

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

# Электромагнитные волны в касательно намагниченном бигиротропном слое (с примером анализа характеристик спиновых волн в ферритовой пластине)

Э.Г. Локк, С.В. Герус

Обсуждаются проблемы, возникающие из-за описания спиновых волн в магнитоэлектрическом приближении, при использовании которого волне не сопоставляется ни сверхвысокочастотное электрическое поле, ни вектор Пойнтинга. С целью преодоления этих проблем впервые представлено корректное решение задачи о распространении электромагнитных волн в произвольном направлении вдоль касательно намагниченного бигиротропного слоя (частный случай этой задачи — распространение спиновых волн в ферритовой пластине). Показано, что распределение волны по толщине слоя описывают два разных волновых числа:  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$ , которые могут принимать действительные или мнимые значения; в частности, внутри ферритовой пластины могут возникать три типа распределения спиновых волн: поверхностно-поверхностное ( $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  — действительные числа), объёмно-поверхностное ( $k_{x21}$  — мнимое число, а  $k_{x22}$  — действительное) и объёмно-объёмное ( $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  — мнимые числа), что принципиально отличает полученное описание спиновых волн от их описания в магнитоэлектрическом приближении.

**Ключевые слова:** спиновая волна, ферритовая пластина, электромагнитная волна, бигиротропный слой, распределение волны по толщине слоя

PACS numbers: 41.20.Gz, 41.20.Jb, 75.70. –i

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.09.039768>

## Содержание

1. Введение (1330).
2. Постановка задачи (1332).
3. Уравнения, описывающие распространение электромагнитных волн в касательно намагниченном бигиротропном слое (1333).
4. Решения, описывающие электромагнитные волны в бигиротропном слое (1334).
5. Выражения для компонент электромагнитного поля внутри бигиротропного слоя (1335).
6. Выражения для компонент электромагнитного поля вне бигиротропного слоя (1337).
7. Дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в бигиротропном слое (1337).
8. Доказательство непрерывности нормальных компонент электрической и магнитной индукций на границах бигиротропного слоя (1338).

9. Расчёты характеристик спиновых волн в ферритовой пластине (1339).
  10. Сравнение распространения спиновой волны вдоль оси  $u$  с результатами, полученными ранее (1340).
  11. Заключение (1342).
  12. Приложение (1343).
- Список литературы (1344).

## 1. Введение

Исследование распространения электромагнитных волн в анизотропных средах началось достаточно давно при изучении магнитоупорядоченных сред, одноосных кристаллов и плазмы (см., например, монографии [1–12] и имеющуюся в них литературу). Анализ результатов этих исследований представлен в работе [13], где были изложены некоторые закономерности (подобные законам геометрической оптики для изотропных сред), которые наблюдаются при распространении, отражении и преломлении волн в анизотропных средах для двумерных геометрий. Оказалось, что в этих средах возникновение ряда физических явлений (таких как невзаимное распространение волн, появление нескольких отражённых или преломлённых лучей, отрицательное отражение и преломление, отсутствие отражения и др.) определяют геометрические и математические свойства изочастотной зависимости волны, такие как наличие асимптот, точек

Э.Г. Локк<sup>(\*)</sup>, С.В. Герус<sup>(\*\*)</sup>

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
Фрязинский филиал,  
пл. Введенского 1, 141190 Фрязино, Московская обл.,  
Российская Федерация  
E-mail: <sup>(\*)</sup> edwin@fireras.su, <sup>(\*\*)</sup> svg318@ire216.msk.su

Статья поступила 30 января 2024 г.,  
после доработки 9 сентября 2024 г.

перегиба, центральной или осевой симметрии, однозначность или многозначность зависимости. Кроме того, как известно (см., например, [14, 15]), наличие точек перегиба на дисперсионной зависимости волны приводит к возникновению на ней квазилинейных участков, которые можно использовать для неискажённой передачи полезного сигнала, модулирующего волну. В дальнейшем было установлено также, что изочастотные зависимости определяют ещё и дифракционные свойства волн. В частности, в работе [16] было показано, что угловая ширина луча в анизотропных средах зависит от кривизны изочастотной зависимости волны и может быть не только больше или меньше величины  $\lambda_0/D$  (где  $\lambda_0$  — длина волны,  $D$  — размер возбуждателя волны), но при определённых условиях (когда волновой вектор  $\mathbf{k}$  направлен в точку перегиба изочастотной зависимости волны) может быть равна нулю, что было подтверждено в дальнейшем при экспериментальных исследованиях лучей спиновых волн [17, 18].

Таким образом, расчёты изочастотных и дисперсионных зависимостей волн в анизотропных средах являются важной задачей физики волновых процессов. Однако для выполнения таких расчётов необходимо иметь точное дисперсионное уравнение волны в конкретной анизотропной среде или структуре.

Тем не менее даже в такой успешно развивающейся области науки, как магноники (см., например, обзоры [19–24]), спиновые волны (СВ) в ферритовых пластинах и структурах до сих пор описывают в магнитостатическом приближении. Как известно, СВ имеют электромагнитную природу и представляют собой передающиеся от атома к атому колебания атомного магнитного момента [25]. В работе [26] предложили считать, что волновое число СВ  $k \gg k_0 \equiv \omega/c$  (здесь  $\omega$  — циклическая частота СВ, а  $c$  — скорость света), и поэтому в уравнениях Максвелла при описании СВ можно пренебречь членами, содержащими множители  $\omega/c$ , т.е. использовать уравнения магнитостатики. Из-за математической простоты такой способ описания до сих пор используется при расчётах характеристик СВ с волновыми числами  $k < 10^5 \text{ см}^{-1}$  (для которых можно не учитывать обменное взаимодействие), а сами волны часто называют магнитостатическими. За годы, прошедшие после выхода работы [26], использование магнитостатического приближения позволило аналитически получить дисперсионные уравнения для СВ в различных структурах на основе ферритовой пластины, рассчитать ряд характеристик СВ в этих структурах и создать на основе этих расчётов разные макеты и устройства, использующие СВ [10–12, 19–24].

Однако со временем использование магнитостатического приближения стало своего рода научной традицией, которой необходимо следовать, из-за чего исследователи часто стали полагать, что имеют дело с какой-то особенной "магнитостатической" волной, — ведь ей не сопоставляется ни сверхвысокочастотное (СВЧ) электрическое поле (считается, что оно пренебрежимо мало), ни вектор Пойнтинга (хотя иногда его пытались вычислить, но без использования электрического поля формулы получались неверными [10, 12, 27]). Кроме того, в рамках уравнений магнитостатики получалось, что характеристики этой магнитостатической волны не зависят от диэлектрических проницаемостей ферритовой пластины и окружающих её полупространств.

В то же время, примерно с 1980-х годов у ряда исследователей магнитостатических волн стали возникать вопросы, которые невозможно было решить в магнитостатическом приближении. В результате начали появляться работы, где СВ описывали без магнитостатического приближения [1, 10–12, 27–42]. В ряде этих статей [28–32, 34–37, 43] изучалось изменение характеристик СВ в области малых волновых чисел  $k$ , в том числе в работах [31, 32, 35], где исследовался механизм излучения, возникающего при распространении СВ в неоднородно намагниченной структуре феррит–диэлектрик при  $k \rightarrow k_0$ . В работе [33] исследовалось влияние отрицательных диэлектрических проницаемостей сред, прилегающих к ферритовому слою, на дисперсионные зависимости и свойства СВ. В работе [36] в результате упрощения уравнений Максвелла для СВ, распространяющихся в плоскости произвольно намагниченной ферритовой пластины, была получена система из двух дифференциальных уравнений, определяющая зависимости тангенциальных компонент СВЧ-электрического поля СВ от координаты, нормальной плоскости пластины. Там же были рассмотрены характеристики объёмных СВ для частных случаев этой геометрии, когда пластина намагничена либо продольно, либо касательно, а обе её поверхности металлизированы. В работах [40–42] было рассчитано распределение векторных линий СВЧ-полей СВ, распространяющейся в различных ферритовых структурах перпендикулярно вектору однородного магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ . В частности, было найдено, что векторные линии СВЧ-магнитной индукции СВ образуют два ряда противоположно направленных вихрей, локализованных вблизи противоположных поверхностей ферритовой пластины, причём векторные линии соседних вихрей всегда направлены противоположно. Границей между этими рядами вихрей является плоскость (лежащая внутри ферритовой пластины), на которой амплитуда СВЧ-электрического поля СВ равна нулю. Таким образом, эту СВ можно рассматривать как вихри магнитной индукции, распространяющиеся во времени и пространстве вдоль ферритовой пластины.

Следует отметить, что почти во всех перечисленных работах, выполненных без магнитостатического приближения, характеристики СВ исследовались лишь для случая, когда векторы групповой и фазовой скоростей СВ коллинеарны<sup>1</sup> (т.е. когда волна распространяется перпендикулярно направлению внешнего магнитного поля либо вдоль него).

Очевидно, что для дальнейшего успешного развития магноники важно было бы найти аналитическое решение задачи о распространении СВ в произвольном направлении на основе уравнений Максвелла без использования магнитостатического приближения. Решение этой задачи вывело бы описание СВ на качественно новый уровень и позволило бы в итоге не только выполнить точные расчёты характеристик СВ с неколлинеарной ориентацией волнового вектора и вектора групповой скорости, но и сопоставить этой волне СВЧ-электрическое поле и впервые рассчитать для неё вектор Пойнтинга, направление и плотность потока энергии, поляризацию и

<sup>1</sup> Исключение составляют лишь работы [29, 37], где описано распространение СВ в произвольном направлении; однако, как будет показано ниже, результаты, представленные в этих работах, некорректны.

структуру векторных линий магнитных и электрических СВЧ-полей. Отметим здесь, что ранее (см., например, [27]) была предпринята попытка получить формулу для вектора Пойнтинга в магнитоэлектростатическом приближении. Однако полученная формула  $\mathbf{P} = -\omega \operatorname{Re}(i\Psi^*\mathbf{B})/8\pi$ , вошедшая также в известные монографии (см. формулы (5.8) в [10] и (6.10) в [12]), оказалась неверна, что было доказано на основе расчётов в работе [39].

Ниже будет представлено точное аналитическое решение задачи о распространении электромагнитных волн в произвольном направлении в касательно намагниченном бигиротропном слое, который характеризуется диэлектрической и магнитной проницаемостями, описываемыми эрмитовыми тензорами второго ранга. Очевидно, что частным случаем этой задачи является распространение спиновых волн в ферритовой пластине. Ниже на примере этого частного случая будет продемонстрировано, как полученные теоретические результаты могут быть использованы для исследования СВ, которые (при описании без магнитоэлектростатического приближения) имеют шесть компонент СВЧ-электромагнитного поля — три магнитные и три электрические.

Следует отметить, что в настоящее время бигиротропная среда уже не является гипотетической научной абстракцией, а представляет собой весьма перспективную и востребованную среду, которая может быть реализована на основе быстро развивающихся технологий по созданию новых искусственных сред и метаматериалов и в которой активно изучается распространение электромагнитных волн в связи с возможностью разработки различных функциональных устройств для освоения терагерцового диапазона частот (см., например, работы [44, 45], посвящённые ферро- и антиферромагнитным полупроводникам и работу [46], посвящённую имитации левых сред на основе ферромагнитных метаматериалов).

Очевидно, что упомянутые работы наглядно демонстрируют, что представленная ниже теория может быть использована для исследования характеристик электромагнитных волн как в анизотропных слоях антиферромагнетика, плазмы и в одноосных оптических кристаллах, так и в новых искусственных средах и метаматериалах.

## 2. Постановка задачи

Пусть у нас имеется бигиротропный слой толщиной  $s$ , касательно намагниченный однородным магнитным полем  $\mathbf{H}_0$  (рис. 1). Такой слой, как известно [1], характеризуется диэлектрической и магнитной проницаемостями, описываемыми эрмитовыми тензорами второго ранга  $\vec{\epsilon}_2$  и  $\vec{\mu}_2$ :

$$\vec{\mu}_2 = \begin{pmatrix} \mu & iv & 0 \\ -iv & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\vec{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

<sup>2</sup> Здесь  $\Psi$  — магнитный потенциал,  $\mathbf{B}$  — вектор СВЧ-магнитной индукции.

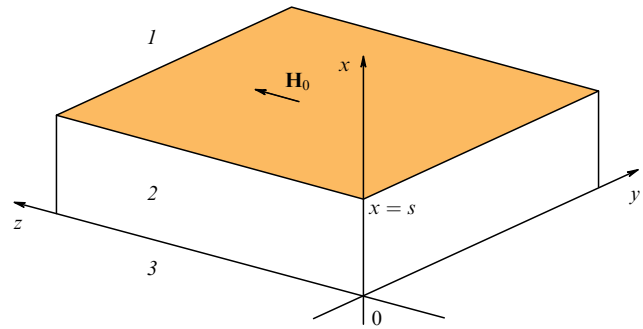


Рис. 1. Геометрия задачи: 1 и 3 — полупространства изотропного диэлектрика (или вакуума), 2 — бигиротропный слой (в частном случае — ферритовая пластина) толщиной  $s$ .

Далее будет показано, что можно аналитически решить систему уравнений Максвелла (без использования каких-либо приближений) и найти дисперсионное уравнение для электромагнитных волн, распространяющихся в произвольном направлении вдоль такого бигиротропного слоя.

Поскольку полученные ниже результаты могут быть использованы для исследования электромагнитных волн в различных анизотропных средах — гиротропных слоях феррита, антиферромагнетика или плазмы (которые являются частными случаями бигиротропной среды и имеют либо тензор  $\vec{\epsilon}_2$ , либо тензор  $\vec{\mu}_2$ , соответствующие выражениям (1) и (2)), то все математические выводы и формулы будут представлены для общего случая распространения волны в бигиротропном слое<sup>3</sup> и будут справедливы при любом виде зависимостей от частоты компонент тензоров  $\vec{\epsilon}_2$  и  $\vec{\mu}_2$ .

В то же время, для того чтобы представленная теория не выглядела абстрактной, на основе полученных формул в качестве примера будут рассчитаны характеристики электромагнитных волн, распространяющихся вдоль ферритовой пластины<sup>4</sup>, для которой диагональная и недиагональная компоненты тензора  $\vec{\mu}_2$ , как известно [11], описываются выражениями

$$\mu = 1 + \frac{\omega_M \omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2}, \quad v = \frac{\omega_M \omega}{\omega_H^2 - \omega^2}, \quad (3)$$

где  $\omega_H = \gamma H_0$ ,  $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$ ,  $\omega = 2\pi f$ ,  $\gamma$  — гиромагнитная постоянная,  $4\pi M_0$  — намагниченность насыщения феррита,  $f$  — частота электромагнитных колебаний.

Отметим, что математическое описание решаемой задачи является немного громоздким, поэтому ниже мы будем вынуждены опускать промежуточные выкладки, а для компактной записи полученных результатов введём ряд обозначений для различных промежуточных величин.

<sup>3</sup> Кроме того, полученные результаты могут использоваться для описания распространения света в слое одноосного оптического кристалла, у которого тензор диэлектрической проницаемости имеет диагональный вид [7] и при  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon$  будет соответствовать выражению (2), если в нём положить  $g = 0$ .

<sup>4</sup> Очевидно, что в соответствии с определением СВ [4, 11] этим электромагнитным волнам будут соответствовать СВ с волновыми числами  $k < 10^5 \text{ см}^{-1}$ , для описания которых можно не учитывать обменное взаимодействие.

### 3. Уравнения, описывающие распространение электромагнитных волн в касательно намагниченном бигиротропном слое

Будем характеризовать электромагнитные поля в бигиротропном слое 2 и в окружающих полупространствах изотропного диэлектрика 1 и 3 (см. рис. 1), сопоставляя им соответствующие индексы  $j = 1, 2$  или 3. Будем считать, что полупространства 1 и 3 имеют скалярные относительные диэлектрические и магнитные проницаемости  $\varepsilon_1, \mu_1$  и  $\varepsilon_3, \mu_3$ .

Электромагнитное поле с частотой  $\omega$ , распространяющееся в плоскости бигиротропного слоя и изменяющееся во времени по гармоническому закону  $\sim \exp(i\omega t)$ , в каждой среде должно удовлетворять системе уравнений Максвелла для комплексных амплитуд

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E}_j + \frac{i\omega \mathbf{B}_j}{c} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B}_j = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_j - \frac{i\omega \mathbf{D}_j}{c} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{D}_j = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$  и  $\mathbf{D}_j, \mathbf{B}_j$  — комплексные амплитуды векторов напряжённостей СВЧ-электрического и магнитного полей, а также электрической и магнитной индукций, которые связаны соотношениями

$$\mathbf{D}_j = \vec{\varepsilon}_j \mathbf{E}_j \quad \text{и} \quad \mathbf{B}_j = \vec{\mu}_j \mathbf{H}_j. \quad (5)$$

Отметим здесь, что в предшествующих работах, в которых предпринимались попытки решить данную задачу (см., например, [29, 37]), для описания распространения волн в ферритовой среде сразу предлагалось искать решение системы (4) в виде плоской волны типа  $\sim \exp(-ik_x x - ik_y y - ik_z z)$ . Мы считаем, что с математической точки зрения это неверный подход, который не позволит найти *общее решение* системы уравнений Максвелла (4). При математически правильном подходе зависимость волны от координаты  $x$  (нормальной к бигиротропному слою) должна быть найдена в ходе решения дифференциальных уравнений, получающихся в результате упрощения системы (4) в соответствии с геометрией задачи. Поэтому мы должны искать решения системы (4) в виде однородной плоской волны, распространяющейся в плоскости  $yz$  слоя и характеризующейся произвольным волновым вектором  $\mathbf{k}$ . То есть, в отличие от [29, 37], мы, как и ранее в работе [36], оставим произвольной зависимость компонент поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  от нормальной слою координаты  $x$  и будем считать, что эти компоненты изменяются в плоскости слоя, как и во времени, по гармоническому закону в соответствии с выражениями

$$\mathbf{E}_j = \mathbf{e}_j(x) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad \text{или} \\ E_{xj, yj, zj} = e_{xj, yj, zj}(x) \exp(-ik_y y - ik_z z), \quad (6)$$

$$\mathbf{H}_j = \mathbf{h}_j(x) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad \text{или} \\ H_{xj, yj, zj} = h_{xj, yj, zj}(x) \exp(-ik_y y - ik_z z), \quad (7)$$

где, наряду с декартовой системой координат  $\Sigma_D = \{x; y; z\}$ , мы ввели также соответствующую полярную (цилиндрическую) систему координат  $\Sigma_P = \{x; r; \varphi\}$ , в которой углы  $\varphi$  отсчитываются от оси  $y$ , а за положи-

тельное направление отсчёта углов принято направление против часовой стрелки. Координаты систем  $\Sigma_P$  и  $\Sigma_D$  будут связаны соотношениями  $y = r \cos \varphi$ ,  $z = r \sin \varphi$ . Очевидно, что модуль волнового вектора  $k$  и его компоненты  $k_y$  и  $k_z$  также связаны соотношениями  $k_y = k \cos \varphi$ ,  $k_z = k \sin \varphi$  и  $k^2 = k_y^2 + k_z^2$ .

Подставляя выражения (6) и (7) в (5), а (5) — в (4) и решая систему (4) для бигиротропной среды 2 по аналогии с работами [1, 47], получим систему из двух уравнений, содержащих лишь зависящие от координаты  $x$  амплитуды  $e_{z2}$  и  $h_{z2}$  компонент  $E_{z2}$  и  $H_{z2}$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 e_{z2}}{\partial x^2} - F_v e_{z2} - i\mu_{zz} F_{vg} h_{z2} = 0, \\ \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 h_{z2}}{\partial x^2} - F_g h_{z2} + i\varepsilon_{zz} F_{vg} e_{z2} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где безразмерные функции  $F_v, F_g$  и  $F_{vg}$  имеют вид

$$\begin{aligned} F_v &= \frac{k_y^2}{k_0^2} + \frac{\varepsilon_{zz} k_z^2}{\varepsilon k_0^2} - \frac{\varepsilon_{zz}}{\mu} (\mu^2 - v^2) = \\ &= \frac{k^2}{k_0^2} \left( \cos^2 \varphi + \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon} \sin^2 \varphi \right) - \varepsilon_{zz} \mu_{\perp}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} F_g &= \frac{k_y^2}{k_0^2} + \frac{\mu_{zz} k_z^2}{\mu k_0^2} - \frac{\mu_{zz}}{\varepsilon} (\varepsilon^2 - g^2) = \\ &= \frac{k^2}{k_0^2} \left( \cos^2 \varphi + \frac{\mu_{zz}}{\mu} \sin^2 \varphi \right) - \mu_{zz} \varepsilon_{\perp}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$F_{vg} = \frac{k_z}{k_0} \left( \frac{g}{\varepsilon} + \frac{v}{\mu} \right) = \frac{k}{k_0} \sin \varphi \left( \frac{g}{\varepsilon} + \frac{v}{\mu} \right), \quad (11)$$

а также использованы обозначения

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - v^2}{\mu}, \quad (12)$$

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\varepsilon^2 - g^2}{\varepsilon}. \quad (13)$$

Отметим здесь, что обе недиагональные компоненты  $v$  и  $g$  тензоров  $\vec{\varepsilon}_2$  и  $\vec{\mu}_2$  входят только в функцию  $F_{vg}$ , тогда как в функцию  $F_v$  входит только компонента  $v$ , а в функцию  $F_g$  — только  $g$  (это поясняет использование введённых обозначений).

Находя величину  $h_{z2}$  из первого уравнения системы (8) и подставляя её во второе уравнение, получим следующее дифференциальное уравнение относительно амплитуды  $e_{z2}$ :

$$\frac{\partial^4 e_{z2}}{\partial x^4} + 2\eta \frac{\partial^2 e_{z2}}{\partial x^2} + \alpha e_{z2} = 0, \quad (14)$$

где

$$\eta = -\frac{k_0^2 (F_v + F_g)}{2}, \quad (15)$$

$$\alpha = k_0^4 F_v F_g - \mu_{zz} \varepsilon_{zz} k_0^4 F_{vg}^2. \quad (16)$$

Уравнению (14) соответствует следующее характеристическое уравнение, определяющее значения волнового числа  $k_{x2}$  внутри бигиротропного слоя:

$$k_{x2}^4 + 2\eta k_{x2}^2 + \alpha = 0. \quad (17)$$

Находя дискриминант уравнения (17) с учётом (15) и (16), легко показать, что его величина всегда положительна:

$$\eta^2 - \alpha = \frac{k_0^4(F_v + F_g)^2}{4} - k_0^4(F_v F_g - \mu_{zz}\epsilon_{zz}F_{vg}^2) = k_0^4 \left[ \frac{(F_v - F_g)^2}{4} + \mu_{zz}\epsilon_{zz}F_{vg}^2 \right] > 0. \quad (18)$$

Характеристическое уравнение (17) имеет *четыре* корня, определяемых соотношением

$$k_{x2}^2 = -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \alpha} = \frac{k_0^2}{2} \left( F_v + F_g \pm \sqrt{(F_v - F_g)^2 + 4\mu_{zz}\epsilon_{zz}F_{vg}^2} \right), \quad (19)$$

причём все корни являются *простыми* (не кратными):

$$k_{x21} = \sqrt{-\eta - \sqrt{\eta^2 - \alpha}} = k_0 \sqrt{\frac{F_v + F_g}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(F_v - F_g)^2 + 4\mu_{zz}\epsilon_{zz}F_{vg}^2}}, \quad (20)$$

$$k_{x22} = \sqrt{-\eta + \sqrt{\eta^2 - \alpha}} = k_0 \sqrt{\frac{F_v + F_g}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(F_v - F_g)^2 + 4\mu_{zz}\epsilon_{zz}F_{vg}^2}}, \quad (21)$$

$$k_{x23} = -k_{x21}, \quad (22)$$

$$k_{x24} = -k_{x22}. \quad (23)$$

#### 4. Решения, описывающие электромагнитные волны в бигиротропном слое

Для записи решения дифференциального уравнения (14) необходимо выяснить, какие значения могут принимать корни характеристического уравнения  $k_{x21} - k_{x24}$ . Прежде всего, отметим, что корни  $k_{x21} - k_{x24}$  не могут быть *комплексными* числами (так как в соответствии с (18) всегда  $\eta^2 - \alpha > 0$ ), а могут принимать только *действительные* или только *мнимые* значения в зависимости от знаков подкоренных выражений в (20) и (21). Как видно из этих выражений, если  $\alpha < 0$ , то  $|\eta|$  всегда меньше, чем слагаемое  $\sqrt{\eta^2 - \alpha}$ , знак перед которым и определяет знак подкоренного выражения; в этом случае величина  $k_{x21}$  всегда принимает мнимые значения, а величина  $k_{x22}$  — всегда действительные (независимо от знака величины  $\eta$ ). Если же  $\alpha > 0$ , то, наоборот, всегда  $|\eta| > \sqrt{\eta^2 - \alpha}$ , и при  $\eta > 0$  величины  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  принимают мнимые значения, а при  $\eta < 0$  — действительные.

Таким образом, исходя из сформулированных выше условий и используя конкретные параметры бигиротропного слоя, можно на основе выражений (15), (16) и (9)–(11) построить в пространстве координат  $\{k_y, k_z, f\}$  (или в пространстве координат  $\{k, \varphi, f\}$ ) *границные поверхности*

$$\eta = 0 \text{ или } F_v + F_g = 0, \quad (24)$$

$$\alpha = 0 \text{ или } F_v F_g - \mu_{zz}\epsilon_{zz}F_{vg}^2 = 0. \quad (25)$$

*Границные поверхности* имеют следующий физический смысл: пересекая какую-то *определённую* дисперсионную поверхность  $f(k_y, k_z)$  электромагнитных волн<sup>5</sup>, *границные поверхности* будут отделять на ней *области с действительными и мнимыми значениями* корней  $k_{x21} - k_{x24}$  характеристического уравнения (17).

<sup>5</sup> Например, дисперсионную поверхность для любого типа спиновых волн, распространяющихся в ферритовой пластине.

Отметим здесь, что равенство (25) *тождественно дисперсионному уравнению для электромагнитных волн в неограниченной бигиротропной среде* (см. выражения (20)–(23) в [47]), если это уравнение свести к двумерному случаю, положив в нём равным нулю волновое число, соответствующее одной из нормальных вектору  $\mathbf{H}_0$  координат (например,  $k_x$ ).

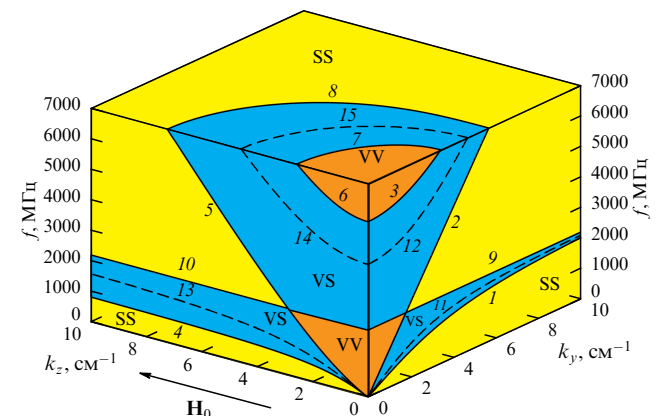
Для того чтобы наглядно представить себе поверхности  $\alpha = 0$  и  $\eta = 0$ , проведём расчёты для случая, когда слой 2 на рис. 1 представляет собой ферритовую пластину (являющуюся частным случаем бигиротропного слоя), имеющую намагниченность насыщения  $4\pi M_0 = 1750$  Гс и диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_2 = 15$  и намагниченную до насыщения постоянным однородным магнитным полем  $H_0 = 300$  Э.

Сразу же отметим, что для случая ферритовой пластины величина  $\alpha$  дополнительно меняет знак при изменении частоты от значений  $f < f_{\perp}$  до значений  $f > f_{\perp}$  (так как в соответствии с (3) и (12) при  $f_{\perp} = \omega_{\perp}/2\pi = (\omega_H^2 + \omega_H\omega_M)^{1/2}/2\pi$  имеем  $\mu = 0$  и  $\mu_{\perp} \rightarrow \infty$ ).

Теперь, чтобы выяснить, какие значения могут принимать корни характеристического уравнения  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  в различных областях пространства  $\{k_y, k_z, f\}$ , рассчитаем и построим в этом пространстве поверхности  $\alpha = 0$ ,  $\eta = 0$  и плоскость  $f = f_{\perp}$ . Пространственные области, ограничиваемые этими поверхностями, и сечения этих поверхностей плоскостями  $k_y = 0$ ,  $k_z = 0$  и  $f = 7000$  МГц показаны на рис. 2.

Построения, представленные на рис. 2, дают возможность узнать, какое распределение по толщине касательно намагниченного ферритового слоя (с произвольной толщиной) будет иметь волна, если её дисперсионная поверхность будет расположена в той или иной области пространства  $\{k_y, k_z, f\}$ . То есть мы знаем это уже сейчас, опираясь лишь на свойства дифференциального уравнения (14), хотя мы ещё не получили дисперсионное уравнение волны!

Анализируя рис. 2, можно отметить, что наиболее обширными являются области SS, выделенные жёлтым цветом, где  $\alpha > 0$  и  $\eta < 0$ . Часть дисперсионной поверхности волны, расположенная в области SS, будет описываться решениями с *действительными* значениями корней  $k_{x21}$



**Рис. 2.** Пространственные области SS, VS и VV, определяющие характер распределения волны в сечении ферритовой пластины. Границы областей SS, VS и VV задают составная поверхность  $\alpha = 0$  и плоскость  $f = f_{\perp}$ . Кривые 1–3, 4–6 и 7, 8 описывают сечения поверхности  $\alpha = 0$  плоскостями  $k_y = 0$ ,  $k_z = 0$  и  $f = 7000$  МГц соответственно, прямые 9 и 10 — сечения плоскости  $f = f_{\perp}$  плоскостями  $k_y = 0$  и  $k_z = 0$  соответственно, штриховые кривые 11, 12; 13, 14 и 15 — сечения поверхности  $\eta = 0$  плоскостями  $k_y = 0$ ,  $k_z = 0$  и  $f = 7000$  МГц соответственно.

и  $k_{x22}$ , которым соответствует *общее* решение дифференциального уравнения (14) в виде

$$e_{z2} = A \exp(k_{x21}x) + B \exp(-k_{x21}x) + C \exp(k_{x22}x) + D \exp(-k_{x22}x). \quad (26)$$

Распределение волны по толщине ферритовой пластины для этой части дисперсионной поверхности будут описывать лишь экспоненциальные функции, и такую волну можно условно назвать *поверхностно-поверхностной*, или SS-волной.

Наименьшее пространство на рис. 2 занимают области VV, выделенные оранжевым цветом, где  $\alpha > 0$  и  $\eta > 0$ . Часть дисперсионной поверхности волны, расположенная в области VV, будет описывать решения с *минимыми* значениями корней  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$ , которым соответствует *общее* решение дифференциального уравнения (14) в виде

$$e_{z2} = A \cos(|k_{x21}|x) + B \sin(-|k_{x21}|x) + C \cos(|k_{x22}|x) + D \sin(-|k_{x22}|x). \quad (27)$$

Распределение волны по толщине ферритовой пластины для этой части дисперсионной поверхности будут описывать лишь тригонометрические функции, и такую волну можно условно назвать *объёмно-объёмной*, или VV-волной.

Областям VS, выделенным на рис. 2 голубым цветом, соответствуют значения  $\alpha < 0$ , причём поверхности  $\eta = 0$  (их сечения 11–15 показаны штриховыми кривыми) *всегда* находятся внутри этих областей. Как указывалось выше, в этом случае независимо от знака  $\eta$  величина  $k_{x21}$  принимает *минимые* значения, а величина  $k_{x22}$  — *действительные*. То есть, часть дисперсионной поверхности волны, расположенная в области VS, будет описывать волны, соответствующие *общему* решению дифференциального уравнения (14) вида

$$e_{z2} = A \cos(|k_{x21}|x) + B \sin(-|k_{x21}|x) + C \exp(k_{x22}x) + D \exp(-k_{x22}x). \quad (28)$$

Таким образом, распределение волны по толщине ферритовой пластины для этой части дисперсионной поверхности будут описывать как тригонометрические, так и экспоненциальные функции, и волну можно условно назвать *объёмно-поверхностной*, или VS-волной.

Следует отметить, что оставшийся случай, когда *общее* решение дифференциального уравнения (14) имеет вид

$$e_{z2} = A \exp(k_{x21}x) + B \exp(-k_{x21}x) + C \cos(|k_{x22}|x) + D \sin(-|k_{x22}|x), \quad (29)$$

соответствующий SV-волне с *действительным* значением  $k_{x21}$  и *минимым* значением  $k_{x22}$ , никогда не реализуется в ферритовой пластине<sup>6</sup>.

Таким образом, распределение волны внутри ферритовой пластины может изменяться в зависимости от параметров волны, и на части дисперсионной или изочастотной зависимости<sup>7</sup> это распределение может соответ-

ствовать, например, SS-волне (описываемой выражением (26)), а на другой части — VS-волне (описываемой выражением (28)). Это является *принципиальным отличием точного описания* спиновых волн от описания этих волн в магнитостатическом приближении [26], при котором каждая дисперсионная поверхность спиновых волн характеризуется определённым типом их распределения (поверхностным или объёмным).

Очевидно также, что найденное однозначное соответствие между областями пространства  $\{k_y, k_z, f\}$  и типом распределения волны в ферритовом слое не зависит от граничных условий, которые мы будем использовать далее, и справедливо для всех структур на основе ферритовой пластины: это может быть и просто ферритовая пластина, окружённая полупространствами вакуума, и односторонне металлизированная ферритовая пластина, и структура металл–диэлектрик–феррит–диэлектрик–металл и т.п.

Более того, опираясь на выражения (14)–(25), можно сделать более общий вывод: *распределение волны внутри бигиротропного слоя (в том числе для слоя феррита, антиферромагнетика, плазмы или одноосного оптического кристалла) и в структурах на основе такого слоя в общем случае всегда описывают два<sup>8</sup> волновых числа* —  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$ . В зависимости от типа анизотропной среды, её параметров и значений  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  это распределение описывает одно из выражений (26)–(29).

Ниже мы получим дисперсионное уравнение и выражения для СВЧ-компонент SS-волны, распространяющейся вдоль бигиротропного слоя.

## 5. Выражения для компонент электромагнитного поля внутри бигиротропного слоя

Для того чтобы записать выражения для всех СВЧ-компонент электромагнитной волны внутри бигиротропного слоя, вначале необходимо получить выражения для их амплитуд  $e_{x2}$ ,  $e_{y2}$ ,  $h_{x2}$ ,  $h_{y2}$  и  $h_{z2}$ .

Подставляя выражение (26) в первое уравнение системы (8), найдём выражение для амплитуды  $h_{z2}$ :

$$h_{z2} = i\beta_1 (A \exp(k_{x21}x) + B \exp(-k_{x21}x)) + i\beta_2 (C \exp(k_{x22}x) + D \exp(-k_{x22}x)), \quad (30)$$

где

$$\beta_1 = \frac{1}{\mu_{zz}F_{vg}} \left( F_v - \frac{k_{x21}^2}{k_0^2} \right), \quad (31)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\mu_{zz}F_{vg}} \left( F_v - \frac{k_{x22}^2}{k_0^2} \right). \quad (32)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в (5), а затем (5) — в систему уравнений (4), получаем

$$k_y e_{z2} - k_z e_{y2} - k_0 \mu h_{x2} - ik_0 v h_{y2} = 0, \quad (33)$$

$$-ik_z e_{x2} - \frac{\partial e_{z2}}{\partial x} + k_0 v h_{x2} + ik_0 \mu h_{y2} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial e_{y2}}{\partial x} + ik_y e_{x2} + ik_0 \mu_{zz} h_{z2} = 0, \quad (35)$$

<sup>6</sup> Однако не исключено, что SV-волна может возникать в слоях других анизотропных сред, являющихся частными случаями бигиротропного слоя.

<sup>7</sup> Как известно, дисперсионная и изочастотная зависимости являются сечениями дисперсионной поверхности, поэтому всё, о чём говорится здесь и выше в отношении пересечения этой поверхности с граничными поверхностями, относится также и к этим зависимостям.

<sup>8</sup> В разделе 10 мы уточним, в каких частных случаях распределение волны внутри бигиротропного слоя описывает одно волновое число.

$$\mu \left( \frac{\partial h_{x2}}{\partial x} - ik_y h_{y2} \right) + i\nu \left( \frac{\partial h_{y2}}{\partial x} + ik_y h_{x2} \right) - i\mu_{zz} k_z h_{z2} = 0, \quad (36)$$

$$k_y h_{z2} - k_z h_{y2} + k_0 \varepsilon e_{x2} + ik_0 g e_{y2} = 0, \quad (37)$$

$$ik_z h_{x2} + \frac{\partial h_{z2}}{\partial x} + k_0 g e_{x2} + ik_0 \varepsilon e_{y2} = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial h_{y2}}{\partial x} + ik_y h_{x2} - ik_0 \varepsilon_{zz} e_{z2} = 0, \quad (39)$$

$$\varepsilon \left( \frac{\partial e_{x2}}{\partial x} - ik_y e_{y2} \right) + ig \left( \frac{\partial e_{y2}}{\partial x} + ik_y e_{x2} \right) - ik_z \varepsilon_{zz} e_{z2} = 0. \quad (40)$$

Из уравнений (33) и (37) можно, соответственно, получить выражения

$$h_{x2} = \frac{k_y}{\mu k_0} e_{z2} - \frac{k_z}{\mu k_0} e_{y2} - i \frac{\nu}{\mu} h_{y2}, \quad (41)$$

$$e_{x2} = -\frac{k_y}{\varepsilon k_0} h_{z2} + \frac{k_z}{\varepsilon k_0} h_{y2} - i \frac{g}{\varepsilon} e_{y2}. \quad (42)$$

Подставляя выражения (41) и (42) в уравнения (34) и (38), получаем следующие соотношения:

$$i \frac{k_y k_z}{\varepsilon k_0^2} h_{z2} - i F_{v2} h_{y2} - F_{vg} e_{y2} + \frac{\nu k_y}{\mu k_0} e_{z2} - \frac{1}{k_0} \frac{\partial e_{z2}}{\partial x} = 0, \quad (43)$$

$$-i \frac{k_y k_z}{\mu k_0^2} e_{z2} + i F_{g2} e_{y2} - F_{vg} h_{y2} + \frac{g k_y}{\varepsilon k_0} h_{z2} - \frac{1}{k_0} \frac{\partial h_{z2}}{\partial x} = 0, \quad (44)$$

где безразмерные функции  $F_{v2}$  и  $F_{g2}$  имеют вид

$$F_{v2} = \frac{k_z^2}{\varepsilon k_0^2} - \mu_{\perp}, \quad (45)$$

$$F_{g2} = \frac{k_z^2}{\mu k_0^2} - \varepsilon_{\perp}. \quad (46)$$

Умножив (43) на  $iF_{vg}$ , а (44) на  $F_{v2}$  и сложив полученные соотношения, получим выражение для величины  $e_{y2}$ :

$$e_{y2} = \frac{1}{F_2} \left[ a_0 e_{z2} - ia_2 h_{z2} + \frac{F_{vg}}{k_0} \frac{\partial e_{z2}}{\partial x} - i \frac{F_{v2}}{k_0} \frac{\partial h_{z2}}{\partial x} \right], \quad (47)$$

а умножив (43) на  $iF_{g2}$ , а (44) на  $F_{vg}$  и сложив полученные соотношения, получаем выражение для величины  $h_{y2}$ :

$$h_{y2} = \frac{1}{F_2} \left[ ib_0 e_{z2} + b_2 h_{z2} + \frac{F_{vg}}{k_0} \frac{\partial h_{z2}}{\partial x} + i \frac{F_{g2}}{k_0} \frac{\partial e_{z2}}{\partial x} \right]. \quad (48)$$

В выражениях (47) и (48) использованы обозначения

$$F_2 = F_{v2} F_{g2} - F_{vg}^2, \quad (49)$$

$$a_0 = \frac{k_y k_z}{\mu k_0^2} F_{v2} - \frac{\nu k_y}{\mu k_0} F_{vg}, \quad (50)$$

$$a_2 = \frac{k_y k_z}{\varepsilon k_0^2} F_{vg} - \frac{g k_y}{\varepsilon k_0} F_{v2}, \quad (51)$$

$$b_0 = \frac{k_y k_z}{\mu k_0^2} F_{vg} - \frac{\nu k_y}{\mu k_0} F_{g2}, \quad (52)$$

$$b_2 = \frac{k_y k_z}{\varepsilon k_0^2} F_{g2} - \frac{g k_y}{\varepsilon k_0} F_{vg}. \quad (53)$$

Как видно, амплитуды  $e_{y2}$  и  $h_{y2}$  в (47) и (48) выражены только через амплитуды  $e_{z2}$  и  $h_{z2}$  и их производные по

координате  $x$ . Подставляя выражения (47) и (48) в (41) и (42), мы запишем аналогичные выражения для амплитуд  $e_{x2}$  и  $h_{x2}$ . С целью краткой записи зависимостей всех амплитуд от координаты  $x$  введём такие, зависящие только от  $x$ , *безразмерные* функции  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_3$ , чтобы выполнялись соотношения

$$e_{z2} = \Sigma_0(x), \quad \frac{\partial e_{z2}}{\partial x} = k_0 \Sigma_1(x), \quad (54)$$

$$h_{z2} = i \Sigma_2(x), \quad \frac{\partial h_{z2}}{\partial x} = ik_0 \Sigma_3(x).$$

Подставляя формулы (26) и (30) в соотношения (54), получаем следующие выражения для функций  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_3$ :

$$\Sigma_0(x) = A \exp(k_{x21}x) + B \exp(-k_{x21}x) + C \exp(k_{x22}x) + D \exp(-k_{x22}x), \quad (55)$$

$$\Sigma_1(x) = \frac{k_{x21}}{k_0} (A \exp(k_{x21}x) - B \exp(-k_{x21}x)) + \frac{k_{x22}}{k_0} (C \exp(k_{x22}x) - D \exp(-k_{x22}x)), \quad (56)$$

$$\Sigma_2(x) = \beta_1 (A \exp(k_{x21}x) + B \exp(-k_{x21}x)) + \beta_2 (C \exp(k_{x22}x) + D \exp(-k_{x22}x)), \quad (57)$$

$$\Sigma_3(x) = \frac{k_{x21}}{k_0} \beta_1 (A \exp(k_{x21}x) - B \exp(-k_{x21}x)) + \frac{k_{x22}}{k_0} \beta_2 (C \exp(k_{x22}x) - D \exp(-k_{x22}x)). \quad (58)$$

Поясняя введённые обозначения, отметим, что цифровой индекс при величинах  $\Sigma_0 - \Sigma_3$  соответствует максимальной степени волновых чисел  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  в множителях при экспонентах в выражениях (55)–(58) (с учётом их степени в соотношениях (31) и (32) для величин  $\beta_1$  и  $\beta_2$ ).

Учитывая соотношения (54)–(58) в выражениях для амплитуд (26), (30), (41), (42), (47) и (48) и подставляя последние в формулы (6) и (7), получаем выражения для всех компонент электромагнитного поля внутри бигротропного слоя:

$$E_{x2} = \frac{i}{\varepsilon F_2} \left[ \frac{k_z}{k_0} (b_0 \Sigma_0 + F_{g2} \Sigma_1 + b_2 \Sigma_2 + F_{vg} \Sigma_3) - \frac{k_y}{k_0} F_2 \Sigma_2 - g(a_0 \Sigma_0 + F_{vg} \Sigma_1 + a_2 \Sigma_2 + F_{v2} \Sigma_3) \right] \exp(-ik_y y - ik_z z), \quad (59)$$

$$H_{x2} = \frac{1}{\mu F_2} \left[ \frac{k_y}{k_0} F_2 \Sigma_0 - \frac{k_z}{k_0} (a_0 \Sigma_0 + F_{vg} \Sigma_1 + a_2 \Sigma_2 + F_{v2} \Sigma_3) + \nu (b_0 \Sigma_0 + F_{g2} \Sigma_1 + b_2 \Sigma_2 + F_{vg} \Sigma_3) \right] \exp(-ik_y y - ik_z z), \quad (60)$$

$$E_{y2} = \frac{1}{F_2} [a_0 \Sigma_0 + F_{vg} \Sigma_1 + a_2 \Sigma_2 + F_{v2} \Sigma_3] \exp(-ik_y y - ik_z z), \quad (61)$$

$$H_{y2} = \frac{i}{F_2} [b_0 \Sigma_0 + F_{g2} \Sigma_1 + b_2 \Sigma_2 + F_{vg} \Sigma_3] \exp(-ik_y y - ik_z z), \quad (62)$$

$$E_{z2} = \Sigma_0(x) \exp(-ik_y y - ik_z z), \quad (63)$$

$$H_{z2} = i \Sigma_2(x) \exp(-ik_y y - ik_z z). \quad (64)$$



## 6. Выражения для компонент электромагнитного поля вне бигиротропного слоя

Рассмотрим теперь СВЧ-поля, возникающие вне бигиротропного слоя в средах 1 и 3, характеризующихся скалярными диэлектрическими и магнитными проницаемостями  $\varepsilon_1, \mu_1$  и  $\varepsilon_3, \mu_3$ . Подставляя решения вида (6) и (7) в уравнения Максвелла (4), мы получаем вместо системы (8) два независимых дифференциальных уравнения относительно амплитуд  $e_{z1,3}$  и  $h_{z1,3}$ :

$$\frac{\partial^2 e_{z1,3}}{\partial x^2} - (k_z^2 + k_y^2 - k_0^2 \varepsilon_{1,3} \mu_{1,3}) e_{z1,3} = 0, \quad (65)$$

$$\frac{\partial^2 h_{z1,3}}{\partial x^2} - (k_z^2 + k_y^2 - k_0^2 \varepsilon_{1,3} \mu_{1,3}) h_{z1,3} = 0. \quad (66)$$

Решения уравнений (65) и (66) определяет характеристическое уравнение

$$k_{x1,3}^2 = k_z^2 + k_y^2 - k_0^2 \varepsilon_{1,3} \mu_{1,3}. \quad (67)$$

Поскольку СВЧ-поля должны спадать по экспоненте вдали от слоя, решения уравнений (65) и (66) в среде 1 будем искать в виде

$$e_{z1} = N \exp(-k_{x1} x), \quad (68)$$

$$h_{z1} = iG \exp(-k_{x1} x), \quad (69)$$

а в среде 3 — в виде

$$e_{z3} = K \exp(k_{x3} x), \quad (70)$$

$$h_{z3} = iL \exp(k_{x3} x), \quad (71)$$

где  $N, G, L$  и  $K$  — независимые коэффициенты.

Преобразуя систему уравнений Максвелла (4), выразим величины  $e_{y1,3}, e_{x1,3}, h_{y1,3}$  и  $h_{x1,3}$  через величины  $e_{z1,3}$  и  $h_{z1,3}$ , описываемые выражениями (68)–(71), а затем, подставив все полученные соотношения в (6), (7), найдём выражения для компонент СВЧ-поля в полупространствах 1 и 3:

$$E_{x1} = \frac{i}{q_1^2} (Gk_y k_0 \mu_1 - Nk_z k_{x1}) \exp(-k_{x1} x - ik_y y - ik_z z), \quad (72)$$

$$H_{x1} = \frac{1}{q_1^2} (Gk_z k_{x1} - Nk_y k_0 \varepsilon_1) \exp(-k_{x1} x - ik_y y - ik_z z), \quad (73)$$

$$E_{y1} = \frac{1}{q_1^2} (Nk_y k_z - Gk_{x1} k_0 \mu_1) \exp(-k_{x1} x - ik_y y - ik_z z), \quad (74)$$

$$H_{y1} = \frac{i}{q_1^2} (Gk_y k_z - Nk_{x1} k_0 \varepsilon_1) \exp(-k_{x1} x - ik_y y - ik_z z), \quad (75)$$

$$E_{z1} = N \exp(-k_{x1} x - ik_y y - ik_z z), \quad (76)$$

$$H_{z1} = iG \exp(-k_{x1} x - ik_y y - ik_z z), \quad (77)$$

$$E_{x3} = \frac{i}{q_3^2} (Lk_y k_0 \mu_3 + Kk_z k_{x3}) \exp(k_{x3} x - ik_y y - ik_z z), \quad (78)$$

$$H_{x3} = -\frac{1}{q_3^2} (Lk_z k_{x3} + Kk_y k_0 \varepsilon_3) \exp(k_{x3} x - ik_y y - ik_z z), \quad (79)$$

$$E_{y3} = \frac{1}{q_3^2} (Kk_y k_z + Lk_{x3} k_0 \mu_3) \exp(k_{x3} x - ik_y y - ik_z z), \quad (80)$$

$$H_{y3} = \frac{i}{q_3^2} (Lk_y k_z + Kk_{x3} k_0 \varepsilon_3) \exp(k_{x3} x - ik_y y - ik_z z), \quad (81)$$

$$E_{z3} = K \exp(k_{x3} x - ik_y y - ik_z z), \quad (82)$$

$$H_{z3} = iL \exp(k_{x3} x - ik_y y - ik_z z), \quad (83)$$

где величины  $q_1$  и  $q_3$  описывает следующее выражение:

$$q_{1,3}^2 = k_z^2 - k_0^2 \varepsilon_{1,3} \mu_{1,3}. \quad (84)$$

## 7. Дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в бигиротропном слое

Приступим теперь к выводу дисперсионного уравнения, описывающего распространение электромагнитных волн в бигиротропном слое. Удовлетворяя граничным условиям непрерывности тангенциальных компонент  $E_y, E_z, H_y$  и  $H_z$  при  $x = 0$  и  $x = s$ , можно получить следующую систему из восьми уравнений для постоянных коэффициентов  $A, B, C, D, G, N, K, L$ :

$$N \exp(-k_{x1} s) = \Sigma_0(s),$$

$$F_2 \frac{Nk_y k_z - G\mu_1 k_{x1} k_0}{q_1^2 \exp(k_{x1} s)} = a_0 \Sigma_0(s) + F_{vg} \Sigma_1(s) + a_2 \Sigma_2(s) + F_{v2} \Sigma_3(s),$$

$$G \exp(-k_{x1} s) = \Sigma_2(s),$$

$$F_2 \frac{Gk_y k_z - N\varepsilon_1 k_{x1} k_0}{q_1^2 \exp(k_{x1} s)} = b_0 \Sigma_0(s) + F_{g2} \Sigma_1(s) + b_2 \Sigma_2(s) + F_{vg} \Sigma_3(s), \quad (85)$$

$$K = \Sigma_0(0),$$

$$F_2 \frac{Kk_y k_z + L\mu_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} = a_0 \Sigma_0(0) + F_{vg} \Sigma_1(0) + a_2 \Sigma_2(0) + F_{v2} \Sigma_3(0),$$

$$L = \Sigma_2(0),$$

$$F_2 \frac{Lk_y k_z + K\varepsilon_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} = b_0 \Sigma_0(0) + F_{g2} \Sigma_1(0) + b_2 \Sigma_2(0) + F_{vg} \Sigma_3(0),$$

Подставляя величины  $N, G, K$  и  $L$  из первого, третьего, пятого и седьмого уравнений во второе, четвёртое, шестое и восьмое уравнения системы (85), получаем систему из четырёх уравнений для коэффициентов  $A, B, C$  и  $D$ :

$$\left( a_0 - \frac{k_y k_z}{q_1^2} F_2 \right) \Sigma_0(s) + F_{vg} \Sigma_1(s) + \left( a_2 + \frac{\mu_1 k_{x1} k_0}{q_1^2} F_2 \right) \Sigma_2(s) + F_{v2} \Sigma_3(s) = 0,$$

$$\left( b_0 + \frac{\varepsilon_1 k_{x1} k_0}{q_1^2} F_2 \right) \Sigma_0(s) + F_{g2} \Sigma_1(s) + \left( b_2 - \frac{k_y k_z}{q_1^2} F_2 \right) \Sigma_2(s) + F_{vg} \Sigma_3(s) = 0,$$

$$\left( a_0 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 \right) \Sigma_0(0) + F_{vg} \Sigma_1(0) +$$

$$+ \left( a_2 - \frac{\mu_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 \right) \Sigma_2(0) + F_{v2} \Sigma_3(0) = 0,$$



$$\left(b_0 - \frac{\varepsilon_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2\right) \Sigma_0(0) + F_{g2} \Sigma_1(0) + \left(b_2 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2\right) \Sigma_2(0) + F_{vg} \Sigma_3(0) = 0. \quad (86)$$

Подставляя в систему (86) выражения (55)–(58), описывающие величины  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_3$ , и приводя подобные при одинаковых коэффициентах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} d_{11}A + d_{12}B + d_{13}C + d_{14}D = 0, \\ d_{21}A + d_{22}B + d_{23}C + d_{24}D = 0, \\ d_{31}A + d_{32}B + d_{33}C + d_{34}D = 0, \\ d_{41}A + d_{42}B + d_{43}C + d_{44}D = 0. \end{cases} \quad (87)$$

Элементы  $d_{11} - d_{44}$  матрицы (87) приведены в приложении. Итак, дисперсионное уравнение для электромагнитных SS-волн, распространяющихся вдоль бигиротропного слоя, представляет собой определитель четвёртого порядка для системы однородных уравнений (87).

Очевидно, что подобным образом можно получить дисперсионное уравнение и выражения для компонент СВЧ-поля и для VV-, VS- и SV-волн, которые могут возникать в различных частных случаях бигиротропного слоя.

## 8. Доказательство непрерывности нормальных компонент электрической и магнитной индукций на границах бигиротропного слоя

Итак, в предыдущем разделе 7 нами получено дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в бигиротропном слое. Для вывода этого уравнения мы использовали граничные условия непрерывности тангенциальных компонент  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_y$  и  $H_z$  на поверхностях слоя (при  $x = 0$  и  $x = s$ ).

Вполне возможно, что, например, исследователи, описывающие СВ в магнитостатическом приближении, могут засомневаться в возможности использования полученного нами решения для описания СВ, поскольку в магнитостатическом приближении этой волне не сопоставляется никакого СВЧ-электрического поля (считается, что оно мало и им можно пренебречь), а вместо условия непрерывности тангенциальных компонент электрического поля на границах используется граничное условие непрерывности нормальной компоненты магнитной индукции [26].

Ниже мы докажем единственность полученного нами решения, а значит, и возможность его использования для описания любых электромагнитных волн (в том числе СВ) в анизотропных средах, описываемых эрмитовыми тензорами второго ранга  $\varepsilon_2$  и  $\mu_2$  в соответствии с выражениями (1) и (2).

Как известно, в соответствии с теоремой о единственности решения уравнений Максвелла удовлетворение непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на границах раздела сред одновременно обеспечивает непрерывность и нормальных компонент электрической и магнитной индукции  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  на этих границах (см. § 9.2 в [48]). Однако эта теорема была доказана лишь для электромагнитных волн в изотропных средах, — электромагнитные волны в гиротропных средах были исключены из рассмотрения [48].

Поскольку при выводе дисперсионного уравнения мы использовали условия непрерывности тангенциальных

компонент  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_y$  и  $H_z$  на границах, то необходимо дополнительно доказать непрерывность нормальных компонент векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  на этих границах.

Из сравнения выражений (59)–(64), а также из выражений (41) и (42) видно, что внутри бигиротропного слоя компоненты поля  $E_{x2}$  и  $H_{x2}$  можно записать следующим образом:

$$E_{x2} = -\frac{k_y}{\varepsilon k_0} H_{z2} + \frac{k_z}{\varepsilon k_0} H_{y2} - i \frac{g}{\varepsilon} E_{y2}, \quad (88)$$

$$H_{x2} = \frac{k_y}{\mu k_0} E_{z2} - \frac{k_z}{\mu k_0} E_{y2} - i \frac{\nu}{\mu} H_{y2}. \quad (89)$$

Исходя из выражений (5) и используя выражения (88) и (89), нормальные компоненты электрической и магнитной индукций  $D_{x2}$  и  $B_{x2}$  можно записать в следующем виде:

$$D_{x2} = \varepsilon E_{x2} + ig E_{y2} = -\frac{k_y}{k_0} H_{z2} + \frac{k_z}{k_0} H_{y2}, \quad (90)$$

$$B_{x2} = \mu H_{x2} + i\nu H_{y2} = \frac{k_y}{k_0} E_{z2} - \frac{k_z}{k_0} E_{y2}. \quad (91)$$

В изотропных полупространствах 1 и 3 нормальные компоненты электрической и магнитной индукций  $D_{x1}$ ,  $B_{x1}$  и  $D_{x3}$ ,  $B_{x3}$ , равные соответственно  $\varepsilon_1 E_{x1}$ ,  $\mu_1 H_{x1}$  и  $\varepsilon_3 E_{x3}$ ,  $\mu_3 H_{x3}$ , по аналогии можно записать следующим образом<sup>9</sup>:

$$D_{x1} = -\frac{k_y}{k_0} H_{z1} + \frac{k_z}{k_0} H_{y1}, \quad (92)$$

$$B_{x1} = \frac{k_y}{k_0} E_{z1} - \frac{k_z}{k_0} E_{y1}, \quad (93)$$

$$D_{x3} = -\frac{k_y}{k_0} H_{z3} + \frac{k_z}{k_0} H_{y3}, \quad (94)$$

$$B_{x3} = \frac{k_y}{k_0} E_{z3} - \frac{k_z}{k_0} E_{y3}, \quad (95)$$

Как видно из выражений (90)–(95), и в бигиротропном слое, и в изотропных полупространствах *нормальная компонента электрической индукции  $D_x$  определяется суммой тангенциальных компонент магнитного поля, а нормальная компонента магнитной индукции  $B_x$  — суммой тангенциальных компонент электрического поля*, причём при соответствующих слагаемых стоят одинаковые коэффициенты.

Напомним теперь, что при составлении системы уравнений (85) использовались следующие граничные условия для тангенциальных компонент  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_y$  и  $H_z$ :

$$\begin{aligned} E_{z1}(x=s) &= E_{z2}(x=s), \\ E_{y1}(x=s) &= E_{y2}(x=s), \\ H_{z1}(x=s) &= H_{z2}(x=s), \\ H_{y1}(x=s) &= H_{y2}(x=s), \\ E_{z3}(x=0) &= E_{z2}(x=0), \\ E_{y3}(x=0) &= E_{y2}(x=0), \\ H_{z3}(x=0) &= H_{z2}(x=0), \\ H_{y3}(x=0) &= H_{y2}(x=0). \end{aligned} \quad (96)$$

<sup>9</sup> Эти соотношения легко получить из уравнений (33) и (37), выражая  $x$ -компоненты поля через  $y$ - и  $z$ -компоненты, полагая там  $\nu = 0$  и  $g = 0$  и меняя индексы 2 на 1 и 3.

Однако из выражений (90)–(95) следует, что выполнение приведённых выше условий непрерывности тангенциальных компонент  $E_y, E_z, H_y$  и  $H_z$  на границах сред обеспечивает одновременное выполнение и других условий — равенства (и, следовательно, непрерывности) нормальных компонент векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  на этих границах:

$$\begin{aligned} D_{x1}(x=s) &= D_{x2}(x=s), \\ B_{x1}(x=s) &= B_{x2}(x=s), \\ D_{x3}(x=0) &= D_{x2}(x=0), \\ B_{x3}(x=0) &= B_{x2}(x=0). \end{aligned} \tag{97}$$

Таким образом, независимо от того, какие граничные условия используются при выводе дисперсионного уравнения, мы получаем одно и то же, *единственное* дисперсионное уравнение, описывающее распространение электромагнитных волн в бигиротропном слое.

### 9. Расчёты характеристик спиновых волн в ферритовой пластине

В качестве примера использования дисперсионного уравнения (87) рассчитаем некоторые характеристики СВ в ферритовой пластине, окружённой полупространствами вакуума.

Как уже отмечалось, принципиальное отличие полученного описания СВ от прежних описаний в магнито-статическом приближении [26] и без него [29, 37] заключается в том, что *распределение волны внутри ферритовой пластины описывают два волновых числа*<sup>10</sup> —  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$ . Продemonстрируем, как это отражается на характеристиках СВ, спектр которой расположен выше частоты  $f_{\perp}$ . Как известно, эту волну часто называют поверхностной магнито-статической волной [26], поскольку при описании в магнито-статическом приближении её распределение по толщине пластины является чисто поверхностным и характеризуется одним волновым числом  $k_{x2ms}$ .

Изочастотные зависимости этой СВ для различных частот представлены на рис. 3, причём кривые 1–4 рассчитаны на основе приведённого выше описания СВ, а кривые 1'–4' рассчитаны в магнито-статическом приближении в соответствии с [26] (для краткости мы будем далее называть их "магнито-статическими" зависимостями). Расчёты проводились при следующих параметрах:  $H_0 = 300$  Э,  $4\pi M_0 = 1750$  Гс,  $s = 40$  мкм,  $\epsilon_2 = 15$ .

Как и следовало ожидать из построений, представленных на рис. 3, при точном описании этой СВ её изочастотные зависимости кроме участков, описывающих SS-волны, могут содержать участки, описывающие VS-волны. Так, СВ с частотами  $f < 2015$  МГц имеют участки, соответствующие VS- волне (например, граничная кривая 1'' ограничивает такой участок на изочастотной кривой 1 на рис. 3), тогда как СВ с частотами  $f > 2015$  МГц всегда представляют собой SS-волны (например, граничная кривая 4'' не пересекает изочастотную кривую 4 на рис. 3).

Хотя на рис. 3 точные и магнито-статические изочастотные зависимости различаются не сильно, изменение величин  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  (характеризующих распределение СВ по толщине пластины) вдоль изочастотных зависимостей существенно отличается от аналогичного изменения

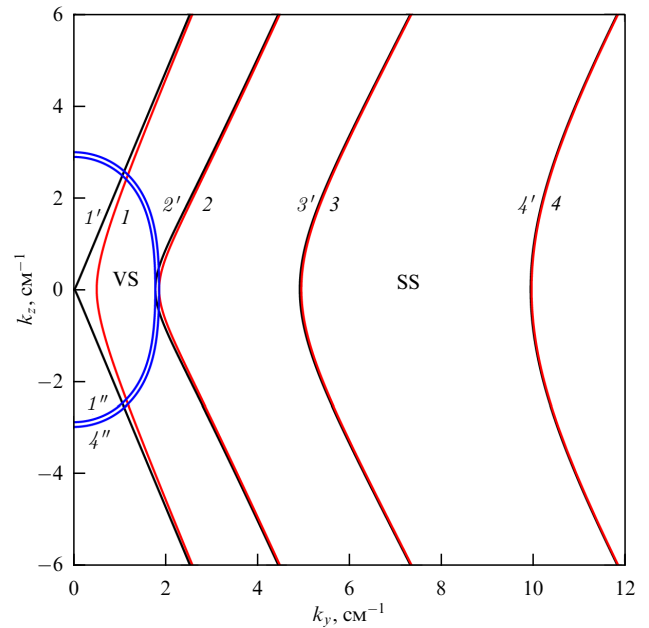


Рис. 3. Изочастотные зависимости спиновых волн в касательно намагниченной ферритовой пластине для частот 2198 (1 и 1'), 2216,3 (2 и 2'), 2250 (3 и 3') и 2300 МГц (4 и 4') (показана полуплоскость  $k_y > 0$ ). Кривые 1–4 рассчитаны без использования магнито-статического приближения, кривые 1'–4' — в магнито-статическом приближении. Показаны также кривые 1'' и 4'', являющиеся пересечением поверхности  $\alpha = 0$  и соответственно плоскостей  $f = 2198$  и  $f = 2300$  МГц (кривая 1'' отделяет на кривой 1 участки, соответствующие SS-волне, и участок, соответствующий VS-волне).

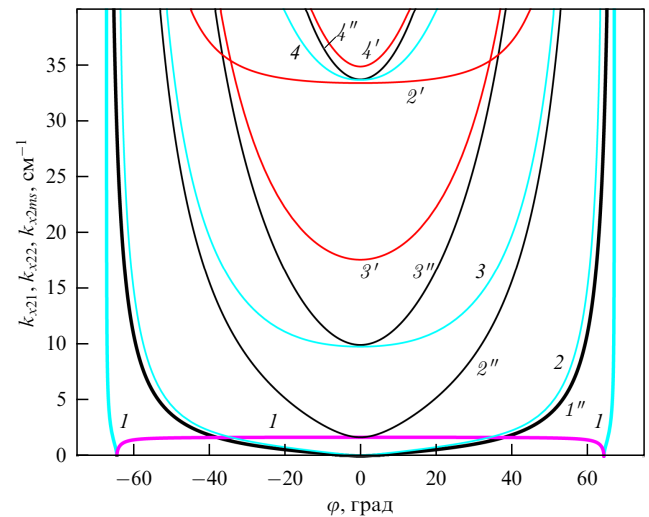


Рис. 4. Зависимости поперечных волновых чисел  $k_{x21}$  (кривые 1–4),  $k_{x22}$  (кривые 1'–4') и  $k_{x2ms}$  (кривые 1''–4'') от угла  $\varphi$ , задающего ориентацию волнового вектора, для частот 2198, 2216,3, 2300 и 2500 МГц соответственно. Кривая 1' на рисунке не показана, так как она расположена выше значения  $250 \text{ см}^{-1}$ . На части кривой 1, показанной фиолетовым цветом,  $k_{x21}$  принимает мнимые значения, соответствующие VS-волне (в этом случае по оси ординат показана величина  $|k_{x21}|$ ).

соответствующей магнито-статической величины  $k_{x2ms}$  (рис. 4).

Как видно из рис. 4, при  $\varphi = 0$  магнито-статические зависимости  $k_{x2ms}(\varphi)$  проходят вблизи кривых  $k_{x21}(\varphi)$ , а с увеличением  $|\varphi|$  зависимости  $k_{x2ms}(\varphi)$  постепенно приближаются к кривым  $k_{x22}(\varphi)$ , причём разница в зна-

<sup>10</sup> Что подтверждает полученные ранее результаты для обратной СВ, распространяющейся вдоль направления вектора  $\mathbf{H}_0$  в касательно намагниченной ферритовой пластине [38].

чениях  $k_{x22}(\varphi = 0)$  и  $k_{x21}(\varphi = 0)$  существенно зависит от частоты, меняясь от  $255 \text{ см}^{-1}$  при  $f = 2198 \text{ МГц}$  до  $2 \text{ см}^{-1}$  при  $f = 2500 \text{ МГц}$ .

### 10. Сравнение распространения спиновой волны вдоль оси $y$ с результатами, полученными ранее

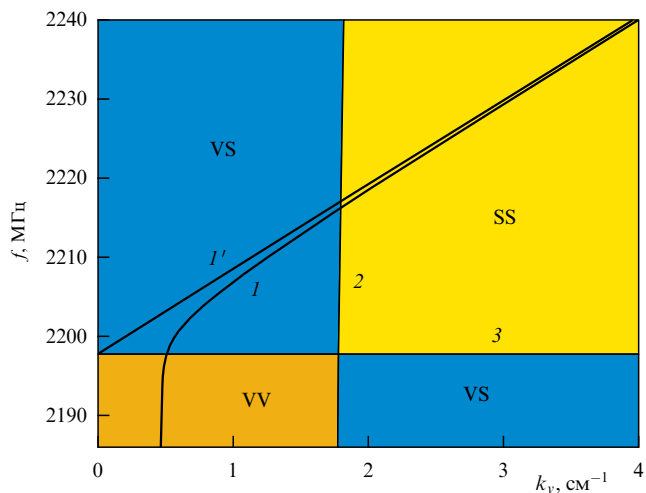
Очевидно, что для проверки любой новой теории важное значение имеет сравнение результатов, полученных на основе этой теории, с имеющимися данными для различных предельных и частных случаев.

Одним из таких случаев является полученное ранее точное описание СВ, распространяющейся в касательно намагниченной ферритовой пластине перпендикулярно вектору  $\mathbf{H}_0$  [30, 31]. На рисунке 5 представлены дисперсионные зависимости СВ  $f(k_y)$  для этого случая при указанных выше параметрах: магнитоэлектрическую зависимость описывает кривая  $1'$ , а точную зависимость, рассчитанную на основе приведённой выше теории и на основе работы [31], описывает одна и та же кривая  $1$ , поскольку результаты этих расчётов совпадают.

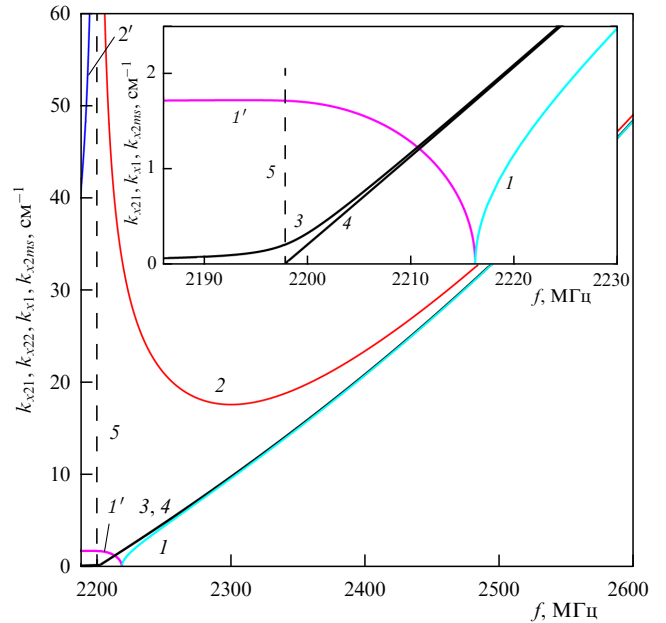
Также на рис. 5 показаны граничные кривые 2 и 3, которые отделяют на кривой 1 участки с SS-, VV- или VS-волнами, характеризующимися распределением СВ по толщине ферритовой пластины в соответствии с выражениями (26) – (28).

На рисунке 6 показано изменение волновых чисел  $k_{x21}$ ,  $k_{x22}$ ,  $k_{x1}$  и  $k_{x2ms}$  вдоль соответствующих дисперсионных зависимостей, представленных на рис. 5. Зависимости  $k_{x21}(f)$  и  $k_{x22}(f)$  рассчитаны на основе выражений (20) и (21), зависимость  $k_{x1}(f)$  — на основе выражения (67), а зависимость  $k_{x2ms}(f)$  — на основе теории [26].

Прежде чем начать обсуждение результатов, представленных на рис. 5 и 6, напомним, что в полученном ранее описании СВ (без магнитоэлектрического приближения), распространяющейся перпендикулярно вектору  $\mathbf{H}_0$  [30, 31], распределение СВ по толщине ферритовой пластины характеризуется одним единственным волновым числом, а не двумя (как следует из представленной выше теории). Таким образом, на первый взгляд возникает



**Рис. 5.** Дисперсионные зависимости  $f(k_y)$  для СВ, распространяющейся перпендикулярно вектору  $\mathbf{H}_0$  в касательно намагниченной ферритовой пластине:  $1$  — точный расчёт,  $1'$  — расчёт в магнитоэлектрическом приближении,  $2$  — кривая, на которой  $\alpha = 0$  (соответствует кривой 2 на рис. 2),  $3$  — прямая  $f = f_{\perp}$  (соответствует прямой 9 на рис. 2). Участки кривой  $1$ , находящиеся в разных областях плоскости  $(f, k_y)$ , соответствуют VV-, VS-, и SS-волнам.



**Рис. 6.** Зависимости поперечных волновых чисел  $k_{x21}$  (кривые  $1$  и  $1'$ ),  $k_{x22}$  (кривые  $2$  и  $2'$ ),  $k_{x1}$  (кривая  $3$ ) и  $k_{x2ms}$  (кривая  $4$ , рассчитанная в магнитоэлектрическом приближении) от частоты  $f$  для СВ, распространяющейся перпендикулярно вектору  $\mathbf{H}_0$  в касательно намагниченной ферритовой пластине: кривые  $1$  и  $2$  соответствуют участкам зависимостей  $k_{x21}(f)$  и  $k_{x22}(f)$ , где значения  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  являются действительными, а кривые  $1'$  и  $2'$  — участкам зависимостей  $k_{x21}(f)$  и  $k_{x22}(f)$ , где значения  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  являются мнимыми (для последних участков по оси ординат показаны значения  $|k_{x21}|$  и  $|k_{x22}|$ );  $5$  — прямая  $f = f_{\perp}$ .

явное противоречие приведённого описания СВ с описанием, полученным ранее. На самом деле, как будет показано далее, это противоречие — только кажущееся.

Очевидно, что случай распространения СВ перпендикулярно вектору  $\mathbf{H}_0$  получается из рассмотренного нами описания, если положить в нём  $k_z = 0$  (или  $\varphi = 0$ ). При  $k_z = 0$  система уравнений Максвелла (4) распадается на две независимые подсистемы, в одну из которых входят лишь компоненты поля  $E_{z2}$ ,  $H_{x2}$  и  $H_{y2}$ , а в другую —  $H_{z2}$ ,  $E_{x2}$  и  $E_{y2}$ . Поскольку при  $k_z = 0$  в соответствии с (11) получаем  $F_{vg} = 0$ , итоговая система уравнений (8) для амплитуд  $e_{z2}$  и  $h_{z2}$  превращается в два независимых уравнения: одно для амплитуды  $e_{z2}$ , а другое — для амплитуды  $h_{z2}$ . Первое уравнение описывает известную поверхностную СВ ( $H$ -волну с компонентами  $E_{z2}$ ,  $H_{x2}$  и  $H_{y2}$ ), для которой в результате подстановки равенства  $F_{vg} = 0$  в выражение (21) получаем

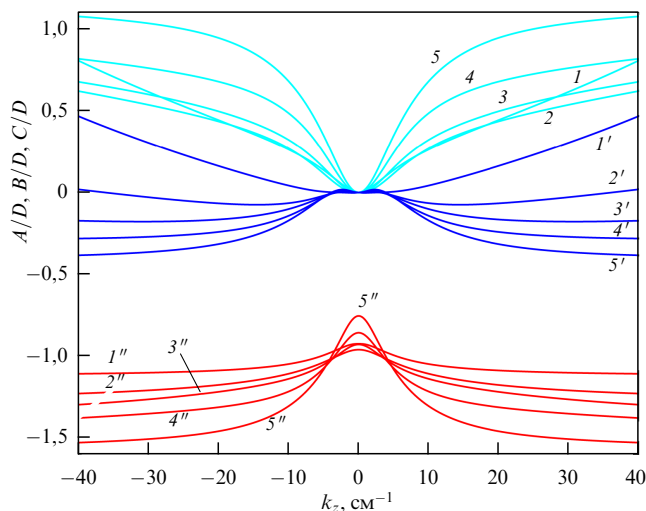
$$k_{x22} = k_0 \sqrt{F_v} = \sqrt{k_y^2 - k_0^2 \epsilon \mu_{\perp}}, \tag{98}$$

а второе уравнение — поверхностную электромагнитную волну ( $E$ -волну с компонентами  $H_{z2}$ ,  $E_{x2}$  и  $E_{y2}$ , характерную для слоя обычного диэлектрика), для которой в результате подстановки равенства  $F_{vg} = 0$  в выражение (20) получаем

$$k_{x21} = k_0 \sqrt{F_g} = \sqrt{k_y^2 - k_0^2 \epsilon \mu_{zz}}. \tag{99}$$

Таким образом, приведённые значения  $k_{x22}$  и  $k_{x21}$  соответствуют полученным ранее результатам (см., например, [1, 11, 30]).

Тем не менее читатели всё же могут сказать: из рис. 4 ясно видно, что в теории, представленной выше, СВ



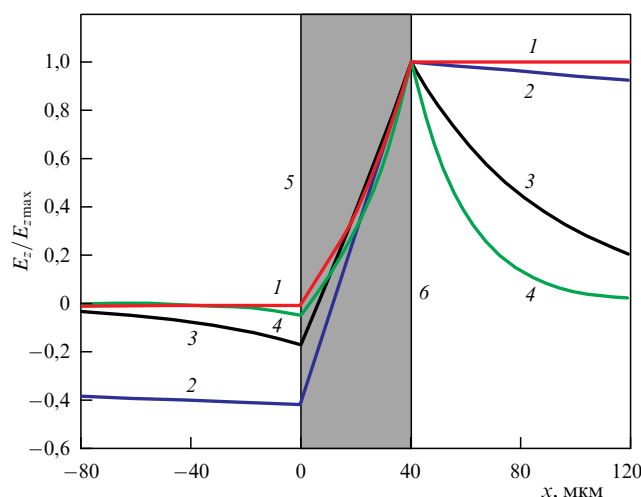
**Рис. 7.** Зависимости отношений коэффициентов  $A/D$  (кривые 1–5),  $B/D$  (кривые 1'–5') и  $C/D$  (кривые 1''–5'') от волнового числа  $k_z$  для частот 2217, 2300, 2500, 2800 и 3200 МГц соответственно.

характеризуется не одним волновым числом при  $\varphi = 0$ , а двумя волновыми числами:  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$ .

Для ответа на это замечание ниже рассчитано изменение коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$ , нормированное на коэффициент  $D$ , в зависимости от волнового числа  $k_z$  (рис. 7). Напомним, что коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  определяют амплитуды экспоненциальных функций в выражении (26), и вот, как видно из рис. 7, коэффициенты  $A$  и  $B$ , стоящие перед  $\exp(k_{x21}x)$  и  $\exp(-k_{x21}x)$ , становятся равными нулю при  $\varphi = 0$  (или  $k_z = 0$ ), тогда как коэффициенты  $C$  и  $D$ , стоящие перед  $\exp(k_{x22}x)$  и  $\exp(-k_{x22}x)$ , в нуль не обращаются! Таким образом, очевидно, что при  $\varphi = 0$  распределение СВ по толщине ферритовой пластины описывается одним единственным волновым числом —  $k_{x22}$ , что было получено ранее и в работах [30, 31].

Как следует из рис. 7, величина  $k_{x21}$  практически не влияет на распределение амплитуд СВЧ-поля СВ по толщине ферритовой пластины для небольшого интервала углов  $|\varphi| \lesssim 2^\circ$ , в котором коэффициенты  $A$  и  $B$  близки к нулю для всех частот, а основной вклад в это распределение в соответствии с формулами (55)–(64) вносят коэффициенты  $C$  и  $D$  и соответствующее им волновое число  $k_{x22}$ . Поэтому зависимости, представленные на рис. 5 и 6, и описываемое ниже изменение распределения СВ при  $\varphi = 0$  будут практически такими же и для небольших углов  $|\varphi| \lesssim 2^\circ$ .

Как видно из рис. 6, при  $f \rightarrow f_\perp$  имеем  $k_{x22} \rightarrow \infty$ , тогда как для аналогичной магнитоэлектрической величины получаем  $k_{x2ms} \rightarrow 0$ ! Очевидно, что такая огромная разница в значениях  $k_{x22}$  и  $k_{x2ms}$  приведёт к значительным отличиям при описании распределения СВ в магнитоэлектрическом приближении и без него: ведь фактически величины  $k_{x22}$  и  $k_{x2ms}$  определяют глубину проникновения СВЧ-поля СВ в ферритовую пластину, и, как видно из рис. 6, зависимость  $k_{x2ms}(f)$  является монотонной, а зависимость  $k_{x22}(f)$  имеет минимум, отстоящий примерно на 100 МГц от частоты  $f_\perp$ . Это приводит к тому, что распределение СВЧ-электрического поля СВ  $E_z(x)$  и распределение плотности энергии СВ (которое определяется зависимостью  $E_z(x)$  [39]) изменяются следующим образом.



**Рис. 8.** Нормированное распределение СВЧ-электрического поля  $E_z(x)$  для СВ со следующими значениями частоты  $f$  и волнового числа  $k_y$ : 1 —  $f = 2197,85$  МГц,  $k_y = 0,503$  см $^{-1}$ ; 2 —  $f = 2300,3$  МГц,  $k_y = 10$  см $^{-1}$ ; 3 —  $f = 3103$  МГц,  $k_y = 200$  см $^{-1}$ ; 4 —  $f = 3276$  МГц,  $k_y = 500$  см $^{-1}$ ; вертикальными прямыми 5 и 6 отмечены границы ферритовой пластины  $x = 0$  и  $x = s = 40$  мкм.

На частотах, близких к  $f_\perp$  (где  $k_y \sim k_0$ ,  $k_{x22}$  велико, а  $k_{x1}$  очень мало), практически вся энергия СВ оказывается локализованной в одном из полупространств (см. кривую 1 на рис. 8), причём энергия СВ, бегущей в положительном направлении оси  $y$ , оказывается локализованной в полупространстве 1 (как на рис. 8), а энергия СВ, бегущей в отрицательном направлении оси  $y$ , — в полупространстве 3. Таким образом, несмотря на большую длину СВ  $\lambda$  на частотах, близких к  $f_\perp$ , ферритовая пластина является для волны практически непреодолимой преградой: почти вся энергия СВ сосредоточена лишь в одном из полупространств, причём эта энергия простирается на десятки сантиметров<sup>11</sup> от поверхности пластины!

С увеличением частоты  $f$  электрическое поле СВ  $E_z$  всё сильнее проникает через ферритовую пластину в полупространство 3 и это проникновение становится максимальным на частоте  $f = 2300$  МГц (см. кривую 2 на рис. 8), на которой  $k_{x22}(f)$  имеет минимум (см. кривую 2 на рис. 6). При дальнейшем увеличении частоты проникновение энергии СВ в полупространство 3 опять понижается, и на частотах, близких к верхней границе спектра, энергия СВ оказывается локализованной вблизи поверхности  $x = s = 40$  мкм.

Совершенно иная картина складывается при описании СВ в магнитоэлектрическом приближении, для которого, как известно [26], при  $k_z = 0$  справедливо соотношение  $k_{x2ms} = k_{x1ms} = k_{x3ms} = |k_{yms}|$ , а распределение магнитного потенциала  $\Psi$  внутри и вне ферритовой пластины описывают выражения

$$\Psi_2 = A \exp(k_{x2ms}x) + B \exp(-k_{x2ms}x),$$

$$\Psi_1 = C \exp(-k_{x1ms}x) \text{ и } \Psi_3 = D \exp(-k_{x3ms}x).$$

В этом случае на частотах, близких к  $f_\perp$  (когда  $k_{x2ms} = k_{x1ms} = k_{x3ms} \sim 0$ , как видно из рис. 6), нормиро-

<sup>11</sup> Это явление позволяет объяснить эффективное преобразование энергии СВ в электромагнитную волну, излучающуюся в окружающее пространство, что было ранее обнаружено экспериментально в работе [35].

ванное распределение<sup>12</sup>  $\Psi(x)$  будет похоже на прямую  $\Psi = 1$  (или  $\Psi = -1$ ). При дальнейшем увеличении частоты  $f$  величины  $k_{x2ms}$ ,  $k_{x1ms}$ ,  $k_{x3ms}$  монотонно возрастают, определяя рост экспоненциального спада распределения  $\Psi(x)$  с увеличением расстояния до поверхности пластины, у которой локализована СВ (см., например, кривую 2 на рис. 5 в [39]).

Таким образом, магнитостатическое описание СВ приводит к неправильно представлению о свойствах СВ в начальной части спектра при  $f \sim f_{\perp}$ . Причина этого кроется в самом магнитостатическом приближении, использование которого подразумевает, что во всех уравнениях и формулах, начиная с уравнений Максвелла, можно считать  $k \gg k_0$ . Повсеместное применение этого правила иногда и приводит к ошибкам. Так, например, в магнитостатическом приближении из точной формулы (98), пренебрегая величиной  $k_0^2 \epsilon \mu_{\perp}$  по сравнению с  $k_y^2$ , можно получить формулу  $k_{x2ms} = |k_{yms}|$ . Однако очевидно, что неравенство  $k_y^2 \gg k_0^2$  справедливо для одного интервала значений  $k_y$ , а неравенство  $k_y^2 \gg k_0^2 \epsilon \mu_{\perp}$  — совершенно для другого интервала значений  $k_y$ , поскольку произведение  $k_0^2 \epsilon \mu_{\perp}$  может быть на несколько порядков больше  $k_0^2$  на частотах, при которых значения  $\mu_{\perp}$  велики.

Отметим, что мы не призываем исследователей СВ совсем отказаться от использования магнитостатического приближения при описании СВ, поскольку при его использовании было получено много полезных и важных результатов (например, формулы для углов отсечки СВ, полученные в магнитостатическом приближении при  $k \rightarrow \infty$ , безусловно, справедливы и при точном описании СВ). Мы хотим лишь обратить внимание на то, что в магнитостатическом приближении получается весьма упрощённое, а иногда и неверное описание свойств СВ.

К сожалению, в рамках одной статьи невозможно обсудить все преимущества, которые даёт точное описание электромагнитных волн в бигиротропном слое даже на примере СВ, точно так же, как после выхода работы [26] было опубликовано ещё множество работ по исследованию свойств СВ. Однако мы хотели бы упомянуть здесь о некоторых из этих преимуществ. Прежде всего, развитая выше теория позволит проводить описание СВ в рамках классической электродинамики, устранив существенную обособленность описания СВ из-за использования магнитостатического приближения. В частности, с помощью данной теории, кроме точного распределения СВ, можно рассчитать вектор Пойнтинга, направление и плотность потока энергии, а также поляризацию и векторные линии СВ, причём в дальнейшем могут быть решены и более сложные задачи на основе современных методов электродинамики, что, несомненно, будет способствовать успешному развитию магноники и совершенствованию устройств, разрабатываемых с использованием СВ.

## 11. Заключение

В работе обсуждаются проблемы и ошибки, возникающие из-за описания спиновых волн в магнитостатическом приближении, широко используемом специалистами уже более 60 лет. В частности, описывая спиновую волну на основе уравнений магнитостатики и называя её

магнитостатической, исследователи не сопоставляют ей ни СВЧ-электрическое поле (считая его пренебрежимо малым), ни вектор Пойнтинга (который невозможно найти без электрического поля).

С целью преодоления указанных проблем в работе впервые представлено корректное аналитическое решение задачи о распространении электромагнитных волн в произвольном направлении вдоль касательно намагниченного бигиротропного слоя, у которого диэлектрическая и магнитная проницаемости описываются эрмитовыми тензорами второго ранга. Очевидно, что частным случаем этой задачи является задача о распространении спиновых волн в ферритовой пластине.

Показано, что представляя решение уравнений Максвелла в виде распространяющейся в плоскости слоя волны вида  $\exp(-ik_y y - ik_z z)$  и оставляя произвольной зависимость волны от координаты  $x$ , нормальной к плоскости слоя, можно привести уравнения Максвелла к системе из двух дифференциальных уравнений второго порядка, которые содержат лишь зависящие от  $x$  амплитуды СВЧ-электрического и магнитного полей, параллельные вектору постоянного однородного магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ . В свою очередь, эта система сводится к линейному дифференциальному уравнению четвёртого порядка, которому соответствует биквадратное характеристическое уравнение, определяющее волновые числа распределения электромагнитной волны в поперечном сечении бигиротропного слоя. Показано, что это характеристическое уравнение имеет четыре простых (не кратных) корня  $k_{x21}$ ,  $k_{x22}$ ,  $k_{x23} = -k_{x21}$  и  $k_{x24} = -k_{x22}$ , которые не могут быть комплексными числами, а могут принимать только действительные или только мнимые значения.

Рассмотрено распространение электромагнитных волн с действительными значениями  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  в произвольном направлении вдоль бигиротропного слоя, окружённого диэлектрическими полупространствами. Для этих волн получено дисперсионное уравнение, представляющее собой определитель четвёртого порядка для системы однородных линейных уравнений, а также показано, что эти волны имеют шесть компонент СВЧ-электромагнитного поля — три магнитные и три электрические. Доказано, что данное дисперсионное уравнение получается как при использовании граничных условий непрерывности тангенциальных компонент векторов электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , так и при использовании граничных условий непрерывности нормальных компонент векторов электрической и магнитной индукций  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ .

Установлено, что *распределение амплитуд СВЧ-полей волны внутри бигиротропного слоя (и его частных случаев — слоёв феррита, антиферромагнетика, плазмы или одноосного оптического кристалла) и в структурах на основе такого слоя в общем случае всегда описывают два волновых числа —  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$* . В зависимости от анизотропной среды, её параметров и значений  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$ , распространяющиеся волны характеризуются одним из четырёх возможных распределений, описываемых экспоненциальными и тригонометрическими функциями (см. выражения (26)–(29)), и представляют собой один из следующих типов волн: SS-волны, или поверхностно-поверхностные волны ( $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  — действительные числа), VS-волны, или объёмно-поверхностные волны ( $k_{x21}$  — мнимое число, а  $k_{x22}$  — действительное), VV-волны, или объёмно-объёмные волны ( $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  — мнимые числа) и SV-волны, или поверхностно-объёмные волны ( $k_{x21}$  — действительное число, а  $k_{x22}$  — мнимое).

<sup>12</sup> Распределение  $\Psi(x)$  часто ассоциируется с распределением энергии СВ, что, как отмечалось в [39], некорректно. Мы анализируем здесь зависимость  $\Psi(x)$ , поскольку в магнитостатическом приближении у СВ нет зависимости, аналогичной  $E_z(x)$ .



На основе представленной теории исследованы характеристики СВ в ферритовой пластине, являющейся частным случаем бигиротропного слоя. В пространстве координат  $\{k_y, k_z, f\}$  построены *граничные поверхности*, которые отделяют на дисперсионных поверхностях  $f(k_y, k_z)$  для различных типов СВ области с различным распределением волны. Показано, что на дисперсионных поверхностях СВ (а также на их сечениях — дисперсионных и изочастотных зависимостях) могут существовать области, описывающие SS-, VS- и VV-волны. Установлено, что граничные поверхности описывает уравнение, тождественное дисперсионному уравнению для электромагнитных волн в неограниченной ферритовой (бигиротропной) среде (если это уравнение свести к двумерному случаю).

Исследованы характеристики СВ с частотами, лежащими выше частоты ферромагнитного резонанса ферритовой пластины  $f_{\perp}$ . В частности, рассчитаны зависимости поперечных волновых чисел СВ  $k_{x21}$  и  $k_{x22}$  от ориентации  $\varphi$  волнового вектора для разных значений частоты  $f$ . Обнаружено, что зависимости  $k_{x21}(\varphi)$  и  $k_{x22}(\varphi)$  существенно отличаются как друг от друга, так и от аналогичных магнитоэлектрических зависимостей  $k_{x2ms}(\varphi)$ . Разница в значениях  $k_{x22}(\varphi \sim 0)$  и  $k_{x21}(\varphi \sim 0)$  существенно зависит от частоты, изменяясь от  $\sim 255 \text{ см}^{-1}$  при  $f \sim f_{\perp}$  до  $2 \text{ см}^{-1}$  при  $f \sim f_{\perp} + 300 \text{ МГц}$ . При углах  $\varphi \sim 0$  зависимости  $k_{x2ms}(\varphi)$  проходят вблизи кривых  $k_{x21}(\varphi)$ , а при углах  $\varphi$ , близких к углам отсечки волнового вектора, — вблизи кривых  $k_{x22}(\varphi)$ .

Кроме того, установлено, что распределение волны по толщине ферритовой пластины для случая  $\varphi = 0$  (или  $k_z = 0$ ) описывает одно волновое число  $k_{x22}$ , поскольку коэффициенты  $A$  и  $B$ , определяющие вклад второго волнового числа  $k_{x21}$  и стоящие перед  $\exp(k_{x21}x)$  и  $\exp(-k_{x21}x)$ , равны нулю.

Показано, что важную роль в описании СВ играет её СВЧ-электрическое поле, которое определяет распределение энергии волны внутри и вблизи ферритовой пластины. В частности, расчёты распределения СВЧ-электрического поля волны  $E_z(x)$  для ряда частот  $f$  продемонстрировали, что на частотах, близких к  $f_{\perp}$ , ферритовая пластина является для волны почти непреодолимой преградой, несмотря на большую длину волны: практически вся энергия волны сосредоточена в одном из полупространств, в котором эта энергия простирается на десятки сантиметров от поверхности пластины (тогда как аналогичные расчёты в магнитоэлектрическом приближении дают неверные результаты, в соответствии с которыми энергия волны распределена практически поровну между полупространствами)! Найдено также, что проникновение энергии СВ, через ферритовую пластину во второе полупространство становится максимальным на частоте, на которой зависимость  $k_{x22}(f)$  имеет минимум.

Мы полагаем, что полученное решение задачи о распространении электромагнитных волн в касательно намагниченном бигиротропном слое позволит проводить точные расчёты характеристик электромагнитных волн не только в слоях феррита, антиферромагнетика, плазмы и одноосного оптического кристалла, но и в слоях различных метаматериалов.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН.

## 12. Приложение

Элементы матрицы (87) описываются следующими выражениями:

$$d_{11} = \left[ a_0 - \frac{k_y k_z}{q_1^2} F_2 + \frac{k_{x21}}{k_0} F_{vg} + \beta_1 \left( a_2 + \frac{\mu_1 k_{x1} k_0}{q_1^2} F_2 + \frac{k_{x21}}{k_0} F_{v2} \right) \right] \exp(k_{x21} s), \quad (\text{П.1})$$

$$d_{12} = \left[ a_0 - \frac{k_y k_z}{q_1^2} F_2 - \frac{k_{x21}}{k_0} F_{vg} + \beta_1 \left( a_2 + \frac{\mu_1 k_{x1} k_0}{q_1^2} F_2 - \frac{k_{x21}}{k_0} F_{v2} \right) \right] \exp(-k_{x21} s), \quad (\text{П.2})$$

$$d_{13} = \left[ a_0 - \frac{k_y k_z}{q_1^2} F_2 + \frac{k_{x22}}{k_0} F_{vg} + \beta_2 \left( a_2 + \frac{\mu_1 k_{x1} k_0}{q_1^2} F_2 + \frac{k_{x22}}{k_0} F_{v2} \right) \right] \exp(k_{x22} s), \quad (\text{П.3})$$

$$d_{14} = \left[ a_0 - \frac{k_y k_z}{q_1^2} F_2 - \frac{k_{x22}}{k_0} F_{vg} + \beta_2 \left( a_2 + \frac{\mu_1 k_{x1} k_0}{q_1^2} F_2 - \frac{k_{x22}}{k_0} F_{v2} \right) \right] \exp(-k_{x22} s), \quad (\text{П.4})$$

$$d_{21} = \left[ b_0 + \frac{\varepsilon_1 k_{x1} k_0}{q_1^2} F_2 + \frac{k_{x21}}{k_0} F_{g2} + \beta_1 \left( b_2 - \frac{k_y k_z}{q_1^2} F_2 + \frac{k_{x21}}{k_0} F_{vg} \right) \right] \exp(k_{x21} s), \quad (\text{П.5})$$

$$d_{22} = \left[ b_0 + \frac{\varepsilon_1 k_{x1} k_0}{q_1^2} F_2 - \frac{k_{x21}}{k_0} F_{g2} + \beta_1 \left( b_2 - \frac{k_y k_z}{q_1^2} F_2 - \frac{k_{x21}}{k_0} F_{vg} \right) \right] \exp(-k_{x21} s), \quad (\text{П.6})$$

$$d_{23} = \left[ b_0 + \frac{\varepsilon_1 k_{x1} k_0}{q_1^2} F_2 + \frac{k_{x22}}{k_0} F_{g2} + \beta_2 \left( b_2 - \frac{k_y k_z}{q_1^2} F_2 + \frac{k_{x22}}{k_0} F_{vg} \right) \right] \exp(k_{x22} s), \quad (\text{П.7})$$

$$d_{24} = \left[ b_0 + \frac{\varepsilon_1 k_{x1} k_0}{q_1^2} F_2 - \frac{k_{x22}}{k_0} F_{g2} + \beta_2 \left( b_2 - \frac{k_y k_z}{q_1^2} F_2 - \frac{k_{x22}}{k_0} F_{vg} \right) \right] \exp(-k_{x22} s), \quad (\text{П.8})$$

$$d_{31} = a_0 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 + \frac{k_{x21}}{k_0} F_{vg} + \beta_1 \left( a_2 - \frac{\mu_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 + \frac{k_{x21}}{k_0} F_{v2} \right), \quad (\text{П.9})$$

$$d_{32} = a_0 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 - \frac{k_{x21}}{k_0} F_{vg} + \beta_1 \left( a_2 - \frac{\mu_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 - \frac{k_{x21}}{k_0} F_{v2} \right), \quad (\text{П.10})$$

$$d_{33} = a_0 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 + \frac{k_{x22}}{k_0} F_{vg} + \beta_2 \left( a_2 - \frac{\mu_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 + \frac{k_{x22}}{k_0} F_{v2} \right), \quad (\text{П.11})$$

$$d_{34} = a_0 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 - \frac{k_{x22}}{k_0} F_{vg} + \beta_2 \left( a_2 - \frac{\mu_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 - \frac{k_{x22}}{k_0} F_{v2} \right), \quad (\text{П.12})$$

$$d_{41} = b_0 - \frac{\varepsilon_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 + \frac{k_{x21}}{k_0} F_{g2} + \beta_1 \left( b_2 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 + \frac{k_{x21}}{k_0} F_{vg} \right), \quad (\text{П.13})$$

$$d_{42} = b_0 - \frac{\varepsilon_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 - \frac{k_{x21}}{k_0} F_{g2} + \beta_1 \left( b_2 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 - \frac{k_{x21}}{k_0} F_{vg} \right), \quad (\text{П. 14})$$

$$d_{43} = b_0 - \frac{\varepsilon_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 + \frac{k_{x22}}{k_0} F_{g2} + \beta_2 \left( b_2 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 + \frac{k_{x22}}{k_0} F_{vg} \right), \quad (\text{П. 15})$$

$$d_{44} = b_0 - \frac{\varepsilon_3 k_{x3} k_0}{q_3^2} F_2 - \frac{k_{x22}}{k_0} F_{g2} + \beta_2 \left( b_2 - \frac{k_y k_z}{q_3^2} F_2 - \frac{k_{x22}}{k_0} F_{vg} \right), \quad (\text{П. 16})$$

## Список литературы

1. Гуревич А Г *Ферриты на сверхвысоких частотах* (М.: Физматгиз, 1960)
2. Lax В, Button К J *Microwave Ferrites and Ferrimagnetics* (New York: McGraw-Hill, 1962)
3. Агранович В М, Гинзбург В Л *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов* (М.: Наука, 1965); Пер. на англ. яз.: Agranovich V M, Ginzburg V L *Crystal Optics with Spatial Dispersion, and Excitons* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)
4. Ахизер А И, Барьяхтар В Г, Пелетминский С В *Спиновые волны* (М.: Наука, 1967); Пер. на англ. яз.: Akhiezer A I, Bar'yakhtar V G, Peletminskii S V *Spin Waves* (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1968)
5. Born М, Wolf Е *Principles of Optics* (Oxford: Pergamon Press, 1969); Пер. на русск. яз.: Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Мир, 1970)
6. Гинзбург В Л, Рухадзе А А *Волны в магнитоактивной плазме 2-е изд.* (М.: Наука, 1975)
7. Ландсберг Г С *Оптика* (М.: Наука, 1976)
8. Felsen L B, Marcuvitz N *Radiation and Scattering of Waves* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1973); Пер. на русск. яз.: Фелсен Л, Маркувич Н *Излучение и рассеяние волн Т. 2* (М.: Мир, 1978)
9. Виноградова М Б, Руденко О В, Сухоруков А П *Теория волн* (М.: Наука, 1990)
10. Вашковский А В, Стальмахов В С, Шараевский Ю П *Магнито-статические волны в электронике сверхвысоких частот* (Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1993)
11. Гуревич А Г, Мелков Г А *Магнитные колебания и волны* (М.: Наука, 1994); Пер. на англ. яз.: Gurevich A G, Melkov G A *Magnetization Oscillations and Waves* (Boca Raton, FL: CRC Press, 1996)
12. Stancil D D, Prabhakar A *Spin Waves. Theory and Applications* (New York: Springer, 2009)
13. Локк Э Г *УФН* **178** 397 (2008); Lock E H *Phys. Usp.* **51** 375 (2008)
14. Мандельштам Л И *Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике* (М.: Наука, 1972)
15. Локк Э Г, Герус С В, Анненков А Ю *Радиотехника и электроника* **67** 567 (2022); Lock E H, Gerus S V, Annenkov A Yu *J. Commun. Technol. Electron.* **67** 649 (2022)
16. Локк Э Г *УФН* **182** 1327 (2012); Lock E H *Phys. Usp.* **55** 1239 (2012)
17. Annenkov A Yu, Gerus S V, Lock E H *Europhys. Lett.* **123** 44003 (2018)
18. Annenkov A Yu, Gerus S V, Lock E H *EPJ Web Conf.* **185** 02006 (2018)
19. Никитов С А и др. *УФН* **185** 1099 (2015); Nikitov S A et al. *Phys. Usp.* **58** 1002 (2015)
20. Chumak A V et al. *Nature Phys.* **11** 453 (2015)
21. Wang X S, Zhang H W, Wang X R *Phys. Rev. Applied* **9** 024029 (2018)
22. Никитов С А и др. *УФН* **190** 1009 (2020); Nikitov S A et al. *Phys. Usp.* **63** 945 (2020)
23. Pirro P et al. *Nat. Rev. Mater.* **6** 1114 (2021)
24. Chumak A V et al. *IEEE Trans. Magn.* **58** 0800172 (2022)
25. Ахизер А И, Барьяхтар В Г, Пелетминский С В *Спиновые волны* (М.: Наука, 1967); Пер. на англ. яз.: Akhiezer A I, Bar'yakhtar V G, Peletminskii S V *Spin Waves* (Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1968)
26. Damon R W Eshbach J R *J. Phys. Chem. Solids* **19** 308 (1961)
27. Gupta S S, Srivastava N C *J. Appl. Phys.* **50** 6697 (1979)
28. Вендик О Г, Калинин Б А, Митева С И *Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника* **24** (9) 52 (1981)
29. Ruppri R *J. Appl. Phys.* **62** 11 (1987)
30. Данилов В В, Зависляк И В, Балинский М Г *Спиновая электродинамика* (Киев: Лыбидь, 1991)
31. Вашковский А В, Локк Э Г *Радиотехника и электроника* **46** 729 (2001); Vashkovskii A V, Lolk E G *J. Commun. Technol. Electron.* **46** 674 (2001)
32. Вашковский А В, Локк Э Г *Радиотехника и электроника* **46** 1257 (2001); Vashkovskii A V, Lolk E G *J. Commun. Technol. Electron.* **46** 1163 (2001)
33. Вашковский А В, Локк Э Г *Радиотехника и электроника* **47** 97 (2002); Vashkovskii A V, Lolk E G *J. Commun. Technol. Electron.* **47** 87 (2002)
34. Локк Э Г *Радиотехника и электроника* **48** 1484 (2003); Lolk E G *J. Commun. Technol. Electron.* **48** 1369 (2003)
35. Вашковский А В, Локк Э Г *Радиотехника и электроника* **49** 966 (2004); Vashkovskii A V, Lolk E G *J. Commun. Technol. Electron.* **49** 904 (2004)
36. Гришин С В, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук (Саратов: Саратов. гос. ун-т им. Н.Г. Чернышевского, 2006)
37. Вяткина С А, Бабичев Р К, Иванов В Н *Электромагнитные волны и электромагнитные системы* (10) 64 (2011)
38. Вашковский А В, Локк Э Г *Радиотехника и электроника* **57** 541 (2012); Vashkovskii A V, Lolk E G *J. Commun. Technol. Electron.* **57** 490 (2012)
39. Вашковский А В, Локк Э Г *УФН* **181** 293 (2011); Vashkovsky A V, Lock E H *Phys. Usp.* **54** 281 (2011)
40. Lock E H *Solid State Phenomena* **233–234** 476 (2015)
41. Локк Э Г *Радиотехника и электроника* **61** 35 (2016); Lolk E G *J. Commun. Technol. Electron.* **61** 33 (2016)
42. Локк Э Г, Вашковский А В *Радиотехника и электроника* **61** 746 (2016); Lolk E G, Vashkovskii A V *J. Commun. Technol. Electron.* **61** 877 (2016)
43. Локк Э Г, Герус С В *Радиотехника и электроника* **68** 884 (2023); Lock E H, Gerus S V *J. Commun. Technol. Electron.* **68** 971 (2023)
44. Гришин С В, Богомолова А В, Никитов С А *Письма в ЖТФ* **48** (5) 39 (2022); Grishin S V, Bogomolova A V, Nikitov S A *Tech. Phys. Lett.* **48** (3) 37 (2022)
45. Bogomolova A V et al. *J. Magn. Magn. Mater.* **587** 171278 (2023)
46. Amel'chenko M D et al. *Phys. Rev. B* **108** 224401 (2023)
47. Локк Э Г, Луговской А В, Герус С В *Радиотехника и электроника* **66** 662 (2021); Lock E H, Lugovskoi A V, Gerus S V *J. Commun. Technol. Electron.* **66** 834 (2021)
48. Stratton J A *Electromagnetic Theory* (Intern. Ser. in Physics) (New York: McGraw-Hill Book Co., 1941); Пер. на русск. яз.: Страттон Дж А *Теория электромагнетизма* (М.–Л.: Гостехиздат, 1948)

## Electromagnetic waves in a tangentially magnetized bi-gyrotropic layer (with an example of analysis of spin wave characteristics in a ferrite plate)

E.H. Lock<sup>(\*)</sup>, S.V. Gerus<sup>(\*\*)</sup>, Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences, Fryazino Branch, pl. Vvedenskogo 1, 141190 Fryazino, Moscow region, Russian Federation. E-mail: <sup>(\*)</sup> edwin@fireras.su, <sup>(\*\*)</sup> svg318@ire216.msk.su

We discuss difficulties arising from the description of spin waves in the magnetostatic approximation, in which neither the microwave electric field nor the Poynting vector is associated with the wave. To overcome these difficulties, we present for the first time a correct solution to the problem of electromagnetic wave propagation in an arbitrary direction along a tangentially magnetized bi-gyrotropic layer (a special case of this problem is the propagation of spin waves in a ferrite plate). It is shown that the wave distribution over the layer thickness is described by two different wave numbers  $k_{x21}$  and  $k_{x22}$ , which can take real or imaginary values; in particular, three types of spin wave distributions can occur inside the ferrite plate — surface-surface (when  $k_{x21}$  and  $k_{x22}$  are real numbers), volume-surface ( $k_{x21}$  is imaginary and  $k_{x22}$  is real), and volume-volume ( $k_{x21}$  and  $k_{x22}$  are imaginary numbers), which fundamentally distinguishes the obtained description of spin waves from their description in the magnetostatic approximation.

**Keywords:** spin waves, ferrite plates, electromagnetic waves, bi-gyrotropic layers, wave distribution over layer thickness

PACS numbers: 41.20.Gz, 41.20.Jb, **75.70.**–i

Bibliography — 48 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **194** (12) 1330–1344 (2024)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.09.039768>

Received 30 January 2024, revised 9 September 2024

*Physics–Uspekhi* **67** (12) (2024)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2024.09.039768>