём некоторые выражения в явно выбранном базисе $\{T^i{}_j\} = \mathrm{bas}\,\mathfrak{gl}(d)$. Тогда для r-матрицы $r \in \mathfrak{gl}(d) \wedge \mathfrak{gl}(d)$ имеем следующую компонентную форму:

$$r = r^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2} T^{j_1}{}_{i_1} \wedge T^{j_2}{}_{i_2}\,. \tag{1.31}$$

Уравнение (1.19) тогда становится

$$\begin{aligned}\{L^{i_1}{}_{j_1}, L^{i_2}{}_{j_2}\} &= r^{i_1}{}_{k_1}{}^{i_2}{}_{j_2} L^{k_1}{}_{j_1} - L^{i_1}{}_{k_1} r^{k_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{j_2} - \\ &- r^{i_1}{}_{j_1}{}^{i_2}{}_{k_2} L^{k_2}{}_{j_2} + L^{i_2}{}_{k_2} r^{i_1}{}_{j_1}{}^{k_2}{}_{j_2}\,.\end{aligned} \tag{1.32}$$

Видим, что классическая r-матрица естественным образом имеет две пары индексов, каждая из которых действует на некотором линейном пространстве. Проиллюстрируем сказанное на знакомом примере гармонического осциллятора, матрицы L и M которого уже были представлены ранее. Классическую r-матрицу можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}r &= \frac{1}{q}\big(F \otimes E - E \otimes F\big) = \\ &= \frac{1}{q}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \frac{1}{q}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{1.33}$$

где F и E — образующие $\mathfrak{sl}(2)$. Для вывода соответствующей скобки Пуассона вычислим, с одной стороны,

$$[r, L \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes L] = -\omega(\sigma_3 \otimes \sigma_1 - \sigma_1 \otimes \sigma_3)\,, \tag{1.34}$$

и, с другой стороны,

$$\{L \otimes \mathbb{1}, \mathbb{1} \otimes L\} = \omega\{p, q\}\sigma_3 \otimes \sigma_1 + \omega\{q, p\}\sigma_1 \otimes \sigma_3\,. \tag{1.35}$$

Сравнивая их, имеем $\{q, p\} = 1$. Обратим внимание, что, поскольку матрица r (1.33) не решает CYBE (1.24), приведённый пример иллюстрирует наиболее общую картину, когда выполнение тождества Якоби (1.22) гарантируется (1.23).

1.3. Квантовое уравнение Янга – Бакстера

Для квантовой системы интегрируемость в основном означает то же, что и выше: существование бесконечного множества сохраняющихся зарядов Q_s, коммутирующих друг с другом. При исследовании квантовых систем в первую очередь интересно получение их полного спектра, что обычно просто для свободных теорий, но становится невероятно сложной задачей для взаимодействующих систем. Для интегрируемых квантовых моделей разработаны мощные методы получения спектра: алгебраический и координатный анзац Бете, термодинамический анзац Бете, спектральная кривая. Особое значение для настоящего обсуждения имеет подход термодинамического анзаца Бете, который позволяет вычислить спектр интегрируемой квантовой системы, используя данные рассеяния и уравнение Янга – Бакстера. Остановимся на последнем, отсылая читателя к обзорам [1 – 5] для более подробного описания других методов применительно к AdS/CFT интегрируемости и моделям спиновых цепочек.

Для процессов рассеяния интегрируемость квантовой системы означает отсутствие рождения частиц. Для теорий размерности $d > 2$ теорема Коулмана – Мандулы утверждает, что S-матрица тривиальна $S = 1$, если существует хотя бы один заряд, являющийся тензором второго или более высокого порядка. Напротив, в размерности $d = 1 + 1$ S-матрица остаётся нетривиальной, хотя и весьма ограниченной:

- отсутствие рождения частиц,

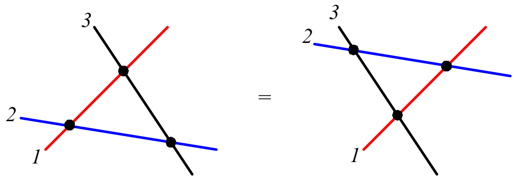

Рис. 1. Графическое представление квантового уравнения Янга–Бакстера, описывающего рассеяние трёх частиц. Уравнение утверждает, что S-матрица не зависит от взаимного расположения линий, в частности от положения чёрной линии (*3*) на рисунке.

• изначальный набор импульсов $\{p_i\}_{\text{in}} = \{p_i\}_{\text{out}}$ совпадает с конечным,

• рассеяние факторизуется.

Факторизованные S-матрицы как точные решения $1+1$-мерных квантовых теорий поля были впервые рассмотрены в работе [42], а затем использованы для развития метода термодинамического анзаца Бете в работе [43]. Свойство факторизации S-матрицы означает, что S-матрица из n частиц раскладывается в произведение S-матриц для всех пар частиц. В общем случае такую декомпозицию можно выполнить несколькими способами, все из которых должны быть эквивалентными, что приводит к некоторым условиям согласованности. Для рассеяния частиц 3 в 3 это можно проиллюстрировать рис. 1, где рассеяние красных, синих и чёрных частиц, помеченных цифрами *1*, *2* и *3* соответственно, можно разложить на парные взаимодействия двумя способами. Задав направление времени слева направо на рис. 1 и обозначив S-матрицу $R_{ij}(u)$ для частиц с метками i и j и взаимной быстротой u получаем следующее уравнение:

$$R_{12}(u-v)R_{13}(u)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u)R_{12}(u-v)\,. \tag{1.36}$$

Это квантовое уравнение Янга–Бакстера (qYBE), впервые введённое в статье [44] для решения проблемы собственных значений для системы N частиц с использованием алгебраического анзаца Бете и независимо в [45] для вычисления статистической суммы для определённой решёточной матричной модели. Подробнее см., например, [46, 47].

Предположим, что каждая частица, помимо быстрот, описывается линейным пространством V своих состояний, тогда R-матрицы $R_{ij} \in \operatorname{End}(V_i \otimes V_j)$ действуют на векторном пространстве состояния двух частиц, задавая взаимодействие. Самый известный пример — задать V как двумерное пространство состояний частицы со спином $\hbar/2$. Тогда R-матрица принимает значения в произведении групп $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Такие R-матрицы и их обобщение на $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ и квантовые группы нашли широкое применение в теории узлов и группах кос [48–50]. Для нас квантовое уравнение Янга–Бакстера будет актуально в двух аспектах:

• оно описывает рассеяние суперструнных состояний на фоне $\mathrm{AdS}_5 \times \mathbb{S}^5$,

• его квазиклассический предел воспроизводит классическое уравнения Янга–Бакстера, которое, как обсуждалось выше, связано с интегрируемыми деформациями.

Оставив первое за рамками настоящего обзора, остановимся на втором более подробно.

Во-первых, следует быть аккуратным с интерпретацией qYBE в терминах матриц, так как каждая R-матрица действует только в произведении двух векторных пространств и удобно определить оператор $\hat{R} \in \operatorname{End}(V \otimes V)$. Следовательно, $\hat{R}_{12}(u) \in \operatorname{End}(V^{(1)} \otimes V^{(2)})$ обеспечивает взаимодействие между частицами *1* и *2* с квантовыми состояниями, закодированными пространствами $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$, рассеиваемыми с взаимной быстротой u. Обратите внимание, что линейные пространства одинаковы: $V^{(1)} = V^{(2)}$, а индексы введены лишь для того, чтобы явно различать частицы. То же самое можно сделать, отслеживая место, на котором стоит оператор. В дальнейшем мы будем придерживаться первого соглашения. Можно записать

$$R_{12}(u) = \hat{R}_{12}(u) \otimes \mathbb{1}\,, \tag{1.37}$$

где $\mathbb{1}$ — тождественный оператор на V. В матричных обозначениях в качестве базиса на V выберем векторы $\{e_\alpha\} = \operatorname{bas} V$ и запишем

$$\begin{aligned} &R_{12}(u)(e_\alpha \otimes e_\beta \otimes e_\gamma) = R_{12}(u)_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\epsilon\phi} e_\delta \otimes e_\epsilon \otimes e_\phi\,,\\ &R_{12}(u)_{\alpha\beta\gamma}^{\delta\epsilon\phi} = R(u)_{\alpha\beta}^{\delta\epsilon}\delta_\gamma^\phi\,. \end{aligned} \tag{1.38}$$

В этих обозначениях уравнение (1.36) представляет собой уравнение на матрицу с четырьмя индексами $R(u)_{\alpha\beta}^{\delta\epsilon}$, зависящую от спектрального параметра u.

Обычно полное квантовое уравнение Янга–Бакстера очень сложно анализировать и решать, и приходится переходить к квазиклассическому пределу. Для этого сначала заметим, что $R(u) = \mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}$ тривиально решает qYBE и, следовательно, естественно раскладываться вокруг этой точки в пространстве решений

$$R_{12}(u) = \mathbb{1} + \hbar\, r_{12}(u)\,. \tag{1.39}$$

Здесь $\hbar$ — параметр разложения, а $r_{12}(u)$ строится по алгебре $\mathfrak{g}$ группы $G = \operatorname{End}(V)$. Подставляя это разложение в исходное уравнение, находим, что при порядках $\hbar^0$ и $\hbar^1$ все слагаемые сокращаются и уравнение выполняется тривиально. Следовательно, первое нетривиальное уравнение, встречающееся на уровне $\hbar^2$, имеет вид

$$\big[r_{12}(u-v), r_{13}(u)\big] + \big[r_{13}(u), r_{23}(v)\big] + \big[r_{12}(u-v), r_{23}(v)\big] = 0\,. \tag{1.40}$$

Здесь $[x,y]$ понимается как $[x,y] = x\cdot y - y\cdot x$, поэтому следует быть аккуратнее с определением $r_{12}(u-v)$. Действительно, поскольку $R_{12}(u) \in \operatorname{End}(V\otimes V\otimes V) \equiv G\times G\times\mathbb{1}$, естественно определить матрицу $r_{12}(u)$ как $r_{12}(u) \in \phi(\mathfrak{g})\otimes\phi(\mathfrak{g})\otimes\mathbf{1}$. Здесь

$$\phi : \mathfrak{g} \to A \tag{1.41}$$

обозначает отображение в ассоциативную алгебру A с единицей $\mathbf{1}$, определённое так, что выполняется

$$\phi(a)\phi(b) - \phi(b)\phi(a) = \phi\big([a,b]\big)\,, \tag{1.42}$$

где $[a,b]$ — скобка Ли в алгебре $\mathfrak{g}$. Следовательно, уравнение (1.40) понимается как уравнение на $A\otimes A\otimes A$, которое, однако, может быть самосогласованным образом ограничено на $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ и, следовательно, не зависит от выбора A [51]. В дальнейшем для определённости мы будем выбирать в роли алгебры A универсальную обёртывающую алгебру $A = U(\mathfrak{g})$ и опускать ϕ для ясности обозначений.

Решения классического уравнения Янга–Бакстера для r-матрицы с нетривиальным спектральным параметром могут генерироваться простым сдвигом заданного решения $r_{12}(u)$ при $r'_{12}(u) = r_{12}(u) + r_{12}$ (и аналогично для других пространств), где r_{12} должно удовлетворять постоянному классическому уравнению Янга – Бакстера [51]

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{13}, r_{23}] + [r_{12}, r_{23}] = 0\,. \tag{1.43}$$

В данной работе под CYBE мы всегда подразумеваем уравнение (1.43). Каждый элемент r_{12}, r_{23}, r_{13} здесь может быть разложен по базисным элементам алгебры $\{t_a\} = \operatorname{bas}\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} r_{12} &= r^{ab} t_a \otimes t_b \otimes \mathbf{1}\,, \\ r_{13} &= r^{ab} t_a \otimes \mathbf{1} \otimes t_b\,, \\ r_{23} &= r^{ab} \mathbf{1} \otimes t_a \otimes t_b\,. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Далее мы предполагаем $r^{ab} = -r^{ba}$. Подставляя разложение (1.44) в CYBE (1.43), получаем следующее:

$$r^{ab} r^{cd} \Big([t_a, t_c] \otimes t_b \otimes t_d + t_a \otimes t_c \otimes [t_b, t_d] + t_a \otimes [t_b, t_c] \otimes t_d \Big) = 0\,. \tag{1.45}$$

Заменяя $[t_a, t_b] = f_{ab}{}^c t_c$ и соответственно переобозначая индексы, получаем

$$e_{[a} \otimes e_b \otimes e_{c]} r^{ae} r^{bf} f_{ef}{}^c = 0\,, \tag{1.46}$$

что сводится к CYBE, полученному для деформаций супергравитации типа IIA/B:

$$r^{e[a} r^{b|f|} f_{ef}{}^{c]} = 0\,. \tag{1.47}$$

Как упоминалось выше, уравнение (1.47) действительно принадлежит только $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ внутри $A \otimes A \otimes A$ и не зависит от выбранной алгебры A и точной формы отображения. Чтобы подогреть любопытство, заметим, что то же самое неверно для уравнения тетраэдра, которое является прямым аналогом qYBE для рассеяния прямых струн. Более того, в этом случае не существует чётко определённого квазиклассического предела. Мы обсудим это подробнее в разделе 4.6.2.

1.4. Потоки, сохраняющие объём, и принцип наименьшего действия

Важным свойством гамильтоновой системы является сохранение фазового объёма при эволюции. Для заданной функции G гамильтониан H определяет поток, который в инфинитезимальной форме можно записать как

$$G \to G + \{H, G\}\,. \tag{1.48}$$

Рассмотрим фазовое распределение системы $\mathrm{d}w = \rho(p,q)\,\mathrm{d}^n p\,\mathrm{d}^n q$, где функция распределения $\rho(p,q)$ — вероятность нахождения системы в фазовом объёме $\mathrm{d}^n p\,\mathrm{d}^n q$ в точке (p,q). Уравнение Лиувилля утверждает, что функция распределения постоянна:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial q^i}\,\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\,\dot{p}_i = 0\,. \tag{1.49}$$

Эквивалентно мы можем записать это уравнение как уравнение эволюции для функции плотности: $\dot{\rho} = \{H, \rho\}$.

Покажем теперь, что для гамильтоновых систем фазовый объём сохраняется. Для этого определим фазовый вектор в произвольный момент времени t:

$$x_t = \big(p_1(t), \ldots, p_n(t), q^1(t), \ldots, q^n(t)\big)\,. \tag{1.50}$$

Этот вектор связан с вектором x_0 при $t = 0$ преобразованием координат в фазовом пространстве, якобиан которого имеет вид

$$J = \det \frac{\partial x_t^I}{\partial x_0^J} = \det M^I{}_J\,, \tag{1.51}$$

где $I = 1, \ldots, 2n$. Следовательно, сохранение фазового объёма при эволюции эквивалентно тому, что так определённый якобиан не зависит от времени. Чтобы увидеть это, вычисляем:

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = \operatorname{Tr}\left(M^{-1} \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \right) J = J\, \frac{\partial x_0^I}{\partial x_t^J}\, \frac{\partial \dot{x}_t^J}{\partial x_0^I} = J\, \frac{\partial \dot{x}_t^I}{\partial x_t^I}\,. \tag{1.52}$$

Для гамильтоновых систем

$$\frac{\partial \dot{x}_t^I}{\partial x_t^I} = -\frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0\,, \tag{1.53}$$

следовательно, поток сохраняет объём фазового пространства. Далее мы покажем, что то же самое верно для механических систем Намбу, т.е. определённых в терминах тройных скобок.

Для того чтобы определить действие системы, мы начнём с векторного поля $\tilde{L}$, которое соответствует гамильтонову эволюционному потоку:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = \tilde{L}(f)\,. \tag{1.54}$$

Векторное поле можно представить как $\tilde{L} = \partial_t + L$, а компоненты L как

$$L^p = -\frac{\partial H}{\partial q}\,, \quad L^q = \frac{\partial H}{\partial p}\,. \tag{1.55}$$

Такое векторное поле представляет собой поле силовых линий для напряжённости $\mathrm{d}\omega$, являющееся внешней производной от так называемой 1-формы Пуанкаре – Картана ω на фазовом пространстве, определяющем действие. Для $1+1$-мерной системы 1-форма ω может быть записана как

$$\omega = p\,\mathrm{d}q - H\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.56}$$

Чтобы продемонстрировать, что $\tilde{L}$ действительно задаёт силовые линии, т.е. $\imath_{\tilde{L}}(\mathrm{d}\omega) = 0$, запишем

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q - \frac{\partial H}{\partial p}\,\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}t - \frac{\partial H}{\partial q}\,\mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}t = \\ &= \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q - L^q\,\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}t + L^p\,\mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}t\,. \end{aligned} \tag{1.57}$$

1-форма ω определяет интегральный инвариант $\int_\gamma \omega$, который обычно называют действием системы. Это выражение инвариантно при различном выборе 1-цепей вдоль эволюционного потока системы. Рассмотрим 1-цепь c в фазовом пространстве, её образ в момент t при гамильтоновой эволюции задаётся отображением $g^t(c)$.

Тогда трубка фазовых траекторий задаётся 2-цепочкой

$$J^t c = \{g^\tau(c), 0 \leqslant \tau \leqslant t\}\,. \tag{1.58}$$

Проще говоря, берётся замкнутая кривая c в фазовом пространстве и перетаскивается вдоль гамильтонова потока от 0 до t. Учитывая теорему Стокса и тот факт, что $\imath_{\tilde{L}}\,\mathrm{d}\omega = 0$, имеем

$$\int_c \omega - \int_{g^t(c)} \omega = \int_{J^t(c)} \mathrm{d}\omega = 0\,, \tag{1.59}$$

где мы воспользовались тем, что $\partial(J^t(c)) = c - g^t(c)$. Тогда экстремум интеграла

$$A(\gamma) = \int_\gamma \omega = \int_\gamma p \wedge \mathrm{d}q - H\,\mathrm{d}t \tag{1.60}$$

даёт траектории системы (подробнее см. [52]). Интересно, что существует обобщение вышеизложенного для механики Намбу, принадлежащее Тахтаджану [53], которое можно свести к действию мембраны. Мы вернёмся к этому позже.

1.5. Интегрируемость в полевых теориях

Для теорий поля, в которых канонические переменные зависят от непрерывной переменной, понятие интегрируемости более сложное. Фазовое пространство таких моделей бесконечномерно, и для того чтобы говорить об интегрируемости по Лиувиллю, потребовался бы непрерывный набор интегралов движения. Для механической системы интегрируемость означает возможность перехода к переменным действие – угол, что позволяет явно интегрировать уравнения движения. Для теории поля аналогично речь пойдёт о точной разрешимости уравнений и методах, позволяющих строить такие решения. Для квантовых систем обычно говорят о точном спектре операторов в теории, точном энергетическом спектре системы, точной S-матрице, которая для интегрируемых систем обычно тривиальна. Перечислим несколько известных интегрируемых теорий поля.

• Уравнения Кортевега – де Фриза (KdV), которые являются математической моделью волн на мелкой воде [54]:

$$\dot{h} = 6hh' - h'''\,. \tag{1.61}$$

• Нелинейное уравнение Шрёдингера, которое используется для описания распространения света в нелинейной среде [55]:

$$\mathrm{i}\dot{\psi} = -\psi'' + 2\kappa|\psi|^2\psi\,. \tag{1.62}$$

• Уравнение синус-Гордона, которое используется в теории кристаллических дислокаций, блоховского движения, магнитного потока в эффекте Джозефсона [56]:

$$\ddot{\phi} - \phi'' + m^2 \sin\phi = 0\,. \tag{1.63}$$

• Главная киральная модель на компактном групповом многообразии, являющаяся для нас простейшей моделью струны. Действие для неё имеет вид

$$S = \int \mathrm{Tr}\left[(g^{-1}\,\mathrm{d}g) \wedge *(g^{-1}\,\mathrm{d}g)\right]. \tag{1.64}$$

Интегрируемые полевые уравнения объединяет то свойство, что рассеяние их солитонных решений факторизуемо, т.е. после рассеяния двух и более солитонов их форма восстанавливается. Это свойство описывается уравнением Янга – Бакстера, поэтому формализм Лакса – Захарова – Шабата может быть воспроизведён для теорий поля с соответствующими изменениями.

Двумерная теория поля называется интегрируемой, если её уравнения можно записать в виде условия плоской связности на так называемую связность Лакса $A = A_\alpha\,\mathrm{d}\sigma^\alpha$:

$$\mathrm{d}A + A \wedge A = 0\,. \tag{1.65}$$

В общем случае связность может зависеть от дополнительного (спектрального) параметра $u \in \mathbb{C}$. Например, компоненты связности Лакса для уравнений KdV принимают вид

$$\begin{aligned} A_t &= \begin{bmatrix} -h' & -4u^{-1} - 2h \\ 4u^{-2} - 2u^{-1}h + h'' - 2h^2 & h' \end{bmatrix}, \\ A_x &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ u^{-1} - h & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Для построения пары Лакса и получения бесконечного набора сохраняющихся токов необходимо ввести переменные, зависящие только от времени t, что возможно благодаря условию плоской связности. Действительно, это условие гарантирует, что оператор параллельного переноса

$$U(u; \sigma_1; \sigma_0) = \mathrm{Pexp}\left[\int_{t_0,\,x_0}^{t_1,\,x_1} A(u)\right], \tag{1.67}$$

определённый как линия Вильсона, не зависит от непрерывных вариаций пути интегрирования. Концы интеграла можно отождествить с границами системы, например, с концами спиновой цепочки. Пара Лакса, построенная из таким образом определённого оператора параллельного переноса, в общем случае зависит от граничных условий. Простейшим случаем являются периодические граничные условия $\sigma^1 \sim \sigma^1 + L$, когда пара Лакса определяется как

$$\begin{aligned} T(u) &= \mathrm{Pexp}\left[\oint A(u)\right], \\ M(u) &= A_t(u)\Big|_{\sigma^1 = 0}\,. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Легко видеть, что матрицы пары удовлетворяют в точности искомым уравнениям:

$$\dot{T}(u) = \left[T(u), M(u)\right]. \tag{1.69}$$

Следовательно, непрерывное семейство сохраняющихся зарядов по-прежнему определяется как

$$F_k(u) = \mathrm{Tr}\ T(u)^k\,. \tag{1.70}$$

Обратите внимание, что, как и раньше, классическая r-матрица может быть использована для определения канонической скобки.

В дальнейшем нас будет интересовать обобщение этих структур интегрируемости на трёхмерные теории, мотивированное определённым сходством между классическим уравнением Янга – Бакстера и тем, что мы называем обобщённым уравнением Янга – Бакстера. Нетрудно предположить, что в этом случае 1-форма связности Лакса A должна быть заменена либо 2-формой связности (связность на джербе), либо связностью на пространстве петель, что фактически эквивалентно заданному отображению трансгрессии. Оба этих пути могут быть в определённой степени обоснованы с точки зрения струнной/М-теории, однако в любом случае совершенно ясно, что механика, стоящая за этими структурами, должна определяться скобками Намбу. Прежде чем перейти к обсуждению механики Намбу и степени, до которой могут быть обобщены интегрируемые структуры, давайте обсудим другое представление интегрируемых теорий поля, а именно интегрируемые иерархии Лакса.

Заметим, что для того, чтобы иметь интегрируемую систему более высокой размерности, не обязательно требуется обращение к механике Намбу с более общей скобкой. Примером $1+2$-мерной интегрируемой системы является так называемое уравнение Кадомцева – Петвиашвили (КП)

$$\left(-4\dot{u}+u_{xxx}+3uu_x\right)_x+3u_{yy}=0\,, \tag{1.71}$$

где нижний индекс обозначает производную. Это уравнение описывает двумерное обобщение модели волн на мелкой воде KdV. Оказывается, что оно принадлежит более широкому (фактически бесконечному) семейству интегрируемых уравнений, каждое из которых определяется своим гамильтоновым потоком. Такая система коммутирующих интегрируемых гамильтоновых потоков называется интегрируемой иерархией (более подробный обзор см. в [57, 58]). На практике интегрируемые иерархии представляют собой высокосимметричные бесконечные наборы нелинейных эволюционных уравнений типа Лакса для бесконечного числа функций u_i от бесконечного числа переменных t_n, $n=1,2,\ldots$ Уравнения Лакса имеют следующий вид:

$$\frac{\partial L}{\partial t_m}=[B_m,L]\,,\quad m=1,2,\ldots, \tag{1.72}$$

где L и B_m — некоторые псевдодифференциальные операторы, зависящие от переменных u_i. Уравнения Лакса (1.72) можно записать в виде условия нулевой кривизны

$$\frac{\partial B_m}{\partial t_n}-\frac{\partial B_n}{\partial t_m}+[B_m,B_n]=0\,, \tag{1.73}$$

которое обычно называют уравнением Захарова – Шабата.

Проиллюстрируем формализм на примере иерархии КП. В этом случае

$$\begin{aligned} &L=\partial+\sum_{i=1}^{\infty}u_i\partial^{-i}=\partial+u_1\partial^{-1}+u_2\partial^{-2}+\ldots,\\ &B_n=(L^n)_{\geqslant 0}\,, \end{aligned} \tag{1.74}$$

где $\partial=\partial/\partial x$ — дифференциальный оператор, ∂^{-1} — формальное интегрирование, индекс $\geqslant 0$ в определении B_n означает, что только неотрицательные степени ∂ должны быть сохранены. Рассмотрим подробнее первые уровни иерархии. При $n=1$ имеем $B_1=\partial$ и

$$[B_1,L]=\sum_{i=1}^{\infty}\partial_x u_i\,\partial^{-i}\,. \tag{1.75}$$

Отсюда уравнением является просто $\partial u_i/\partial t_1=\partial_x u_i$, что означает $t_1=x$. Уравнение Захарова – Шабата для $m=1$ становится

$$\partial_x B_n=[\partial,B_n]\,, \tag{1.76}$$

что соответствует просто действию оператора импульса.

Само уравнение КП может быть получено из уравнения Захарова – Шабата для рассматриваемой иерархии при $m=2, n=3$. Для этого мы вычисляем

$$\begin{aligned} &B_2=\partial^2+2u_1\,,\\ &B_3=\partial^3+3u_1'+3u_1\partial+3u_2\,, \end{aligned} \tag{1.77}$$

где штрих означает производную по отношению к переменной x. Уравнение Захарова – Шабата имеет члены, пропорциональные ∂^0 и ∂^1, что приводит к двум уравнениям, которые, обозначая $y=t_2$, $t=t_3$, $u=2u_1$, $v=u_2$, можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\dot{u}_x-\frac{3}{2}\,u_{xxy}-3v_{yx}+\frac{1}{2}\,u_{xxxx}+3v_{xxx}-\frac{3}{2}(uu_x)_x=0\,,\\ &-\frac{3}{4}\,u_y+3v_x+\frac{3}{4}\,u_{xx}=0\,. \end{aligned} \tag{1.78}$$

Теперь, взяв производные ∂_y и ∂_{xx} второго уравнения (1.78), перепишем первое уравнение в следующем виде:

$$\dot{u}_x-\frac{3}{4}\,u_{yy}-\frac{1}{4}\,u_{xxxx}-\frac{3}{2}\,(uu_x)_x=0\,. \tag{1.79}$$

Получили искомое уравнение КП.

Аналогично можно построить интегрируемую иерархию для уравнения KdV, частью которой оно является. Для этого определим

$$\begin{aligned} &L=\partial^n+u_{n-2}\partial^{n-2}+\ldots+u_1\partial+u_0\,,\\ &B_m=(L^{m/n})_{\geqslant 0}\,. \end{aligned} \tag{1.80}$$

При $n=2$ на уровне $m=3$ восстанавливается уравнение KdV, при $n=3$ на уровне $m=2$ восстанавливается так называемое уравнение Буссинеска

$$3\ddot{u}=-u'''-4(uu')'\,. \tag{1.81}$$

В определённой степени эти структуры можно обобщить и на случай с более чем двумя операторами Лакса, что является одним из естественных способов обобщения подхода Лакса – Захарова – Шабата на системы Намбу. В частности, уравнение КП становится частью иерархии, построенной с использованием троек Лакса, однако оно оказывается не вполне интегрируемым.

2. Механика Намбу

Гамильтонова механика, описанная в терминах скобок Пуассона в предыдущих разделах, является частным случаем более общей механики Намбу. Динамика системы Намбу определяется в терминах потока, порождённого набором из $n-1$ гамильтонианов, соответственно скобка Пуассона заменяется n-скобкой Намбу. В настоящем обзоре нас интересуют алгебраические структуры, относящиеся к М-теории, которые представляются 3-скобками, когда речь идёт о М2-бранах, и 5-скобками, когда речь идёт о М5-бранах. История использования высших алгебраических структур, таких как n-алгебры, для описания динамики мембран берёт начало с работы Басу и Харви [59], где было предложено уравнение, описывающее N М2-бран, заканчивающихся на М5-бранах, и обобщающее уравнение Нама, описывающее систему из D1-бран, оканчивающихся на D3-бранах. В теории струн такая система из k D1-бран, оканчивающихся на D3-бранах, с точки зрения 4-мерной теории на мировом объёме проявляется в виде бесконечно длинных шипов [60, 61]. С другой стороны, эта же система в виде набора из k монополей удовлетворяет уравнению Богомольного, которое оказывается уравнением Нама для пространства модулей монополей в калибровочной теории [62, 63]. Обобщение, предложенное Басу и Харви, включает 3-скобку Намбу[3] вместо обычной 2-скобки Ли в уравнении Нама. На основе этих результатов в [64, 65] была предложена теория на мировом объёме стопки М2-бран. Такая теория подобна теории Черна – Саймонса и основана на 3-скобке Намбу. Хотя эта теория, известная как BLG, позже была переписана в форме более традиционной калибровочной теории в [66], которая не включает 3-алгебры, ясно, что теория динамики бран должна быть сформулирована в терминах такого рода высших алгебраических структур. Мы вернёмся к более подробному обсуждению этих структур далее в разделе 4, здесь же мы продолжим обзор механики Намбу и подходов к обобщению структур интегрируемости для таких систем.

2.1. Структура Намбу

Обобщение механики Пуассона на трёхмерное фазовое пространство с эволюцией, определяемой двумя гамильтонианами, было предложено Намбу в [67]. Позже подробное исследование геометрии механической системы Намбу было проведено Тахтаджаном в работе [53]. В частности, оказывается, что системы Намбу гораздо более жёсткие, чем системы Пуассона, что в терминах М-теоретических степеней свободы проявляется в том, что теория BLG описывает стопку из двух М2-бран, а не из произвольного их числа.

Динамика системы Намбу определяется следующим уравнением движения:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{H_1, \ldots, H_{n-1}, f\}\,, \tag{2.1}$$

где $H_1, \ldots, H_{n-1}$ обозначают гамильтонианы системы, а $\{\ldots\}$ обозначает n-скобку, удовлетворяющую фундаментальным тождествам Намбу:

$$\begin{aligned}
&\big\{\{f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n\}, f_{n+1}, \ldots, f_{2n-1}\big\} + \\
&\quad + \big\{f_n, \{f_1, \ldots, f_{n-1}, f_{n+1}\}, f_{n+2}, \ldots, f_{2n-1}\big\} + \ldots + \\
&\quad + \big\{f_n, \ldots, f_{2n-2}, \{f_1, \ldots, f_{2n-1}\}\big\} = \\
&\quad = \big\{f_1, \ldots, f_{n-1}, \{f_n \ldots f_{2n-1}\}\big\}\,.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

[3] Строго говоря, 4-скобку, но один элемент всегда фиксирован.

Это гарантирует, что для каждой из n функций f_i, удовлетворяющих уравнению Намбу, скобка $\{f_1, \ldots, f_n\}$ также удовлетворяет тому же уравнению. Как и в случае механики Пуассона, скобка Намбу может быть реализована в терминах n-вектора $\Omega \in \Gamma(\wedge^n TM)$, где M — конфигурационное пространство:

$$\Omega(\mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_n) = \{f_1, \ldots, f_n\}\,. \tag{2.3}$$

В координатном виде:

$$\Omega^{m_1 \ldots m_n}\, \partial_{m_1} f_1 \ldots \partial_{m_n} f_n = \{f_1, \ldots, f_n\}\,. \tag{2.4}$$

Многообразие M, глобально снабжённое таким n-вектором, называется многообразием Намбу – Пуассона, а Ω называется структурой Намбу – Пуассона. Эквивалентно, говорят, что M является многообразием Намбу – Пуассона, если $\mathbb{R}$-полилинейное отображение

$$\{\ldots\} : \big[C^\infty(M)\big]^{\otimes n} \to C^\infty(M) \tag{2.5}$$

определено на алгебре (бесконечно дифференцируемых) функций $C^\infty(M)$. Для заданных $n-1$ гамильтонианов $H_1, \ldots, H_{n-1}$ n-скобка определяет эволюцию функции f, или так называемый намбу-гамильтонов поток g^t.

Здесь проявляется ключевое различие между структурами Намбу и Пуассона на многообразии, заключающееся в гораздо более сильном наборе ограничений, наложенных на n-вектор фундаментальным тождеством. Действуя дважды n-вектором Ω и накладывая фундаментальное тождество, получаем ограничения, следующие из слагаемых со вторыми и первыми производными функций по отдельности. Первое даёт алгебраическое ограничение

$$N_{MN} + P(N_{MN}) = 0\,, \tag{2.6}$$

где мультииндексы $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ и $N = \{n_1, \ldots n_n\}$, тензор N_{MN} определён как

$$\begin{aligned}
N_{m_1 \ldots m_n, n_1 \ldots n_n} &= \Omega^{m_1 \ldots m_n} \Omega^{n_1 \ldots n_n} + \Omega^{n_n m_1 m_3 \ldots m_n} \Omega^{n_1 \ldots n_{n-1} m_2} + \ldots + \\
&+ \Omega^{n_n m_2 \ldots m_{n-1} m_1} \Omega^{n_1 \ldots n_{n-1} m_n} - \Omega^{n_n m_2 \ldots m_n} \Omega^{n_1 \ldots n_{n-1} m_1}\,,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

а P меняет местами первый и $n+1$-й индексы, т.е. m_1 и n_1. Немедленно видно, что при $n=2$ условие выполняется тождественно, а при $n \geqslant 3$ оно нетривиально.

Условие, вытекающее из членов, линейных по производным функций, имеет вид

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} \Big(&\Omega^{l m_2 \ldots m_n} \partial_l \Omega^{n_1 \ldots n_n} + \Omega^{n_n l m_3 \ldots m_n} \partial_l \Omega^{n_1 \ldots n_{n-1} m_2} + \ldots + \\
&+ \Omega^{n_n m_2 \ldots m_{n-1} l}\, \partial_l \Omega^{n_1 \ldots n_{n-1} m_n} \Big) = 0\,.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Для $n=2$ оно сводится к

$$\Omega^{l[m} \partial_l \Omega^{nk]} = 0\,. \tag{2.9}$$

Отсюда заключаем, что, в отличие от многообразий Пуассона, далеко не любой полностью антисимметричный глобально определённый тензор $\Omega^{m_1 \ldots m_n}$ на многообразии может задавать структуру Намбу. Помимо обычных дифференциальных ограничений, необходимо удовлетворить алгебраическим ограничениям.

Наблюдаемая $F \in C^\infty(M)$ называется интегралом движения, если

$$\{H_1, \ldots, H_{n-1}, F\} = 0\,. \tag{2.10}$$

Первые $n-1$ интегралов движения являются гамильтонианами системы, при этом фундаментальное тождество гарантирует, что скобка Намбу интегралов движения снова является интегралом движения. Наивно можно обобщить понятие интегрируемости по Лиувиллю на системы Намбу, определяя интегрируемую систему Намбу как имеющую n интегралов движения, каждый из которых находится в инволюции относительно скобки Намбу. Однако аналогия не заходит дальше этого, поскольку неясно, как можно ввести переменные действие–угол для полного интегрирования уравнений движения. То же верно и для наивного обобщения доказательства того, что поток Намбу сохраняет объём фазового пространства, хотя для некоторых случаев это можно показать явно.

2.2. Примеры систем Намбу

Хотя конструкция механики Намбу может показаться довольно экзотической, она описывает механические системы, многие из которых знакомы и даже интегрируемы в обычном смысле. В качестве первого примера рассмотрим n-мерный гармонический осциллятор с гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(p_i^2+x_i^2)\,. \tag{2.11}$$

Согласно [68] эту систему можно записать как систему Намбу, используя другие интегралы движения в качестве дополнительных гамильтонианов. Рассмотрим, например, случай $n=2$, т.е. гармонический осциллятор в двух измерениях. Выберем следующий набор интегралов:

$$\begin{aligned} H_1&=\frac{1}{2}\,(p_1^2+x_1^2)\,,\\ H_2&=\frac{1}{2}\,(p_2^2+x_2^2)\,,\\ H_3&=x_1p_2-x_2p_1\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Скобка Намбу, описывающая систему, может быть выбрана в виде

$$\{H_1,H_2,H_3,f\}=\frac{1}{p_1p_2+x_1x_2}\,\frac{\partial(H_1,H_2,H_3,f)}{\partial(p_1,p_2,x_1,x_2)}\,. \tag{2.13}$$

Простая проверка показывает, что приведённое выше описание для этой системы воспроизводит уравнения движения двумерного осциллятора, а скобка удовлетворяет всем необходимым условиям. Эта система интегрируема в обычном смысле.

Рассмотрим теперь пример, представленный Намбу в оригинальной статье, описывающий динамику вращения твёрдого тела с главными осями инерции I_i и угловыми моментами L_i, где $i=1,2,3$. Эту систему обычно называют асимметричным волчком Эйлера. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L_1}{\mathrm{d}t}&=\frac{I_3-I_2}{I_2I_3}\,L_2L_3\,,\\ \frac{\mathrm{d}L_2}{\mathrm{d}t}&=\frac{I_1-I_3}{I_1I_3}\,L_1L_3\,,\\ \frac{\mathrm{d}L_3}{\mathrm{d}t}&=\frac{I_2-I_1}{I_1I_2}\,L_1L_2\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Их можно записать в терминах уравнений Намбу для системы со следующими двумя гамильтонианами:

$$H_1=\frac{L_1^2}{2I_1}+\frac{L_2^2}{2I_2}+\frac{L_3^2}{2I_3}\,,\quad H_2=\frac{1}{2}\left(L_1^2+L_2^2+L_3^2\right). \tag{2.15}$$

Это полная энергия и полный импульс волчка, а уравнения движения тогда имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}L_i}{\mathrm{d}t}=\epsilon^{ijk}\partial_jH_1\,\partial_kH_2\,, \tag{2.16}$$

где $\partial_i=\partial/\partial L_i$. Отсюда следует такое определение скобки Намбу:

$$\{H_1,H_2,f\}=\epsilon^{ijk}\partial_iH_1\,\partial_jH_2\,\partial_kf\,, \tag{2.17}$$

что является наиболее естественным выбором для трёхмерной системы.

Уравнения движения для асимметричного волчка Эйлера имеют SU(2)-симметрию и известны также под другим названием — система Нама, когда возникают в теории статических монополей. Как мы обсудим в следующих разделах, такие уравнения естественным образом появляются при описании бран, оканчивающихся на бранах, в терминах шипообразных монополей на мировом объёме. Их обобщение, известное как уравнение Басу–Харви, лежит в основе так называемой теории BLG, описывающей динамику двух M2-бран [64, 65]. Система Нама обычно записывается в виде следующей системы уравнений движения:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2x_3\,,\quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_1x_3\,,\quad \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=x_1x_2\,, \tag{2.18}$$

которая может быть переписана в форме Намбу, если выбрать $H_1=x_1^2-x_2^2$, $H_2=x_1^2-x_3^2$. Эта система также интегрируема в обычном смысле.

Принцип наименьшего действия можно обобщить на механику Намбу, переходя к действию, предположительно описывающему движение открытых границ мембраны. Вслед за Тахтаджаном [53] определим

$$\omega_2=x^1\,\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3-H_1\,\mathrm{d}H_2\wedge\mathrm{d}t\,, \tag{2.19}$$

интегральную инвариантную 2-форму Пуанкаре–Картана для механики Намбу на фазовом пространстве $\tilde{X}$, параметризованном координатами $\{x^1,x^2,x^3,t\}$. Теперь мы будем следовать тем же шагам, что и в разделе 1.4, где было построено инвариантное действие для системы Пуассона. Определим векторное поле $\tilde{L}=\partial_t+L$ с помощью

$$L=L^i\partial_i\,,\quad L^i=\frac{1}{2}\,\epsilon^{ijk}\,\frac{\partial(H_1,H_2)}{\partial(x^j,x^k)}\,. \tag{2.20}$$

Уравнения Намбу тогда просто становятся $\dot{f}=\tilde{L}(f)$. Векторное поле $\tilde{L}$ задаёт "силовые линии" 3-формы $\mathrm{d}\omega_2$, т.е. выполняется условие $\iota_{\tilde{L}}\,\mathrm{d}\omega_2=0$, которое просто следует из явного выражения для производной:

$$\mathrm{d}\omega_2=\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3-\mathrm{d}H_1\wedge\mathrm{d}H_2\wedge\mathrm{d}t\,. \tag{2.21}$$

Теперь для заданной 2-цепи c в $\tilde{X}$ обозначим $g^t(c)$ её намбу-гамильтонов фазовый поток, тогда трубка фазовых траекторий будет иметь вид $J^tc=\{g^\tau(c),0\leqslant\tau\leqslant t\}$.

Наконец, поскольку $\partial J^t c = c - g^t(c)$ и $\iota_{\tilde{L}}\, \mathrm{d}\omega_2 = 0$, имеем

$$\int_c \omega_2 - \int_{g^t(c)} \omega_2 = \int_{J^t c} \mathrm{d}\omega_2 = 0\,, \tag{2.22}$$

что в принципе демонстрирует инвариантность проинтегрированной 2-формы. Поэтому мы называем действием A следующий интеграл:

$$A[c] = \int_c \omega_2 = \int_c x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 - H_1 \wedge \mathrm{d}H_2 \wedge \mathrm{d}t\,. \tag{2.23}$$

Первый член в действии Тахтаджана (2.23) имеет в точности форму члена Весса – Зумино в действии для M2-браны, оканчивающейся на M5-бране. Записывая действие для M2-браны в форме Намбу – Гото и отбрасывая все возможные калибровочные поля мирового объёма, мы имеем

$$S_{\mathrm{M2}} = \int_\Sigma \mathrm{d}^3\xi \, \det(-G) + \int_\Sigma C_3\,, \tag{2.24}$$

где G обозначает индуцированную на мировом объёме метрику, а $C_3 = C_{ijk}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k$ обозначает 3-форму в объемлющем пространстве. Предполагая, что член Весса – Зумино доминирует и что 3-форма медленно меняется вдоль границы $\partial\Sigma$ M2-браны, получим для граничного действия

$$S_{\partial\mathrm{M2}} \propto C_{123} \int_{\partial\Sigma} x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3\,, \tag{2.25}$$

что действительно совпадает с первым членом в выражении (2.23). Это даёт ещё одно свидетельство того, что механика Намбу со всеми её структурами должна иметь отношение к динамике мембран в M-теории. Более подробное обсуждение описанного вкратце сюжета можно найти в работе [69]. Мы вернёмся к описанию мембранной динамики в следующих разделах.

2.3. Пара Лакса и обобщённое уравнение Янга – Бакстера

В разделе 2.2 мы видели, что некоторые интегрируемые в обычном смысле динамические системы обладают структурой Намбу. Естественно ожидать, что структуры интегрируемости, такие как пара Лакса, могут быть переформулированы в терминах скобок Намбу, давая, вероятно, критерий трёхмерной интегрируемости. Насколько нам известно, программа построения интегрируемых структур для динамических систем Намбу не завершена, по крайней мере, до того уровня понимания, который мы имеем для пуассоновых систем. Тем не менее определённый прогресс был достигнут. Основная цель этого обзора состоит в том, чтобы собрать наблюдения, которые дают намёки на интегрируемость в теории мембран или, в более общем смысле, интегрируемость трёхмерных систем. Начнём тогда с системы Намбу с гамильтонианами H_1 и H_2 и уравнениями движения, заданными формулой

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{H_1, H_2, f\}\,, \tag{2.26}$$

и попытаемся обобщить конструкцию пары Лакса. Самой первой естественной попыткой было бы ввести тройную скобку Намбу и переписать всё в терминах тройки Лакса,

$$\dot{L} = [L, M, N]\,, \tag{2.27}$$

для некоторым образом определённой скобки Намбу $[\,,\,,]$, что действительно является полезной конструкцией для определения иерархий Намбу. Мы обсудим их чуть позже, поскольку целесообразно начать с другого обобщения, связь которого с M-теорией более понятна.

Рассмотрим пару Лакса, т.е. пару матриц $L, M \in \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ — некоторая алгебра, такую, что

$$\dot{L} = [L, M]\,. \tag{2.28}$$

Для заданного тензора $\rho_{123} \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ определим 3-скобку

$$\{L_1, L_2, L_3\} = [\rho_{123}, L_1] + [\rho_{123}, L_2] + [\rho_{123}, L_3]\,, \tag{2.29}$$

где мы обозначили

$$L_1 = L \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}\,, \quad L_2 = \mathbb{1} \otimes L \otimes \mathbb{1}\,, \quad L_3 = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes L\,. \tag{2.30}$$

Потребуем выполнение фундаментального тождества для так определённой 3-скобки, другими словами потребуем, чтобы она задавала структуру Намбу. Тогда ρ_{123} будет ограничена некоторым условием, подобным классическому уравнению Янга – Бакстера. Пусть теперь $\{T_a\} = \operatorname{bas}\mathfrak{g}$ — базис алгебры, $f_{ab}{}^c$ — её структурные константы, а $\rho_{123} = \rho^{abc} T_a \wedge T_b \wedge T_c$. Тогда условие, известное в литературе как обобщённое уравнение Янга – Бакстера, можно записать в компонентной форме следующим образом:

$$\rho^{a_1[a_2|a_6|}\rho^{a_3a_4|a_5|}f_{a_5a_6}{}^{a_7]} - \rho^{a_2[a_1|a_6|}\rho^{a_3a_4|a_5|}f_{a_5a_6}{}^{a_7]} = 0\,. \tag{2.31}$$

При таких условиях 3-скобка определяет систему Намбу, интегралы движения которой могут быть выражены в обычной форме $F_k = \operatorname{Tr} L^k$. Легко видеть, что они находятся в инволюции по отношению к так определённой скобке Намбу:

$$\{F_i, F_j, F_k\} = 0\,. \tag{2.32}$$

Если бы существовала процедура, позволяющая ввести переменные действие – угол и полностью решить уравнения движения с помощью этих интегралов движения, то можно было бы сказать, что так построенная система является интегрируемой. Однако нам неизвестно, существуют ли такие конструкции для систем Намбу.

Уравнения (2.31) представляют интерес в другом контексте: они впервые были получены при исследовании U-дуальностей M-теории в [37, 38] (и ранее в [34] в виде условия обращения в нуль R-флакса). А именно известно, что уравнения 11-мерной супергравитации инвариантны относительно множества преобразований определённого вида, называемых намбу-лиевой U-дуальностью, основная алгебраическая структура которых формулируется в терминах так называемых исключительных алгебр Дринфельда. Определённое подмножество таких обобщённых U-дуальностей (так называемые деформации) можно параметризовать тензором ρ^{abc}, который имеет в точности тот же смысл, что и выше. Условием того, что так деформированное решение супергравитации всё ещё удовлетворяет уравнениям 11d-супергравитации, является в точности уравнение (2.31). Мы вернёмся к этому вопросу позже, здесь же важно отметить, что описываемые структуры в основном являются обобщением подобных структур в теории струн, подчиняющихся обычному классическому уравнению Янга – Бакстера (см. заключительную главу в работе [38]). Важным наблюдением здесь является то, что деформации, параметризованные матрицей r^{ab}, удовлетворяющей классическому уравнению Янга – Бакстера, сохраняют интегрируемость струнной сигма-модели. Таким образом, видим, что исходя из различных явлений, связанных с интегрируемостью, и обобщая их более или менее единым образом, мы приходим к одному и тому же уравнению (2.31), что даёт повод к дальнейшим спекуляциям. Мы дойдём до этого в разделе 4.6.

2.4. Тройка Лакса и потоки, сохраняющие объём

Как упоминалось в разделе 2.3, более простым обобщением конструкции Лакса на системы Намбу является введение тройки (четвёрки, пятёрки и т.д.) Лакса. Удобно продолжить построение интегрируемых иерархий на основе тройки Лакса и соответственно 3-скобки Намбу. Как и в рассмотренных ранее явных примерах, мы обнаружим, что знакомые системы, в данном случае иерархия КП, могут быть сформулированы в терминах таких обобщённых структур. Подход, которому мы будем следовать, был предложен Гухой в работе [70] и применён в дальнейшем к различным примерам в работах [71, 72]. Идея состоит в том, чтобы обобщить метод [73, 74], разработанный для изучения сохраняющих площадь потоков, связанных с уравнением КП. В свою очередь, такой подход возник из изучения самодуальных уравнений Эйнштейна. Кратко рассмотренные ниже обобщённые потоки [70] интегрируемы в том же смысле, что и потоки, индуцированные группой SDiff(2) [73, 74], т.е. в смысле нелинейного гравитона.

Рассмотрим тройку обобщённых операторов Лакса L, M, N, представляющих собой ряды Лорана по спектральному параметру λ с коэффициентами, являющимися функциями некоторых переменных p, q. По определению сохраняющая объём интегрируемая иерархия задаётся уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t_n} &= [B_{1n}, B_{2n}, L]\,, \\ \frac{\partial M}{\partial t_n} &= [B_{1n}, B_{2n}, M]\,, \\ \frac{\partial N}{\partial t_n} &= [B_{1n}, B_{2n}, N] \end{aligned} \tag{2.33}$$

с дополнительным условием на инволюцию $[L, M, N] = 0$, обеспечивающим сохранение объёма. Здесь $[\,,\,,]$ — тройная скобка Намбу, удовлетворяющая фундаментальному тождеству. Как и в случае обычных интегрируемых иерархий, мы ограничиваем операторы B_{1n} и B_{2n} только положительными значениями L, M:

$$B_{1n} = (L^n)\Big|_{n \geqslant 0}\,, \quad B_{2n} = (M^n)\Big|_{n \geqslant 0}\,. \tag{2.34}$$

Условие того, что потоки коммутируют, сводится к аналогу уравнения Захарова – Шабата, которое имеет вид

$$\begin{aligned} &[\partial_m B_{1n}, B_{2n}, \bullet] - [\partial_n B_{1m}, B_{2m}, \bullet] + [B_{1n}, \partial_m B_{2n}, \bullet] - \\ &\quad - [B_{1m}, \partial_n B_{2m}, \bullet] = \big[[B_{1n}, B_{2n}, B_{2m}], B_{2m}, \bullet\big] - \\ &\quad - \big[[B_{1n}, B_{2n}, B_{1m}], B_{2m}, \bullet\big]\,. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Важным замечанием здесь является то, что для сохраняющих площадь потоков из SDiff(2) уравнение (2.35) является просто условием нулевой кривизны. То же самое мы уже наблюдали для пуассоновых интегрируемых иерархий, где уравнение Захарова – Шабата содержало условие нулевой кривизны для 1-формы связности Лакса. Следовательно, можно было бы ожидать, что уравнение (2.35) содержит трёхмерный аналог условия нулевой кривизны некоторого аналога связности Лакса, заданного 2-формой.

С геометрической точки зрения самодуальность соответствует риччи-плоской кэлеровой геометрии, а следовательно, потоки SDiff(2) естественным образом выражаются в терминах кэлеровоподобной 2-формы. Здесь же аналогом будет 3-форма

$$\begin{aligned} \Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{d}B_{1n} \wedge \mathrm{d}B_{2n} \wedge \mathrm{d}t_n &= \mathrm{d}\lambda \wedge \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{d}B_{1n} \wedge \mathrm{d}B_{2n} \wedge \mathrm{d}t_n\,, \end{aligned} \tag{2.36}$$

где мы использовали следующие обозначения: $t_1 = \lambda$, $B_{11} = p$, $B_{21} = q$. Учитывая уравнения иерархии (2.33), 3-форма может быть переписана в следующем простом виде:

$$\Omega = \mathrm{d}L \wedge \mathrm{d}M \wedge \mathrm{d}N\,. \tag{2.37}$$

Можно убедиться, что 3-форма Ω замкнута:

$$\mathrm{d}\left(M \wedge \mathrm{d}L \wedge \mathrm{d}N + \sum_{n=1}^{\infty} B_{1n} \wedge \mathrm{d}B_{2n} \wedge \mathrm{d}t_n\right) = 0\,. \tag{2.38}$$

Следовательно, выражение в скобках, по крайней мере локально, можно записать в виде точной формы

$$\mathrm{d}Q = M \wedge \,\mathrm{d}L \wedge \,\mathrm{d}N + \sum_{n=1}^{\infty} B_{1n} \wedge \mathrm{d}B_{2n} \wedge \mathrm{d}t_n\,, \tag{2.39}$$

которая является аналогом потенциала Кричевера, т.е. содержит действие.

Рассмотрим теперь пример иерархии, порождённой сохраняющими объём уравнениями на тройку Лакса. Здесь мы следуем работе [72], где иерархия КП впервые была описана в терминах троек Лакса. Иерархия определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t_{mn}} = [B_m, B_n, L]\,, \\ &L = \partial + \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t)\partial^{-i-1}\,, \\ &B_n = (L^n)_{\geqslant 0}\,, \quad n \geqslant 0\,, \\ &B_0 = 1\,, \end{aligned} \tag{2.40}$$

где по-прежнему нижний индекс $\geqslant 0$ означает, что удерживаются только операторы с положительными степенями ∂. Стандартная иерархия КП восстанавливается из такой обобщённой иерархии, когда $m = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t_{0n}} = [B_0, B_n, L] \equiv [B_n, L]\,. \tag{2.41}$$

Наиболее интересным видится вопрос, можно ли вывести интегрируемые иерархии для других случаев с

$m \neq 0$. Согласно [72] на него есть положительный ответ: по крайней мере, для некоторых заданных пар (B_m, B_n) получаются интегрируемые уравнения, которые уже присутствуют в иерархии КП. Заманчиво утверждать, что интегрируемая иерархия КП может быть эквивалентно записана в терминах обычного уравнения Лакса или в терминах обобщённого уравнения для троек Лакса. Однако есть наблюдение, препятствующее такому утверждению, которое было представлено в [72] при дальнейшем анализе иерархии для больших значений (m, n): иерархия содержит уравнения, которые не проходят тест Пенлеве на интегрируемость. Таким образом, понятно, что не все уравнения обобщённой иерархии троек Лакса являются интегрируемыми, тем не менее те, которые не являются интегрируемыми, имеют солитонные решения.

В заключение отметим, что по крайней мере некоторые шаги на стандартном пути построения структур интегрируемости могут быть повторены для систем Намбу. В частности, можно ввести бесконечно много сохраняющихся зарядов, порождающий их оператор Лакса, условие инволюции, потоки, сохраняющие объём, и иерархии, основанные на тройках Лакса. Более того, скобка Намбу динамической системы может быть порождена некоторым аналогом ρ классической r-матрицы, который уже не является матрицей и при этом естественно возникает в контексте симметрий U-дуальности М-теории. Вполне ожидаемо, что тот же объект появляется в квазиклассическом пределе уравнения тетраэдра, описывающего факторизацию процесса рассеяния прямых струн. Объединяя все эти наблюдения воедино, естественно заключить, что рассмотренные структуры должны иметь отношение к описанию интегрируемости $2+1$-мерных систем, т.е. мембран. Как мы обсудим более подробно далее в разделе 4, действительно можно обнаружить подобные конструкции при подходе со стороны М-теории и супергравитации. В частности, динамика мембран естественным образом приводит к тройным скобкам через уравнение Басу – Харви, объект ρ естественным образом появляется в метрике открытой мембраны, а аналог оператора эволюции может быть естественным образом построен с использованием алгебр петель. В свою очередь, петлевые алгебры появляются при анализе M5-бран, понимаемых как геометрическое место границ M2-бран, которые рассеиваются как струны на 6-мерном мировом объёме.

3. 10-мерная супергравитация и струны

Кратко рассмотренные выше методы исследования интегрируемых структур в двумерных системах вполне могут быть применены к динамике фундаментальной струны, распространяющейся на фоне, решающем уравнения супергравитации. Как мы более подробно обсудим далее, динамика струны на фонах определённого вида, выраженная в терминах двумерной нелинейной сигма-модели (NLSM), является классически интегрируемой, т.е. для неё может быть построена связность Лакса. Среди других подобных результатов интегрируемость струны на фонах определённого вида представляет особый интерес в контексте голографии. Действительно, голографическое соответствие в сущности говорит о том, что одна и та же система может быть эквивалентно описана в терминах очень разных переменных. Например, в случае AdS/CFT соответствия эквивалентность описаний в терминах замкнутых и открытых струн вблизи горизонта D3-браны приводит к соответствию между 10d супергравитацией на фоне $\mathrm{AdS}_5 \times \mathbb{S}^5$ и $\mathcal{N}=4$ $d=4$ теорией супер-Янга – Миллса. Теперь, поскольку известно, что струна на фоне $\mathrm{AdS}_5 \times \mathbb{S}^5$ интегрируема [6] (см. также обзор [75]), то же самое можно утверждать и для калибровочной теории, так как это просто другой способ параметризации той же динамики. Действительно, интегрируемые структуры $\mathcal{N}=4$ $d=4$ супер Янга – Миллса рассматривались с разных точек зрения, включая, например, термодинамический анзац Бете, спектральную кривую. Хотя эти подходы тесно связаны, они выходят за рамки нашего обзора и были подробно освещены в различных обзорах [1 – 5]. В этом разделе мы сосредоточимся на интегрируемых нелинейных двумерных сигма-моделях на групповых многообразиях, (супер) фактор-пространствах и их непрерывных янг-бакстеровых деформациях[4]. Такие деформации, которые сохраняют интегрируемость 2d NLSM, были введены в [19] для струны на групповом многообразии и далее обобщены на фактор-пространства в [20]. Их обобщение на произвольные решения супергравитации, впервые предложенное в [29, 30] и получившее дальнейшее развитие в [31, 32], по-видимому, не имеет прямого отношения к интегрируемости, однако позволяет ввести аналогичные структуры для мембран, т.е. 3d NLSM, которые будут обсуждаться далее в разделе 4.

3.1. Деформации Янга – Бакстера двумерных сигма-моделей

Подход к нахождению пары Лакса для каждой 2d главной сигма-модели на простой компактной группе G, основанный на методе обратной задачи рассеяния, был предложен Захаровым и Михайловым в [78]. Частным примером такой модели является модель с $G = \mathrm{SU}(2)$, принадлежащая к непрерывному семейству интегрируемых моделей, как было показано Чередником в [79]. Для заданного $g \in \mathrm{SU}(2)$ модель определяется следующим действием:

$$S = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\sigma\ \mathrm{Tr}\left[\mathrm{Ad}(\partial_+ g g^{-1}) J\, \mathrm{Ad}(\partial_- g g^{-1})\right], \tag{3.1}$$

где диагональная матрица $J = \mathrm{diag}\,[J_1, J_2, J_3]$ обозначает деформацию формы Киллинга. В [19] было показано, что приведённую в (3.1) модель можно рассмотреть в терминах сигма-моделей Янга – Бакстера, т.е. сигма-моделей, деформированных классической r-матрицей R, которая удовлетворяет (модифицированному) классическому уравнению Янга – Бакстера

$$[RM, RN] - R\big([RM, N] + [M, RN]\big) = c[M, N], \tag{3.2}$$

где $M, N \in \mathfrak{su}(2)$. Стоит отметить, что по историческим причинам классическая r-матрица, определяющая деформации двумерных сигма-моделей, обозначается заглавной буквой R, которая в математической литературе зарезервирована для квантовой r-матрицы, т.е. для решений квантового уравнения Янга – Бакстера. Чтобы обозначения соответствовали остальной литературе по теории струн, мы следуем этому историческому правилу,

[4] Другие примеры интегрируемых струн, на которых мы не будем здесь фокусироваться, — это λ-деформации [76, 77].

которое, однако, не должно вызывать большой путаницы.

Процедура деформации, используемая в [79], специфична для группового многообразия SU(2) и не может быть непосредственно обобщена на любое групповое многообразие, взятое в качестве объемлющего пространства. Подход [19] предлагает рассмотреть следующее действие:

$$S=\int\left\langle g^{-1}\partial_+g,(\mathbb{1}+\epsilon R)^{-1}g^{-1}\partial_-g\right\rangle, \tag{3.3}$$

где угловые скобки обозначают форму Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ простой компактной группы Ли G. Далее в [80] показано, что эта модель интегрируема, и соответствующая связность Лакса может быть записана следующим образом:

$$A_\pm(\lambda)=\left(\epsilon^2\mp\epsilon R-\frac{1+e^2}{1\pm\lambda}\right)\left(\mathbb{1}\pm\epsilon R\right)^{-1}g^{-1}\partial_\pm g, \tag{3.4}$$

где $\lambda\in\mathbb{C}$ — комплексный спектральный параметр. При $\epsilon=0$ приведённое выше в точности воспроизводит связность Лакса, введённую Захаровым и Михайловым.

Процедура деформации главных сигма-моделей с сохранением интегрируемости была обобщена на сигма-модели на фактор-пространствах в [20]. В действии деформированной сигма-модели на фактор-пространстве G/F теперь участвует так называемая одетая r-матрица $R_g=\mathrm{Ad}g^{-1}\,R\,\mathrm{Ad}g$:

$$S=\int\left\langle(g^{-1}\partial_+g)^{(1)},\frac{1+\eta^2}{\mathbb{1}-\eta R_g\,P_1}(g^{-1}\partial_-g)^{(1)}\right\rangle. \tag{3.5}$$

Здесь P_1 — проектор на подпространство $\mathfrak{g}^{(1)}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, соответствующий значению $\sigma=+1$ автоморфизма второго порядка $\sigma:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$. Используя этот подход, в [21] была построена интегрируемая деформация суперструны $\mathrm{AdS}_5\times\mathbb{S}^5$ в формализме Мецаева – Цейтлина, которую мы вскоре обсудим. Относительно такой деформированной суперструны были сделаны два важных наблюдения: 1) деформированную сигма-модель можно понимать как струну, распространяющуюся на метрическом фоне (МФ), не удовлетворяющем уравнениям супергравитации [25]; 2) каппа-симметрия суперструны GS по-прежнему сохраняется [27]. Примечательно, что каппа-симметрия суперструны GS подразумевает небольшое обобщение уравнений супергравитации [26], которые как раз и решаются фоном ABF. Отсюда следует, что пространство согласованных вакуумов, по крайней мере для суперструны GS, шире, чем пространство решений уравнений супергравитации, и, кроме того, некоторые точки в этом пространстве связаны деформациями Янга – Бакстера[5]. Далее в разделе 4 мы увидим, что та же самая картина справедлива для 11d-супергравитации, хотя необходимо заполнить некоторые пробелы, такие как каппа-инвариантность мембраны при аналогичных деформациях.

К настоящему времени достигнут огромный прогресс в понимании деформированных сигма-моделей Янга – Бакстера на групповых многообразиях и фактор-пространствах, а также в поиске новых примеров. Отметим некоторые из наиболее значимых результатов. В [22] было предложено небольшое обобщение q-деформации [21], которое содержит твисты R-оператора, позволяющие выполнять частичные деформации, затрагивающие только сферическую часть $\mathrm{AdS}_5\times\mathbb{S}^5$ суперструны. Напомним, что r-матрица, описывающая стандартные q-деформации, имеет так называемый тип Дринфельда – Джимбо:

$$R_{\mathrm{DJ}}=\alpha\sum_M\frac{1}{\mathrm{Tr}\,[e_Mf_M]}\,e_M\wedge f_M\,, \tag{3.6}$$

где индекс M нумерует положительные e_M и отрицательные f_M корни алгебры изометрий. Жордановы матрицы строятся линейным твистом матрицы R_{DJ} при помощи произвольного (бозонного) корня. Общий класс интегрируемых деформаций сигма-моделей на фактор-пространствах, скобки Пуассона которых связаны со скобками [21] аналитическим продолжением, найден в [84]. Это обобщает более ранние работы [76, 85, 86], где интегрируемые деформации были построены как интерполяции между точными WZW CFT. (Подробнее см., например, обзоры [87, 88], докторскую диссертацию [89] и ссылки в них.) Интегрируемые деформации струны на $\mathrm{AdS}_n\times\mathbb{S}^n$ интенсивно исследовались в [90 – 93]. Учитывая обсуждение в начале этого раздела, стоит также упомянуть работы [29, 30, 94], в которых была представлена калибровочная интерпретация интегрируемых деформаций с использованием формализма твиста Дринфельда. Это обобщает известную интерпретацию абелевых деформаций, таких как $\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1)$-деформация Лунина и Малдасены путём твиста произведения полей, на неабелев случай (подробнее об абелевом случае см., например, [95]). Результатом является некоммутативная теория Янга – Миллса, что ожидаемо, поскольку генераторы деформаций берутся вдоль пространства AdS.

3.2. Интегрируемые деформации суперструны на фоне $\mathrm{AdS}_5\times\mathbb{S}^5$

Проиллюстрируем формализм интегрируемых деформаций Янга – Бакстера на примере η-деформации суперструны $\mathrm{AdS}_5\times\mathbb{S}^5$, следуя [20]. Начнём с того, что вспомним построение связности Лакса для суперструны Мецаева – Цейтлина [96]. Фон $\mathrm{AdS}_5\times\mathbb{S}^5$ типа IIB обладает неисчезающим потоком самодуальной RR пятьформы, и, следовательно, суперструна на таком фоне может быть удобно описана с использованием формализма Грина – Шварца. Такая суперструна живёт в следующем симметричном суперпространстве:

$$\frac{\mathrm{PSU}(2,2|4)}{\mathrm{SO}(4,1)\times\mathrm{SO}(5)}\supset\frac{\mathrm{SU}(2,2)\times\mathrm{SU}(4)}{\mathrm{SO}(4,1)\times\mathrm{SO}(5)}\cong$$
$$\cong\frac{\mathrm{SO}(4,2)\times\mathrm{SO}(6)}{\mathrm{SO}(4,1)\times\mathrm{SO}(5)}=\mathrm{AdS}_5\times\mathbb{S}^5\,. \tag{3.7}$$

Соответствующая сигма-модель GS формулируется в терминах 1-формы $A\in\mathfrak{su}(2,2|4)$, построенной из супергруппового элемента $\mathfrak{g}\in\mathrm{SU}(2,2|4)$ как

$$A=-\mathfrak{g}^{-1}\,\mathrm{d}\mathfrak{g}=A^{(0)}+A^{(1)}+A^{(2)}+A^{(3)}\,. \tag{3.8}$$

Здесь разложение обусловлено $\mathbb{Z}_4$-градуировкой $\mathfrak{su}(2,2|4)$, индуцированной некоторым автоморфизмом четвёртого

[5] См., однако, обсуждение относительно непротиворечивости обобщённых фонов супергравитации, на которых струна является инвариантной только относительно масштабных преобразований, либо соответствующий контрчлен FT является нелокальным [81 – 83].

порядка. Так определённая 1-форма A является плоской:

$$\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha - [A_\alpha, A_\beta] = 0\,. \tag{3.9}$$

Тогда действие суперструны на $\mathrm{AdS}_5\times\mathbb{S}^5$ принимает форму так называемой суперструны Мецаева–Цейтлина [97]:

$$S_{\mathrm{MT}} = -\frac{g}{2}\int \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\sigma\,\left[\gamma^{\alpha\beta}\,\mathrm{STr}\,(A_\alpha^{(2)}A_\beta^{(2)}) + \kappa\epsilon^{\alpha\beta}\,\mathrm{STr}\,(A_\alpha^{(1)}A_\beta^{(3)})\right],$$
$$\sigma\in(-r,r)\,, \tag{3.10}$$

где $g = R^2/(2\pi\alpha')$, R — радиус $\mathbb{S}^5$, а α' — наклон редджевских траекторий для возбуждений струны. $\gamma^{\alpha\beta} = \sqrt{-h}\,h^{\alpha\beta}$, где $h^{\alpha\beta}$ — обратная метрика мирового объёма, STr — суперслед, а $\epsilon^{\alpha\beta}$ — полностью антисимметричный тензор мирового объёма, $\epsilon^{\tau\sigma} = 1$.

Для дальнейшего обсуждения удобно ввести тензоры

$$P_\pm^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\gamma^{\alpha\beta} \pm \kappa\epsilon^{\alpha\beta})\,, \tag{3.11}$$

которые являются ортогональными проекторами в случаях $\kappa = \pm 1$, и четыре проектора P_k на соответствующие подпространства в $\mathfrak{su}(2,2|4)$ с градуировками $k = 0,\ldots,3$, такие, что $A^{(k)} = P_k A$. Также мы будем использовать следующие соглашения для спроектированных векторов $V_\pm^\alpha = P_\pm^{\alpha\beta}V_\beta$. В этих обозначениях

$$S_{\mathrm{GS}} = -\frac{g}{2}\int \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\sigma\,P_-^{\alpha\beta}\,\mathrm{STr}\,\big(A_\alpha[P_1 + 2P_2 - P_3]A_\beta\big)\,. \tag{3.12}$$

Действие GS (3.12) должно обладать локальной фермионной симметрией, называемой κ-симметрией. Она вдвое уменьшает количество фермионных степеней свободы мирового объёма, делая их совместимыми с пространственно-временно́й суперсимметрией физического спектра струны. Её преобразование действует на A следующим образом:

$$\delta_\epsilon A = -\,\mathrm{d}\epsilon + [A,\epsilon]\,,\quad \epsilon = \epsilon^{(1)} + \epsilon^{(3)}\,, \tag{3.13}$$

где

$$\begin{aligned}\epsilon^{(1)} &= A_{\alpha,-}^{(2)}\kappa_+^{(1),\alpha} + \kappa_+^{(1),\alpha}A_{\alpha,-}^{(2)}\,,\\ \epsilon^{(3)} &= A_{\alpha,+}^{(2)}\kappa_-^{(3),\alpha} + \kappa_-^{(3),\alpha}A_{\alpha,+}^{(2)}\,.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Интересный факт заключается в том, что κ-инвариантность действия требует $\kappa = \pm 1$, и поэтому $P_\pm^{\alpha\beta}$ на самом деле — ортогональные проекторы.

Уравнения движения для (3.12) могут быть записаны в следующей компактной форме:

$$\begin{aligned}0 &= \partial_\alpha(\gamma^{\alpha\beta}A_\beta^{(2)}) - \gamma^{\alpha\beta}[A_\alpha^{(0)}, A_\beta^{(2)}] +\\ &\quad + \frac{1}{2}\,\kappa\epsilon^{\alpha\beta}\big([A_\alpha^{(1)}, A_\beta^{(1)}] - [A_\alpha^{(3)}, A_\beta^{(3)}]\big)\,,\\ 0 &= P_-^{\alpha\beta}[A_\alpha^{(2)}, A_\beta^{(3)}]\,,\\ 0 &= P_+^{\alpha\beta}[A_\alpha^{(2)}, A_\beta^{(1)}]\,.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Глобальная $\mathrm{PSU}(2,2|4)$-симметрия сигма-модели отвечает сохранению следующих нетеровских токов:

$$J^\alpha = g\mathfrak{g}\left[\gamma^{\alpha\beta}A_\beta^{(2)} - \frac{1}{2}\,\kappa\epsilon^{\alpha\beta}(A_\beta^{(1)} - A_\beta^{(3)})\right]\mathfrak{g}^{-1},\quad \partial_\alpha J^\alpha = 0\,. \tag{3.16}$$

Эта модель является классически интегрируемой, следовательно, её уравнения движения (3.15) совместно с условием плоской связности для A (3.9) эквивалентны условию нулевой кривизны,

$$\partial_\alpha L_\beta - \partial_\beta L_\alpha - [L_\alpha, L_\beta] = 0\,, \tag{3.17}$$

для связности Лакса L_α, определённой как

$$L_\alpha = \ell_0 A_\alpha^{(0)} + \ell_1 A_\alpha^{(2)} + \ell_2\gamma_{\alpha\beta}\epsilon^{\beta\rho}A_\rho^{(2)} + \ell_3 A_\alpha^{(1)} + \ell_4 A_\alpha^{(3)}\,. \tag{3.18}$$

Префакторы должны быть выбраны как

$$\begin{aligned}&\ell_0 = 1\,,\quad \ell_1 = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right),\\ &\ell_2 = -\frac{1}{2\kappa}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right),\quad \ell_3 = z\,,\quad \ell_4 = \frac{1}{z}\,,\end{aligned} \tag{3.19}$$

где z — спектральный параметр и $\kappa = \pm 1$. Это означает, что требование интегрируемости автоматически приводит к тем же ограничениям, что и κ-инвариантность.

Теперь кратко обсудим результаты [21], где была показана интегрируемость суперструны на фоне η-деформированного $\mathrm{AdS}_5\times\mathbb{S}^5$. Заметим, что для A мы используем соглашение (3.8) следуя [96], что отличается от [21] на знак "$-$". Суперструна на η-деформированном $\mathrm{AdS}_5\times\mathbb{S}^5$ может быть записана как следующая η-деформация суперструны Мецаева–Цейтлина (3.12):

$$S_{\mathrm{MT}}^\eta = -g\int \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\sigma\,\frac{(1+\eta^2)^2}{2(1-\eta^2)}\,P_-^{\alpha\beta}\,\mathrm{STr}\,\left(A_\alpha\,P\circ\frac{1}{1-\eta R_{\mathfrak{g}}\circ P}(A_\beta)\right), \tag{3.20}$$

где

$$P = P_1 + \frac{2}{1-\eta^2}\,P_2 - P_3\,,\quad \tilde{P} = -P_1 + \frac{2}{1-\eta^2}\,P_2 + P_3\,. \tag{3.21}$$

Важнейшим компонентом здесь является кососимметричный оператор на $\mathfrak{su}(2,2|4)$, который действует как $R_{\mathfrak{g}} = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}^{-1}\circ R\circ\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}$ и решает модифицированное классическое уравнение Янга–Бакстера. А именно, $\forall M,N\in\mathfrak{su}(2,2|4)$:

$$[RM, RN] - R\big([RM,N] + [M,RN]\big) = [M,N] \tag{3.22}$$

и $\mathrm{STr}\,(MRN) = -\mathrm{STr}\,(RMN)$.

Для $\eta = 0$ действие (3.20) воспроизводит (3.12). Следующие векторы:

$$J_\alpha = \frac{1}{1-\eta R_{\mathfrak{g}}\circ P}(A_\alpha)\,, \tag{3.23}$$

$$\tilde{J}_\alpha = \frac{1}{1+\eta R_{\mathfrak{g}}\circ\tilde{P}}(A_\alpha) \tag{3.24}$$

позволяют написать уравнения движения для (3.20) в наиболее удобном виде

$$0 = P(\partial_\alpha J_-^\alpha) + \tilde{P}(\partial_\alpha\tilde{J}_+^\alpha) - \big[\tilde{J}_{+\alpha}, P(J_-^\alpha)\big] - \big[J_{-\alpha}, \tilde{P}(\tilde{J}_+^\alpha)\big]\,. \tag{3.25}$$

Наконец, определим

$$\begin{aligned}L_+^\alpha &= \tilde{J}_+^{\alpha(0)} + \lambda\sqrt{1+\eta^2}\,\tilde{J}_+^{\alpha(1)} + \lambda^{-2}\,\frac{1+\eta^2}{1-\eta^2}\,\tilde{J}_+^{\alpha(2)} +\\ &\quad + \lambda^{-1}\sqrt{1+\eta^2}\,\tilde{J}_+^{\alpha(3)}\,,\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$M_-^\alpha = J_-^{\alpha(0)} + \lambda\sqrt{1+\eta^2}\, J_-^{\alpha(1)} + \lambda^2\, \frac{1+\eta^2}{1-\eta^2}\, J_-^{\alpha(2)} + \\ + \lambda^{-1}\sqrt{1+\eta^2}\, J_-^{\alpha(3)} \tag{3.27}$$

со спектральным параметром λ. Тогда полный набор уравнений (3.25) и уравнения нулевой кривизны (3.9) эквивалентны:

$$\partial_\alpha L_+^\alpha - \partial_\alpha M_-^\alpha - [M_{-\alpha}, L_+^\alpha] = 0\,. \tag{3.28}$$

Вводя $\mathcal{L}_\alpha = L_{+\alpha} + M_{-\alpha}$, получаем стандартное уравнение Лакса

$$\partial_\alpha \mathcal{L}_\beta - \partial_\beta \mathcal{L}_\alpha - [\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] = 0\,. \tag{3.29}$$

Это подтверждает интегрируемость η-деформированной сигма-модели. Также стоит отметить, что действие (3.20) κ-инвариантно.

3.3. Т-дуальность Пуассона – Ли

Деформации Янга – Бакстера представляют собой частный пример Т-дуальности Пуассона – Ли и, в частности, могут быть представлены как неабелева Т-дуальность с дополнительным параметром, обратным значением которого является в точности параметр деформации [98]. Хотя подробный обзор Т-дуальностей Пуассона – Ли на самом деле не является необходимым для определения уравнений Янга – Бакстера, эта часть истории по-прежнему важна для целей настоящего обзора. Причина в том, что есть два известных способа прийти к трёхмерному обобщению классического уравнения Янга – Бакстера: использовать алгебраические рассуждения, основанные на обобщениях конструкции дубля Дринфельда [37, 38], или обратиться к деформациям со стороны супергравитации [34, 36]. Первый основан на обобщении симметрии U-дуальности мембраны на так называемую симметрию Намбу – Ли путём действий, аналогичных тем, которые ведут от обычной Т-дуальности к дуальности Пуассона – Ли. Этот подход ограничен только групповыми многообразиями, в то время как для общего 11d-фона следует применять второй подход, основанный на исключительной теории поля и, в конечном счёте, снова на U-дуальности, понимаемой теперь как локальная симметрия специально расширенного пространства. По этой причине мы считаем полезным показать связь между деформациями Янга – Бакстера и Т-дуальностью Пуассона – Ли для дальнейшего использования этой логики в случае 11d.

Преобразования Т-дуальности Пуассона – Ли были предложены в [99], чтобы ответить на вопрос, можно ли построить преобразование обратное неабелевой Т-дуальности. Важным наблюдением здесь является то, что стандартная (абелева) Т-дуальность, определяемая правилами Бушера, сохраняет изометрии U(1), на которых она построена. Для того чтобы обобщить эти дуальности, можно начать с неабелевой группы симметрий G фона, а не с абелевой группы тора [100]. Такие неабелевы преобразования Т-дуальности, вообще говоря, нарушают исходные изометрии, и весьма неочевидно, как можно построить обратное преобразование. Для Т-дуализации фонов без изометрий в обычном смысле в [99] был предложен алгебраический подход, основанный на понятии дублей Дринфельда, где изометрия действительно существует и скрыта внутри алгебраической структуры дубля. Остановимся подробнее на построении, сосредоточившись в первую очередь на деформациях Янга – Бакстера внутри дубля Дринфельда. Обзор неабелевых Т-дуальностей и их приложений в качестве метода генерации решений дан, например, в [88, 101, 102] (для более подробной информации о Т-дуальностях Пуассона – Ли, включая их реализацию в двойной теории поля, см., например, [103 – 106]). Недавнее обсуждение, связанное с симметрией Пуассона – Ли и неабелевой Т-дуальностью для квантовой суперструны, приведено в [107, 108], общий подход к методам генерации решений см. в [109, 110].

Чтобы выйти за рамки Т-дуализации вдоль изометрий, определяемых сохраняющимися зарядами, в [99] было введено понятие некоммутативного закона сохранения. Для сигма-модели на групповом многообразии G некоммутативный закон сохранения выражается как

$$\mathrm{d}J_a = \frac{1}{2}\, \tilde{f}_a{}^{bc} J_b \wedge J_c\,, \tag{3.30}$$

где токи J_a соответствуют стандартному действию группы G на себя. В координатах действие группы можно записать в виде $\delta x^i = v_a{}^i \epsilon^a$. При таких сдвигах координат действие двумерной сигма-модели преобразуется как

$$\delta S = \int \mathrm{d}^2\sigma\, \epsilon^a \mathcal{L}_{v_a}(E_{ij})\, \partial x^i\, \bar{\partial} x^j + \int \mathrm{d}\epsilon^a \wedge J_a\,, \tag{3.31}$$

где $E = G + B$. Интегрируя последний член (3.31) по частям и предполагая соответствующие граничные условия, мы видим, что действие остаётся инвариантным относительно преобразования, когда выполняется либо обычный закон сохранения $\mathrm{d}J_a = 0$, либо некоммутативный закон сохранения (3.30) вместе с

$$\mathcal{L}_{v_a}(E_{ij}) = \tilde{f}_a{}^{bc} v_a{}^k v_b{}^l E_{ki} E_{jl}\,. \tag{3.32}$$

Из условия разрешимости этого ограничения следует такая связь между величинами $\tilde{f}_a{}^{bc}$ и структурными константами $f_{ab}{}^c$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы изометрий G:

$$4 \tilde{f}_{[a}{}^{a[c} f_{b]e}{}^{d]} - \tilde{f}_e{}^{cd} f_{ab}{}^e = 0\,, \tag{3.33}$$

что с учётом условия разрешимости для (3.30), которое даёт $\tilde{f}_e{}^{g[a} \tilde{f}_g{}^{bc]} = 0$, и тождеством Якоби для $f_{ab}{}^c$ принимает форму условия совместимости структуры биалгебры Ли на $\mathfrak{g}$. В [99] было показано, что для алгебр $\mathfrak{g}$, определённых как $f_{ab}{}^c$, и $\tilde{\mathfrak{g}}$, определённых как $\tilde{f}_a{}^{bc}$, для дубля Дринфельда $\mathcal{D}$ (будет определено ниже) сигма-модели на фонах, реализующих $\mathfrak{g}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}$, эквивалентны. Эквивалентность здесь понимается в том смысле, что обе сигма-модели могут быть получены трансляцией d-мерного линейного пространства $\mathcal{E} = T_e D$, касающегося группы Дринфельда D в единице e, либо действием $\exp\mathfrak{g}$, либо действием $\exp\tilde{\mathfrak{g}}$. В более физических терминах: уравнения движения те же самые.

Остановимся подробнее на построении алгебры Дринфельда, избегая, однако, категорического языка коммутативных диаграмм, поскольку при работе с явными фонами всегда приходится выбирать конкретный базис. Следовательно, пусть $\{T_a\} = \mathrm{bas}\,\mathfrak{g}$ и $\{\tilde{T}^a\} = \mathrm{bas}\,\tilde{\mathfrak{g}}$ с $a = 1, \ldots, d$, тогда дубль Дринфельда может быть реализован как тройка Манина $(T_a, \tilde{T}^a, \eta)$, где η — невырожденная квадратичная форма, определяемая как

$$\eta(T_a, \tilde{T}^b) = \delta_a{}^b\,. \tag{3.34}$$

Коммутационные отношения в этом базисе имеют вид

$$\begin{aligned} &[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c\,,\\ &[T_a, \tilde{T}^b] = \tilde{f}_a{}^{bc}\, T_c - f_{ac}{}^b \tilde{T}^c\,,\\ &[\tilde{T}^a, \tilde{T}^b] = \tilde{f}_c{}^{ab}\, \tilde{T}^c\,. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Для определения Т-дуальностей Пуассона–Ли в этих терминах удобно обозначить весь базис через $\{T_A\} = \{T_a, \tilde{T}^a\}$, а структурные константы — через $F_{AB}{}^C$, т.е. $[T_A, T_B] = F_{AB}{}^C T_C$. Тогда квадратичная форма задаётся инвариантным тензором η_{AB} группы $\mathrm{O}(d, d)$

$$\eta_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_a{}^b \\ \delta_c{}^d & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.36}$$

Преобразования Т-дуальности Пуассона–Ли тогда являются такими $\mathrm{O}(d, d)$ вращениями базиса

$$T'_A = C_A{}^B T_B\,, \tag{3.37}$$

которые сохраняют дубль Дринфельда. Для построения геометрической реализации берётся так называемая геометрическая подгруппа, по определению порождённая $\mathfrak{g}$, и строится правоинвариантная 1-форма $r = g^{-1}\,\mathrm{d}g$, где $g \in G$. Затем дуальный фон строится как геометрическая реализация преобразованной геометрической подгруппы, порождённой $\mathfrak{g}'$. Более подробное описание этого алгоритма см. в [37, 39, 111]. Поиск такой матрицы $C_A{}^B \in \mathrm{O}(d, d)$, сохраняющей дубль Дринфельда, является наиболее сложной задачей при построении Т-дуальных фонов по Пуассону–Ли. Некоторые результаты классификации для алгебр Ли меньшей размерности доступны в литературе [112–114]. Для специальных матриц $C_A{}^B$, соответствующих внутренним автоморфизмам группы $\mathrm{O}(d, d)$ (факторизованным Т-дуальностям), существуют дискретные преобразования, которые гарантированно сохраняют заданный дубль Дринфельда. Примером такого преобразования является перестановка $\mathfrak{g} \leftrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$, т.е. другой способ сказать, что данная алгебра Дринфельда может быть разложена на две тройки Манина. Более того, в [115] были найдены примеры дублей Дринфельда, которые могут быть разложены более чем на три тройки Манина, что было названо Т-плюральностью Пуассона–Ли.

После этого длинного введения мы, наконец, подошли к определению деформаций Янга–Бакстера в терминах дублей Дринфельда и симметрий Пуассона–Ли. Рассмотрим непрерывное семейство деформаций данной алгебры Дринфельда $\tilde{f}_a{}^{bc} = r^{d[b} f_{ad}{}^{c]}$, соответствующее деформации алгебры Дринфельда с $\tilde{f}_a{}^{bc} = 0$, следующей матрицей:

$$C_A{}^B = \begin{bmatrix} \delta_a{}^b & r^{ac} \\ 0 & \delta_d{}^c \end{bmatrix}. \tag{3.38}$$

Так определённые дуальные структурные константы $\tilde{f}_a{}^{bc}$ удовлетворяют всем условиям совместности, если r^{ab} удовлетворяет классическому уравнению Янга–Бакстера

$$r^{e[a} r^{|f|b} f_{ef}{}^{d]} = 0\,. \tag{3.39}$$

На обсуждаемом ниже языке двойной теории поля такая матрица соответствует просто частному случаю обобщённых диффеоморфизмов расширенного пространства [116, 117]. Поскольку такая деформация Янга–Бакстера изменяет исходную алгебру Дринфельда, строго говоря, это не дуальность в обычном смысле отношения между двумя различными описаниями одной и той же физики. Однако геометрическая реализация деформированного дубля Дринфельда решает уравнения супергравитации, если начальный фон является решением и выполняется так называемое условие унимодулярности $r^{ab} f_{ab}{}^c = 0$, что лучше всего можно пронаблюдать в формализме двойной теории поля, к которому мы сейчас переходим.

3.4. Бивекторная деформация решений 10-мерной супергравитации

Как уже упоминалось, описанная выше конструкция ограничивается групповыми многообразиями и фактор-пространствами (в случае неабелевой Т-дуальности (NATD) [98]). Причину можно увидеть в том факте, что она очень алгебраична по своей природе и сильно зависит от использования правоинвариантных форм в качестве параметров объемлющего пространства. Более теоретико-полевой подход к деформациям Янга–Бакстера был предложен в [29, 30] и получил дальнейшее развитие в [31, 32, 117, 118]. Подход [29, 30] был основан на том, что деформации Янга–Бакстера фона, заданного метрикой G, могут быть представлены в виде отображения открыто-замкнутой струны

$$(G^{-1} + \beta)^{-1} = g + b\,, \tag{3.40}$$

где g и b — деформированная метрика и деформированная 2-форма поля Калба–Рамона, а параметр деформации $\beta = r^{ab} k_a \wedge k_b$ определяется через векторы Киллинга $k_a = k_a{}^m \partial_m$ исходного фона. Заметим здесь, что параметр деформации β^{mn} входит в уравнения тем же образом, что и параметр некоммутативности Зайберга и Виттена [119]. Хотя глубинный смысл этого неясен, ровно то же самое можно наблюдать и в 11 измерениях. Там параметр деформации имеет три индекса Ω^{mnk} точно так же, как параметр некоммутативности мембраны, а обобщённые правила деформации Янга–Бакстера имеют в точности вид открыто-замкнутого отображения мембраны, который будет обсуждаться в разделе 4.4.

Поскольку мы не можем более подробно прокомментировать это очень интригующее соотношение, мы предпочтём сформулировать деформации Янга–Бакстера на ковариантном языке $\mathrm{O}(10, 10)$, который обобщим на 11-мерный случай. Это язык двойной теории поля, где все поля супергравитации зависят от удвоенного набора координат $\{\mathbb{X}^M\} = \{x^m, \tilde{x}_m\}$ с учётом так называемого условия проекции

$$\eta^{MN} \partial_M \bullet \partial_N \bullet = 0\,, \tag{3.41}$$

где точки обозначают любое из полей теории и их комбинации. По сути, условие проекции снимает зависимость от половины координат, т.е. от так называемых негеометрических $\{\tilde{x}_m\}$. В дальнейшем мы всегда будем предполагать такой выбор проекции. Идея удвоения координат следует из ранней работы Фрадкина и Цейтлина [120], где правая и левая моды движения замкнутой струны на торе рассматриваются независимо, отсюда и альтернативное обозначение $\tilde{x}_m$ как координаты обмотки. Понятие условия проекции и обобщённой производной Ли было введено в [121, 122]. Полная формулировка двойной теории поля была разработана в [123] для сектора NS – NS, в [124] для полного бозонного сектора супергравитации и в [125] включая суперсимметрию. Для целей данного обзора двойная теория поля просто обеспечивает удобный выбор параметризации полей, для которых деформации Янга – Бакстера становятся линейным преобразованием $\mathrm{O}(10,10)$. Следовательно, мы предоставим только необходимые части формализма, а для более подробного обзора читатель отсылается к работам [126 – 128].

В ковариантном формализме метрика и B-поле супергравитации упаковываются в так называемую обобщённую метрику $\mathcal{H}_{MN} \in \mathrm{O}(10,10)/\mathrm{O}(1,9)\times\mathrm{O}(9,1)$. Для наших целей удобнее ввести обобщённую матрицу $\mathcal{H}_{MN} = E_M{}^A E_N{}^B \mathcal{H}_{AB}$, где $\mathcal{H}_{AB}$ — постоянная единичная матрица. Обобщённый репер в верхнетреугольной форме может быть определён путём возведения в степень пространственно-временно́го репера $e_m{}^a$ и b_{mn} с определёнными генераторами из $\mathrm{O}(10,10)$. Для этого разложим генераторы по действию геометрической подгруппы $\mathrm{GL}(10)$, т.е. параметризуем генераторы следующим образом $\{T_{ab}, T_a{}^b, T^{ab}\} = \operatorname{bas}\mathfrak{o}(10,10)$. Тогда обобщённый репер определяется как

$$E_M{}^A = \exp\left[e_m{}^a T_a{}^m\right] \exp\left[b_{ab}T^{ab}\right] = \begin{bmatrix} e_m{}^a & b_{mk}e_b{}^k \\ 0 & e_b{}^n \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Рассмотрим теперь преобразование $\mathrm{O}(10,10)$ вида

$$E'_M{}^A = O_M{}^N E_N{}^A\,, \quad O_M{}^N = \exp\left[\beta^{mn}T_{mn}\right] = \begin{bmatrix} \delta_m{}^n & 0 \\ \beta^{nk} & \delta_l{}^k \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Тогда обобщённая метрика линейно преобразуется сопряжениями $\mathcal{H}' = O^{-1}\mathcal{H}O$ и в терминах пространственно-временны́х полей g, b преобразование имеет в точности вид отображения открыто-замкнутой струны. Следуя [29, 30], предположим бикиллинговый анзац для бивектора

$$\beta^{mn} = r^{ab}k_a{}^m k_b{}^n\,, \quad (3.44)$$

где $r^{ab} = -r^{ba}$ — постоянная матрица, а $k_a{}^m$ — векторы Киллинга исходного фона g, b. Теперь преимущество ковариантного языка состоит в том, что, для того чтобы такой преобразованный фон по-прежнему был решением уравнений супергравитации, достаточно проверить, что так называемые обобщённые потоки остаются инвариантными [98]. Последние определяются как обобщение коэффициентов анголономии

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{E_A}E_B = \mathcal{F}_{AB}{}^C E_C\,, \\ &\mathcal{L}_{E_A}d = \mathcal{F}_A\,, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где $\mathcal{L}_{E_A}$ обозначает обобщённую производную Ли вдоль обобщённых реперов $E_A{}^M$, а d — инвариантный дилатон. В общем случае потоки $\mathcal{F}_{AB}{}^C$ и $\mathcal{F}_A$ представляют собой некоторые комбинации полей g, b, ϕ и их производных и становятся постоянными в случае групповых многообразий. Тогда это в точности структурные константы $F_{AB}{}^C$ соответствующего дубля Дринфельда. Важнейшей для обсуждения особенностью двойной теории поля является то, что почти так же, как и в общей теории относительности, её действия и уравнения поля могут быть полностью записаны в терминах потоков и их производных [129]. Следовательно, если деформация не изменяет обобщённые потоки, то это преобразование, порождающее решение. Это сводится к условию на матрицу r^{ab}, которое замечательно совпадает с классическим уравнением Янга – Бакстера вместе с условием унимодулярности:

$$r^{e[a}r^{|f|b}f_{ef}{}^{c]} = 0\,, \quad r^{ab}f_{ab}{}^c = 0\,. \quad (3.46)$$

В заключение этого раздела напомним, что с точки зрения сигма-модели деформации Янга – Бакстера сохраняют интегрируемость. С точки зрения T-дуальности они действуют как частный случай симметрии Пуассона – Ли, деформирующей заданный дубль Дринфельда. За пределами групповых многообразий они действуют как преобразования, генерирующие решения, сохраняющие обобщённые потоки двойной теории поля. На данный момент последние два из этих подходов к деформациям были обобщены на 11 измерений, по-видимому, без учёта интегрируемости мембраны.

4. 11-мерная супергравитация и мембраны

Классическая интегрируемость двумерной системы (скажем, фундаментальной струны) означает, что её уравнения движения могут быть записаны в виде уравнения Лакса – Захарова – Шабата, являющегося требованием плоскостности 1-формы A связности Лакса. В свою очередь это означает, что оператор эволюции может быть построен в терминах линии Вильсона, которая не зависит от выбора пути. Принимая за отправную точку условие плоскостности, можно использовать r-матрицу, удовлетворяющую классическому уравнению Янга – Бакстера, для построения скобок Пуассона соответствующей системы. Это уравнение является квазиклассическим пределом квантового уравнения Янга – Бакстера, решение которого R определяет S-матрицу системы. Такое свойство факторизации S-матрицы означает, что теория интегрируема. Для заданной интегрируемой суперструны на некотором супергравитационном фоне классическая r-матрица $r \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ может использоваться для определения её интегрируемых деформаций. Для произвольного решения уравнений 10-мерной супергравитации такие (унимодулярные) деформации Янга – Бакстера выступают в роли преобразований, порождающих семейства решений. Алгебраическая структура, стоящая за такими симметриями, обеспечивается классическим дублем Дринфельда и T-дуальностью Пуассона – Ли.

В разделе 2.4 мы видели, что при замене скобки Пуассона скобкой Намбу естественно возникает действие, схожее с действием мембраны. Хотя интегрируемость в трёх измерениях не является чётко определённым понятием, можно сделать некоторое обобщение структур, отвечающих за интегрируемость в размерности два. Рассмотрим, как и ранее, пару Лакса, тогда скобка Намбу может быть получена при помощи так называемого ρ-тензора $\rho \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$, который удовлетворяет некоторому обобщению классического уравнения Янга – Бакстера. Такой ρ-тензор можно использовать для деформации так называемой исключительной алгебры Дринфельда, которая представляет собой обобщение классического дубля Дринфельда и задаёт алгебраическую структуру, стоящую за намбу-лиевой U-дуальностью. Условием сохранения алгебраической структуры такой деформацией является то же обобщённое уравнение Янга – Бакстера. Для решений более общих, чем групповые многообразия, обобщённые деформации Янга – Бакстера являются преобразованиями, порождающими семейства решений уравнений 11-мерной супергравитации. К сожалению, в настоящий момент нельзя утверждать, что эти деформации сохраняют интегрируемость мембраны из-за отсутствия её чёткого описания. Действительно, формально следуя двумерным построениям, мы немедленно сталкиваемся с отсутствием естественного упорядочения для точек на двумерной поверхности, обобщающего линию Вильсона. Решение может заключаться, например, в обращении к петлевым алгебраическим переменным, которые кажутся более естественными для описания мембранной динамики. В этом разделе мы обсуждаем более подробно U-дуальность Намбу – Ли, деформации исключительных алгебр Дринфельда, приводящих к обобщённому уравнению Янга – Бакстера, и обобщение конструкции за пределы групповых многообразий; более подробно обсуждаем аргументы в пользу естественного появления скобок Намбу и петлевых переменных в М-теории; обсуждаем так называемое отображение трансгрессии, связывающее скобки Намбу и петлевые переменные; и, наконец, приводим некоторые соображения относительно возможных определений поверхности Вильсона и квазиклассических пределов уравнения тетраэдра, которое, по-видимому, является правильным трёхмерным аналогом квантового уравнения Янга – Бакстера.

4.1. U-дуальность Намбу – Ли

М-теорию можно понимать как теорию, приближением слабой связи которой является теория пертурбативной струны. Это утверждение подтверждается двойной размерной редукцией мембраны, когда она обёртывает компактный цикл в пространстве и даёт фундаментальную струну. Тогда теорию струн можно рассматривать как теорию различных мембран на 11-мерном фоновом пространстве-времени, которая может быть описана в терминах струны Полякова в определённых точках пространства модулей, где константа связи g_s мала. Поскольку в двойной размерной редукции g_s определяется размером компактного цикла, размерность фонового пространства в этих точках эффективно равна десяти. Более подробное обсуждение М-теории с этой точки зрения можно найти в [130]. Поскольку g_s не выступает в роли константы связи в М-теории, различные браны, натяжения которых различаются по степени g_s, могут отображаться друг в друга с помощью симметрии, обобщающей Т-дуальность и включающей S-дуальность. Эта так называемая U-дуальность (от Unity или Unified) впервые была обнаружена в 11-мерной супергравитации, компактифицированной на 7-тор, в работе [131], где было показано, что результирующие четырёхмерные полевые уравнения инвариантны относительно глобального $E_{7(7)}$ преобразования. В общем случае компактификация 11d-супергравитации на d-торе приводит к теории, инвариантной относительно симметрии $E_{d(d)}$, где $E_{3(3)} = SL(2) \times SL(3)$, $E_{4(4)} = SL(5)$, $E_{5(5)} = SO(5,5)$, при этом в случае $d \geqslant 9$ алгебра симметрии становится бесконечной, и нужны специальные конструкции. Как показано в [132], учёт квантовых эффектов нарушает эту симметрию до $E_{d(d)}(\mathbb{Z})$. Достаточно подробное обсуждение исключительных симметрий тороидальных компактификаций 11-мерной супергравитации представлено в [133, 134], а обсуждение симметрий U-дуальности в М-теории можно найти в обзоре [135].

Хотя конструкция, подобная конструкции Бушера для струны, не известна для мембран, хотя бы из-за того, что необходимо одновременно учитывать M2- и M5-браны, чтобы правильно определить преобразования дуальности, расширение стандартной абелевой U-дуальности на неабелеву намбу-лиеву U-дуальность возможно[6]. Для этого необходимо построить обобщение классического дубля Дринфельда, называемое исключительной алгеброй Дринфельда (EDA), где симметрия $O(d,d)$ заменена одной из групп симметрии U-дуальности. Это было сделано в [37 – 39, 137], а пошаговый алгоритм построения Намбу – Ли дуальных решений можно найти в работе [111]. Обсудим кратко эти конструкции, не вдаваясь в подробности. Генераторы исключительной алгебры Дринфельда принадлежат $\mathbf{10}$, $\mathbf{16}_s$, $\overline{\mathbf{27}}$ для групп $SL(5)$, $SO(5,5)$, $E_{6(6)}$ соответственно, так что в общем случае базис в алгебре имеет вид

$$T_A = \{T_a, T^{a_1 a_2}, T^{a_1 \ldots a_5}\}\,. \tag{4.1}$$

Образующие $\{T_a\}$ составляют базис так называемой геометрической подалгебры $\mathfrak{g}$, а остальные можно понимать как соответствующие намоткам M2- и M5-бран, подобно тому, как в случае классического дубля Дринфельда генераторы $\tilde{T}^a$ определяют двойственную подалгебру. Алгебраическая структура определяется следующей таблицей умножения:

$$T_A \circ T_B = F_{A,B}{}^C T_C\,, \tag{4.2}$$

где $F_{A,B}{}^C$ относятся к обобщённым потокам исключительной теории поля так же, как структурные константы классического двойника Дринфельда относятся к обобщённым потокам двойной теории поля. Более подробно таблицу умножения можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&T_a \circ T_b = f_{ab}{}^c\, T_c\,,\\
&T_a \circ T^{b_1 b_2} = f_a{}^{b_1 b_2 c}\, T_c + 2 f_{ac}{}^{[b_1}\, T^{b_2]c} + 3\, Z_a\, T^{b_1 b_2}\,,\\
&T_a \circ T^{b_1 \ldots b_5} = -f_a{}^{b_1 \ldots b_5 c}\, T_c - 10 f_a{}^{[b_1 b_2 b_3}\, T^{b_4 b_5]} -\\
&\quad - 5 f_{ac}{}^{[b_1}\, T^{b_2 \ldots b_5]c} + 6\, Z_a\, T^{b_1 \ldots b_5}\,,\\
&T^{a_1 a_2} \circ T_b = -f_b{}^{a_1 a_2 c}\, T_c + 3 f_{[c_1 c_2}{}^{[a_1}\, \delta^{a_2]}_{b]}\, T^{c_1 c_2} - 9\, Z_c\, \delta^{[c}_b\, T^{a_1 a_2]}\,,\\
&T^{a_1 a_2} \circ T^{b_1 b_2} = -2 f_c{}^{a_1 a_2 [b_1}\, T^{b_2]c} - f_{c_1 c_2}{}^{[a_1}\, T^{a_2] b_1 b_2 c_1 c_2} +\\
&\quad + 3\, Z_c\, T^{a_1 a_2 b_1 b_2 c}\,,\\
&T^{a_1 a_2} \circ T^{b_1 \ldots b_5} = 5 f_c{}^{a_1 a_2 [b_1}\, T^{b_2 \ldots b_5]c}\,,\\
&T^{a_1 \ldots a_5} \circ T_b = f_b{}^{a_1 \ldots a_5 c}\, T_c + 10 f_b{}^{[a_1 a_2 a_3}\, T^{a_4 a_5]} +\\
&\quad + 20 f_c{}^{[a_1 a_2 a_3}\, \delta^{a_4}_b\, T^{a_5]c} + 5 f_{bc}{}^{[a_1}\, T^{a_2 \ldots a_5]c} +\\
&\quad + 10 f_{c_1 c_2}{}^{[a_1}\, \delta^{a_2}_b\, T^{a_3 a_4 a_5] c_1 c_2} - 36\, Z_c\, \delta^{[c}_b\, T^{a_1 \ldots a_5]}\,,\\
&T^{a_1 \ldots a_5} \circ T^{b_1 b_2} = 2 f_c{}^{a_1 \ldots a_5 [b_1}\, T^{b_2]c} - 10 f_c{}^{[a_1 a_2 a_3}\, T^{a_4 a_5] b_1 b_2 c}\,,\\
&T^{a_1 \ldots a_5} \circ T^{b_1 \ldots b_5} = -5 f_c{}^{a_1 \ldots a_5 [b_1}\, T^{b_2 \ldots b_5]c}\,.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

[6] Обратим внимание, однако, на работу [136], где была показана инвариантность мембранных уравнений движения для конкретного случая 4-мерного таргет-пространства, где M5-брана не имеет динамики. Тогда дуальные координаты соответствуют только намоткам M2-браны.

В отличие от классического дубля Дринфельда исключительная алгебра Дринфельда является алгеброй Лейбница, поскольку структурные константы $F_{A,B}{}^C$ не антисимметричны по нижним индексам. Самосогласованность алгебры требует квадратичных соотношений констант $f_{ab}{}^c$, $f_a{}^{bcd}$, Z_a, которые, будучи записанными в терминах $F_{A,B}{}^C$, являются ничем иным, как квадратичными условиями максимальной калиброванной супергравитации [138]. Намбу-лиева U-дуальность определяется как такое преобразование $\mathrm{E}_{d(d)}$ $T_A \to C_A{}^B T_B$, которое сохраняет алгебру. Немедленно замечаем отсутствие естественной дуальности, меняющей местами геометрическую алгебру $\mathfrak{g}$, натянутую на T_a в выбранном базисе, и двойственную ей, натянутую на остальные, так как размерности не совпадают и остальные образующие не образуют алгебру Ли. Однако аналог такого преобразования был предложен в работе [139] на основе внешних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{e}_d$, что позволило получить несколько примеров неабелево U-дуальных друг другу решений в [111].

Нас здесь интересуют деформации исключительных алгебр Дринфельда, согласующиеся с их структурой и определяемые по аналогии с деформациями Янга – Бакстера классического дубля Дринфельда следующим образом:

$$f_a{}^{bcd} = \rho^{e[bc} f_{ea}{}^{d]}\,, \quad f_a{}^{a_1\ldots a_6} = \rho^{e[a_1\ldots a_5} f_{ea}{}^{a_6]}\,, \tag{4.4}$$

где $f_a{}^{a_1\ldots a_6} = \epsilon^{a_1\ldots a_6} Z_a$. Такие деформации исключительных алгебр Дринфельда были впервые рассмотрены в [37, 38]. В контексте деформаций произвольного фона супергравитации они рассматривались ранее в работе [34] в контексте обобщения отображения открыто-замкнутой струны на случай полей 11-мерной супергравитации. Условие сохранения структуры исключительной алгебры Дринфельда при деформации называется обобщёнными уравнениями Янга – Бакстера и имеет вид

$$\begin{gathered}
\rho^{a_1[a_2|a_6|}\rho^{a_3a_4|a_5|} f_{a_5a_6}{}^{a_7]} - \rho^{a_2[a_1|a_6|}\rho^{a_3a_4|a_5|} f_{a_5a_6}{}^{a_7]} - \\
- 3 f_{a_5a_6}{}^{[a_1}\rho^{a_2]a_3a_4a_5a_6a_7} = 0\,, \\
\rho^{a_1a_2[a_8}\rho^{a_3a_4a_5a_6a_7a_9]} f_{a_8a_9}{}^{a_{10}} = 0\,.
\end{gathered} \tag{4.5}$$

Для случая SL(5) EDA, т.е. в случае четырёхмерной геометрической подалгебры, приведённое условие (4.5) в точности совпадает с условием [34], полученным из условия равенства нулю R-потока (будет обсуждаться в следующем разделе). Обратим внимание, что, если $\rho^{a_1\ldots a_6} = 0$, то обобщённые уравнения Янга – Бакстера в первой строке (4.5) являются в точности условиями (2.31), которые гарантируют, что тройная скобка, определённая для операторов Лакса в терминах ρ-тензора ρ^{abc}, является скобкой Намбу, т.е. удовлетворяет фундаментальному тождеству. Насколько нам известно, в данном контексте впервые это наблюдалось в работе [39] (раздел 4 в [39]), и был предложен кандидат на квантовое уравнение, квазиклассический предел которого даёт (4.5). С точностью до неясных до сих пор деталей, предлагаемое квантовое обобщённое уравнение Янга – Бакстера имеет весьма схожую форму с уравнением тетраэдра в виде декорированного уравнения Янга – Бакстера (см. раздел 4.6.2). Непосредственное доказательство этой связи будет сильным аргументом в пользу интегрируемости мембраны.

4.2. Поливекторные деформации

Как и в случае Т-дуальности Пуассона – Ли и деформаций Янга – Бакстера, формализм обобщённых деформаций Янга – Бакстера, обсуждавшийся выше в контексте исключительных алгебр Дринфельда, может быть расширен за пределы групповых многообразий. Здесь мы будем следовать построению [35, 36], где обобщённые деформации Янга – Бакстера произвольного фона супергравитации с не менее чем тремя векторами Киллинга задаются некоторой $\mathrm{E}_{d(d)}$-трансформацией. Преобразование действует на поля исключительной теории поля, которая является ковариантной формулировкой супергравитации, поля которой собраны в неприводимые представления алгебры $\mathfrak{e}_d$ и в общем случае зависят от координат X^M, параметризующих пространство-время, расширенное модами намоток мембран. Подобно двойной теории поля, самосогласованность локальных симметрий требует условия проекции, которое мы будем считать разрешённым, сохраняя зависимость только от геометрических координат x^m. Мы не будем вдаваться в подробности конструкции, заинтересованный читатель отсылается к большому количеству подробной литературы по теме [140 – 144].

Поскольку локальная группа симметрии исключительных теорий нерегулярно меняется с размерностью d так называемого внутреннего пространства (при разделении $11 = D + d$), явные выражения для обобщённых деформаций Янга – Бакстера также существенно меняются. Для иллюстрации основной идеи возьмём простейшую теорию SL(5), деформации которой могут быть тривиальны в обсуждаемом ниже смысле, однако все основные черты формализма присутствуют. Как и в двойной теории поля, мы фокусируемся только на обобщённом репере $E_M{}^A$ и соответствующей обобщённой метрике $m_{MN} \in \mathrm{SL}(5)/\mathrm{SO}(5) \times \mathbb{R}^+$. Однако важно, что в отличие от полной двойной теории поля исключительная теория поля включает калибровочные поля, которые нетривиально преобразуются при U-дуальности. Для того чтобы ограничить обсуждение обобщённым репером и дилатоноподобным полем ϕ, соответствующим определителю внешней D-мерной метрики, необходимо выполнить специальное усечение теории [35]. Опуская детали, отметим, что разложение образующих группы SL(5) по отношению к её подгруппе GL(4) имеет тот же вид, что и для SL(5) EDA:

$$\operatorname{bas}\mathfrak{sl}(5) = \{T_A\} = \{T_{abc}, T_a{}^b, T^{abc}\}\,. \tag{4.6}$$

Как и ранее, последние 10 генераторов, т.е. имеющих неотрицательный уровень по отношению к GL(1) подгруппе GL(4), определяют собственно обобщённый репер

$$E_M{}^A = e^{\phi T} \exp\left[e_m{}^a T_a{}^m\right] \exp\left[C_{abc} T^{abc}\right], \tag{4.7}$$

где T обозначает генератор алгебры $\mathbb{R}^+$. Тогда преобразование деформации определяется действием генераторов отрицательного уровня и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
E'_M{}^A &= O_M{}^N E_N{}^A\,, \\
O_M{}^N &= \exp\left[\Omega^{mnk} T_{mnk}\right] = \begin{bmatrix} \delta_m{}^n & 0 \\ \epsilon_{npqr}\Omega^{pqr} & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Ограничиваясь трикиллинговым анзацем, как ранее:

$$\Omega^{mnk} = \rho^{abc} k_a{}^m k_b{}^n k_c{}^k \,, \tag{4.9}$$

где $k_a{}^m$ обозначают векторы Киллинга начального фона, и потребовав, чтобы деформированный фон был решением уравнений супергравитации в форме исключительной теории поля, приходим к условиям на ρ^{abc}, которые есть не что иное, как обобщённое уравнение Янга – Бакстера (4.5) и условие унимодулярности:

$$\rho^{abc} f_{ab}{}^d = 0 \,. \tag{4.10}$$

Для нетривиальных 6-векторных деформаций следует перейти к большей группе симметрии. Упомянутая выше тривиальность тривекторных деформаций внутри теории SL(5) связана с тем, что для обеспечения инвариантности обобщённых потоков, что эквивалентно условию выполнения уравнений супергравитации, достаточно условия унимодулярности. Это тот же эффект, что и в двойной теории поля с группой O(3,3), который связан с размерностью внутреннего пространства и позволяет показать эквивалентность (обобщённого) уравнения Янга – Бакстера в форме обращения в нуль R-потока и условия унимодулярности. Однако можно рассматривать деформации Янга – Бакстера, которые не являются унимодулярными и, следовательно, не дают решения уравнений стандартной супергравитации, вместо этого приводя к их обобщению [145, 146].

Напомним, что обобщение симметрии пуассон-лиевой T-дуальности до алгебры, включающей преобразования абелевой U-дуальности, естественным образом приводит к понятию исключительной алгебры Дринфельда, лежащей в основе симметрии намбу-лиевой U-дуальности. Тогда как геометрическая реализация классического дубля Дринфельда в терминах обобщённого репера приводит к бивектору, определяющему структуру Пуассона, геометрическая реализация исключительной алгебры Дринфельда приводит к 3-вектору и 6-вектору, определяющим структуру Намбу. В контексте обобщённых деформаций Янга – Бакстера поливекторы определяют деформированный фон, и условием того, чтобы он удовлетворял полевым уравнениям супергравитации, являются в точности уравнения (2.31). С другой стороны, последние появляются как условие того, что 3-скобка системы, заданной парой Лакса и тривектором, удовлетворяет фундаментальному тождеству.

Точно так же, как и в случае фундаментальной струны, отображение (4.8) имеет вид отображения открыто-замкнутой мембраны [119]. Чтобы это увидеть, следует начать с фона с равным нулю C-полем, тогда деформированный фон на этом языке будет именно тем фоном, который видит открытая мембрана. В таком случае тривектор Ω^{mnk} оказывается одним из обобщённых тета-параметров в обозначениях [147] и определяет некоммутативность открытой мембраны. Как мы обсудим ниже, отношения некоммутативности естественно записываются в терминах петлевых переменных, предлагая сделать то же самое для обобщённых уравнений Янга – Бакстера.

4.3. Мембраны, заканчивающиеся на мембранах

В разделе 2.2 мы видели, что система Нама может быть эквивалентно описана в терминах структур Пуассона и Намбу. В последнем случае необходимо ввести два гамильтониана, один из которых является одним из сохраняющихся зарядов в стандартной пуассоновской формулировке. Для нашего повествования система Нама интересна своей тесной связью с динамикой систем Dp-бран, говоря более конкретно — граничные условия системы D1 – D3-бран могут быть описаны в терминах уравнений Нама. При поднятии до M-теории она становится системой M2- и M5-бран, где первая заканчивается на второй, а уравнение Нама становится так называемым уравнением Басу – Харви. Описываемая процедура впервые была рассмотрена в работе [59], где было предложено обобщение уравнения Нама, которое естественно включает тройную скобку и, следовательно, имеет структуру Намбу.

Рассмотрим для начала систему D1 – D3-бран. Отправной точкой здесь является замечание о том, что геометрическое место пересечения бран может быть эквивалентно описано 1) размытой воронкообразной некоммутативной геометрией, интерполирующей между геометриями бран D1 и D3, 2) геометрической конструкцией монополей в теории Янга – Миллса на D3-бране. Стоит отметить, что это справедливо и для более общего пересечения бран Dp и D(p + 2). Эти две картины в основном соответствуют рассмотрению пересечения с точки зрения D1-браны и D3-браны соответственно.

D1-брана с точки зрения D3-браны. Для второго случая мы начнём с действия мирового объёма бесконечно протяжённой D3-браны:

$$\begin{gathered} S^{\mathrm{D3}} = \int \mathrm{d}^4\xi\, \exp(-\phi)\sqrt{\det(g+\mathcal{F})} + \int C_4 + C_2\wedge B_2 + \\ + \frac{1}{2}\, C_0\wedge B_2\wedge B_2 \,, \\ \mathcal{F} = \mathrm{d}A_1 + B_2 \,, \quad \tau = C_0 + \mathrm{i}\exp(-\phi) \,. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Это действие описывает D3-брану, электрически взаимодействующую с фундаментальной струной F1, что видно из поля A_1 в определителе, взаимодействующем с концами открытой струны. Для перехода от струны F1 к D1-бране и, соответственно, к описанию взаимодействия D3-браны с D1-браной произведём преобразование S-дуальности:

$$\begin{gathered} \tau \to -\frac{1}{\tau} = -\frac{C_0 - \mathrm{i}\exp(-\phi)}{C_0^2 + \exp(-2\phi)} \,, \quad g_{\mu\nu} \to |\tau|\, g_{\mu\nu} \,, \\ B_2 \to -C_2 \,, \quad A_1 \to -c_1 \,. \end{gathered} \tag{4.12}$$

Предполагая, что фон генерируется исключительно D-бранами, т.е. $B_2 = 0$, имеем

$$\begin{gathered} S'^{\,\mathrm{D3}} = \int \mathrm{d}^4\xi\, \exp(-\phi)\sqrt{\det\left(g - |\tau|^{-1}\mathrm{d}c_1 - |\tau|^{-1}C_2\right)} + \\ + \int C_4 - \frac{1}{2}\,|\tau|^{-2} C_0\wedge\, C_2\wedge C_2 \,. \end{gathered} \tag{4.13}$$

Это действие описывает взаимодействие между D3-бранами и D1-бранами в том смысле, что концы D1-бран заряжены по полю c_1 на мировом объёме. С точки зрения теории на мировом объёме D1-браны рассматриваются как энергетические пики, соответствующие монополям Янга – Миллса, несущим магнитный заряд. Выберем $(X^4, \ldots, X^9) = \mathbf{X}_\perp$ в качестве поперечных направле-

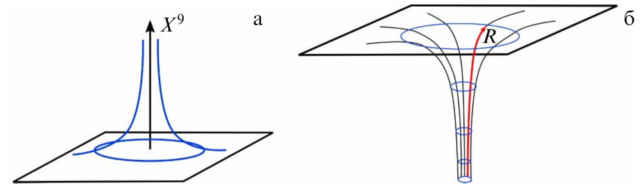

Рис. 2. D1-брана, заканчивающаяся на D3-бране, с разных точек зрения. (а) D1-брана как солитонное решение в теории на мировом объёме D3-браны. (б) D1-брана как горловина, описываемая геометрией размытой сферы. Здесь X^9 обозначает координату, вдоль которой спадает поле солитона. R обозначает физический радиус размытой сферы.

ний и введём сферические координаты на бране: $(X^1, X^2, X^3) = (r, \theta, \phi)$. Такая теория имеет классическое монопольное решение

$$X^9 = \frac{N}{2r}, \quad F_{\theta\phi} = -r^{-2}\partial_r X^9, \tag{4.14}$$

заряд монополя определяется следующим образом:

$$Q_m = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\Omega\, F_{\theta\phi} = N. \tag{4.15}$$

Такая конфигурация интерпретируется как стопка из N D1-бран, оканчивающихся на D3-бране в точке $r = 0$ в выбранных координатах и вытянутых вдоль X^9. Схематически система изображена на рис. 2а.

D3-брана с точки зрения D1-браны. Противоположная картина, описывающая D3-брану с точки зрения D1-браны, немного более тонкая и включает неабелевы теории Янга – Миллса. Кратко опишем здесь идею и отошлём заинтересованного читателя за подробностями к статье [63]. Начнём с описания стопки N D1-бран, вытянутых вдоль направления X^9, в терминах $N\times N$ вещественных матриц $(\mathbb{X}^1,\dots,\mathbb{X}^8)$ (см., например, [148]). Калибровочное поле на мировом объёме также представляется матрицей $\mathbb{A}_i$, и мы фиксируем выбор калибровки такой, что $\mathbb{A}_9 = 0$. Теперь ищем (суперсимметричное) решение уравнений неабелевой теории Янга – Миллса с условиями $\mathbb{X}^A = (\mathbb{X}^4,\dots,\mathbb{X}^8) = 0$, задающими положение D3-браны (рис. 2б). Уравнения движения вместе с суперсимметрией сводятся буквально к уравнениям Нама [149]:

$$\frac{\partial\mathbb{X}^i}{\partial x^9} = \pm\frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon^{ijk}\,[\mathbb{X}^j,\mathbb{X}^k], \tag{4.16}$$

где $i,j,k = 1,2,3$. Следующее решение этой системы уравнений точно воспроизводит профиль монополя, полученный ранее в противоположном подходе:

$$\mathbb{X}^i = \pm\frac{1}{2x^9}\,\sigma^i, \tag{4.17}$$

где σ^i — обычные матрицы Паули.

"Координаты" $\mathbb{X}^i$ используются для измерения физического радиуса сферы вокруг D1-браны на поверхности $\Sigma_\perp$, определяемой равенством $\mathbb{X}^A = 0$:

$$R^2 = \frac{2\pi\alpha'}{N}\,\mathrm{Tr}\left[\sum_{i=1}^{3}\mathbb{X}^i\mathbb{X}^i\right] = \frac{\pi\alpha'(N^2-1)}{(x^9)^2}. \tag{4.18}$$

Мы видим, что пространство вблизи пересечения имеет геометрию бесконечной глубокой горловины, что при больших N действительно соответствует предыдущему результату (4.14).

Приведённая картина была поднята в М-теорию в работе [59] для описания пересечений М2- и М5-бран. Общая идея в основном та же: с точки зрения теории М5-бран граница М2-браны описывается струнным BPS-солитоном (Богомольный – Прасад – Зоммерфельд) в суперсимметричной $d = 6$ $\mathcal{N} = (2,0)$ калибровочной теории. Скалярные поля теории, соответствующие функциям вложения мембраны, принадлежат супермультиплету, содержащему самодуальную 3-форму, что затрудняет написание лагранжиана. Уравнения движения для полей калибровочной теории были получены в [150, 151] в так называемом формализме супервложения, где супермногообразие, описывающее мировой объём М5-браны, вкладывается в другое супермногообразие, бозонная часть которого является таргет-пространством-временем. В работе [60] уравнения были представлены в форме Грина – Шварца и было найдено решение в виде струнного солитона. Хотя мы не можем дать подробный обзор формализма, не увеличивая излишне объём текста, было бы разумно дать некоторые дополнительные детали и набросать основные результаты, следуя [60]. Во-первых, отметим, что все приведённые ниже уравнения написаны в так называемой статической калибровке, где с помощью суперрепараметризации мирового объёма бозонные координаты отождествляются с шестью пространственно-временны́ми направлениями в таргете (продольные направления) и 16 из 32 фермионных полей кладутся равными нулю. В поисках классических решений мы приравняем остальные фермионные поля к нулю и напишем следующие бозонные уравнения:

$$\begin{aligned} &G^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu X^{a'} = 0,\\ &G^{\mu\nu}\nabla_\mu H_{\nu\rho\sigma} = 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Условные обозначения для индексов следующие: $\mu,\nu,\kappa,\ldots = 0,\ldots,5$ и $a,b,c,\ldots = 0,\ldots,5$ — координатные индексы на мировом объёме и в касательном к нему; $a',b',c',\ldots = 1',\ldots,5'$ нумеруют поперечные направления. В дальнейшем мы разобьём $\mu = (0,1,m)$ и $a = (0,1,\alpha)$, где $m = 2,3,4,5$ и $\alpha = 2,3,4,5$ нумеруют направления, перпендикулярные солитону (координатные и касательные соответственно). Ковариантная производная $\nabla_m = \nabla_m[g]$ строится по метрике, записанной в терминах стандартного репера на мировом объёме $g_{\mu\nu} = e_\mu{}^a e_\nu{}^b\eta_{ab}$. Остальные поля определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} &G_{\mu\nu} = E_\mu{}^a E_\nu{}^b\eta_{ab},\\ &E_\mu{}^a = e_\mu{}^b(m^{-1})_b{}^a,\\ &m_a{}^b = \delta_a{}^b - 2h_{acd}h^{bcd},\\ &H_{\mu\nu\rho} = E_\mu{}^a E_\nu{}^b E_\rho{}^c m_b{}^d m_c{}^e h_{ade}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

где h_{abc} — самодуальная 3-форма на мировом объёме. Заметим, что поле $H_{\mu\nu\kappa}$ не самодуально и, кроме того, его можно записать в виде $H_{\mu\nu\kappa} = 3\partial_{[\mu}B_{\nu\kappa]}$.

Теперь ищем струнное решение, лежащее в плоскости $(0,1)$, для чего вводим следующий анзац:

$$\begin{aligned} &X^{5'} = \phi,\\ &h_{01\alpha} = v_\alpha,\\ &h_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}v^\delta. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Обозначив $H_{01m} = V_m$, можно записать уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\delta^{mn}\partial_m\partial_n\phi = 0\,,\\ &\delta^{mn}\nabla_m V_n = 0\,. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Тогда решение, описывающее N струнных BPS-солитонов, принимает вид

$$\begin{aligned} &H_{01m} = \pm\frac{1}{4}\,\partial_m\phi\,,\\ &H_{mnp} = \pm\frac{1}{4}\,\epsilon_{mnpq}\delta^{qr}\partial_r\phi\,,\\ &\phi = \phi_0 + \sum_{I=0}^{N-1}\frac{2Q_0}{|x-y_I|^2}\,. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Заметим, что решение не требует источника, следовательно, оно действительно солитонное, и в силу самодуальности солитон обладает как электрическим, так и магнитным зарядом по отношению к H_{mnk}, причём оба равны $\pm Q_0$.

Приведённое струнное солитонное решение (4.23) имеет нетривиальный профиль поля $X^{5'}$, вытянутого вдоль X^1, и соответствует M2-бране, вытянутой вдоль направлений $(015')$, оканчивающихся на M5-бране, эволюционирующей в направлениях (012345). Чтобы прийти к обобщению уравнения Нама для системы M2–M5-бран, мы поступим, как и раньше: опишем пересечение в терминах конструкции размытой сферы и напишем матричное уравнение, решение которого имеет профиль струнного солитона. Для этого нам требуется уравнение, которое имеет симметрию SO(4), а не симметрию SO(3), как в случае уравнения Нама, что и является технической причиной появления скобки Намбу. Размытая 2-сфера, описывающая пересечение D1–D3-бран, должна быть обобщена до конструкции размытой 3-сферы, представленной в [152]. Такое пространство описывается четырьмя $N\times N$-матрицами G^i, где

$$N = \frac{(n+1)(n+3)}{2}\,,\quad n = 2k+1\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,. \tag{4.24}$$

При $n=1$ эти матрицы являются буквально стандартными гамма-матрицами в четырёх измерениях. В явном виде матрицы задаются как

$$\begin{aligned} &G^i = \mathcal{P}_{\mathcal{R}_+}\sum_{s=1}^{N}\rho_s(\Gamma^i P_-)\mathcal{P}_{\mathcal{R}_-} + \mathcal{P}_{\mathcal{R}_-}\sum_{s=1}^{N}\rho_s(\Gamma^i P_+)\mathcal{P}_{\mathcal{R}_+}\,,\\ &\sum_{s=1}^{n}\rho_s(\Gamma^i) = \left(\Gamma^i\otimes\ldots\otimes 1 + \ldots + 1\otimes\ldots\otimes\Gamma^i\right)_{\mathrm{sym}}\,, \end{aligned} \tag{4.25}$$

где нижний индекс sym обозначает полную симметризацию тензорного произведения. Проекторы $P_\pm = 1/2(1\pm\Gamma^5)$, где Γ^5 — стандартная гамма-матрица. Проекторы $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_\pm}$ проецируют на неприводимые представления

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_+ = \left(\frac{n+1}{4},\frac{n-1}{4}\right),\\ &\mathcal{R}_- = \left(\frac{n-1}{4},\frac{n+1}{4}\right) \end{aligned} \tag{4.26}$$

группы $\mathrm{Spin}(4) = \mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)$. Наконец, обозначим $G_5 = \mathcal{P}_{\mathcal{R}_+} + \mathcal{P}_{\mathcal{R}_-}$.

Теперь, взяв $\mathbb{X}^i\in\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$, правильное обобщение уравнения Нама можно записать в виде

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{X}^i}{\mathrm{d}s} + \frac{\lambda M_{11}^3}{8\pi}\,\epsilon_{ijkl}\left[G_5,\mathbb{X}^j,\mathbb{X}^k,\mathbb{X}^l\right] = 0\,, \tag{4.27}$$

где скобка Намбу задаётся следующей суммой по перестановкам:

$$[A_1,A_2,A_3,A_4] = \sum_\sigma \mathrm{sign}\,(\sigma)A_{\sigma_1}A_{\sigma_2}A_{\sigma_3}A_{\sigma_4}\,. \tag{4.28}$$

Полученное уравнение можно интерпретировать как уравнение Богомольного для теории мембран. Как и в случае уравнения Нама, его решение можно записать в терминах матриц, определяющих размытую 3-сферу, которая в пределе больших N принимает следующий вид:

$$\mathbb{X}^i(s) = \frac{\sqrt{2\pi}\mathrm{i}}{\sqrt{\lambda(n+2)s}M_{11}^{3/2}}\,G^i\,. \tag{4.29}$$

Чтобы увидеть профиль струнного солитона, введём сначала физический радиус размытой 3-сферы

$$R^2 = \frac{1}{N}\left|\,\mathrm{Tr}\sum_i(\mathbb{X}^i)^2\right|. \tag{4.30}$$

Принимая теперь $s = X^{5'}$, приведённое выражение (4.30) даёт желаемый результат:

$$X^{5'} = \frac{2\pi N}{\lambda(n+2)M_{11}^{3/2}R^2}\,. \tag{4.31}$$

Отсюда мы заключаем, что при обобщении уравнения Нама, описывающего D1–D3-стыки бран, на браны более высоких размерностей, естественным образом возникает скобка Намбу, а полученное обобщение принято называть уравнением Басу–Харви. Позже в работах [64, 65] на основе этого наблюдения было предложено действие для стопки (из 2) M2-бран, которое с необходимостью включает скобку Намбу полей на мировом объёме. Хотя позже в статье [66] была предложена альтернативная формулировка теории на мировом объёме (ABJM), не требующая скобок Намбу, в ней всё ещё можно наблюдать проявления этой структуры. Здесь имеется в виду $\mathrm{U}(1)^3$-деформация фона $\mathrm{AdS}_3\times\mathbb{S}^7$, впервые рассмотренная Луниным и Малдасеной в [8], которая голографически дуальна β-деформации теории ABJM. С точки зрения супергравитации она соответствует SL(2)-преобразованию параметра

$$\tau = C_{123} + \mathrm{i}\sqrt{G}\,, \tag{4.32}$$

где (123) — три направления $\mathbb{S}^1$ $\mathbb{S}^7$. Эквивалентно можно это преобразование понимать как 3-векторную деформацию, описываемую обобщённым уравнением Янга–Бакстера, как обсуждалось выше. Мы уже видели, что оно естественно возникает при введении тройки Лакса для системы Намбу.

Со стороны теории ABJM β-деформации Лунина–Малдасены соответствуют введению определённых фазовых множителей для полей, входящих в суперпотенциал [95]:

$$\begin{aligned} W\to W_\beta = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Tr}\left[\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\pi\beta}{2}\right)A_1B_1A_2B_2 - \right.\\ \left. - \exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi\beta}{2}\right)A_1B_2A_2B_1\right]. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Здесь уместно рассмотреть аналогичную деформацию теории $\mathcal{N}=4$ SYM, а именно $\mathrm{U}(1)^2$ β-деформацию. На стороне гравитации преобразование оказывается абелевой бивекторной деформацией вдоль двух из трёх абелевых векторов Киллинга голографически дуального решения $\mathrm{AdS}_5\times\mathbb{S}^5$. На стороне калибровочной теории всё становится намного интереснее, и преобразование соответствует деформации произведения полей

$$fg\to f*g=\exp\left[\mathrm{i}\pi\beta\left(p_1^f p_2^g-p_2^f p_1^g\right)\right]fg\,, \tag{4.34}$$

где p_1 и p_2 обозначают генераторы двух изометрий U(1), а верхний индекс указывает, действует ли генератор на f или g. Теперь, если обе изометрии проходят вдоль пространства AdS, то мы получим произведение Мойала и, соответственно, некоммутативную деформацию SYM [95]; если одна изометрия — вдоль AdS, а другая — вдоль сферы, то мы получим так называемые дипольные деформации; когда обе изометрии проходят вдоль сферы, мы получаем β-деформацию Лунина – Малдасены. В этом последнем случае генераторы действуют просто умножением операторов на фазовые множители, и деформированный суперпотенциал становится (см. [95] для более подробной информации и для соответствующей бранной картины):

$$W\to W_\beta=\mathrm{Tr}\left[\exp\left(\mathrm{i}\pi\beta\right)\Phi_1\Phi_2\Phi_3-\exp\left(-\mathrm{i}\pi\beta\right)\Phi_1\Phi_3\Phi_2\right]. \tag{4.35}$$

Наиболее интригующим здесь является то, что бивекторная деформация эффективно вводит нетривиальную скобку операторов

$$[x^1,x^2]=\beta\,. \tag{4.36}$$

Когда обе изометрии некомпактны, параметр некоммутативности в правой части буквально является параметром бивекторной деформации, естественным образом возникающим из двойной теории‘ поля. Теперь для исключительного случая имеем тривектор, который предположительно должен соответствовать параметру неассоциативности

$$[x^m,x^n,x^k]=\Omega^{mnk} \tag{4.37}$$

или определять тройное произведение, подобное мойаловскому, чья явная форма не представлена в литературе (см., однако, [153] для определения тризвёздного произведения в контексте теории ABJM). Точное определение такого тройного произведения, а также контролируемая формулировка неассоциативной калибровочной теории стоят среди увлекательных направлений исследований, направленных на более глубокое понимания мембранной динамики.

4.4. Открытые мембраны и петлевые переменные

Поскольку граница M2-браны, оканчивающейся на M5-бране, имеет вид струны, можно было бы ожидать, что естественные переменные, определяющие теорию на мировом объёме мембраны, принимают значения в алгебре петель. Насколько нам известно, первое упоминание об алгебрах петель в контексте мембранной динамики появляется в [154], где был проведён анализ канонической скобки Дирака для полей на мировом объёме мембраны. Было обнаружено, что так же, как некоммутативность открытых концов струн возникает для D-бран на фоне постоянного поля NS 2-формы, в случае мембран возникает некоммутативность в пространстве петель. Авторы определяют звёздное произведение полей $X^i(s)$, где s параметризует границу мембраны в форме петли. Замечательным наблюдением, связывающим этот подход с поливекторными деформациями, является то, что тензор Ω^{mnk}, параметризующий деформации, буквально определяет метрику открытой мембраны.

Начнём с краткого напоминания выражений, связанных с некоммутативностью открытых струн, за подробностями читатель отсылается к оригинальной работе [119]. Рассмотрим теорию открытой струны на фоне нетривиального B-поля со стандартным действием второго порядка

$$S_{F1}=T\int \mathrm{d}^2\sigma\left(\sqrt{h}g_{mn}h^{\alpha\beta}+b_{mn}\epsilon^{\alpha\beta}\right)\partial_\alpha X^m\,\partial_\beta X^n\,, \tag{4.38}$$

где интегрирование ведётся по мировому листу струны Σ с индуцированной метрикой $h_{\alpha\beta}$ и координатами $\sigma^\alpha=(\tau,\sigma)$. Если метрика и B-поле постоянны, то граничные условия вдоль мирового объёма Dp-браны принимают вид

$$g_{mn}\partial_{\mathbf{n}}X^n+b_{mn}\partial_t X^n\Big|_{\partial\Sigma}=0\,, \tag{4.39}$$

где $\partial_{\mathbf{n}}$ обозначает производную вдоль вектора нормали к $\partial\Sigma$, а ∂_t обозначает производную вдоль касательного вектора. Нас интересуют квантовые свойства такой двумерной теории поля с границей, в частности двухточечные корреляционные функции $\langle X^m(\tau,\sigma)X^n(\tau',\sigma')\rangle$, определяющие пропагатор теории. Ограничиваясь для простоты диском в роли поверхности Σ и вводя, как обычно, комплексные координаты $(z,\bar z)$, приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned}\left\langle X^m(z)X^n(z')\right\rangle&=\gamma^{mn}\log|z-\bar z|-g^{mn}\log|z-z'|-\\&-G^{mn}\log|z-\bar z'|^2-\Theta^{mn}\log\frac{z-\bar z'}{\bar z-z'}+D^{mn}\,,\end{aligned} \tag{4.40}$$

где D^{mn} не зависит от координат мирового объёма. Матрицы G^{mn} и Θ^{mn} определяются как симметричная и антисимметричная части матрицы $(g+b)^{-1}$ соответственно.

Интересно следующее наблюдение. Если обе точки z и z' находятся внутри мирового объёма и почти совпадают, то коррелятор ведёт себя как обычный пропагатор двумерной конформной теории скалярных полей X^m. Тогда матрица g_{mn} является правильной метрикой для этих полей, и мы называем её метрикой замкнутой струны. Однако в случае открытой струны вершинные операторы вставляются на границе, т.е. когда и z, и z' находятся на краю диска, т.е. $z=\tau$, $z'=\tau'$. Тогда имеем

$$\left\langle X^m(\tau)X^n(\tau')\right\rangle=-G^{mn}\log(\tau-\tau')^2+\frac{\mathrm{i}}{2}\,\Theta^{mn}\epsilon(\tau-\tau')\,, \tag{4.41}$$

где для D^{mn} выбрано некоторое удобное для вычислений значение, а $\epsilon(\tau)$ обозначает функцию, равную $+1$ для положительного аргумента и -1 для отрицательного. Мы видим, что матрицу G^{mn} теперь можно интерпретировать как метрику, видимую открытыми концами струны, поскольку она обеспечивает правильное поведение пропагатора для близких точек на границе. Объект Θ^{mn} есть параметр некоммутативности концов открытой струны, а это означает, что эффективная теория поля на Dp-бране на фоне ненулевого B-поля должна описываться некоммутативной теорией Янга–Миллса. В [119] показано, что это действительно так.

Соотношение между параметрами открытой и замкнутой струны можно преобразовать к следующему виду:

$$(g+b)^{-1} = G + \Theta\,, \tag{4.42}$$

оно имеет буквально вид бивекторной деформации, когда под Θ понимается тензор деформации, а под G — исходный недеформированный фон. Хотя до конца не ясно, в чём глубинная причина такого сходства, оно не может быть простым совпадением, так как точно такое же совпадение наблюдается между открыто-замкнутым мембранным преобразованием [147] и правилами тривекторной деформации. Прежде чем перейти к случаю мембраны, уместно упомянуть ещё одно происхождение метрики открытой струны G^{mn}, а именно действие Dp-браны. Схематически оно имеет вид

$$S_{\mathrm{Dp}} = T_p \int \mathrm{d}^{p+1}\xi \exp(\phi)\sqrt{\det(g+\mathcal{F})} + \int \mathcal{C}_{(p+1)} + \ldots\,, \tag{4.43}$$

здесь $\mathcal{F} = \mathrm{d}A + b$, где $A = A_\alpha\,\mathrm{d}\xi^\alpha$ обозначает векторное поле мирового объёма Борна–Инфельда, взаимодействующее с концами открытой струны, g и b обозначают обратные образы поля таргет-пространства, $\mathcal{C}_{(p+1)}$ обозначает старшую RR-форму, взаимодействующую с Dp-браной, а точки обозначают остальные члены, необходимые для калибровочной инвариантности действия. Варьируя действие относительно скалярных полей X^m, получаем уравнение

$$\Box[G]X^m + \ldots = 0\,, \tag{4.44}$$

где квадрат обозначает даламбертиан на мировом объёме, построенный на прообразе метрики открытой струны G_{mn}, а точки обозначают различные члены, содержащие только линейные производные $\partial_\alpha X^m$. Отсюда видим, что метрика открытой струны оказывается естественной метрикой для динамики скалярных полей, представляющих собой не что иное, как возбуждения открытой струны, перпендикулярные объёму Dp-браны.

Обратимся теперь к трёхмерной сигма-модели, взаимодействующей с пространственно-временно́й метрикой g_{mn} в таргет-пространстве-времени, полем 3-форм C_{mnk}, которое будет моделировать динамику M2-браны M-теории. Действие модели можно записать следующим образом:

$$S = \frac{1}{2l_p^2}\int_\Sigma \mathrm{d}^3\sigma\sqrt{-h}g_{mn}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^m\partial_\beta X^n + \int_\Sigma C_{(3)} + \int_{\partial\Sigma} B_{(2)}\,, \tag{4.45}$$

где Σ обозначает мировой объём модели, а $\partial\Sigma$ — её пространственно-подобную границу. Подобно открытым концам струн, динамика которых эффективно описывается Dp-браной, граница M2-браны описывается в рамках теории мирового объёма M5-браны. Поскольку эта теория нелагранжева, в том смысле, что её правильное лагранжево описание неизвестно, задача написать аналог действия DBI оказывается исключительно нетривиальной. С другой стороны, стандартные методы конформной теории поля, использованные выше для получения корреляций на границе двумерного диска, здесь не работают, поскольку теория является трёхмерной. Чтобы обойти эти трудности, в [155] был предложен элегантный подход: 1) рассмотреть специальный предел отделения, чтобы заморозить динамику объёмной моды, сохраняя невырожденной теорию на мировом объёме M5-браны, 2) использовать первичные связи полученной теории для построения скобки Дирака, которая фактически кодирует петлевую некоммутативность граничных полей.

Чтобы прокомментировать первый шаг, отметим сначала следующее [155]: в M-теории нет способа взятия предела, при котором натяжение пробной M2-браны было бы намного меньше, чем натяжение фоновой M5-браны. Такая ситуация сильно контрастирует с теорией открытых струн, где малая струнная константа связи $g_s \ll 1$ приводит к большому натяжению фоновой Dp-браны $T_{\mathrm{Dp}} \sim g_s^{-1}$, в то время как фундаментальное натяжение струны $T_{F1} \sim 1$. Поэтому для предотвращения деформации фона пробной M2-браной предположим, что он порождается набором большого числа N_5 M5-бран:

$$\mathrm{d}s^2 = H^{-1/3}\,\mathrm{d}x_{\|}^2 + H^{2/3}\,\mathrm{d}x_\perp^2\,, \quad H = 1 + \frac{N_5 l_p^3}{x_\perp^3}\,, \tag{4.46}$$

где $\mathbf{x}_{\|}$ и $\mathbf{x}_\perp$ обозначают направления, параллельные и перпендикуляные M5-бранам соответственно. Напряжённость поля 3-формы F_4 пропорциональна форме объёма в трансверсальном пространстве. Теперь отделим одну M5-брану от стопки и переместим её в точку r_0, близкую к исходной стопке. Если $N_5 \gg 1$ и r_0 достаточно малы, то взаимодействие между этой M5-браной и оставшейся стопкой эффективно её замораживает, так что M2-брана может выступать в роли пробника, не деформируя её. Вводя малый параметр $\epsilon \to 0$, мы можем записать предел отделения в виде

$$\begin{aligned} &l_p \sim \epsilon l_p\,,\\ &\frac{N_5}{r_0^3} \sim \epsilon^{-3}\,\frac{N_5}{r_0^3}\,, \end{aligned} \tag{4.47}$$

так что произведение hl_p^3 остаётся конечным. Здесь h входит в самодуальную напряжённость поля мирового объёма $\mathcal{H}_{\mu\nu\rho}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_{012} = -\frac{h}{\sqrt{1 + l_p^6 h^2}}\,,\\ &\mathcal{H}_{345} = h\,. \end{aligned} \tag{4.48}$$

В таком пределе действие, которое необходимо проквантовать, принимает особенно простой вид

$$S = \frac{1}{3}\int_{\partial\Sigma} \mathrm{d}^2\sigma\,\mathcal{H}_{\mu\nu\rho}X^\mu\dot{X}^\nu X'^\rho\,, \tag{4.49}$$

где точка и штрих обозначают производные по координатам (τ,σ) на границе $\partial\Sigma$. Одновременная скобка Дирака для полей $X^a = \{X^3, X^4, X^5\}$ тогда становится

$$\left[X^a(\tau,\sigma), X^b(\tau,\sigma')\right] = -\frac{1}{h}\,\frac{\epsilon^{abc}X'^c(\sigma)}{\left|X^a(\sigma)\right|^2}\,\delta(\sigma-\sigma')\,. \tag{4.50}$$

Немедленно видим, что переменные $X^a(\sigma)$, параметризованные координатой границы мирового объёма σ, действительно некоммутативны. Приведённое уравнение (4.50) можно понимать как коммутационное соотношение для переменных алгебры петель $X^a(\sigma)$. То же наблюдение будет сделано в следующем разделе на основе мембранной конструкции ADHM (Атья–Дринфельд–Хитчин–Манин).

Сравнивая приведённый выше коммутатор с антисимметричной частью (4.41), мы ожидаем, что правая часть уравнения будет интерпретироваться в терминах метрики, видимой открытой мембраной. Действительно, именно это следует из работы [147], где введены параметры $\Theta^{\mu_1\ldots\mu_p}$, называемые обобщёнными тета-параметрами. Вместо того чтобы копировать соответствующие выражения из этой статьи, проиллюстрируем идею в терминах полей исключительной теории поля. Отображение открыто-замкнутых струн $G+\Theta = (g+b)^{-1}$ есть не что иное, как два разных способа записи одного и того же представителя фактор-пространства $\mathrm{O}(d,d)/\mathrm{O}(d)\times\mathrm{O}(d)$:

$$\begin{bmatrix} g-bg^{-1}b & bg^{-1} \\ g^{-1}b & g^{-1} \end{bmatrix} = \mathcal{H} = \begin{bmatrix} G & \Theta G \\ G\Theta & G^{-1}-\Theta G\Theta \end{bmatrix}. \qquad (4.51)$$

Более того, раскладывая образующие $\mathrm{O}(d,d)$ по действию её подгруппы $\mathrm{GL}(d)$ (верхний левый и нижний правый блоки в матричных обозначениях) $\{T_{\mu\nu}, T^{\mu}{}_{\nu}, T^{\mu\nu}\}$, можем записать матрицу $\mathcal{H}$ в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{O}^T\begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G^{-1} \end{bmatrix}\mathcal{O}, \quad \mathcal{O} = \exp\left[\Theta^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\right]. \qquad (4.52)$$

Другими словами, добавление некоммутативного параметра $\Theta^{\mu\nu}$ можно понимать как преобразование $\mathrm{O}(d,d)$. Теперь, поднимая эти рассуждения до исключительной теории поля, т.е. заменяя ортогональную группу одной из групп SL(5), SO(5,5) или E_d с $d=6,7,8$, мы в точности воспроизводим выражения из [147]. Проиллюстрируем это на примере SL(5). Разложим образующие под действием её подгруппы GL(4) (верхний левый блок) $\{T_{\mu\nu\rho}, T^{\mu}{}_{\nu}, T^{\mu\nu\rho}\}$ и напишем

$$\begin{gathered} \mathcal{U} = \exp\left[\Theta^{\mu\nu\rho}T_{\mu\nu\rho}\right], \\ \mathcal{U}^{-1}\begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathcal{U} = \begin{bmatrix} G_{\mu\nu} & \epsilon_{\mu\rho_1\rho_2\rho_3}\Theta^{\rho_1\rho_2\rho_3} \\ \epsilon_{\nu\rho_1\rho_2\rho_3}\Theta^{\rho_1\rho_2\rho_3} & 1-\Theta_{\rho_1\rho_2\rho_3}\Theta^{\rho_1\rho_2\rho_3} \end{bmatrix}. \end{gathered} \qquad (4.53)$$

Множитель, пропорциональный степеням $1-\Theta_{\rho_1\rho_2\rho_3}\times\Theta^{\rho_1\rho_2\rho_3}$, исходит из правильной нелинейной реализации представителя фактор-пространства SL(5)/SO(5) в терминах фактической пространственно-временно́й метрики и 3-формы С-поля.

Видно, что три индекса параметра $\Theta^{\mu\nu\rho}$ естественным образом происходят из трёх пространственно-временны́х измерений M2-браны; это предполагает наличие $\Theta^{\mu_1\ldots\mu_6}$ в дополнение к тривектору, что оказывается верным. Редукция до теории типа IIA нарушает исключительную группу до её подгруппы $\mathrm{O}(d,d)$ и порождает параметры $\Theta^{\mu_1\ldots\mu_p}$ и, соответственно, все выражения, приведённые в [147]. Таким образом, "3-индексность" теории мембран можно понимать либо как необходимость введения структуры Намбу для описания её динамики в алгебраических терминах, либо как петлевую некоммутативность. Возможно, что эти два подхода полностью эквивалентны, что представляется интересным направлением для дальнейших исследований.

4.5. Петлевая ADHM-конструкция

Естественность описания динамики мембраны в терминах полевых переменных можно увидеть из построения ADHM для мембраны. Для этого вернёмся к уравнениям Нама и Басу–Харви и рассмотрим более подробно результаты работ [156, 157] (см. также лекции [158]), где было показано, что уравнение Басу–Харви может быть интерпретировано как уравнение Нама в пространстве петель. Подход первой работы основан на разложении $\mathbf{so}(4)=\mathbf{so}(3)\oplus\mathbf{so}(3)$, что позволяет понимать размытую 3-сферу, описывающую пересечения M2–M5-бран как пару размытых 2-сфер. Во второй работе, которую мы подробнее рассмотрим ниже, используются в целом те же петлевые переменные, и основной идеей является так называемое преобразование трансгрессии, позволяющее отображать конечномерный джерб с 2-формой связности в бесконечномерное векторное расслоение с 1-формой связности, принимающей значения в пространстве петель.

Для того чтобы проиллюстрировать построение работы [157], начнём со случая обычного уравнения Нама, описывающего монополь Дирака. В обозначениях [157] мы имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbb{X}^i = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}[\mathbb{X}^j,\mathbb{X}^k], \qquad (4.54)$$

где $\mathbb{X}^{i\dagger}=-\mathbb{X}^i$ принимают значения в алгебре $\mathbf{u}(k)$, описывая тем самым k D1-бран. Чтобы построить монопольное решение Дирака, рассмотрим оператор Дирака

$$\nabla\!\!\!\!/_s = -\mathbb{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}+\sigma^i\otimes\mathrm{i}\mathbb{X}^i. \qquad (4.55)$$

Определяя оператор Лапласа $\Delta=\nabla\!\!\!\!/^{\dagger}\,\nabla\!\!\!\!/$, мы видим, что выполнение условия $[\Delta_s,\sigma^i\otimes\mathbb{1}]=0$ эквивалентно условию того, что $\mathbb{X}^i$ является решением уравнения Нама. Следуя стандартной конструкции ADHMN [62, 159], введём следующий твистованный оператор Дирака:

$$\nabla\!\!\!\!/_{s,x} = -\mathbb{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}+\sigma^i\otimes\left(\mathrm{i}\mathbb{X}^i+x^i\mathbb{1}\right), \qquad (4.56)$$

который всё ещё удовлетворяет условию $[\Delta_{s,x},\sigma^i\otimes\mathbb{1}]=0$ на решениях уравнения Нама. Тогда ортонормированные нулевые моды твистованного оператора Дирака

$$\begin{gathered} \nabla\!\!\!\!/^{\dagger}_{s,x}\psi_{s,x,\alpha}=0, \quad \alpha=1,\ldots,N, \\ \delta_{\alpha\beta}=\int\mathrm{d}s\,\psi^{\dagger}{}_{s,x,\alpha}\,\psi_{s,x,\beta} \end{gathered} \qquad (4.57)$$

определяют калибровочное и скалярное поля монополя. Здесь x^i имеют смысл координат в трансверсальном пространстве, а N обозначает общее число D3-бран, несущих концы k D1-бран. Калибровочный потенциал и поле Хиггса тогда имеют вид

$$\begin{gathered} A_i=\int\mathrm{d}s\,\psi^{\dagger}{}_{s,x}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,\psi_{s,x}, \\ \Phi=-\mathrm{i}\int\mathrm{d}s\,\psi^{\dagger}{}_{s,x}\,s\,\psi_{s,x}, \end{gathered} \qquad (4.58)$$

где индексы α, обозначающие D3-браны, опущены. Найденные полевые конфигурации решают соответствующие уравнения Богомольного $F_{ij} = \epsilon_{ijk}\partial_k \Phi$, которые следуют из многомерного условия самодуальности Янга–Миллса. Конкретнее, задача решается при предположении, где все поля 10d SYM, кроме A_i и $\Phi^6 = \Phi$, равны нулю.

Проиллюстрируем полученные выводы двумя простыми примерами. Начнём со случая $N = k = 1$, что соответствует одной D1-бране, заканчивающейся на одной D3-бране. D1-брана вытянута вдоль $x^6 = s$. В этом случае решением уравнения Нама является $\mathbb{X}^i = 0$, нулевые моды скрученного оператора Дирака имеют вид

$$\psi_+ = \exp(-sR)\,\frac{\sqrt{R+x^3}}{x^1 - \mathrm{i}x^2}\begin{bmatrix} x^1 - \mathrm{i}x^2 \\ R - x^3 \end{bmatrix}, \qquad \psi_- = \exp(-sR)\,\frac{\sqrt{R-x^3}}{x^1 + \mathrm{i}x^2}\begin{bmatrix} R + x^3 \\ x^1 + \mathrm{i}x^2 \end{bmatrix}, \tag{4.59}$$

где $R^2 = x^i x^i$. Для нулевой моды ψ_+ получаем следующую полевую конфигурацию:

$$\Phi = -\frac{\mathrm{i}}{2R}, \qquad A_i = \frac{\mathrm{i}}{2(x^1 + x^2)^2}\left[x^2\left(1 - \frac{x^3}{R}\right), -x^1\left(1 - \frac{x^3}{R}\right), 0, 0\right], \tag{4.60}$$

которая, очевидно, описывает монополь. Для нулевой моды ψ_- получаются поля, связанные с представленным выше калибровочным преобразованием везде, кроме точек $|x^3| = R$. Аналогично для двух D1-бран, т.е. при $k = 2$, $N = 1$, имеем $\mathbb{X}^i = (\mathrm{i}/2s)\sigma^i$ и $\Phi = -\mathrm{i}/R$, т.е. именно то решение, с которого мы начали в предыдущем разделе.

Изложенный подход можно применить к уравнению Басу–Харви и соответствующему уравнению Богомольного для самодуальной 3-формы практически без изменений вплоть до момента, когда определяется твистованный оператор. Уравнение имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbb{X}^i = \frac{1}{3!}\,\epsilon^{ijkl}\left[\mathbb{X}^j, \mathbb{X}^k, \mathbb{X}^l\right], \tag{4.61}$$

где теперь $\mathbb{X}^i$ принадлежит 3-алгебре Ли, т.е. линейному пространству с определённой на нём скобкой Намбу. Мотивируясь Т-дуальностью и дальнейшим поднятием системы D1–D3-бран до системы M2–M5-бран, запишем следующий оператор Дирака:

$$\not{\nabla}_s = -\gamma_5\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{2}\,\gamma^{ij} D(\mathbb{X}^i, \mathbb{X}^j), \tag{4.62}$$

где $D(\mathbb{X}^i, \mathbb{X}^j) = [\mathbb{X}^i, \mathbb{X}^j, \ ]$ — внутренняя производная, а γ^i — стандартные гамма-матрицы Дирака. Для более подробного обсуждения вида операторов Дирака в теориях типа IIB и типа IIA, дающего аргументы в пользу мотивации, см. оригинальную статью [157]. Как и ранее, условие того, что $\mathbb{X}^i$ удовлетворяет уравнению Басу–Харви, можно записать в виде $[\Delta_s, \gamma^{ij}] = 0$, где $\Delta_s = \not{\nabla}_s^\dagger\, \not{\nabla}_s$. Далее нам нужно ввести соответствующий твист так определённого оператора Дирака, для чего, очевидно, требуется член вида $\gamma^{ij} a_i b_j$, где, вообще говоря, $a_i \neq \alpha b_i$ в общем случае для некоторого коэффициента α. Далее используется тот факт, что векторное расслоение над 2-сферой, описывающее монополь Дирака, заменяется джербом над 3-сферой, который после действия отображения трансгрессии можно понимать в терминах петель над $\mathbb{S}^3$. Таким образом, вводим поля $x^i(\tau)$ с параметром τ, параметризующим петлю, и ограниченные условием $x^i(\tau)x^i(\tau) = R^2$. Отсюда следует,что $x^i\dot{x}^i = 0$, и дополнительно накладывается условие $\dot{x}^i\dot{x}^i = R^2$. Тогда правильный твист соответствующего оператора Дирака можно записать в следующем виде:

$$\not{\nabla}_{s,\,x(\tau)} = -\gamma_5\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} + \gamma^{ij}\left[\frac{1}{2}\,D(\mathbb{X}^i, \mathbb{X}^j) - \mathrm{i}\,x^i(\tau)\dot{x}^j(\tau)\right]. \tag{4.63}$$

Мы видим, что петлевые переменные естественным образом входят в твистованный оператор Дирака, а сама конструкция во многом повторяет традиционный подход ADHMN. Следующим шагом является построение калибровочных и скалярных полей, теперь определённых в пространстве петель, с использованием нулевых мод твистованного оператора Дирака:

$$\Phi\big(x(\tau)\big) = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}s\,\psi^\dagger{}_{s,\,x(\tau)}\, s\,\psi_{s,\,x(\tau)}, \qquad A_i\big(x(\tau)\big) = \int \mathrm{d}s\,\psi^\dagger{}_{s,\,x(\tau)}\,\partial_i \psi_{s,\,x(\tau)}, \tag{4.64}$$

где производная определяется как $\partial_i = \int \mathrm{d}\tau\,(\delta/\delta x^i(\tau))$. Далее, напряжённость калибровочного поля $A_i(x(\tau))$ определяется, как обычно: $F_{ij} = 2\partial_{[i}A_{j]}$, и, если $\mathbb{X}^i$ решает уравнение Басу–Харви, удовлетворяет

$$F_{ij}\big(x(\tau)\big) = \epsilon_{ijkl}\dot{x}^k \partial_l \Phi\big(x(\tau)\big). \tag{4.65}$$

Ключевым утверждением здесь является следующее: хотя это выражение схематически имеет вид уравнения Богомольного для теории SYM, его петлевая структура фактически делает его требуемым уравнением Богомольного для $D = 6$ $\mathcal{N} = (2,0)$ теории. Связь между самодуальной 3-формой и так определённой напряжённостью поля 2-формы имеет вид

$$F(V_1, V_2) = \int \mathrm{d}\tau\, H_{ijk}\big(x(\tau)\big)\dot{x}^k(\tau) V_1{}^i V_2{}^j, \tag{4.66}$$

где $V_{1,2}$ — произвольные векторы. Тогда уравнение (4.65) эквивалентно условию самодуальности 3-формы

$$H_{05i} = \frac{1}{4}\,\partial_i \Phi, \quad H_{ijk} = \frac{1}{4}\,\epsilon_{ijkl}\,\partial_l \Phi. \tag{4.67}$$

В качестве примера рассмотрим явные решения для $N = k = 1$, т.е. одной M2-браны, присоединённой к одной M5-бране. Тогда $\mathbb{X}^i = 0$ и оператор имеет восемь нулевых мод, из которых нам понадобятся только четыре, $\gamma_5 \psi_{s,\,x(\tau)} = \psi_{s,\,x(\tau)}$. Такое удвоение нулевых мод связано с переходом от матриц Паули к гамма-матрицам, что в свою очередь необходимо, поскольку SU(2)-симметрия уравнения Нама заменяется SO(4)-симметрией уравнения Басу–Харви. Остальные нулевые моды могут быть выбраны следующим образом:

$$\psi_{s,\,x(\tau)} = \exp(-R^2 s)\,\times \\ \times \begin{bmatrix} \mathrm{i}(R^2 + x^2\dot{x}^1 - x^1\dot{x}^2 - x^4\dot{x}^3 + x^3\dot{x}^4) \\ x^3(\dot{x}^1 + \mathrm{i}\dot{x}^2) + x^4(\dot{x}^2 - \mathrm{i}\dot{x}^1) - (x^1 + x^2)(\dot{x}^3 - \mathrm{i}\dot{x}^4) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.68}$$

Обратим внимание на R^2 в показателе экспоненты, что даёт правильную зависимость скалярного поля от физического расстояния $\Phi(x) = \mathrm{i}/2R^2$. Как и ранее, для случая $N = 1$ $k = 2$ мы воспроизводим обсуждавшееся ранее решение с $\mathbb{X}^i \propto G^i$.

Подводя итог, следуя [157], мы заметили, что, обращаясь к полям, определённым в пространстве петель, можно применить стандартную процедуру ADHMN к уравнению Басу – Харви и описать самодуальные струнные солитоны способом, очень похожим на монополь SYM. При этом джербы, также естественно появляющиеся в теории мембран, заменяются векторными расслоениями, но над пространством петель.

4.6. Спекуляции вокруг интегрируемости в M-теории

В разделе 3 мы кратко рассмотрели, как теория струн в качестве двумерной сигма-модели становится (классически) интегрируемой на определённых фонах. Это означает, что можно написать уравнения движения струны в терминах связности Лакса или написать квантовое уравнение Янга – Бакстера для её S-матрицы. На классическом уровне интегрируемость требует, чтобы связность Лакса была плоской, что означает возможность определения оператора параллельного переноса, который фактически представляет собой петлю Вильсона, вычисляемую на 1-форме Лакса. Обращаясь к теории двумерных мембран и наивно обобщая все эти структуры, можно было бы ожидать двумерного аналога петли Вильсона, которую естественно назвать поверхностью Вильсона[7]. Принципиальным здесь является то, что, с одной стороны, на двумерной поверхности нет естественно определённого упорядочения, а с другой стороны, 1-форма связности Лакса должна быть заменена 2-формой.

Сначала прокомментируем последнее требование. В целом можно ожидать в задаче 2-форму, так как концы двумерной мембраны образуют струну, которая естественным образом взаимодействует с 2-формой. В M-теории M2-брана оканчивается на M5-бране, поэтому теория 6-мерного мирового объёма последней формулируется в терминах 2-формы. Суперсимметрия требует, чтобы она была самодуальной, что делает построение лагранжевой формулировки очень трудным (различные подходы см. в [163 – 165]). Переходя от 1-формы связности до 2-формы, непосредственно приходим к понятию связности на джербе, возникающей при склеивании коциклов на пересечении четырёх и более карт [166, 167]. Следовательно, одной из возможностей построения аналога оператора эволюции является использование 2-формы связности на джербе.

Хотя джербы обеспечивают хорошую геометрическую основу для решения задачи, всё ещё остаётся неясным, существует ли естественное упорядочение на двумерной поверхности. Один из способов параметризации поверхности состоит в том, чтобы заметать её циклами (см., например, [168]), и, следовательно, связь Лакса естественным образом становится 1-формой, принимающей значения в пространстве петель. Как мы обсуждали выше, идея о том, что пространства петель должны иметь отношение к динамике мембраны, существует давно, и, в частности, в [154] было замечено, что так же, как концы открытой струны становятся некоммутативными, струнные границы M2-браны становятся некоммутативными в петлевом пространстве. Более того, метрика, которую видит открытая граница M2-браны, точно такая же, как в исключительном теоретико-полевом подходе к деформациям. Как мы кратко рассмотрим ниже, петлевая некоммутативность открытых мембранных границ естественным образом появляется при анализе уравнений Басу – Харви, описывающих пересечения M2 – M5-бран.

Наконец, рассмотрим квантовое уравнение Янга – Бакстера, описывающее факторизацию при рассеянии точечных частиц. В определённом смысле, с точки зрения теории струн это связано с рассеянием концов открытой струны, что дополнительно мотивируется рассмотренной выше конструкцией петли Вильсона. Размышляя дальше, приходим к выводу о том, что для описания интегрируемости мембраны следует интересоваться факторизацией рассеяния струн. Действительно, соответствующее уравнение получено и известно под названиями уравнение тетраэдра, уравнение Замолодчикова или уравнение Френкеля – Мура. Ниже мы кратко рассмотрим прогресс в поисках связи этих структур с трёхмерной интегрируемостью и M-теорией.

4.6.1. Поверхности Вильсона и связности на пространстве петель. Напомним, что для обсуждения интегрируемости двумерной теории поля вводится связность Лакса $A = A_\alpha\,\mathrm{d}\sigma^\alpha$, удовлетворяющая условию плоскостности $F = \mathrm{d}A + A \wedge A = 0$, и строится оператор эволюции, который является ничем иным, как линией Вильсона. Для периодических граничных условий можем записать

$$T = P\exp\left[\oint_\gamma A\right], \tag{4.69}$$

где интегрирование производится вдоль кривой. Условие плоскостности, т.е. другой способ записи уравнений движения такой системы, подразумевает

$$\dot{T} = [T, M]\,, \tag{4.70}$$

где $M = A_0(\sigma^1 = 0)$ и опущена возможная зависимость от спектрального параметра. Тогда следы различных степеней T дают сохраняющиеся заряды. Принимая это за отправную точку, можно получить скобки Пуассона соответствующей интегрируемой системы, используя r-матрицу $r \in \mathrm{End}\,(V \otimes V)$, где V представляет собой гильбертово пространство системы:

$$\{T_1, T_2\} = [r_{12}, T_1] + [r_{12}, T_2]\,. \tag{4.71}$$

Нижние индексы обозначают пространство, на котором действует оператор, т.е.

$$T_1 = T \otimes \mathrm{id}\,, \quad T_2 = \mathrm{id} \otimes T\,. \tag{4.72}$$

Чтобы обобщить эти конструкции, скажем, на трёхмерную теорию, очевидно, требуется поверхность Вильсона вместо линии Вильсона, вдоль которой интегрируется 2-форма $B_{\mu\nu}$. В то время как 1-форма A представляет собой связность на расслоении, 2-форму естественно рассматривать как связность на джербе, которая, в свою очередь, может быть отображена в 1-форму связности на пространстве петель [169, 170]. Так называемая карта трансгрессии использовалась в [171] для

[7] Ещё один намёк исходит из высших калибровочных теорий, где поверхности, понимаемые как высшие голономии, дают набор наблюдаемых [160 – 162].

описания теории $\mathcal{N}=(2,0)$ на М5-бране, сформулированной в терминах скобок Намбу в [172], в терминах теории Янга – Миллса на пространстве петель. Отображение естественным образом отождествляет элементы 3-алгебры Ли с элементами ассоциированной алгебры Ли (внутренних производных). Это похоже на конструкцию, которую мы обсуждали в разделе 2.3, где обобщение r-матрицы $\rho \in \mathrm{End}\,(V\otimes V\otimes V)$ было использовано для определения скобки Намбу для системы, описываемой парой Лакса $\dot{L}=[L,M]$, в виде

$$\{L_1,L_2,L_3\}=[\rho_{123},L_1]+[\rho_{123},L_2]+[\rho_{123},L_3]\,, \quad (4.73)$$

где обозначения те же, что и выше. Фундаментальное тождество для 3-скобки — это в точности обобщённое уравнение Янга – Бакстера (4.5). Теперь, с одной стороны, мы имеем формулировку теории М5-браны, т.е. теории оканчивающихся на ней границ М2-бран. С другой стороны, мы имеем обобщение классического уравнения Янга – Бакстера, предположительно описывающего рассеяние прямых струн, которые также можно понимать как границы М2-браны. Мы вернёмся к последнему пункту в разделе 4.6.2, а сейчас опишем конструкцию [171] более подробно.

Оператор эволюции $U=P\exp\int_\gamma A$ не зависит от пути γ, если связность A на расслоении плоская. При рассмотрении поверхностного интеграла $\int_\Sigma B$ 2-формы возникает проблема отсутствия естественно определённого порядка точек на поверхности. Эту проблему можно решить, разбив поверхность цилиндра Σ на набор петель $C(t)$, параметризованных $t\in[0,1]$ (рис. 3). Следовательно, вместо кривой на множестве точек мы рассматриваем кривую на множестве петель, а вместо 2-формы B рассматриваем 1-форму $\mathcal{A}$, представляющую связность на пространстве петель. Конкретнее, рассмотрим пространство

$$\mathcal{L}M=\{C:\mathbb{S}^1\to M\} \quad (4.74)$$

всех петель на многообразии M. В заданной карте кривая определяется координатными отображениями $x^\mu = x^\mu(s)$ с $s\in[0,2\pi]$. В каждой точке кривой можно построить касательный вектор $X^m(s)$, совокупность таких касательных векторов для заданной кривой C будем называть вектором, касательным к кривой (см. рис. 3)[8]. Естественно, имеется касательное расслоение к пространству петель $\mathcal{L}M$. Обозначим базис векторных полей как $\delta/\delta x^\mu(s)$ и базис 1-форм $\delta x^\mu(s)$, тогда обычное

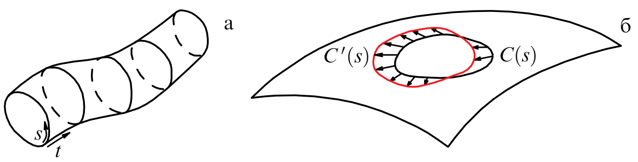

Рис. 3. (а) Путь в пространстве петель, параметризованный переменной t. Точки вдоль каждой петли параметризованы $s\in[0,2\pi]$. (б) Петля $C(s)$ и её деформации $C'(s)$. Векторное поле, касательное к деформации, обозначено стрелками.

[8] Мы намеренно оставляем обсуждение интуитивно понятным. Для более строгого и математически формального описания этих структур см., например, работу [170] и ссылки в ней.

действие 1-форм имеет вид

$$\delta x^\mu(s)\,\frac{\delta}{\delta x^\nu(s')}=\delta^\mu{}_\nu\,\delta(s-s')\,. \quad (4.75)$$

Следуя [170, 171], мы строим отображение трансгрессии $\mathcal{T}:\Omega^{k+1}(M)\to\Omega^k(\mathcal{L}M)$, связывающее $k+1$-формы на многообразии M и k-формы на пространстве петель $\mathcal{L}M$. В заданном базисе отображение имеет вид

$$(\mathcal{T}\omega)_C\big(v_1(x),\ldots,v_k(x)\big)=\oint_{\mathbb{S}^1}\mathrm{d}s\,\omega\big(v_1(s),\ldots,v_k(s),\dot{x}(s)\big)\,, \quad (4.76)$$

где $x^\mu=x^\mu(s)$ — координаты на петле C. Таким образом, в левой части равенства мы имеем k-форму, вычисляемую на k-векторных полях в точке C пространства $\mathcal{L}M$, а в правой части равенства мы имеем $k+1$-форму, вычисляемую на $k+1$-векторных полях в точках $x^\mu(s)$ и проинтегрированных для сохранения информации на всём цикле. В качестве конкретного примера рассмотрим случай $k=2$:

$$\int\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,(\mathcal{T}\omega)_{\mu,s;\nu,t}v_1^\mu\big(x(s)\big)v_2^\nu\big(x(t)\big)= \\ =\oint_{\mathbb{S}^1}\mathrm{d}r\,\omega_{\mu\nu\rho}v_1^\mu\big(x(r)\big)v_2^\nu\big(x(r)\big)\,\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}r}\,. \quad (4.77)$$

Обратим внимание на интегралы по s и t в левой части равенства, которые можно понимать как аналог свёртки по индексам при действии формой на вектор в пространстве петель, т.е. форма на пространстве петель имеет дискретный индекс $\mu,\nu,\ldots$ и непрерывный "индекс" $s,t,\ldots$ Вставляя дельта-функции Дирака в правую часть и опуская два интеграла, мы наконец имеем

$$(\mathcal{T}\omega)_{\mu,s;\nu,t}=\int\mathrm{d}r\,\omega_{\mu\nu\rho}\big(x(r)\big)\,\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}r}\,\delta(sr)\delta(tr)\,. \quad (4.78)$$

Следующим шагом в установлении связи между переменными 3-алгебры Ли теории $\mathcal{N}=(2,0)$ на М5-бране и теории типа Янга – Миллса является построение алгебры Ли из скобок Намбу. Для этого рассмотрим ассоциированную алгебру $\mathfrak{g}_\mathcal{A}$ внутренних производных, т.е. для любых двух элементов $a,b\in\mathcal{A}$ 3-алгебры Ли рассмотрим действие

$$D(a,b)\triangleright x\equiv[a,b,x]\,,\quad x\in\mathcal{A}\,. \quad (4.79)$$

Самодуальная 3-форма $H_{\mu\nu\rho}$-теории принимает значения в 3-алгебре Ли $\mathcal{A}$ и может быть отображена в 2-форму напряжённости поля Янга – Миллса, принимающую значения в пространстве петель, при помощи отображения трансгрессии, как описано выше. Для этого рассмотрим петлю C^m, принимающую значения в 3-алгебре Ли. Предположим, что переменные алгебры и петлевые переменные факторизуются, т.е.

$$C^\mu(s)=C\,x^\mu(s)\,,\quad C\in\mathcal{A}\,. \quad (4.80)$$

Формально это можно обеспечить, наложив условие $D(C^\mu,C^\nu)=0$. Тогда для самодуальной 3-формы отображение, подобное трансгрессии, определяется следующим образом:

$$(F_{\mu\nu})_C(v_1,v_2)=\oint_{\mathbb{S}^1}\mathrm{d}s\,D\Big(C,H_{\mu\nu\rho}\big(x(s)\big)\dot{x}^\rho(s)\Big)v_1^\mu(s)v_2^\nu(s)\,. \quad (4.81)$$

В компонентной форме действие 2-формы напряжённости поля в алгебре $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}$ имеет вид

$$F_{\mu,s;\nu,t} \triangleright \bullet = \oint_{\mathbb{S}^1} \mathrm{d}t \left[C, H_{\mu\nu\rho}(r)\dot{x}^\rho(r), \bullet\right] \delta(s-r)\delta(t-r)\,. \tag{4.82}$$

Поскольку 3-форма $H = \mathrm{d}B$ точна, 2-форма $F_{\mu\nu}$ на пространстве петель может быть представлена как напряжённость поля для 1-формы, определяемой естественным образом как

$$A_{\mu,s} \triangleright \bullet = \oint_{\mathbb{S}^1} \mathrm{d}s \left[C, B_{\mu\nu}(s)\dot{x}^\nu(s), \bullet\right] \delta(s-t)\,. \tag{4.83}$$

Здесь мы ограничены петлями, которые ковариантно постоянны относительно так определённой 1-формы связности, т.е.

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_\mu C^\nu &\equiv \partial_\mu \dot{x}^\nu(s)\, C + \dot{x}^\nu(A_\mu \triangleright C) = \\ &= \oint_{\mathbb{S}^1} \mathrm{d}s\, \frac{\delta}{\delta x^\mu(s)}\, \dot{x}^\nu(s)\, C + \dot{x}^\nu(A_\mu \triangleright C)\,. \end{aligned} \tag{4.84}$$

Интеграл, очевидно, равен нулю, и требование обращения в нуль оставшегося члена в итоге даёт

$$[C, \bullet, C] = 0\,. \tag{4.85}$$

Отображение, подобное трансгрессии, как указано выше, можно распространить также на фермионные и скалярные поля теории $\mathcal{N} = (2,0)$, принимающие значения в 3-алгебре Ли. Следовательно, весь формализм, включая уравнения движения и правила преобразования суперсимметрии, переписывается в петлевых переменных.

Размышляя над этими результатами и результатами предыдущего раздела, можно заключить, что переменные пространства петель более естественны для описания теории мирового объёма M5-браны и, следовательно, динамики открытых границ M2-браны. Хотя приведённая выше конструкция описывает теорию мирового объёма M5-браны, она даёт наводящие подсказки о том, как можно сформулировать структуры интегрируемости для M2-браны. Начнём с того, что в предыдущих разделах мы видели тесную связь между связностью Лакса для струны на определённом фоне, классическим уравнением Янга – Бакстера для r-матрицы и квантовым уравнением Янга – Бакстера. Первое является просто квазиклассическим пределом второго, которое, в свою очередь, определяет S-матрицу для струны на заданных фонах. Скобки Пуассона для эволюционных операторов, построенные из связности Лакса, можно представить в терминах классической r-матрицы, как в начале этого раздела. Кроме того, классическое уравнение Янга – Бакстера появляется в контексте бивекторных деформаций, заданных отображением открыто-замкнутой струны, как это обсуждалось в разделе 3.4. Теперь мы видим ту же связь между отображением открыто-замкнутой мембраны и так называемым обобщённым уравнением Янга – Бакстера, которое возникает в контексте тривекторных деформаций 11-мерных фонов. Обобщённый тета-параметр $\theta^{\mu\nu\rho}$, характеризующий открыто-закрытое отображение мембраны, также определяет некоммутативность мембраны на фоне ненулевого C-поля. При этом коммутационные соотношения записываются для переменных пространства петель, поэтому говорят о петлевой некоммутативности. Аналогично двумерному случаю обобщённое уравнение Янга – Бакстера гарантирует, что скобка, определённая с помощью ρ-тензора, как в (4.73), является скобкой Намбу, т.е. удовлетворяет фундаментальному тождеству.

Для логического завершения этих рассуждений хотелось бы определить оператор эволюции, используя правильно построенную поверхность Вильсона или голономию в пространстве петель, что вызывает больше всего проблем. Способ определения аналога конструкции Лакса – Захарова – Шабата для многомерных теорий с использованием петлевых переменных был предложен в [173] (краткий обзор см. в [168]). Основная идея состоит в том, чтобы параметризовать поверхность Вильсона набором петель, каждая из которых удовлетворяет уравнению параллельного переноса для пространственной связи петель A_μ. 1-форма связности принимает значения в неабелевой алгебре и нетривиально действует на петлях. Хотя этот формализм не полностью идентичен описанному выше, он достаточно похож на него, чтобы представлять интерес для дальнейшего исследования.

4.6.2. Уравнение тетраэдра. Предыдущее обсуждение параметров открыто-замкнутой струны/мембраны, ассоциированных с r-матрицей или ρ-тензором и скобками Пуассона/Намбу, было сосредоточено вокруг классического уравнения Янга – Бакстера и его обобщённого аналога для ρ-тензора. Как кратко обсуждалось в разделе 3.2, интегрируемость струны означает не только возможность определения плоской связности Лакса, но и возможность записи S-матрицы струны в терминах квантовой R-матрицы, которая решает квантовое уравнение Янга – Бакстера (QYBE)

$$R_{12}R_{23}R_{13} = R_{13}R_{23}R_{12}\,. \tag{4.86}$$

Здесь нижний индекс обозначает гильбертово пространство, на котором R-матрица действует в каждом пересечении линий. Квантовое уравнение Янга – Бакстера описывает рассеяние точечных частиц с факторизованной S-матрицей и является частным случаем бесконечного ряда так называемых симплексных уравнений (см., например, [174]). n-симплексное уравнение можно понимать как описывающее факторизацию S-матрицы, соответствующей рассеянию $n-1$-мерных объектов. Следовательно, нас естественно интересуют 2-симплексные уравнения, также известные как уравнения тетраэдра Замолодчикова (ZTE), введённые в [175] и получившие дальнейшее развитие в [176, 177] при описании трёхмерных интегрируемых систем. 4-симплексное уравнение впервые обсуждалось в работе [178], n-симплексные уравнения изучались, например, в [174, 179, 180].

Для записи 3-симплексного уравнения можно использовать различные соглашения относительно состояний рассеиваемых струн: состояния отрезков струны между вершинами [175], состояние вакуума между струнами (гранями тетраэдра) [174] или частицы на границах струн [178]. Начнём с первого и рассмотрим рассеяние прямых струн. Тогда r-матрица действует на пространстве состояний V струн, пересекающихся в каждой вершине тетраэдра, и, следовательно, $R \in \mathrm{End}\,(V \otimes V \otimes V)$. Тогда уравнение гласит:

$$R_{123}R_{145}R_{246}R_{356} = R_{356}R_{246}R_{145}R_{123}\,. \tag{4.87}$$

Альтернативное соглашение нумерует грани тетраэдра, которых теперь всего четыре, и, следовательно, схема не является локальной [181]. Это соответствует уравнению на $V^{\otimes 4}$, а не на $V^{\otimes 6}$, и называется уравнением Френкеля – Мура:

$$R_{234}R_{134}R_{124}R_{123} = R_{123}R_{124}R_{134}R_{234}\,. \tag{4.88}$$

Обратим внимание на важное отличие от qYBE и ZTE, заключающееся в том, что индексы для каждого пространства свёртывают более чем парой. Более подробное обсуждение уравнения тетраэдра и его связи с другими уравнениями для квантовых групп можно найти, например, в [182, 183].

Учёт связи между квазиклассическим пределом квантового уравнения Янга – Бакстера и бивекторными деформациями 10-мерных струнных фонов наводит на мысль искать аналогичные связи между уравнением тетраэдра (в любой формулировке) и так называемым обобщённым уравнением Янга – Бакстера (4.5). К сожалению, этот путь не так прост, как кажется, поскольку неизвестно, как определить квазиклассический предел для уравнения тетраэдра. Можно пойти самым наивным путём, для которого лучше всего подходит уравнение Френкеля – Мура, и рассмотреть $R_{123} = \mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}+\hbar\,\rho_{123}$. Подставляя этот анзац в (4.88), получаем, что в порядках $\hbar^0$ и $\hbar^1$ уравнение выполняется тривиально, а в порядке $\hbar^2$ имеем

$$[\rho_{123},\rho_{124}] + [\rho_{123},\rho_{134}] + [\rho_{124},\rho_{134}] + [\rho_{123},\rho_{234}] + \\ + [\rho_{134},\rho_{234}] + [\rho_{124},\rho_{234}] = 0\,. \tag{4.89}$$

Полученное уравнение имеет вид хорошего обобщения классического уравнения Янга – Бакстера, однако его нельзя записать в виде (4.5) для общей алгебры эндоморфизмов. Чтобы проиллюстрировать это, разложим ρ по базису $\{t_a\} = \mathrm{bas}\,\mathfrak{g}$ и запишем

$$r_{123} = \rho^{abc}\, t_a\otimes t_b\otimes t_c\otimes \mathbf{1}\,, \tag{4.90}$$

предполагая, что $\rho^{abc} = \rho^{[abc]}$ полностью антисимметричен. Теперь легко видеть, что в каждом члене классического 3-симплексного уравнения (4.89) получаются выражения вида

$$a\cdot b\otimes c\cdot d - b\cdot a\otimes d\cdot c\,, \tag{4.91}$$

где $a\cdot b$ обозначает умножение в универсальной обёртывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$. Такое выражение может быть преобразовано:

$$a\cdot b\otimes c\cdot d - b\cdot a\otimes d\cdot c = [a,b]\otimes\{c,d\} + \{a,b\}\otimes[c,d]\,, \tag{4.92}$$

где $[a,b]$ — образ скобки Ли, и мы формально определяем $\{a,b\} := a\cdot b + b\cdot a$. Поскольку нас интересует алгебра векторов Киллинга, не совсем ясно, как определить симметричное произведение, не вводя связность. Конечно, это заключение не мешает искать решения для других конкретных реализаций алгебры $\mathfrak{g}$; например, для $\mathrm{Spin}(d)$ антикоммутатор точно определён, и вычисление может быть продолжено.

Казалось бы, более плодотворным подходом является обращение ZTE к так называемому декорированному уравнению Янга – Бакстера. Для этого предположим, что пространства с метками, например $1, 2, 3$, рассматриваются как дополнительные (цветные) состояния. Тогда два тетраэдра на рис. 4 — просто два треугольника с дополнительными линиями, декорирующими их цветом. Вводя метки α, β, γ вместо $1, 2, 3$, мы можем переписать ZTE как

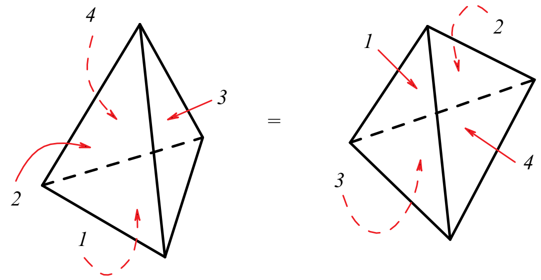

Рис. 4. Факторизация рассеяния прямых струн в виде уравнения тетраэдра. Параметризация выбрана по Френкелю и Муру, где номера соответствуют граням.

$$R_{\alpha,45}R_{\beta,46}R_{\gamma,56} = R^{-1}_{\alpha\beta\gamma}R_{\gamma,56}R_{\beta,46}R_{\alpha,45}R_{\alpha\beta\gamma}\,. \tag{4.93}$$

Отсюда мы видим знакомую структуру квантового уравнения Янга – Бакстера, где: 1) каждая R-матрица имеет дополнительную метку (декорирована), 2) правая часть имеет дополнительный твист присоединённым действием $R_{\alpha\beta\gamma}$. Заманчиво думать, что дополнительная цветовая метка соответствует наличию петлевых переменных, однако точная реализация этого утверждения не вполне ясна.

5. Заключение

В этом обзоре мы предприняли попытку собрать методы, направленные на исследование интегрируемости в теории струн как $1+1$-мерной сигма-модели, и различные наблюдения, дающие намёки на возможное обобщение этих методов на теорию мембран. В основном тексте мы кратко обсуждаем каждый из методов и наблюдений в некоторых деталях, чтобы дать общее представление о соответствующих техниках, и даём ссылки на оригинальные работы, обзоры, лекции и вводные статьи. В заключение для начала резюмируем всё это в виде понятных списков.

Начнём с рассмотренного выше списка приёмов и наблюдений, связанных с интегрируемостью струны и с симметриями её вакуумного пространства, т.е. с 10-мерных фонов супергравитации.

- $1+1$-мерная теория поля интегрируема, если её уравнения движения могут быть записаны в виде условия плоскостности связности, соответствующая линия Вильсона определяет оператор Лакса.
- Для заданной пары Лакса можно использовать классическую r-матрицу для построения скобок Пуассона, определяющих динамику интегрируемой системы.
- Интегрируемые деформации двумерной сигма-модели генерируются r-матрицей, решающей классическое уравнения Янга – Бакстера.
- Классическое уравнение Янга – Бакстера является пределом квантового уравнения Янга – Бакстера, описывающего факторизацию S-матрицы рассеяния частиц.

• Деформации Янга–Бакстера порождают семейства классических алгебр Дринфельда, которые стоят за пуассон-лиевыми T-дуальностями.

• На уровне решений уравнений супергравитации янг-бакстеровы деформации порождаются бивектором, представляющим собой r-матрицу, одетую векторами Киллинга.

• Преобразование деформации имеет тот же вид, что и отображение открыто-замкнутой струны с бивектором, имеющим смысл параметра некоммутативности.

Таким образом, мы видим здесь тесную связь классического уравнения Янга–Бакстера с интегрируемостью струны, что в некотором смысле ожидаемо, и с симметриями пространства решений полевых уравнений супергравитации. Подобные связи были обнаружены в 11-мерной супергравитации, которая обеспечивает фон для динамики мембран. Соответствующий список утверждений можно составить следующим образом.

• Семейства исключительных алгебр Дринфельда, стоящие за намбу-лиевой U-дуальностью, могут быть порождены обобщённой деформацией Янга–Бакстера, определяемой ρ-тензором, удовлетворяющим обобщённому уравнению Янга–Бакстера.

• На уровне решений супергравитации обобщённые YB-деформации порождаются три- и шести-векторами, являющимися ρ-тензорами, одетыми векторами Киллинга.

• Преобразование деформации имеет тот же вид, что и отображение открыто-замкнутой мембраны с 3-вектором, имеющим смысл параметра петлевой некоммутативности.

• Для заданной пары Лакса ρ-тензор можно использовать для создания скобок Намбу, определяющих механическую систему.

В этот список намеренно не включены рассуждения об интегрируемости. Действительно, для $1+2$-мерной теории не существует конструкции, аналогичной описанию Лакса–Захарова–Шабата интегрируемости $1+1$-мерных систем. Результаты, собранные во втором списке выше, и их сходство с первым списком позволяют предположить, что обобщённое уравнение Янга–Бакстера должно иметь какое-то отношение к интегрируемости мембраны. Конечно, связь далеко не очевидна, однако есть некоторые наблюдения, касающиеся алгебраического описания мембранной динамики вообще и в контексте M-теории, которые мы находим особенно полезными. Их можно объединить в следующий список.

• Квантовая версия обобщённого уравнения Янга–Бакстера неизвестна, однако индексная структура ρ-тензора предполагает, что она должна даваться уравнением тетраэдра, описывающим факторизацию S-матрицы рассеяния прямых струн.

• Канонический анализ и ADHMN конструкция для мембраны позволяют предположить, что естественными переменными для описания её динамики могут быть функции, принимающие значения в алгебре петель.

• С помощью петель можно ввести естественное упорядочение на поверхности Вильсона, предположительно определяющее оператор Лакса для соответствующей $1+2$-мерной системы.

• Квазиклассический предел уравнения тетраэдра неизвестен, однако его можно записать в виде системы уравнений Янга–Бакстера на декорированных квантовых R-матрицах.

• Естественное (тахтаджановское) действие для системы, описываемой 3-скобкой Намбу, имеет вид члена Весса–Зумино для M2-браны, оканчивающейся на M5-бране.

• Обобщение иерархии КП может быть определено с помощью скобок Намбу, которые имеют временны́е переменные $t_{m,n}$, параметризованные парами индексов. Аналогичные переменные встречаются при определении обобщения полиномов Шура на случай трёхмерных диаграмм Юнга, предположительно описывающих интегрируемость $1+2$-мерных систем [184, 185].

Наиболее перспективными мы считаем следующие направления исследований. Во-первых, естественный интерес вызывает задача поиска способа прийти от уравнению тетраэдра, которое описывает факторизацию S-матрицы рассеяния прямых струн, к обобщённому уравнению Янга–Бакстера. Во-вторых, было бы интересно построить аналог оператора эволюции в размерности три, используя петлевые переменные, которые кажутся естественными для описания динамики M2-браны (или, по крайней мере, динамики её концов). Надеемся, что в ближайшее время в контексте этих и связанных с ними вопросов будет доступно больше информации.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в рамках гранта RSCF-20-72-10144. Авторы благодарят И. Бахматова, Д. Бермана, Л. Ланину, Н. Целоусова и Е. Зенкевича за вдохновляющие дискуссии и ценные замечания. Отдельно авторы благодарят Риккардо Борсато за комментарии по тексту работы.

Список литературы

1. Slavnov N A, arXiv:1804.07350
2. Schäfer-Nameki S *Lett. Math. Phys.* **99** 169 (2012); arXiv:1012.3989
3. Staudacher M *Lett. Math. Phys.* **99** 191 (2012); arXiv:1012.3990
4. Bajnok Z *Lett. Math. Phys.* **99** 299 (2012); arXiv:1012.3995
5. Levkovich-Maslyuk G *J. Phys. A* **49** 323004 (2016); arXiv:1606.02950
6. Bena I, Polchinski J, Roiban R *Phys. Rev. D* **69** 046002 (2004); hep-th/0305116
7. Minahan J A, Zarembo K *J. High Energy Phys.* **2003** (03) 013 (2003); hep-th/0212208
8. Lunin O, Maldacena J *J. High Energy Phys.* **2005** (05) 033 (2005) https://doi.org/10.1088/1126-6708/2005/05/033; hep-th/0502086
9. Leigh R G, Strassler M J *Nucl. Phys. B* **447** 95 (1995); hep-th/9503121
10. Frolov S A, Roiban R, Tseytlin A A *J. High Energy Phys.* **2005** (07) 045 (2005); hep-th/0503192
11. Frolov S *J. High Energy Phys.* **2005** (05) 069 (2005); hep-th/0503201
12. Giataganas D, Pando Zayas L A, Zoubos K *J. High Energy Phys.* **2014** (01) 129 (2014); arXiv:1311.3241
13. Beisert N et al. *Lett. Math. Phys.* **99** 3 (2012); arXiv:1012.3982
14. Dekel A, Oz Y *J. High Energy Phys.* **2011** (08) 004 (2011); arXiv:1106.3446
15. Linardopoulos G, Zarembo K *J. High Energy Phys.* **2021** (05) 203 (2021); arXiv:2102.12381
16. Linardopoulos G *J. High Energy Phys.* **2022** (06) 033 (2022); arXiv:2202.06824
17. Giataganas D, Zoubos K *J. High Energy Phys.* **2017** (10) 042 (2017); arXiv:1707.04033
18. Giataganas D *Phys. Rev. D* **104** 066017 (2021); arXiv:1909.02577
19. Klimcík C *J. High Energy Phys.* **2002** (12) 051 (2002); hep-th/0210095
20. Delduc F, Magro M, Vicedo B *J. High Energy Phys.* **2013** (11) 192 (2013); arXiv:1308.3581
21. Delduc F, Magro M, Vicedo B *Phys. Rev. Lett.* **112** 051601 (2014); arXiv:1309.5850
22. Kawaguchi I, Matsumoto T, Yoshida K *J. High Energy Phys.* **2014** (04) 153 (2014); arXiv:1401.4855
23. van Tongeren S J *J. High Energy Phys.* **2015** (06) 048 (2015); arXiv:1504.05516

24. Hoare B, Seibold F K *J. High Energy Phys.* **2019** (01) 125 (2019); arXiv:1811.07841
25. Arutyunov G, Borsato R, Frolov S *J. High Energy Phys.* **2015** (12) 049 (2015) https://doi.org/10.1007/JHEP12%282015%29049; arXiv:1507.04239
26. Arutyunov G et al. *Nucl. Phys. B* **903** 262 (2016); arXiv:1511.05795
27. Tseytlin A A, Wulff L *J. High Energy Phys.* **2016** (06) 174 (2016) https://doi.org/10.1007/JHEP06%282016%29174; arXiv:1605.04884
28. Orlando D et al. *J. Phys. A* **53** 443001 (2020); arXiv:1912.02553
29. Araujo T et al. *J. Phys. A* **51** 235401 (2018); arXiv:1705.02063
30. Araujo T et al. *Phys. Rev. D* **95** 105006 (2017); arXiv:1702.02861
31. Bakhmatov I et al. *J. High Energy Phys.* **2018** (06) 161 (2018); arXiv:1803.07498
32. Bakhmatov I, Musaev E T *J. High Energy Phys.* **2019** (01) 140 (2019); arXiv:1811.09056
33. Borsato R, Wulff L *J. High Energy Phys.* **2016** (10) 045 (2016); arXiv:1608.03570
34. Bakhmatov I et al. *J. High Energy Phys.* **2019** (08) 126 (2019); arXiv:1906.09052
35. Bakhmatov I, Gubarev K, Musaev E T *J. High Energy Phys.* **2020** (05) 113 (2020); arXiv:2002.01915
36. Gubarev K, Musaev E T *Phys. Rev. D* **103** 066021 (2021); arXiv:2011.11424
37. Malek E, Thompson D C *J. High Energy Phys.* **2020** (04) 058 (2020); arXiv:1911.07833
38. Sakatani Y *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2020** 023B08 (2020) https://doi.org/10.1093/ptep/ptz172; arXiv:1911.06320
39. Malek E, Sakatani Y, Thompson D C *J. High Energy Phys.* **2021** (01) 020 (2021); arXiv:2007.08510
40. de Leeuw M, Candu C "Introduction to Integrability FS 2013", ITP Lecture Archive, https://edu.itp.phys.ethz.ch/fs13/int/
41. Retore A L *J. Phys. A* **55** 173001 (2022); arXiv:2109.14280
42. Zamolodchikov A B, Zamolodchikov A B *Ann. Physics* **120** 253 (1979)
43. Zamolodchikov Al B *Nucl. Phys. B* **342** 695 (1990)
44. Yang C N *Phys. Rev. Lett.* **19** 1312 (1967)
45. Baxter R J *Ann. Physics* **70** 193 (1972)
46. Bombardelli D *J. Phys. A* **49** 323003 (2016); arXiv:1606.02949
47. Ryan P "Integrable systems, separation of variables and the Yang–Baxter equation", PhD Thesis (Dublin: School of Mathematics, Trinity College, The Univ. of Dublin, 2021); http://www.tara.tcd.ie/bitstream/handle/2262/97300/Paul_Ryan_PhD_Final.pdf; arXiv:2201.12057
48. Wu F Y *Int. J. Mod. Phys. B* **7** 3737 (1993)
49. Turaev V G *Invent. Math.* **92** 527 (1988)
50. Kauffman L H "Knots, abstract tensors and the Yang–Baxter equation", in *Knots, Topology and Quantum Field Theories. Proc. of the Johns Hopkins Workshop on Current Problems in Particle Theory 13* (Ed. L Lusanna) (Singapore: World Scientific, 1989) p. 179
51. Белавин А А, Дринфельд В Г *Функциональный анализ и его приложения* **16** (3) 1 (1982); Belavin A A, Drinfel'd V G *Funct. Anal. Its Appl.* **16** 159 (1982)
52. Арнольд В И *Математические методы классической механики* 2-е изд. (М.: Наука, 1979); Пер. на англ. яз.: Arnold V I *Mathematical Methods of Classical Mechanics* 2nd ed. (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 60) (New York: Springer, 1989) https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2063-1
53. Takhtajan L *Commun. Math. Phys.* **160** 295 (1994); hep-th/9301111
54. Helal M A, El-Eissa H N *Pure Math. Appl.* **7** 263 (1996)
55. Agrawal G *Nonlinear Fiber Optics* 5th ed. (Amsterdam: Elsevier, 2013) https://doi.org/10.1016/C2011-0-00045-5
56. Caudrey P J, Eilbeck J C, Gibbon J D *Nuovo Cimento B* **25** 497 (1975)
57. Aratyn H, in *Proc. of the 8th Jorge Andre Swieca Summer School: Particles and Fields, 5–18 February 1995, Rio de Janeiro, Brazil* (Eds J Barcelos-Neto, S F Novaes, V O Rivelles) (Singapore: World Scientific, 1996) p. 419; hep-th/9503211
58. Vladimirov A A "Lectures on integrable hierarchies and vertex operators", in *2nd Dubna Intern. Advanced School of Theoretical Physics, DIAS – TH, Dubna, 30 Jan. – 7 Feb. 2004*; hep-th/0402097
59. Basu A, Harvey J A *Nucl. Phys. B* **713** 136 (2005); hep-th/0412310
60. Howe P S, Lambert N D, West P C *Nucl. Phys. B* **515** 203 (1998); hep-th/9709014
61. Callan C G (Jr.), Maldacena J M *Nucl. Phys. B* **513** 198 (1998); hep-th/9708147
62. Nahm W *Phys. Lett. B* **90** 413 (1980)
63. Diaconescu D-E *Nucl. Phys. B* **503** 220 (1997); hep-th/9608163
64. Bagger J, Lambert N *Phys. Rev. D* **75** 045020 (2007); hep-th/0611108
65. Gustavsson A *Nucl. Phys. B* **811** 66 (2009); arXiv:0709.1260
66. Aharony O et al. *J. High Energy Phys.* **2008** (10) 091 (2008); arXiv:0806.1218
67. Nambu Y *Phys. Rev. D* **7** 2405 (1973)
68. Chatterjee R *Lett. Math. Phys.* **36** 117 (1996); hep-th/9501141
69. Ho P-M, Matsuo Y *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2016** 06A104 (2016) https://doi.org/10.1093/ptep/ptw075; arXiv:1603.09534
70. Guha P, math-ph/9807018
71. Li C et al. *Int. J. Mod. Phys. A* **35** 2050099 (2020)
72. Wang X-L et al. *J. Nonlin. Math. Phys.* **22** 194 (2015)
73. Takasaki K, Takebe T *Rev. Math. Phys.* **7** 743 (1995); hep-th/9405096
74. Takasaki K, Takebe T *Int. J. Mod. Phys. A* **7** (supp01b) 889 (1992); hep-th/9112046
75. van Tongeren S J *J. Phys. A* **47** 433001 (2014); arXiv:1310.4854
76. Sfetsos K *Nucl. Phys. B* **880** 225 (2014); arXiv:1312.4560
77. Hollowood T J, Miramontes J L, Schmidtt D M *J. Phys. A* **47** 495402 (2014); arXiv:1409.1538
78. Захаров В Е, Михайлов А В *ЖЭТФ* **74** 1953 (1978); Zakharov V E, Mikhailov A V *Sov. Phys. JETP* **47** 1017 (1978)
79. Чередник И В *Теоретическая и математическая физика* **47** 225 (1981); Cherednik I V *Theor. Math. Phys.* **47** 422 (1981)
80. Klimčík C *J. Math. Phys.* **50** 043508 (2009); arXiv:0802.3518
81. Sakamoto J, Sakatani Y, Yoshida K *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2017** 053B07 (2017) https://doi.org/10.1093/ptep/ptx067; arXiv:1703.09213
82. Fernández-Melgarejo J J et al. *Phys. Rev. Lett.* **122** 111602 (2019); arXiv:1811.10600
83. Mück W *J. High Energy Phys.* **2019** (05) 063 (2019); arXiv:1904.06126
84. Hollowood T J, Miramontes J L, Schmidtt D M *J. High Energy Phys.* **2014** (11) 009 (2014); arXiv:1407.2840
85. Balog J et al. *Phys. Lett. B* **324** 403 (1994); hep-th/9307030
86. Evans J M, Hollowood T J *Nucl. Phys. B* **438** 469 (1995); hep-th/9407113
87. Magro M *Lett. Math. Phys.* **99** 149 (2012); arXiv:1012.3988
88. Thompson D C *PoS* **CORFU2018** 099 (2019); arXiv:1904.11561
89. Driezen S "Geometrical approach to integrable and supersymmetric sigma models", PhD Thesis (Brussel: Vrije Univ. Brussel, 2019)
90. Hoare B, Roiban R, Tseytlin A A *J. High Energy Phys.* **2014** (06) 002 (2014); arXiv:1403.5517
91. Lunin O, Roiban R, Tseytlin A A *Nucl. Phys. B* **891** 106 (2015); arXiv:1411.1066
92. Sfetsos K, Siampos K, Thompson D C *Nucl. Phys. B* **899** 489 (2015); arXiv:1506.05784
93. Hoare B, Tseytlin A A *Nucl. Phys. B* **897** 448 (2015); arXiv:1504.07213
94. van Tongeren S J *Nucl. Phys. B* **904** 148 (2016); arXiv:1506.01023
95. Imeroni E *J. High Energy Phys.* **2008** (10) 026 (2008); arXiv:0808.1271
96. Arutyunov G, Frolov S *J. Phys. A* **42** 254003 (2009); arXiv:0901.4937
97. Metsaev R R, Tseytlin A A *Nucl. Phys. B* **533** 109 (1998); hep-th/9805028
98. Borsato R, Wulff L *J. High Energy Phys.* **2018** (08) 027 (2018); arXiv:1806.04083
99. Klimčík C, Ševera P *Phys. Lett. B* **372** 65 (1996); hep-th/9512040
100. de la Ossa X C, Quevedo F *Nucl. Phys. B* **403** 377 (1993); hep-th/9210021
101. Sfetsos K *Fortschr. Phys.* **59** 1149 (2011); arXiv:1105.0537
102. Thompson D C *Fortschr. Phys.* **64** 349 (2016); arXiv:1512.04732
103. Petr I *AIP Conf. Proc.* **1307** 119 (2010)
104. Hassler F *Phys. Lett. B* **807** 135455 (2020); arXiv:1707.08624
105. Blumenhagen R et al. *PoS* **CORFU2016** 128 (2017); arXiv:1703.07347
106. Demulder S, Hassler F, Thompson D C *PoS* **CORFU2018** 113 (2019); arXiv:1904.09992
107. Borsato R, Wulff L *Phys. Rev. Lett.* **125** 201603 (2020); arXiv:2007.07902
108. Hassler F, Rochais T *Fortschr. Phys.* **68** 2000063 (2020); arXiv:2007.07897
109. Borsato R, Driezen S *J. High Energy Phys.* **2021** (05) 180 (2021); arXiv:2102.04498
110. Borsato R, Driezen S, Hassler F *Phys. Lett. B* **823** 136771 (2021); arXiv:2109.06185
111. Musaev E T, Sakatani Y *Phys. Rev. D* **104** 046015 (2021); arXiv:2012.13263
112. Hlavatý L, Šnobl L *Mod. Phys. Lett. A* **17** 429 (2002); hep-th/0110139
113. Šnobl L, Hlavatý L *Int. J. Mod. Phys. A* **17** 4043 (2002); math/0202210
114. Hlavatý L, Šnobl L, math/0202209
115. von Unge R *J. High Energy Phys.* **2002** (07) 014 (2002); hep-th/0205245
116. Sakamoto J, Sakatani Y, Yoshida K *J. Phys. A* **50** 415401 (2017); arXiv:1705.07116
117. Çatal-Özer A, Tunali S *Class. Quantum Grav.* **37** 075003 (2020); arXiv:1906.09053

118. Borsato R, Vilar López A, Wulff L *J. High Energy Phys.* **2020** (07) 103 (2020); arXiv:2003.05867
119. Seiberg N, Witten E *J. High Energy Phys.* **1999** (09) 032 (1999); hep-th/9908142
120. Fradkin E S, Tseytlin A A *Ann. Physics* **162** 31 (1985)
121. Siegel W *Phys. Rev. D* **48** 2826 (1993); hep-th/9305073
122. Siegel W *Phys. Rev. D* **47** 5453 (1993); hep-th/9302036
123. Hohm O, Hull C, Zwiebach B *J. High Energy Phys.* **2010** (08) 008 (2010); arXiv:1006.4823
124. Hohm O, Kwak S K, Zwiebach B *J. High Energy Phys.* **2011** (09) 013 (2011); arXiv:1107.0008
125. Jeon I et al. *Phys. Lett. B* **723** 245 (2013); arXiv:1210.5078
126. Thompson D C *J. High Energy Phys.* **2011** (08) 125 (2011); arXiv:1106.4036
127. Hohm O, Lüst D, Zwiebach B *Fortschr. Phys.* **61** 926 (2013); arXiv:1309.2977
128. Aldazabal G, Marqués D, Núñez C *Class. Quantum Grav.* **30** 163001 (2013); arXiv:1305.1907
129. Geissbühler D et al. *J. High Energy Phys.* **2013** (06) 101 (2013); arXiv:1304.1472
130. Townsend P K "Four lectures on M-Theory", in *1996 Summer School in High Energy Physics and Cosmology, June 10 – July 26, 1996, at the ICTP, in Trieste, Italy*, (The ICTP Ser. in Theoretical Physics, Vol. 13, Eds E Gava et al.) (New York: World Scientific, 1997) p. 385; hep-th/9612121
131. Cremmer E, Julia B *Phys. Lett. B* **80** 48 (1978)
132. Hull C M, Townsend P K *Nucl. Phys. B* **438** 109 (1995); hep-th/9410167
133. Cremmer E et al. *Nucl. Phys. B* **523** 73 (1998); hep-th/9710119
134. Cremmer E et al. *Nucl. Phys. B* **535** 242 (1998); hep-th/9806106
135. Obers N A, Pioline B *Phys. Rep.* **318** 113 (1999); hep-th/9809039
136. Duff M J, Lu J X *Nucl. Phys. B* **347** 394 (1990)
137. Sakatani Y, Uehara S *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2020** 073B01 (2020) https://doi.org/10.1093/ptep/ptaa063; arXiv:2001.09983
138. Samtleben H *Class. Quantum Grav.* **25** 214002 (2008); arXiv:0808.4076
139. Musaev E T *Universe* **8** 276 (2022); arXiv:2007.01213
140. Baguet A, Hohm O, Samtleben H *PoS* **CORFU2014** 133 (2015) https://doi.org/10.22323/1.231.0133; arXiv:1506.01065
141. Baguet A "Exceptional field theory and supergravity", PhD Thesis (Lyon: l'École Normale Supérieure, 2017)
142. Hohm O, Samtleben H *PoS* **CORFU2018** 098 (2019) https://doi.org/10.22323/1.347.0098; arXiv:1905.08312
143. Musaev E T *Symmetry* **11** 993 (2019)
144. Berman D S, Blair C *Int. J. Mod. Phys. A* **35** 2030014 (2020); arXiv:2006.09777
145. Bakhmatov I et al. *Phys. Rev. D* **105** L081904 (2022); arXiv:2203.03372
146. Bakhmatov I et al. *Eur. Phys. J. C* **83** 37 (2023); arXiv:2209.01423
147. Berman D S et al. *J. High Energy Phys.* **2002** (02) 012 (2002); hep-th/0109107
148. Myers R *Int. J. Mod. Phys. A* **16** 956 (2001); hep-th/0106178
149. Constable N R, Lambert N D *Phys. Rev. D* **66** 065016 (2002); hep-th/0206243
150. Howe P S, Sezgin E *Phys. Lett. B* **394** 62 (1997); hep-th/9611008
151. Howe P S, Sezgin E, West P C *Phys. Lett. B* **399** 49 (1997); hep-th/9702008
152. Guralnik Z, Ramgoolam S *J. High Energy Phys.* **2001** (02) 032 (2001); hep-th/0101001
153. Gustavsson A *J. High Energy Phys.* **2010** (11) 043 (2010); arXiv:1008.0902
154. Bergshoeff E et al. *Nucl. Phys. B* **590** 173 (2000); hep-th/0005026
155. Bergshoeff E et al. *Phys. Lett. B* **492** 193 (2000); hep-th/0006112
156. Gustavsson A *J. High Energy Phys.* **2008** (04) 083 (2008); arXiv:0802.3456
157. Sämann C *Commun. Math. Phys.* **305** 513 (2011); arXiv:1007.3301
158. Saemann C "Lectures on higher structures in M-theory", in *Workshop on Strings, Membranes and Topological Field Theory, Tohoku University, Sendai, Japan, 5–7 March 2015* (Noncommutative Geometry and Physics, Vol. 4, Eds Y Maeda et al.) (Singapore: World Scientific, 2017) p. 171, https://doi.org/10.1142/9789813144613_0004; arXiv:1609.09815
159. Atiyah M F et al. *Phys. Lett. A* **65** 185 (1978)
160. Ganor O J *Nucl. Phys. B* **489** 95 (1997); hep-th/9605201
161. Gustavsson A *J. High Energy Phys.* **2004** (07) 074 (2004); hep-th/0404150
162. Alekseev A, Chekeres O, Mnev P *J. High Energy Phys.* **2015** (11) 093 (2015); arXiv:1507.06343
163. Pasti P, Sorokin D, Tonin M *Phys. Rev. D* **55** 6292 (1997); hep-th/9611100
164. Bandos I et al. *Phys. Rev. Lett.* **78** 4332 (1997); hep-th/9701149
165. Ko S-L, Sorokin D, Vanichchapongjaroen P *J. High Energy Phys.* **2013** (11) 072 (2013); arXiv:1308.2231
166. Murray M K "An introduction to bundle gerbes", in *The Many Facets of Geometry: A Tribute to Nigel Hitchin* (Eds O Garcia-Prada, J P Bourguignon, S Salamon) (Oxford: Oxford Academic, 2007) p. 237, https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199534920.003.0012; arXiv:0712.1651
167. Hitchin N J *AMS/IP Stud. Adv. Math.* **23** 151 (2001); math/9907034
168. Alvarez O, Ferreira L A, Sanchez-Guillen J *Int. J. Mod. Phys. A* **24** 1825 (2009); arXiv:0901.1654
169. Freund P G O, Nepomechie R I *Nucl. Phys. B* **199** 482 (1982)
170. Brylinski J-L *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization* (Boston, MA: Birkhäuser, 1993)
171. Papageorgakis C, Sämann C *J. High Energy Phys.* **2011** (05) 099 (2011); arXiv:1103.6192
172. Lambert N, Papageorgakis C *J. High Energy Phys.* **2010** (08) 083 (2010); arXiv:1007.2982
173. Alvarez O, Ferreira L A, Sánchez Guillén J *Nucl. Phys. B* **529** 689 (1998); hep-th/9710147
174. Frenkel I, Moore G *Commun. Math. Phys.* **138** 259 (1991); https://projecteuclid.org:443/euclid.cmp/1104202944
175. Zamolodchikov A B *Sov. Sci. Rev. Sect. A Phys. Rev.* **2** 1 (1980)
176. Замолодчиков А Б *ЖЭТФ* **79** 641 (1980); Zamolodchikov A B *Sov. Phys. JETP* **52** 325 (1980)
177. Zamolodchikov A B *Commun. Math. Phys.* **79** 489 (1981); https://projecteuclid.org:443/euclid.cmp/1103909139
178. Бажанов В В, Строганов Ю Г *Теоретическая и метематическая физика* **52** 105 (1982); Bazhanov V V, Stroganov Yu G *Theor. Math. Phys.* **52** 685 (1982)
179. Maillet J M, Nijhoff F *Phys. Lett. B* **224** 389 (1989)
180. Carter J S, Saito M *Int. J. Mod. Phys. A* **11** 4453 (1996)
181. Hietarinta J *J. Phys. A* **27** 5727 (1994)
182. Талалаев Д В *Успехи математических наук* **76** 139 (2021); Talalaev D V *Russ. Math. Surveys* **76** 685 (2021)
183. Isaev A P, arXiv:2206.08902
184. Morozov A, Tselousov N *Phys. Lett. B* **840** 137887 (2023); arXiv:2211.14956
185. Morozov A, Tselousov N, arXiv:2305.12282

Integrability structures in string theory

K.A. Gubarev [1,2,a], **E.T. Musaev** [1,b]

[1] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Institutskii per. 9, 141701 Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation*

[1] *National Research Center Kurchatov Institute, pl. Akademika Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russian Federation*

E-mail: [a] *kirill.gubarev@phystech.edu*, [b] *musaev.et@phystech.edu*

This review is a collection of various methods and observations relevant to structures in three-dimensional systems similar to those responsible for the integrability of two-dimensional systems. Particular focus is on Nambu structures and loop variables naturally appearing in membrane dynamics. While reviewing each topic in more detail, we emphasize connections among them and speculate on possible relations to membrane integrability.

Keywords: integrability, Nambu structure, loop algebra, membranes, M-theory

PACS numbers: 02.30.Ik, **04.65.+e**, **11.25.–w**

Bibliography — 185 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **194** (3) 233–267 (2024)
DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2023.06.039407

Received 20 January 2023, revised 7 June 2023
Physics – Uspekhi **67** (3) (2024)
DOI: https://doi.org/10.3367/UFNe.2023.06.039407