Октябрь 2024 г. *Том 194, № 10*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

О формуле Р.Л. Стратоновича перехода от динамических измерений к вероятностным и её связи с операциями над функциями распределения случайных величин

М.Ю. Романовский

Рассматриваются применения формулы Р.Л. Стратоновича [1] *точного перехода от динамических измерений к вероятностным, или термодинамическим. Даётся связь этой формулы с известными выражениями для операций над функциями распределения плотности вероятности случайных величин. Демонстрируется применение формулы к задачам определения наблюдаемых физических параметров: полей, потенциалов, моментов, создаваемых (стохастически движущимися) заряженными частицами различной мультипольности.*

Ключевые слова: дельта-функция, плотность вероятности, распределение микрополя

PACS numbers: **02.50.**–**r**, **05.20.**–**y**, **41.20.**–**q** DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.08.039738

Содержание

1. Введение

Формула Р.Л. Стратоновича в оригинале описывает переход от измерений стохастической динамики многих частиц (с полным числом N) в фазовом пространстве координат и импульсов $\{\mathbf{Z}\} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N)$ к распределениям некоторых термодинамических (наблюдаемых) величин A [1]. В виде определения она записывается для преобразования плотности вероятности распределения $\rho\{\mathbf{Z}\}$ к плотности вероятности распределения $W(A)$

$$W(A) = \int \delta\big(A - B\{\mathbf{Z}\}\big)\, \rho\{\mathbf{Z}\}\, \mathrm{d}\mathbf{Z}\,, \tag{1}$$

где $B\{\mathbf{Z}\}$ — некоторая функция, определяющая физическую величину [1]. Для работы формулы (1) все интересующие нас $B\{\mathbf{Z}\}$ и $\rho\{\mathbf{Z}\}$ должны быть известны. Формула (1) является обобщением тождества

$$W_A(A) = \int \delta(z - A)\, W_A(z)\, \mathrm{d}z\,, \tag{1а}$$

или, в общепринятом обобщающем формализме с обозначением усреднения треугольными скобками сразу для случайной переменной A, зависящей от координаты x,

$$W_A(A, x) = \big\langle \delta\big[A(x) - A\big] \big\rangle_A\,. \tag{1б}$$

Формула (1б) допускает обобщение на K-точечные функции распределения

$$W_A(A_1, A_2, \ldots, A_K, x_1, x_2, \ldots, x_K) = \left\langle \prod_{i=1}^{K} \delta\big[A_K(x_K) - A\big] \right\rangle_A$$

и, соответственно, на функции распределения различных случайных величин

$$W_A(A_1, A_2, \ldots, A_K) = \left\langle \prod_{i=1}^{K} \delta[A_K - A] \right\rangle_A\,.$$

М.Ю. Романовский [1, 2, 3]

(1) Частное учреждение по обеспечению научного развития атомной отрасли "Наука и инновации", ул. Большая Ордынка 24, 119017 Москва, Российская Федерация

(2) АНО Национальный центр физики и математики, ул. Парковая 1, стр. 3, 607182 Саров, Нижегородская обл., Российская Федерация

(3) Российский национальный исследовательский медицинский университет имени Н.И. Пирогова, ул. Островитянова 1, 117997 Москва, Российская Федерация

E-mail: MYRomanovsky@rosatom.ru

Статья поступила 4 июня 2024 г., после доработки 8 августа 2024 г.

[1] Эта величина может быть, например, магнитным дипольным моментом $\mathbf{M}_H$, $\mathbf{M}_H = (1/2c)\sum_{i=1}^{N}(e_i/m_i)\,[\mathbf{r}_i\mathbf{p}_i]$ для системы стохастически движущихся заряженных частиц с координатами $(r_1, \ldots, r_N)$, импульсами $(p_1, \ldots, p_N)$ и зарядами $(e_1, \ldots, e_N)$.

Этот формализм расширяет формализм Р.Л. Стратоновича и применялся, например, в [2] для установления связи между лагранжевым и эйлеровым статистическим описанием случайных полей гидродинамического типа, что позволило найти аналитические выражения в эйлеровом представлении для плотностей вероятности, спектров скорости и т.д.

Очевидно, что (1) связывает именно плотности вероятности распределений случайных величин. Достаточно проинтегрировать (1) по A — в результате получатся совпадающие нормировки плотностей вероятности распределения $\rho\{\mathbf{Z}\}$ и $W(A)$. Кроме этого, (1) определяет переход от мгновенной плотности вероятности распределения $\rho\{\mathbf{Z}\}$ в фазовом пространстве к мгновенной же плотности вероятности распределения (термодинамических величин) $W(A)$. Исследование динамики $\rho\{\mathbf{Z}\}$ и $W(A)$ [1] не входит в задачи данных методических заметок.

В первой части заметок (разделы 2, 3) будет продемонстрировано, как практически работать с (1). Будет показано сведение известных формул для плотностей вероятности распределения суммы, разности, произведения и частного независимых случайных величин к формуле Р.Л. Стратоновича. Для практически важных случаев сумм и произведений функций от произвольного количества случайных величин также будет продемонстрирована работа формулы в определении распределений плотностей вероятности случайных величин, являющихся вышеуказанными суммами и произведениями этих функций. Полученные результаты будут аналитически точными, в отличие от асимптотического приближения метода А.А. Маркова [3, 4].

Соответственно, во второй части (разделы 4, 5), посвящённой рассмотрению применения (1) к задачам определения наблюдаемых физических величин: полей, потенциалов, моментов, создаваемых стохастически движущимися заряженными частицами — будут определяться именно мгновенные функции плотности вероятности распределений и их моменты, т.е. будут описаны мгновенные наблюдения.

Заметим также, что (1) можно рассматривать как теорему — нужно доказать, что $W(A)$ является искомой функцией распределения плотности вероятности для случайной величины $B\{\mathbf{Z}\}$. Доказательство элементарно — домножим обе части (1) на A^k, где k — произвольное натуральное число, и проинтегрируем обе части по $\mathrm{d}A$. В левой части по определению получим величину k-го момента A. В правой же части в силу свойств δ-функции Дирака получим также величину k-го момента $B\{\mathbf{Z}\}$. В силу произвольности k получается, что все моменты плотности вероятности распределения $B\{\mathbf{Z}\}$ совпадают со всеми соответствующими моментами распределения $W(A)$, а это одно из определений эквивалентности функций плотности вероятности [5], т.е. доказано, что (1) определяет плотность вероятности распределения $B\{\mathbf{Z}\}$.

2. Описание арифметических операций над случайными величинами, сводимых к формуле Р.Л. Стратоновича

Помимо перехода от фазовых переменных к термодинамическим, оказывается, что формула (1) позволяет удобно рассчитывать плотности вероятности случайных величин (их можно с полным основанием считать термодинамическими), которые являются суммой, разностью, произведением и частным (произвольного) количества независимых случайных величин. Последние могут быть не только случайными величинами в фазовом пространстве (т.е. случайными импульсами и координатами некоторых частиц), но и иметь любую природу. Достаточно одного факта — их независимости.

Кроме того, можно также удобно, во многих случаях аналитически, рассчитывать плотность вероятности случайных величин, являющихся функциями от других случайных величин. Особенно производительно это происходит в физически значимых ситуациях, когда наблюдаемая величина является суммой однотипных функций от других случайных величин (см. пример в сноске к введению).

Рассмотрим известную формулу, описывающую плотность вероятности $F(x)$ случайной величины ζ, являющейся суммой двух независимых случайных величин [5, 6] $\xi+\chi$ с плотностями вероятности распределений $f(x)$ и $g(x)$ соответственно:

$$h(x)=\int f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y\,, \tag{2}$$

где интегрирование идёт по всей области существования функций $f(x)$ и $g(x)$. В дальнейшем мы для простоты будем считать, что все наши функции распределения определены для переменных [2] от $-\infty$ до $+\infty$, а более сложные случаи оставим для рассмотрения читателю. Кроме того, не будем вводить везде новые, отличные от уже использованных, обозначения величин, переменных и функций, имея в виду, что для каждой новой математической операции представленные величины могут быть совершенно другими и иметь другие значения.

Элементарное преобразование

$$f(x-y)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\big(z-(x-y)\big)\,f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, приводит (2) к выражению (мы воспользовались чётностью дельта-функции)

$$h(x)=\iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x-z-y)\,f(z)\,g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, \tag{3}$$

т.е. к виду (1). Здесь роль "термодинамической" переменной играет x, а фазовых — y и z, хотя очевидно, что они могут быть самыми произвольными случайными величинами.

Для суммы трёх случайных величин $\zeta=\xi+\chi+\psi$ с плотностями вероятности распределений $f(x)$, $g(x)$ и $l(x)$ соответственно плотность распределения вероятностей $h(x)$ случайной величины ζ будет

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty}F(z-t)l(t)\,\mathrm{d}t=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}l(t)\,\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}f(z-t-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y=$$

[2] Для переменных в фазовом пространстве это обычно выполняется для импульсов, пространственные же переменные обычно определяются внутри некоторого конечного объёма, что в дальнейшем не мешает выкладкам.

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} l(t) g(y) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - t - y - x) f(x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t =$$
$$= \iiint_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) l(t) \delta(z - x - y - t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t \,. \quad (4)$$

Здесь $F(x)$ — плотность вероятности распределения суммы двух случайных величин $\xi + \chi$. Таким образом, по индукции приходим к формуле плотности вероятности $f(x)$ для случайной величины ζ, являющейся произвольной суммой независимых случайных величин $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N$ с плотностями вероятностей $f_1(x_1)$, $f_2(x_2), \ldots, f_N(x_N)$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \sum_{i=1}^{N} x_i\right) \times$$
$$\times \left[\prod_{i=1}^{N} f_i(x_i)\right] \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_N \,. \quad (5)$$

Функция распределения плотности вероятности $h(x)$ разности случайных величин ξ и χ с плотностями вероятности распределений $f(x)$ и $g(x)$, в сущности, та же самая, отличие только в знаке:

$$h(x) = \int f(x + y) g(y) \, \mathrm{d}y \,.$$

Поэтому формула (1) для разности независимых случайных величин будет

$$h(x) = \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x - z + y) f(z) g(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \,.$$

Очевидно обобщение (5) на случай, когда часть независимых случайных величин входит в результирующую случайную величину ζ со знаком плюс, а остальные — со знаком минус: с противоположными знаками они возникнут в аргументе дельта-функции.

Результат (5) пока достаточно очевиден. Если взять образы Фурье от обеих частей (5), то слева возникнет характеристическая функция случайной величины — суммы независимых случайных величин. Справа же, учитывая выражение

$$\delta(x - A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\mathrm{i}K(x - A)\right) \mathrm{d}K \,,$$

и взяв каждый интеграл вида $\int_{-\infty}^{\infty} f_i(x_i) \exp(-\mathrm{i}Kx_i) \, \mathrm{d}x_i$, который является характеристической функцией случайной величины ξ_i, получим, что характеристическая функция суммы независимых случайных величин есть просто произведение характеристических функций этих случайных величин — классический результат [5–8]. Однако формула Р.Л. Стратоновича позволяет оперировать не только с суммами независимых случайных величин, но и с функциями от них, а также с величинами, получающимися в результате других математических действий.

Для произведения ζ независимых случайных величин ξ и χ плотность вероятности $h(x)$ первой выражается через соответствующие функции $f(x)$ и $g(x)$ вторых как [5]

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f\left(\frac{x}{y}\right) g(y) \, \mathrm{d}y \,. \quad (6)$$

Из вида (6) следует большое неудобство при определении плотности вероятности распределения случайной величины, представляющей собой произведение большого количества независимых случайных величин. С применением же формулы (1) задача решается легко. В методических целях проведём доказательство "от противного", т.е. сведём формулу типа (1) к виду (6). Действительно,

$$h(x) = \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x - yz) f(z) g(y) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \, \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} \delta(x - yz) f\left(\frac{yz}{y}\right) \mathrm{d}(yz) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f\left(\frac{x}{y}\right) g(y) \, \mathrm{d}y \,. \quad (7)$$

Для плотности вероятности $h(x)$ случайной величины ζ, являющейся произведением трёх случайных величин $\xi\chi\psi$ с плотностями вероятности распределений $f(x)$, $g(x)$ и $l(x)$ соответственно,

$$h(x) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \delta(x - yzt) f(y) g(z) l(t) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t \,. \quad (8)$$

Обозначим $s = zt$, тогда плотность вероятности $h_2(x)$ произведения двух независимых случайных величин χ и ψ выражается первой строчкой соотношения (7):

$$h_2(s) = \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(s - zt) g(z) l(t) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t \,,$$

а плотность вероятности независимых случайных величин ξ и $\chi\psi$

$$h(x) = \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x - ys) f(y) h_2(s) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s \,.$$

Подставляя сюда $h_2(s)$ из предыдущего выражения, получим:

$$h(x) = \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x - ys) f(y) h_2(s) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s \times$$
$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(s - zt) g(z) l(t) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t \,.$$

Меняя порядок интегрирования и интегрируя один раз по $\mathrm{d}s$, в силу соотношения

$$\delta(x - yzt) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - ys) \, \delta(s - zt) \, \mathrm{d}s$$

получаем формулу (8). Действуя далее по индукции, приходим к общему виду (сходному с видом (5)) для плотности вероятности $f(x)$ для случайной величины ζ, являющейся теперь произвольным произведением независимых случайных величин $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_N$ с плотностями вероятностей $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_N(x_N)$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \prod_{i=1}^{N} x_i\right) \times$$
$$\times \left[\prod_{i=1}^{N} f_i(x_i)\right] \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_N \,. \quad (9)$$

Для частного ζ независимых случайных величин ξ и χ плотность вероятности $h(x)$ первой выражается через соответствующие функции $f(x)$ и $g(x)$ вторых как [5, 6]:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |y|\, f(xy)\, g(y)\, \mathrm{d}y\,. \tag{10}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} h(x) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{y}{z}\right) f(y) g(z)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z)\, \mathrm{d}z \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{y}{z}\right) f\left(z\,\frac{y}{z}\right) |z|\, \mathrm{d}\left(\frac{y}{z}\right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |z|\, f(xz) g(z)\, \mathrm{d}z\,, \end{aligned}$$

что совпадает с (10). Очевидна запись общего выражения для плотности вероятности случайной величины, являющейся комбинацией произведений и частных от набора независимых случайных величин.

Таким образом, для вычисления плотностей вероятности распределений случайных величин, возникающих в результате арифметических операций над набором других независимых случайных величин, формула Р.Л. Стратоновича предоставляет значительное удобство по сравнению с записями в классических руководствах [5–8]. Далее мы увидим, что её мощность не ограничивается расчётом распределений случайных величин, образующихся в результате арифметических операций над независимыми случайными величинами.

3. Работа с функциями от случайных величин с помощью формулы Р.Л. Стратоновича

Переход от расчётов плотностей вероятности случайных величин, возникающих в результате арифметических операций над независимыми случайными величинами, к расчётам плотностей вероятностей от функций случайных величин базируется на соотношении для плотности вероятности функции от случайной величины [5]. Действительно, записывая (1) в виде

$$W(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\big(A - B(z)\big)\, f(z)\, \mathrm{d}z\,,$$

выведем её прямо из определения δ-функции. Здесь $f(z)$ — теперь "обычная" функция распределения плотности вероятности случайной величины ξ, $B(z)$ — "обычная" функция от аргумента z, значения которого принимает случайная величина ξ, т.е. B — также случайная величина. Считаем для простоты, что B — строго монотонная функция[3] z, введём функцию $b(B) = z$, обратную $B(z)$. Тогда [6]: $\mathrm{d}z = (\mathrm{d}z/\mathrm{d}B)\,\mathrm{d}B = b'(B)\,\mathrm{d}B$. В свою очередь, плотность вероятности распределения $F(B)$ случайной величины B связана с $f(z)$ как $F(B) = f[z(B)]b'(B)$. Собирая $f(z)$ и $\mathrm{d}z$ через $F(B)$ и $\mathrm{d}B$, получаем

$$W(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(A - B) F(B)\, \mathrm{d}B = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\big(A - B(z)\big)\, f(z)\, \mathrm{d}z\,,$$

т.е. мы приходим к изначальной формуле Р.Л. Стратоновича с $\rho(z) = f(z)$.

Очевидно, что рассчитать (1) в общем случае не представляется возможным, и нужно переходить к практически важным частным случаям. Особенно удобным использование (1) становится в случае, если $B\{\mathbf{Z}\}$ представляет из себя сумму функций $\sum_{i=1}^{N} g_i(x_i) = G(x)$ от независимых случайных величин ξ_i с функциями распределения плотности вероятности $f_i(x)$. Начнём с соотношения (5), имея в виду, что g_i является случайной величиной с областью определения (назовем её Q), не обязательно простирающейся от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\begin{aligned} W(G) &= \int_Q \ldots \int_Q \delta\left(G - \sum_{i=1}^{N} g_i\right) \times \\ &\times \left[\prod_{i=1}^{N} f_i(g_i)\right] \mathrm{d}g_1\, \mathrm{d}g_2 \ldots \mathrm{d}g_N = \\ &= \int_Q \ldots \int_Q \delta\left(G - \sum_{i=1}^{N} g_i(x_i)\right) \times \\ &\times \left[\prod_{i=1}^{N} f_i\big(g_i(x_i)\big)\, \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}g_i}\right] \mathrm{d}g_1\, \mathrm{d}g_2 \ldots \mathrm{d}g_N = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(G - \sum_{i=1}^{N} g_i(x_i)\right) \times \\ &\times \left[\prod_{i=1}^{N} f_i(x_i)\right] \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_N\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь удобно использовать переход к фурье-образу δ-функции. В результате получаем

$$\begin{aligned} W(G) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\mathrm{i}K\left[G - \sum_{i=1}^{N} g_i(x_i)\right]\right\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{N} f_i(x_i)\right] \mathrm{d}K\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_N = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\,(\mathrm{i}KG)\, \mathrm{d}K \times \\ &\times \prod_{i=1}^{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(-\mathrm{i}Kg_i(x_i)\big)\, f_i(x_i)\, \mathrm{d}x_i\right], \end{aligned} \tag{12}$$

т.е. просто ещё одно доказательство теоремы о равенстве характеристической функции суммы независимых случайных величин произведению характеристических функций таких случайных величин. Для одинаковых $f_i(x_i)$ и $g_i(x_i)$ будет нужно вычислить только один интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(-\mathrm{i}Kg_i(x_i)\big) f_i(x_i)\, \mathrm{d}x_i$. Примеры применения этой формулы будут даны ниже.

Из других арифметических операций над функциями от случайных величин можно выбрать только расчёт плотности вероятности функции случайной величины, являющейся произведением независимых случайных величин ξ_i с функциями распределения плотности вероятности $f_i(x)$. В этом случае

$$\begin{aligned} W(G) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(G - \prod_{i=1}^{N} g_i(x_i)\right) \times \\ &\times \left[\prod_{i=1}^{N} f_i(x_i)\right] \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_N\,. \end{aligned}$$

Дальше продвинуться, используя фурье-образ δ-функции, невозможно, поскольку подынтегральное выражение не факторизуется, как в выражении (12). Можно, однако, прибегнуть к другому приёму.

[3] Опять-таки оставляем читателю случай простых, но объёмных вычислений с немонотонной $B(z)$. В этом случае следует воспользоваться "выкалывающими" свойствами δ-функции.

Если ζ является произведением независимых случайных величин $\xi_1\xi_2\ldots\xi_N$, то $\ln\zeta = \ln\xi_1 + \ln\xi_2 + \ldots + \ln\xi_N$. Тогда

$$W(\ln G) = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\ln G - \sum_{i=1}^{N}\ln g_i(x_i)\right)\times \\ \times\left[\prod_{i=1}^{N} f_i(x_i)\right]\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\,\mathrm{d}x_N\,,$$

где функции распределения плотности вероятности $f_i(x_i)$ относятся к случайным величинам ξ_i (11). В этом случае плотность вероятности $W(G)$ легко определяется из [6]:

$$W(G) = \frac{W(\ln G)}{G} = \frac{1}{2\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\mathrm{i}K\ln G\right)\mathrm{d}K\times \\ \times\prod_{i=1}^{N}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\mathrm{i}K\ln g_i(x_i)\right)f_i(x_i)\,\mathrm{d}x_i\right]. \qquad (13)$$

Для смешанных действий с функциями плотности вероятности случайной величины, возникающей из комбинаций с арифметическими операциями над независимыми случайными величинами (вычитанием, делением) таких простых формул получить нельзя, но они в большинстве случаев и не нужны.

4. Применение формулы Р.Л. Стратоновича для расчёта случайных полей и потенциалов

Исторически первой работой по расчёту (электрических) микрополей различной мультипольной кратности была работа И. Хольтсмарка [9]. На момент её написания из аппарата теории вероятности был известен только метод А.А. Маркова [3] расчёта случайных блужданий для описания броуновского движения (см. также [4]), характеристическая функция не была ещё введена П. Леви. Результатом были значительные математические трудности вычисления плотности вероятности распределения электрического поля — впоследствии было определено, что это правильно для микрополей идеальной плазмы [10]. Расчёт распределения плотности вероятности (гравитационного) микрополя [4] уже практически использовал аналог (1). Наиболее простой метод применения (1) был сделан в [11], приведём его. Кратко механизм расчёта финального распределения плотности вероятности конкретной физической величины следующий: записывается общий вид формулы Р.Л. Стратоновича, затем в подынтегральном выражении осуществляется переход от дельта-функции к её фурье-представлению. Последующая смена порядка интегрирования приводит к результирующему виду плотности вероятности как к фурье-представлению от характеристической функции, где в подавляющем числе случаев можно использовать равенство характеристической функции суммы независимых случайных величин произведению каждой отдельной характеристической функции одной случайной величины. Рассчитаем сначала электрическое микрополе в идеальной плазме: в ней кинетическая энергия движения заряженных частиц гораздо больше энергии межчастичного кулоновского взаимодействия.

Заряды в идеальной плазме расположены независимо друг от друга, полное число их N. Будем измерять величину электрического поля в центре координат $\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{N} e_i\mathbf{r}_i/r_i^3$. В свою очередь, плотность вероятности найти любой заряд e_i есть просто $1/V$, где V — объём (идеальной) плазмы. Из (11) плотность вероятности распределения (случайной) величины $\mathbf{E}$ есть

$$W(\mathbf{E}) = \frac{1}{V^N}\int_V\ldots\int_V\delta\left(\mathbf{E} - \sum_{i=1}^{N}\frac{e_i\mathbf{r}_i}{r_i^3}\right)\prod_{i=1}^{N}\mathrm{d}\mathbf{r}_i = \\ = \frac{1}{8\pi^3V^N}\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\mathbf{K}\exp\left(\mathrm{i}\mathbf{KE}\right)\times \\ \times\left[\prod_{i=1}^{N}\left(\int_V\exp\left(-\mathrm{i}\mathbf{K}\mathbf{r}_i\,\frac{e_i}{r_i^3}\right)\mathrm{d}\mathbf{r}_i\right)\right]. \qquad (14)$$

Определим, например, электронное микрополе идеальной плазмы, где все заряды одинаковы и равны e. Для вычисления единственного интеграла

$$\int_V\exp\left(-\mathrm{i}\mathbf{Kr}\,\frac{e}{r^3}\right)\mathrm{d}\mathbf{r}$$

воспользуемся следующим приёмом. Так как $\int_V\mathrm{d}\mathbf{r} = V$, добавим этот интеграл и вычтем его в интеграле под произведением, получим

$$W(\mathbf{E}) = \frac{1}{8\pi^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\mathbf{K}\,\exp\left(\mathrm{i}\mathbf{KE}\right)\times \\ \times\left\{1 - \frac{1}{V}\int_V\left[1 - \exp\left(-\mathrm{i}\mathbf{Kr}\,\frac{e}{r^3}\right)\right]\mathrm{d}\mathbf{r}\right\}^N$$

или, переходя к пределу $N\to\infty$,

$$W(\mathbf{E}) \cong \frac{1}{8\pi^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\mathbf{K}\,\exp\left\{\mathrm{i}\mathbf{KE} - n\int_V\left[1 - \exp\left(-\mathrm{i}\mathbf{Kr}\,\frac{e}{r^3}\right)\right]\mathrm{d}\mathbf{r}\right\}.$$

Считаем здесь, что и объём V, и число частиц N могут стремиться к бесконечности, но их отношение n — плотность — конечна. В интеграле по объёму следует перейти к полярным координатам с осью, направленной вдоль вектора $\mathbf{K}$. После стандартной процедуры вычисления интеграла по углам, по радиусу в пределах от 0 до бесконечности интеграл берётся два раза по частям [4, 11], имея в виду старое условие $V\to\infty$. В результате получаем

$$W(\mathbf{E}) = \frac{1}{8\pi^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\mathbf{K}\exp\left(\mathrm{i}\mathbf{KE} - \mathbf{K}^{3/2}E_0^{3/2}\right),$$

где $E_0 = 2\pi(4/15)^{2/3}en^{2/3}$. Для плотности распределения абсолютного значения случайной величины поля в нуле, используя очевидную изотропность поля и соотношение $W(E) = 4\pi E^2 W(\mathbf{E})$, полагая также $E/E_0 = \beta$, получаем распределение Хольтсмарка

$$W(\beta) = \frac{2\beta}{\pi}\int_0^{\infty}x\sin\left(\beta x\right)\exp\left(-x^{3/2}\right)\mathrm{d}x\,. \qquad (15)$$

Можно сравнить этот элементарный вывод (15) с объёмными вычислениями в [9][4].

В точности аналогичный результат получается для распределения магнитного микрополя в идеальной изотропной плазме, в этом случае $\beta = H/H_0$, $H_0 = \pi^{5/3}qv_Tn^{2/3}/2^{4/3}c$ [15, 16]. Дополнительно к электриче-

[4] Заметим, что эти вычисления плотности вероятности распределения электрического поля справедливы для отсутствия зарядов в нуле координат (обсуждение см. [12–14]). То же будет для приводимых ниже расчётов магнитных полей, а также для потенциалов.

скому полю здесь возникает очевидный релятивистский фактор $\sim v_T/c$ (v_T — средняя тепловая скорость движения заряженных частиц, c — скорость света в вакууме), ввиду того что при расчёте плотности вероятности распределения фазовыми координатами являются теперь не только пространственные координаты, но и импульсы (скорости) частиц.

Формула (1) позволяет рассчитывать не только распределения в равновесной идеальной плазме, но также и в неравновесной [16]. Можно также оперировать не координатами частиц в плазме, но элементарными микротоками в соответствующих средах (например, в плазменных экранах, в микрочипах) [17]. Во многих таких средах микротоки можно считать не взаимодействующими между собой. Для распределений плотностей вероятности результат будет зависеть от геометрии устройства, создающего магнитное поле, — в трёхмерной геометрии получается распределение

$$W(\mathbf{B}) = \int_V \ldots \int_V \iiint_{-\infty}^{\infty} \ldots \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{\pi} v_T^3 V)^N} \times$$
$$\times \delta\left(\mathbf{B} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu\mu_0 e_i [\mathbf{v}_i \mathbf{r}_i]}{c r_i^3}\right) \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\mathbf{r}_i \, \mathrm{d}\mathbf{v}_i =$$
$$= \frac{1}{8\pi^{3(1+N/2)} v_T^{3N} V^N} \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\mathbf{K} \exp(\mathrm{i}\mathbf{K}\mathbf{B}) \times$$
$$\times \left\{ \prod_{i=1}^{N} \left[\int_V \iiint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\mathrm{i}\mathbf{K}[\mathbf{v}_i \mathbf{r}_i] \frac{\mu\mu_0 e_i}{c r_i^3}\right) \mathrm{d}\mathbf{r}_i \, \mathrm{d}\mathbf{v}_i \right] \right\}$$

с $\beta = B/B_0$, измеряемой величиной теперь является магнитная индукция B, $B_0 = 2^{5/3} \pi^{4/3} [\Gamma(7/4)]^{2/3} \mu\mu_0 \times \langle l^{3/2} \rangle^{2/3} / 15^{2/3} c$, Γ — гамма-функция Эйлера, μ — магнитная проницаемость среды, μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, $\langle l^{3/2} \rangle$ — средняя величина полукуба элемента тока. В двумерной геометрии одного слоя микрочипа результат меняется (см. [17]).

Метод Р.Л. Стратоновича позволяет вычислять не только микрополя от заряженных частиц и микротоков, но и, например, от стохастически и независимо друг от друга расположенных точечных параллельных диполей [18, 19][5]. Компонента поля случайных диполей вдоль одной их осей координат (например, z) ε имеет плотность распределения вероятности

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\mathrm{i}k\varepsilon) \times$$
$$\times \left\{ \iiint_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{d}{r^3} - 3\,\frac{d(\mathbf{e}_z \mathbf{r})^2}{r^5}\right)\right] \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{V} \right\}^N \mathrm{d}k\,.$$

Здесь N — общее количество диполей, V — объём, где они находятся, по-прежнему $N \to \infty$, $V \to \infty$, но плотность $n = N/V$ конечна, $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор вдоль оси z, d — величина дипольного момента одной точечной частицы. Вычисления производятся по схеме, аналогичной расчётам микрополя (14), (15), и дают

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{G}{(\varepsilon - G_c)^2 + G^2}\,, \tag{16}$$

где $G = 4\sqrt{2}\pi nd/9\sqrt{3}$,

$$G_c = 4\left(3 + \sqrt{3}\,\frac{\ln\sqrt{3} - 1}{\ln\sqrt{3} + 1}\right)\frac{nd}{27}\,.$$

Таким образом, используя формулу Р.Л. Стратоновича, получаем лоренцево смещённое распределение (см. также результат (17) при $D/a = 1$).

Ещё одной "точкой приложения" (1) в виде (12) является расчёт величины флуктуации потенциала, создаваемого в нейтральной точке пространства частицами. Здесь можно вернуться к идее Хольтсмарка [9] расчёта флуктуаций (поля) различной мультипольности. Применительно к потенциалу задача в наиболее простом случае ставится следующим образом [20]: пусть имеется N точечных частиц, создающих потенциалы вида q/r_i^a, расположенных в пространстве в объёме V независимо друг от друга. Считаем по-прежнему $N \to \infty$, $V \to \infty$, но плотность частиц $n = N/V$ остаётся конечной.

Задача может быть обобщена на пространство произвольной размерности [20]. Частицы (без ограничения общности можно считать их все одинаковыми) создают в центре координат потенциал

$$\varphi(0) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q}{r_i^a} + \mathrm{const}\,.$$

Расчёт плотности распределения потенциала по формуле (12) даёт (считаем $\mathrm{const} = 0$)

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\beta x) \exp(-x^{D/a})\,\mathrm{d}x\,. \tag{17}$$

Здесь $\beta = \varphi/\varphi_0$,

$$\varphi_0 = q\left(\frac{\pi d}{2D\sin(\pi D/2a)\,\Gamma(D/a)}\right)^{a/D},$$

D — размерность пространства, d — полный пространственный угол в пространстве соответствующей размерности ($d = 1$, 2π, 4π, $4\pi^2$ для одно-, двух-, трёх-, четырёхмерного и т.д. пространств).

Распределение (17) представляет собой стандартную функцию Леви [21] и существует только при $0 < D/a \leqslant 2$. Последнее означает, например, для трёхмерного пространства, что посчитать распределение плотности вероятности кулоновского (и гравитационного!) потенциала случайно расположенных невзаимодействующих частиц нельзя. Если учесть взаимодействие между частицами, то это оказывается в некотором приближении коллективного потенциала возможным [22]. Распределение Леви в данном случае трансформируется в усечённое распределение Леви (см., например, [23, 24]).

Таким образом, формула Р.Л. Стратоновича является мощным инструментом расчёта случайных микрополей и микропотенциалов стохастически независимо расположенных (и движущихся) частиц различной электромагнитной мультипольности. В ряде случаев оказывается возможным проделать такие расчёты не только для независимых, но и для взаимодействующих частиц. Наиболее интересным результатом здесь является принципиальное отличие получаемых распределений плотности вероятности микрополей и микропотенциалов от гауссова распределения, несмотря на то что формально учитываемое количество образующих случайную величину поля (потенциала) частиц устремляется к бесконечности. Все эти распределения микрополей и микропотен-

[5] Заметим, что в этих работах как раз используется формализм усреднения с помощью треугольных скобок. Однако затем идут объёмные расчёты возникших интегралов.

циалов относятся к более широкому классу безгранично-делимых распределений [5, 21].

5. Применение формулы Р.Л. Стратоновича для расчёта случайных моментов ограниченных тел

Рассмотрим тело, заполненное движущимся веществом, неважно — непрерывным или дискретным, каким-то образом удерживаемым внутри данного тела [25]. Предполагается также, что движение этого вещества стохастическое. Допустим дополнительно, что внутри данного тела могут содержаться точечные заряды. Очевидно, что вычисление среднего значения любой проекции механического момента $\mathbf{M}$ даст точный нуль в отсутствие макроскопического движения. В силу же соотношения для функции плотности вероятности распределения абсолютной величины случайного механического момента $W(M) = 4\pi M^2 W(\mathbf{M})$ среднее такой абсолютной величины отнюдь не нуль. Аналогично, если в теле наличествуют точечные заряды, то они увлекаются веществом тела в стохастическое движение и обеспечивают наличие случайного магнитного момента[6]. Формула (1) позволяет рассчитать указанные распределения и их средние величины.

Разобьём весь объём тела на физически малые доли (частицы). В принципе не обязательно, чтобы они были одинаковыми, но можно в дальнейшем предположить, что все они содержат одинаковую массу. Пусть имеется N таких долей с массами m_i при массе тела m_N, $m_N = \sum_{i=1}^{N} m_i$. Если в дальнейшем выяснится, что модель тела, состоящего из более мелких частиц, предпочтительнее модели сплошной среды, число N будет иметь смысл количества этих более мелких частиц, но в любом случае оно будет (физически) большим. Также можно показать, что небольшие отличия формы тела от шарообразной (в пределах 10–15 % по радиусу [26]) не приводят к качественным изменениям результатов. Случайный механический момент такого тела есть $\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{N} m_i[\mathbf{r}_i\mathbf{v}_i]$. Тогда плотность вероятности его распределения

$$W(\mathbf{M}) = \int_V \ldots \int_V \iiint_{-\infty}^{\infty} \ldots \iiint_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\mathbf{M} - \sum_{i=1}^{N} m_i[\mathbf{r}_i\mathbf{v}_i]\right) \times \times P_N(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N) \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\mathbf{r}_i\, \mathrm{d}\mathbf{v}_i \,. \tag{18}$$

Здесь $P_N(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N)$ — плотность вероятности найти первую долю массы (частицу) в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}_1$ со скоростью $\mathbf{v}_1$, вторую — в точке $\mathbf{r}_2$ со скоростью $\mathbf{v}_2$ и т.д. Очевидно, что распределение по скоростям должно быть равновесное максвелловское, которое в дальнейшем выразим через полную энергию (теплового) стохастического движения частиц U. Для расчётов $W(\mathbf{M})$ следует перейти к фурье-представлению δ-функции в формуле (18).

Интегралы по скоростям легко вычисляются [25]. Конкретизируем вид $P_N(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ исходя из соображений о несжимаемости вещества внутри рассматриваемого тела. Это не накладывает ограничения на то, какая среда тела будет рассматриваться в дальнейшем — просто ли сплошная или "молекулярная", похожая на жидкость, т.е. состоящая из вышеуказанных малых частиц (см. выше). В классической статистической механике последней в простейшем случае отвечает модель "твёрдых сфер". В рассматриваемой модели это означает, что там, где находится какая-то часть вещества (или "твёрдая сфера"), все остальные части вещества тела (или остальные "твёрдые сферы") находиться не могут. Поэтому $P_N(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^{N} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i')$, где штрихом отмечено вышеуказанное условие, что все части вещества (или малые частицы — "твёрдые сферы") находятся в разных местах тела. Интегрируя по координатам фурье-вектора и учитывая формулу для момента инерции (твёрдого) тела I, получаем [25] плотность вероятности распределения абсолютной величины случайного механического момента тела, внутри которого стохастически движутся составляющие его доли (частицы), в виде

$$W(\beta) = \frac{4\beta^2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\beta^2\right), \tag{19}$$

т.е. распределения Максвелла, $\beta = M/M_0$, $M_0 = \sqrt{2UI}$. Первые два момента распределения суть

$$\langle M \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} M_0 = 2\sqrt{\frac{2UI}{\pi}}, \qquad \langle M^2 \rangle = \frac{3M_0^2}{2} = 3UI \,. \tag{20}$$

Нам ещё потребуется выражение для средней скорости теплового движения частиц внутри тела $v_T = (2U/m_N)^{1/2}$. Вычислим теперь магнитные моменты.

В рамках развитой модели магнитный момент рассматриваемого тела также оказывается случайной величиной. Физически этот момент возникает при стохастических перемещениях зарядов. Носители зарядов считаются точечными. Физически интересным является релятивистское движение таких частиц — одной или нескольких.

Магнитный момент системы N точечных зарядов e_i, движущихся со скоростями v_i, при релятивистском рассмотрении есть [27]

$$\mathbf{M}_H = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^{N} \frac{e_i}{m_i} [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i] \,.$$

Здесь $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор точки расположения i-го заряда, m_i — массы частиц — носителей зарядов (будем считать их малыми по размеру по сравнению с размерами самого тела, в пределе — точечными). Функцию распределения плотности вероятности магнитного дипольного момента, создаваемого такой системой движущихся точечных зарядов, можно записать в виде, аналогичном (18):

$$W(\mathbf{M}_H) = \int_V \ldots \int_V \iiint_{-\infty}^{\infty} \ldots \iiint_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\mathbf{M}_H - \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^{N} \frac{e_i}{m_i} [\mathbf{r}_i\, \mathbf{p}_i]\right) \times \times P_N(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N) \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\mathbf{r}_i\, \mathrm{d}\mathbf{p}_i \,. \tag{21}$$

Здесь функция P_N имеет тот же смысл, что и применявшаяся при расчёте механического момента: величина $P_N(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N)$ есть вероятность найти первую заряженную частицу в окрестности точки $\mathbf{r}_1$ с импульсом

[6] Предполагаем для простоты расчётов скорости движения масс (но не точечных зарядов) внутри тела нерелятивистскими.

$\mathbf{p}_1$, вторую — в окрестности точки $\mathbf{r}_2$ с импульсом $\mathbf{p}_2$ и т.д. Заметим, что функция P_N для магнитного момента будет отличаться от введённой в (18) для момента механического. Взяв фурье-образ от δ-функции, функцию распределения можно записать в виде

$$W(\mathbf{M}_H) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\mathbf{K}\, \exp\left(\mathrm{i}\mathbf{K}\mathbf{M}_H\right)\times \\ \times \int_V \cdots \int_V \iiint_{-\infty}^{\infty} \cdots \iiint_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2c}\,\frac{e_i}{m_i}\,\mathbf{K}[\mathbf{r}_i\,\mathbf{p}_i]\right)\times \\ \times P_N(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N,\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N)\prod_{i=1}^{N}\mathrm{d}\mathbf{r}_i\,\mathrm{d}\mathbf{p}_i\,. \quad (22)$$

Рассчитаем теперь функцию (22), если в теле имеется только одна заряженная точечная частица с массой покоя m_1 и зарядом e_1.

Предположим, что плотность вероятности распределения такой частицы равномерна по объёму. Распределение же по скоростям этого заряда должно быть гауссовым ввиду равновесности системы. Поэтому разумным приближением функции P_N в данном случае будет функция P_1, которую мы, как указано, сразу выразим для релятивистского движения:

$$P_1(\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_1) = \frac{c}{4\pi m_1 T^2 V K_2(m_1c^2/T)}\exp\left(-\frac{c}{T}\sqrt{p^2+m_1^2c^2}\right). \quad (23)$$

Здесь T — истинная релятивистская температура стохастического движения частицы — носителя заряда, K_2 — функция Макдональда второго порядка [28]. Снова, не ограничивая общности расчётов, выберем направление фурье-вектора $\mathbf{k}$ вдоль оси z. Зависимость от углов пропадает в силу изотропности, останется только зависимость от модуля k, и функцию плотности вероятности распределения абсолютной величины магнитного момента тела M_{H1}, в котором стохастически движется только один точечный заряд, после выполнения всех возможных интегрирований удобно записать в виде

$$W_1(M_{H1}) = \frac{M_{H1}^2 m_1 c^2}{2VTK_2(m_1c^2/T)}\times \\ \times \int_V \mathrm{d}\mathbf{r}_1\,\frac{\exp\left(-\dfrac{2m_1c^2}{Te_1r_1\sin\theta}\sqrt{M_{H1}^2+\dfrac{e_1^2r_1^2\sin^2\theta_1}{4}}\right)}{(e_1r_1\sin\theta_1/2)^3}\,. \quad (24)$$

Здесь e_1 — заряд единственной частицы, θ_1 — полярный угол вектора $\mathbf{r}_1$. Легко видеть, что это распределение нормировано на 1, $\int_0^\infty W_1(M_{H1})\,\mathrm{d}M_{H1}=1$.

Среднее данного распределения

$$\langle M_{H1}\rangle = \int_0^\infty M_{H1}W_1(M_{H1})\,\mathrm{d}M_{H1}$$

есть при условии шарообразности тела и его радиусе R

$$\langle M_{H1}\rangle = \frac{3\pi e_1RT\exp\left(-m_1c^2/T\right)}{8m_1c^2K_2(m_1c^2/T)}\left(1+\frac{3T}{m_1c^2}+\frac{3T^2}{m_1^4c^4}\right). \quad (25)$$

Рассмотрим теперь стохастический магнитный момент (шарообразного) тела с двумя противоположными по знаку одинаковыми зарядами абсолютной величины e_1. Вводя координаты и скорость центра масс системы положительный – отрицательный заряды, магнитный момент такой системы получается в виде

$$\mathbf{M}_{H2} = \frac{e}{2c}[\mathbf{r}_{\mathrm{cm}}\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}]+\frac{e}{2c}[\mathbf{r}_{\mathrm{rel}}\mathbf{v}_{\mathrm{cm}}]\,. \quad (26)$$

Здесь $\mathbf{r}_{\mathrm{rel}}$ — вектор, соединяющий два заряда, $\mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$ — скорость движения центра масс заряженных частиц, $\mathbf{r}_{\mathrm{cm}}$ — координата их центра масс, $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$ — скорость их относительного движения. Поскольку частицы внутри шарообразного тела электрически связаны, а их скорости всё же меньше скорости света, легко видеть, что второй член в правой части (26) намного меньше первого, так как $|\mathbf{v}_{\mathrm{cm}}| \ll |\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}|$. Так как в первом приближении случайные величины скоростей заряженных частиц $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ независимы (они определяются в гораздо большей степени взаимодействием с веществом, заполняющим шарообразное тело, чем взаимодействием между собой), то распределение случайной величины разности скоростей $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ такое же, как и распределение каждой, т.е. гауссово. Таким образом, магнитный момент системы определяет одна эффективная частица. Пользуясь свойствами гауссова распределения, легко показать, что эффективная температура такой частицы равна $2T$. В то же время из сравнения выражения (26) с формулой для механического момента системы двух частиц с одинаковой массой (как и в рассматриваемом случае) видно, что масса эффективной частицы $2m_1$. Это значит, что распределение по энергии эффективной частицы точно то же, что и единственной заряженной частицы внутри шарообразного тела. Тогда как распределение случайной величины $\mathbf{r}_{\mathrm{cm}}$, даже если плотности вероятности нахождения каждой из двух заряженных частиц равномерны в шаре, уже не будет равномерным.

После довольно громоздких вычислений можно показать, что плотность вероятности распределения проекции $x=(x_1+x_2)/2$ вектора $\mathbf{r}_{\mathrm{cm}}=(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2$ есть

$$f_{\mathrm{p}}(x) = \frac{6}{5R^5}\left[R^5 \mp x^5 - 5R^2(R^3\mp x^3)+5R^3(R^2-x^2)\right],$$

где верхний знак берётся при $x>0$, а нижний — при $x<0$. Вычисляя в свою очередь плотности вероятности распределения модулей $|\mathbf{r}|$, $\mathbf{r}^2$, а также $|\mathbf{r}^3|$, получим, что плотность вероятности распределения модуля вектора $\mathbf{r}_{\mathrm{cm}}$ может быть только многочленом вида Ar^3+Br+c. Легко видеть, что нормированная на объём плотность вероятности распределения $\int_V f_{\mathrm{p}}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r}=V$ есть (опустим индекс у $\mathbf{r}_{\mathrm{cm}}$)

$$f_{\mathrm{p}}(\mathbf{r}) = 4\left(\frac{r^3}{R^3}-3\,\frac{r}{R}+2\right).$$

Теперь можно записать плотность вероятности распределения релятивистского магнитного момента шарообразного тела, содержащего два заряда противоположного знака:

$$W_2(M_{H2}) = \frac{2M_{H2}^2m_1c^2}{VTK_2(m_1c^2/T)}\times \\ \times\int_V \mathrm{d}\mathbf{r}\left(\frac{r^3}{R^3}-3\,\frac{r}{R}+2\right)\frac{\exp\left(-\dfrac{2m_1c^2}{Te_1r\sin\theta}\sqrt{M_{H2}^2+\dfrac{e_1^2r^2\sin^2\theta}{4}}\right)}{(e_1r\sin\theta/2)^3} \quad (27)$$

(θ — полярный угол вектора $\mathbf{r}_{\rm cm}$), которое отличается от (24) только наличием под интегралом дополнительного сомножителя $f_{\rm p}(\mathbf{r})$.

Среднее значение магнитного момента шарообразного тела с двумя зарядами вычислим так же, как и тела с одним зарядом — сначала интегрированием по M_{H2}, а потом — по $\mathrm{d}\mathbf{r}$. Получим

$$\langle M_{H2}\rangle = \frac{24}{35}\,\langle M_{H1}\rangle \cong 0{,}6857\langle M_{H1}\rangle\,. \qquad (28)$$

Таким образом, отличие среднего магнитного момента шарообразного тела, включающего в себя два заряда противоположного знака, движущихся стохастически, отличается от магнитного момента такого же шарообразного тела с одним зарядом в $0,6857 = 24/35 = (4\times6)/(5\times7)$ раз [7]. Напомним, что в рассматриваемой модели магнитные моменты обоих тел — случайные величины, направление которых в пространстве распределено изотропно, а распределение абсолютных величин даётся формулами (24) и (27). В эксперименте измеряются средние распределений абсолютных величин (25) и (28). Квантовые флуктуации магнитных моментов [29] совпадают с классическими, рассчитанными в рамках данной модели. Отличие (28) от (25) физически определяется только тем, что эффективная частица, создающая магнитный момент тела с двумя зарядами, распределена неравномерно в пространстве шара. Это распределение максимально в центре и равно нулю на краю шара, что приводит к меньшему "среднему радиусу" и меньшему, чем у тела с одним зарядом, магнитному моменту.

Заметим также, что попытка рассчитать в рамках рассматриваемой модели подобным образом распределение электрического дипольного момента шарообразного тела с одним и двумя зарядами не даёт результата — эта функция распределения плотности вероятности оказывается знакопеременной [8], т.е. определённый электродипольный момент отсутствует. Таким образом, формула Р.Л. Стратоновича даёт ещё и правильный отрицательный ответ на существование определённых параметров физических систем.

Задача определения электромагнитных моментов тел, содержащих большое количество стохастически движущихся зарядов, решается в асимптотическом приближении методом А.А. Маркова [3, 4], причём электродипольный момент определяется [26].

[7] Если рассматривать тела со стохастически движущимся веществом внутри и одним и двумя зарядами как очень грубую модель протона и нейтрона, то это число хорошо описывает отношение экспериментально измеренного магнитного момента нейтрона, в 0,68 раз меньшего магнитного момента протона. При этом удовлетворение условий равенства среднего распределения механического момента (20) половине постоянной Планка $\hbar/2$ и магнитного момента (28) экспериментальной величине магнитного момента протона $2{,}793e\hbar/2m_{\rm p}c$ ($m_{\rm p}$ — масса протона) достигается при единственном условии $T = 60{,}5$ кэВ. Чтобы классические расчёты (20), (24), (28) были применимы "внутри нуклона" [25], достаточно предположить, чтобы вещество нуклона имело диэлектрическую проницаемость $\sim 10^{-4}-10^{-5}$.

[8] Известно, например, что нуклоны не имеют определённого электродипольного момента. Если описывать нуклоны приведённой грубой моделью, это означает, что функция распределения электродипольного момента не имеет смысла в силу вышеуказанной знакопеременности, и определённого электродипольного момента нет.

6. Заключение

Формула (1) оказывается мощным инструментом для расчётов плотностей вероятностей распределений и моментов как предполагавшихся Р.Л. Стратоновичем [1] термодинамических величин (см. выше разделы 4, 5), так и для операций над распределениями независимых случайных величин вне связи с динамическим или термодинамическим характером этих случайных величин (раздел 3). Последнее оказывается особенно важным для определения распределений случайных величин, являющихся суммой или произведением большого количества независимых случайных величин, что при применении классических методов [5–8] трудновыполнимо. Существенным результатом является принципиальное отличие получаемых распределений плотности вероятности микрополей и микропотенциалов от гауссова и принадлежность их к более широкому классу безгранично-делимых распределений [5, 21].

Также (1) позволяет легко вычислять плотности вероятности случайных величин, являющихся функциями других случайных величин. Наиболее просто это происходит в случае сумм одинаковых функций (раздел 4), уже нашедших широкое применение в расчётах плазменных микрополей и микрополей других объектов [11–19]. Формула (1) определяет плотности вероятности термодинамических величин и в общем виде, но расчёты их здесь возможны только в конкретных случаях [1].

Сам Руслан Леонтьевич Стратонович свою формулу использовал исключительно как рабочий инструмент, например, при расчёте условной энтропии, при анализе марковских процессов с точки зрения микроскопической динамики [1].

Заметим, что первые аналоги формулы (1) появились у Р.Л. Стратоновича ещё в ранних работах [30, 31] [9], при анализе распределений случайных величин в пространстве представлений [30] (см. также введение виртуальных пространств в [21, 23]) и при рассмотрении статистической интерпретации квантовой теории [31].

Первые же упоминания формулы (1) как формулы имени Стратоновича появились, по-видимому, в [12]. В начале XXI века формула (1) начала широко применяться в статистической физике, физике плазмы и в других разделах физики, химии и смежных наук, навсегда вписав имя её автора — Руслана Леонтьевича Стратоновича — в историю современной науки и техники [10].

Список литературы

1. Стратонович Р Л *Нелинейная неравновесная термодинамика* (М.: Наука, 1985); Пер. на англ. яз.: Stratonovich R L *Nonlinear Nonequilibrium Thermodynamics I. Linear and Nonlinear Fluctuation–Dissipation Theorems* (Berlin: Springer-Verlag, 1992)
2. Гурбатов С Н, Руденко О В, Саичев А И *Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии: приложения к нелинейной акустике* (М.: Физматлит, 2008); Пер. на англ. яз.: Gurbatov S N, Rudenko O V, Saichev A I *Waves and Structures in Nonlinear*

[9] Статья Стратоновича Р.Л. "О распределениях в изображающем пространстве" (см. [30]) поступила в редакцию *Журнала экспериментальной и теоретической физики* (*ЖЭТФ*) 29 сентября 1955 года, а статья "К статистической интерпретации квантовой теории" (см. [31]) была представлена в редакцию *ЖЭТФ* 12 октября 1956 года.

[10] Краткая статья о научном наследии Руслана Леонтьевича Стратоновича была опубликована в журнале *Успехи физических наук* (см. [32]).

Nondispersive Media: *General Theory and Applications to Nonlinear Acoustics* (Berlin: Springer-Verlag, 2011)
3. Марковъ А А *Исчисленіе вѣроятностей* (Къ 200 лѣтнему юбилею закона большихъ чиселъ) 3-е изд., пересмотр. и знач. доп. (Санкт-Петербургъ: Типографія Императорской Академіи Наукъ, 1913)
4. Chandrasekhar S *Rev. Mod. Phys.* **15** 1 (1943); Пер. на русск. яз.: Чандрасекар С *Стохастические проблемы в физике и астрономии* (М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1947)
5. Гнеденко Б В *Курс теории вероятностей* (М.: Наука, 1988); Пер. на англ. яз.: Gnedenko B V *The Theory of Probability* (Moscow: Mir Publ., 1978)
6. Емельянов Г В, Скитович В П *Задачник по теории вероятностей и математической статистике* (СПб.: Лань, 2021)
7. Feller W *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* Vol. 1 (New York: John Wiley and Sons, 1970); Пер. на русск. яз.: Феллер В *Введение в теорию вероятностей и ее приложения* Т. 1 (М.: Мир, 1984)
8. Feller W *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* Vol. 2 (New York: John Wiley and Sons, 1971); Пер. на русск. яз.: Феллер В *Введение в теорию вероятностей и ее приложения* Т. 2 (М.: Мир, 1984)
9. Holtsmark J *Ann. Physik* **58** 577 (1919)
10. Фортов В Е и др. *Статистическая физика плотных газов и неидеальной плазмы* (М.: Физматлит, 2020)
11. Likalter A A, in *Transport and Optical Properties of Nonideal Plasma* (Eds G A Kobzev, I T Iakubov, M M Popovich) (New York: Plenum Press, 1995) p. 133
12. Baranger M, Mozer B *Phys. Rev.* **115** 521 (1959)
13. Mozer B, Baranger M *Phys. Rev.* **118** 626 (1960)
14. Griem H R *Spectral Line Broadening by Plasmas* (New York: Academic Press, 1974)
15. Kalman G *Phys. Fluids* **4** 300 (1961)
16. Romanovsky M Yu *Phys. Lett. A* **249** 99 (1998)
17. Romanovsky M Yu, Ebeling W *Contrib. Plasma Phys.* **47** 345 (2007)
18. Романов А С, Чукбар К В *Исследовано в России* **8** 1650 (2005)
19. Wesenberg J H, Mølmer K *Phys. Rev. Lett.* **93** 143903 (2004)
20. Romanovsky M Yu *Physica A* **265** 264 (1999)
21. Lévy P *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien* (Paris: Gauthier-Villars, 1948)
22. Romanovsky M Yu *Physica A* **287** 450 (2000)
23. Mantegna R N , Stanley H E *Nature* **383** 587 (1996)
24. Sokolov I M *Phys. Rev. E* **63** 011104 (2000)
25. Романовский М Ю, в сб. *Актуальные проблемы статистической радиофизики* (*малаховский сборник*). *Modern Problems of Statistical Physics* Т. 1 (Нижний Новгород: Талам, 2002) с. 130
26. Romanovsky M Yu, Ebeling W, Schimansky-Geier L *J. Phys. Conf. Ser.* **11** 99 (2005)
27. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Физматлит, 2003); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1987)
28. Abramowitz M, Stegun I A (Eds) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (United States. National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series, 55) (New York: Dover Publ., 1964); Пер. на русск. яз.: Абрамовиц М, И Стиган И (Ред.) *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* (М.: Наука, 1979)
29. Bohr A, Mottelson B R *Nuclear Structure* Vol. 1 *Single-Particle Motion* (New York: W.A. Benjamin, 1969); Пер. на русск. яз.: Бор О, Моттельсон Б *Структура атомного ядра* Т. 1 *Одночастичное движение* (М.: Наука, 1971)
30. Стратонович Р Л *ЖЭТФ* **31** 1012 (1956); Stratonovich R L *Sov. Phys. JETP* **4** 891 (1957)
31. Стратонович Р Л *ЖЭТФ* **32** 1483 (1957); Stratonovich R L *Sov. Phys. JETP* **5** 1206 (1957)
32. Бункин Ф В, Кадомцев Б Б, Климонтович Ю Л, Коротеев Н И, Ланда П С, Маслов В П, Романовский Ю М "Памяти Руслана Леонтьевича Стратоновича" *УФН* **167** 789 (1997); Bunkin F V, Kadomtsev B B, Klimontovich Yu L, Koroteev N I, Landa P S, Maslov V P, Romanovskii Yu M "In memory of Ruslan Leont'evich Stratonovich" *Phys. Usp.* **40** 751 (1997)

On R.L. Stratonovich's formula for transition from dynamic to probabilistic measurements and its connection with operations on distribution functions of random variables

M.Yu. Romanovsky (1, 2, 3)
(1) *PI Science and Innovation, ul. Bol'shaya Ordynka 24, 119017 Moscow, Russian Federation*
(2) *ANO National Center for Physics and Mathematics, ul. Parkovaya 1, str. 3, 607182 Sarov, Nizhny Novgorod region, Russian Federation*
(3) *Russian National Research Medical University named after N.I. Pirogov, ul. Ostrovityanova 1, 117997 Moscow, Russian Federation*
E-mail: *MYRomanovsky@rosatom.ru*

The applications of R.L. Stratonovich's formula [1] for the exact transition from dynamic measurements to probabilistic or thermodynamic measurements are considered. The connection of this formula with known expressions for operations on probability density functions of random variables is given. The application of the formula to the problem of determining the observed physical parameters — fields, potentials, moments — produced by (stochastically moving) charged particles of different multipolar types is demonstrated.

Keywords: delta-function, probability density, microfield distribution

PACS numbers: **02.50.–r**, **05.20.–y**, **41.20.–q**

Bibliography — 32 references

Received 4 June 2024, revised 8 August 2024

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **194** (10) 1118 – 1127 (2024)

Physics – Uspekhi **67** (10) (2024)

DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.08.039738

DOI: https://doi.org/10.3367/UFNe.2024.08.039738