

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

# Квантовая частица в V-образной яме произвольной асимметрии. Броуновские моторы

В.М. Розенбаум, И.В. Шапочкина, Л.И. Трахтенберг

Проанализирована зависимость энергетического спектра квантовой частицы в бесконечной V-образной потенциальной яме от параметра её асимметрии. Показана связь возникновения этой зависимости с разной глубиной проникновения квантовой частицы в классически запрещённые области под стенками ямы. В частности, оценка энергетического спектра с использованием правила квантования Бора–Зоммерфельда, которое не учитывает проникновение частицы в подбарьерные области, показывает, что зависимость от параметра асимметрии ямы отсутствует. Исключением является переход к случаю вертикальной стенки, когда квазиклассический подход характеризуется особым граничным условием. Полученные результаты проиллюстрированы зависимостью туннельного тока броуновского мотора (рэтчета) с приложенной флуктуирующей силой от асимметрии пилообразного потенциала. При определённом подборе параметров рэтчета учёт нулевых колебаний описывает возникновение потока частиц в направлении, противоположном полученному без такого учёта.

**Ключевые слова:** энергетический спектр, асимметричные системы, функции Эйри, броуновские моторы, рэтчеты

PACS numbers: 03.65.Ge, **05.40.** – a, 05.60.GgDOI: <https://doi.org/10.3367/UFN.2024.06.039704>

## Содержание

1. Введение (1108).
  2. Квазиклассическое приближение (1109).
  3. Квантово-механическое рассмотрение (1112).
  4. Приложение полученных результатов к рэтчет-системам (1114).
  5. Заключение (1116).
- Список литературы (1117).

## 1. Введение

Наиболее плодотворным методом управления энергетическим спектром проектируемых электронных устройств является использование внешнего электрического поля. Энергетический спектр таких систем рассчитывается путём решения стационарного уравнения Шрёдингера,

описывающего состояние частицы в заданном потенциале (отражающем структуру проектируемого устройства) и постоянном электрическом поле [1]. Как известно, вклад этого поля в потенциальный рельеф линеен. С другой стороны, кусочно-линейная форма потенциального профиля допускает аналитические решения уравнения Шрёдингера в виде суперпозиции функций Эйри [2]. Простым вариантом кусочно-линейной функции является V-образная зависимость. Энергетический спектр бесконечной треугольной ямы востребован различными приложениями, и, кроме того, он имеет ряд особенностей, отличающих данный спектр от энергетических спектров частиц в гладких потенциальных профилях. Гладкая потенциальная яма вблизи её минимума хорошо аппроксимируется квадратичной функцией, и её низшие уровни энергии близки к эквидистантной структуре энергетического спектра гармонического осциллятора [3]. Принципиально другой спектр возникает у частицы в треугольной потенциальной яме, поскольку её минимум имеет точку заострения и не может аппроксимироваться квадратичной функцией.

Согласно литературным источникам, анализ энергетического спектра квантовых частиц был проведён только для двух предельных частных случаев симметрии треугольных потенциальных ям: ямы с одной вертикальной стенкой и симметричной ямы, описываемой функцией, пропорциональной  $|x|$  [2]. В данной статье эти известные результаты распространяются на случай треугольной потенциальной ямы произвольной симметрии, характеризуемой коэффициентом асимметрии  $k$ , равным нулю для симметричной ямы и равным единице для предельно асимметричной ямы с одной вертикальной стенкой.

В.М. Розенбаум<sup>(1,2,a)</sup>, И.В. Шапочкина<sup>(1,2,b)</sup>, Л.И. Трахтенберг<sup>(3,4,c)</sup>

<sup>(1)</sup> Белорусский государственный университет, просп. Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

<sup>(2)</sup> Совместный институт ДПУ и БГУ, Дальнянский политехнический университет, 116024 Дальнян, КНР

<sup>(3)</sup> Федеральный исследовательский центр химической физики им. Н.Н. Семёнова РАН, ул. Косыгина 4, 119991 Москва, Российская Федерация

<sup>(4)</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы 1, 119991 Москва, Российская Федерация

E-mail: <sup>(a)</sup> vik-roz@mail.ru, <sup>(b)</sup> shapoch@mail.ru,

<sup>(c)</sup> litrakh@gmail.com

Статья поступила 15 февраля 2024 г.,  
после доработки 5 мая 2024 г.

Представление энергетического спектра как функции параметра  $\kappa$  позволит выявить ряд интересных особенностей, ассоциированных с разной глубиной проникновения квантовой частицы в классически запрещённые области под стенками ямы. Поскольку квантовая частица не может проникать за вертикальную бесконечную стенку, то зависимости энергии уровней от  $\kappa$  характеризуются сингулярным поведением первой производной вблизи предельно асимметричной ямы с  $\kappa \rightarrow 1$ .

Приложения рассмотренной в настоящей статье задачи весьма разнообразны. Приведём некоторые из них. Например, индуцированное электрическим полем туннелирование электронов с идеально проводящей плоской поверхности происходит через энергетический барьер, близкий к треугольному, и описывается теорией Фаулера–Нордгейма [4, 5]. Уравнения Шрёдингера с потенциальной энергией в виде треугольного барьера и обратной ему треугольной ямы имеют точные решения в терминах функций Эйри. Знание связанных состояний потенциала указывает путь к нахождению квазинормальных подбарьерных мод, являющихся собственными модами диссипативных систем. Данные моды являются полюсами матрицы рассеяния (функции Грина) волн различной природы на рассеивающем центре [6]. Их характеристики связаны с задачей прохождения квантовых частиц через потенциальный барьер и их отражения от него, если считать падающий поток частиц отсутствующим. Это соответствует удаляющимся по обе стороны от барьера затухающим волнам. Квазинормальные моды возникают естественным образом, так же как возмущения классического гравитационного фона с участием чёрных дыр или как возбуждения нанорезонаторов [6–8]. Квазинормальные моды барьера определённым образом соответствуют связанным состояниям потенциала, обратного заданному барьеру [9]. Путём замены переменных и параметров собственные функции потенциала преобразуются в квазинормальные моды с комплексным волновым вектором. Таким методом были получены квазинормальные моды симметричного треугольного потенциального барьера [10].

В теории броуновских моторов в качестве модельного периодического потенциального профиля, характеризующего минимальным набором параметров (энергетическим барьером и асимметрией), широко используется пилообразный потенциал [11–16]. Кроме того, пилообразную форму потенциала можно легко реализовать экспериментально [14]. В частности, в многочисленных экспериментах по направленному движению коллоидных частиц в рэтчет-системах пилообразные формы потенциала создаются с помощью электродов, нанесённых на стёкла фотолитографическими методами (см., например, [15, гл. 7]). В экспериментах по манипулированию на подложке заряженными компонентами внутри липидных бислоев [16] такой потенциал создаётся узорчатым бислоем, у которого одна сторона имеет пилообразную форму, а другая — плоскую поверхность. Рэтчет-эффект квантовых броуновских моторов определяется энергетическим спектром квантовых частиц в пилообразных потенциалах, элементарная ячейка которых является треугольной ямой конечной высоты [11, 17–23]. Поскольку этот эффект присущ только асимметричным системам, то исследование влияния асимметрии треугольной ямы на энергетический спектр является принципиально важной задачей физики квантовых рэтчет-систем.

Целью данных методических заметок является выяснение зависимости энергетического спектра квантовой частицы в бесконечной V-образной потенциальной яме от параметра асимметрии последней. Поскольку оказывается, что эта зависимость весьма нетривиальна и возникает только при строгом квантово-механическом описании, то в методических целях целесообразно начать обсуждение с наглядных квазиклассических соотношений, которые используют классический подход для определения частоты колебаний, не зависящей от асимметрии треугольной ямы (раздел 2), и только потом провести строгое квантово-механическое рассмотрение, выявляющее такую зависимость (раздел 3). Зависимость от параметра асимметрии является следствием того, что с его изменением меняется глубина проникновения частицы в классически запрещённые области под стенками потенциальной ямы (раздел 3).

С другой стороны, как показано в разделе 4, туннелирование частицы через треугольный барьер не зависит от его асимметрии, поскольку высота барьера и путь туннелирования инвариантны относительно коэффициента асимметрии. Однако туннельный ток рэтчета с пилообразным потенциалом (содержащим треугольные барьеры и ямы) и приложенной флуктуирующей силой (так называемый качающийся рэтчет, или *rocking ratchet*) зависит от коэффициента асимметрии, поскольку эта сила искажает форму барьеров и изменяет энергию нулевых колебаний. Результаты проведённого рассмотрения влияния асимметрии V-образных потенциалов на энергетический спектр частиц и рэтчет-эффект суммированы в разделе 5.

## 2. Квазиклассическое приближение

Квазиклассическое приближение справедливо, когда дебройлевская длина волны частицы мала по сравнению с расстоянием, на котором существенно изменяется её потенциальная энергия. Оно позволяет проследить связь классической и квантовой механики. Для финитного движения эта связь проявляется в принципе соответствия, согласно которому при больших квантовых числах  $n$  расстояние между соседними энергетическими уровнями  $E_n$  определяется классической частотой движения  $\omega_0 = 2\pi/T$  ( $T$  — период колебания), а именно,  $dE_n/dn = \hbar\omega_0$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка [3, 24, 25].

Интересной и важной особенностью квазиклассического приближения является то, что оно даёт разумные результаты даже в тех случаях, когда условие применимости такого приближения, казалось бы, не выполнено. Обычно считается, что состояния, относящиеся к дискретному спектру энергии, хорошо описываются этим приближением только при больших значениях порядкового номера состояния  $n$ , совпадающего с числом узлов соответствующей волновой функции, поскольку расстояние между соседними узлами как раз и оценивается дебройлевской длиной волны. Тем не менее, ввиду того что точность энергетического спектра, полученного в рамках квазиклассического приближения, определяется величиной не  $n^{-1}$ , а  $(\pi n)^{-2}$ , которая достаточно мала уже при  $n = 1$ , оно достаточно хорошо описывает энергию основного и первого возбуждённого состояния [25], с чем связано эффективное использование данного приближения в решении многих задач [26–28].

Таким образом, методические заметки целесообразно начать с наглядных квазиклассических соотношений, что позволит очертить свойства, допускающие классическое описание, а на их фоне — рельефно представить явления, которые в принципе не могут быть поняты в рамках классического подхода. К таким явлениям относятся и проникновение квантовой частицы в классически запрещённые области за стенками потенциальной ямы. В этом разделе будет продемонстрирована эффективность квазиклассического приближения, а именно использования правила квантования Бора–Зоммерфельда, на примере трёх задач: частица в прямоугольном ящике с бесконечно высокими стенками и в потенциале Морзе, а также оценка энергетического спектра квантовой частицы в V-образной яме произвольной асимметрии. Первые две задачи в точности воспроизводят энергетические спектры, следующие из аналитических решений уравнения Шрёдингера. Подробному рассмотрению третьей задачи посвящены настоящие методические заметки, однако расчёт классической частоты движения, как мы увидим, покажет её инвариантность относительно асимметрии V-образной ямы и, как следствие, — инвариантность энергетического спектра в квазиклассическом приближении. Данное обстоятельство и послужит убедительным аргументом в пользу необходимости строгого квантовомеханического рассмотрения, проводимого в разделе 3.

Правило квантования Бора–Зоммерфельда формулируется для адиабатического инварианта [29]

$$I(E) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint p(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_a^b p(x) dx. \quad (1)$$

В определении (1)  $p(x) = \sqrt{2m[E - V(x)]}$  — импульс частицы с полной энергией  $E$  и потенциальной энергией  $V(x)$ , а интегрирование проводится по полному изменению координаты за период движения частицы  $T(E)$ , который связан с адиабатическим инвариантом соотношением:

$$T(E) = 2\pi \frac{\partial I(E)}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2}} \oint \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \quad (2)$$

так что производная  $\partial I(E)/\partial E$  является обратной циклической частотой  $\omega_0$ . Если ввести понятие классически допустимой области как области, ограниченной точками остановки  $a$  и  $b$ , в которых  $V(x) = E$  (рис. 1), то интегралы в (1) и (2) по полному изменению координаты за период равны удвоенным интегралам по области  $a < x < b$ .

Запишем правило квантования Бора–Зоммерфельда в общем виде [25]

$$I(E) = \hbar(n + C_a + C_b), \quad (3)$$

в котором значения констант  $C_a$  и  $C_b$  определяются наклоном потенциальных кривых в точках остановки  $a$  и  $b$ : если производная  $dV(x)/dx$  в точке остановки конечная (наклонный ход кривой), то соответствующая константа равна  $1/4$ , если же бесконечная (вертикальная касательная в точке остановки), то она равна  $1/2$ . При  $n \gg 1$  можно приближенно считать  $n$  непрерывной переменной, что делает допустимым дифференцирование левой и правой частей уравнения (3) по  $n$ , а это как раз и даёт принцип соответствия:  $dI(E_n)/dn = [\partial I(E_n)/\partial E_n] dE_n/dn = \omega_0^{-1} dE_n/dn = \hbar$ .

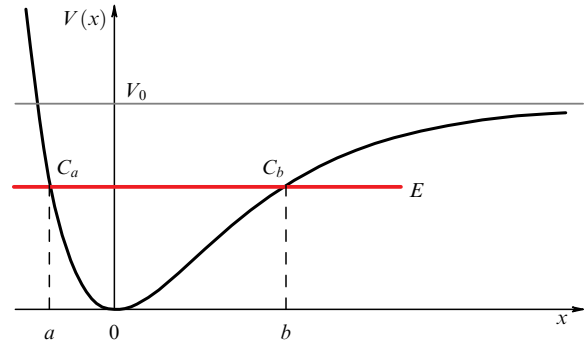


Рис. 1. Частица с энергией  $E$  в потенциале Морзе  $V(x)$  с глубиной потенциальной ямы  $V_0$ . Классически допустимая область ограничена точками  $a$  и  $b$ , в которых значения констант  $C_a$  и  $C_b$ , входящих в уравнение (3), определяются ходом потенциальных кривых.

Для прямоугольной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками  $C_a = C_b = 1/2$ , а  $I(E) = \pi^{-1} L \sqrt{2mE}$ . Поэтому энергетический спектр определяется формулой  $E_n = \pi^2 \hbar^2 (n + 1)^2 / (2mL^2)$ , совпадающей с решением уравнения Шрёдингера [3, 25]<sup>1</sup>.

Другим каноническим примером совпадения квазиклассического решения с точным обычно приводят гармонический осциллятор. Рассмотрим пример, более убедительно демонстрирующий эффективность квазиклассического приближения, — расчёт энергетического спектра частицы в потенциале Морзе (см. рис. 1)

$$V(x) = V_0(1 - \exp(-\alpha x))^2, \quad (4)$$

который, в отличие от параболического, менее модельный и описывает потенциальную яму конечной глубины. При малых  $x$  этот потенциал сводится к потенциалу гармонического осциллятора, характеризуемого циклической частотой  $\omega_0 = \sqrt{V''(0)/m} = \alpha \sqrt{2V_0/m}$ , которая является значительно более удобным параметром (по сравнению с  $\alpha$ ) для представления получаемых результатов.

Для потенциала (4) вычисление интеграла в (1) даёт:  $I(E) = (2V_0/\omega_0)(1 - \sqrt{1 - E/V_0})$ .<sup>2</sup> Поскольку имеется наклонный ход потенциальных кривых в точках остановки, то  $C_a = C_b = 1/4$  и правило квантования (3) приводит к результату

$$E_n = \hbar\omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right) \left[ 1 - \frac{\hbar\omega_0}{4V_0} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (5)$$

$$n + \frac{1}{2} < \frac{4V_0}{\hbar\omega_0},$$

совпадающему с аналитическим решением уравнения Шрёдингера (см. задачу 4 после §23 из [3]). Насколько нам известно, совпадение результата квазиклассического приближения с точным для потенциала Морзе здесь отмечается впервые.

Неравенство в (5) означает конечность уровней дискретного спектра. Если это неравенство становится силь-

<sup>1</sup> Из полученной формулы также следует принцип соответствия  $dE_n/dn = \hbar\omega_0$ , если учесть, что  $dE_n/dn = \pi^2 \hbar^2 (n + 1) / (mL^2)$ , но, с другой стороны,  $\omega_0 = 2\pi \sqrt{E_n / (2mL^2)} = \pi^2 \hbar (n + 1) / (mL^2)$ .

<sup>2</sup> Согласно соотношению (2), период классического колебания в потенциале Морзе равен  $T(E) = 2\pi \omega_0^{-1} (1 - E/V_0)^{-1/2}$ , который совпадает с периодом колебаний гармонического осциллятора при  $E \rightarrow 0$  и стремится к бесконечности при  $E \rightarrow V_0$ .

ным, т.е.

$$\frac{\hbar\omega_0}{4V_0} \left( n + \frac{1}{2} \right) \ll 1, \tag{6}$$

то формула (5) даёт энергетический спектр гармонического осциллятора

$$E_n = \hbar\omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right). \tag{7}$$

Ясно, что, поскольку соотношение (5) получается как посредством квазиклассического приближения, так и при точном рассмотрении спектра в потенциале Морзе, то и его частный случай — соотношение (7) для гармонического осциллятора — также служит примером совпадения результатов двух подходов.

Отметим, что сильное неравенство (6) допускает две трактовки. Во-первых,  $V_0 \rightarrow \infty$  (с  $\alpha = \omega_0 \sqrt{m/(2V_0)} \rightarrow 0$ ) соответствует предельному переходу от потенциала Морзе к потенциалу гармонического осциллятора, характеризующегося эквидистантным спектром (7) при любых  $n$ . Во-вторых, при ограниченных значениях  $V_0$ , но при  $\hbar\omega_0/4V_0 \ll 1$ ,<sup>3</sup> сильное неравенство (6) справедливо только для нижних уровней, т.е. для участка приближённо эквидистантного спектра, для которого кривая, описывающая потенциал Морзе вблизи минимума, может аппроксимироваться параболой. Поскольку параболическая аппроксимация допустима вблизи локального минимума любого гладкого потенциального профиля, а не только потенциала Морзе, то соотношение (7) с  $n = 0$  может использоваться для оценки энергии нулевых колебаний в произвольном гладком профиле. В связи с этим отметим и определённую универсальность энергии нулевых колебаний в форме  $E_0 = \hbar\omega_0/2$ . Её можно рассматривать и как следствие соотношения неопределённостей Гейзенберга, наиболее точная формулировка которого имеет вид

$$\langle \Delta p \rangle^2 \langle \Delta x \rangle^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \tag{8}$$

Действительно, состоянию с наименьшей неопределённостью (знак равенства в (8)) и нулевыми средними значениями координаты и импульса соответствует волновая функция гауссовой формы

$$\psi_0(x) = (2\pi \langle \Delta x^2 \rangle)^{-1/4} \exp \left( -\frac{x^2}{4\langle \Delta x^2 \rangle} \right), \tag{9}$$

которая как раз и является волновой функцией гармонического осциллятора с  $\langle \Delta x^2 \rangle = \hbar/(2m\omega_0)$  (см. задачи 2 и 3 после § 23 из [3]).

V-образный потенциальный профиль, являющийся основным объектом рассмотрения в данных методических заметках, не относится к гладким функциям, а потому использовать для него соотношение  $E_0 = \hbar\omega_0/2$  недопустимо и следует выполнять строгое квантово-

<sup>3</sup> Это неравенство можно переписать в виде условия квазиклассичности  $\lambda_{\text{дв}} \equiv 2\pi\hbar/(2mV_0)^{1/2} \ll \alpha^{-1}$  (дебройлевская длина волны частицы  $\lambda_{\text{дв}}$ , выраженная через импульс частицы  $(2mV_0)^{1/2}$  на максимальной глубине потенциальной ямы, много меньше характерной её ширины  $\alpha^{-1}$ ). Таким образом, условие квазиклассичности позволяет аппроксимировать низкоэнергетические уровни частицы в потенциальной яме конечной глубины спектром соответствующей бесконечной ямы.

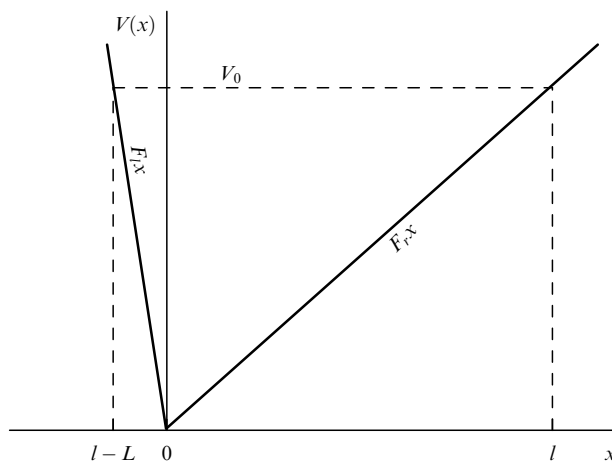


Рис. 2. Бесконечная треугольная потенциальная яма произвольной асимметрии, характеризуемой параметром асимметрии  $\kappa = 2l/L - 1$  (при  $\kappa = 0$  яма симметрична, при  $\kappa = 1$  левая стенка вертикальна).

механическое описание, к которому мы перейдём в разделе 3. Здесь же, в продолжение обсуждения квазиклассического приближения, представляется важным и интересным показать, к чему приведёт его использование для такого профиля.

Итак, рассмотрим V-образную (бесконечную треугольную) потенциальную яму, стороны которой имеют произвольные наклоны  $F_l$  и  $F_r$  (рис. 2). Уравнение координатной зависимости потенциальной энергии имеет вид

$$V(x) = \begin{cases} F_r x, & x > 0, \\ F_l x, & x < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Для анализа асимметрии потенциальной ямы (10) введём вспомогательные параметры: произвольный энергетический параметр  $V_0$  и ширины участков  $l$  справа и  $L - l$  слева от начала координат, которые отсекает уровень энергии  $V_0$  от потенциальной энергии  $V(x)$  (см. рис. 2). Тогда силы  $F_r$  и  $F_l$  связаны со вспомогательными параметрами выражениями:

$$F_r = \frac{V_0}{l} > 0, \quad F_l = \frac{V_0}{l - L} < 0, \tag{11}$$

так что асимметрию ямы можно характеризовать параметром

$$\kappa = \frac{2l}{L} - 1 = \frac{|F_l| - F_r}{|F_l| + F_r}. \tag{12}$$

В соответствии с физическим смыслом параметра асимметрии, он равен нулю для симметричной ямы (когда  $l = L/2$ ) и единице для предельно асимметричной ямы, у которой левая стенка вертикальна (когда  $l = L$ ). Безразмерный параметр  $\kappa$  вместе с новым размерным параметром — эффективной силой

$$F_* \equiv \frac{V_0}{L} = \frac{|F_l|F_r}{|F_l| + F_r} \tag{13}$$

однозначно характеризует исходную пару параметров  $F_r$  и  $F_l$ . Физический смысл величины  $F_*$  следует из определения (13) при  $|F_l| \rightarrow \infty$ :  $F_* = F_r$ , т.е. эффективная сила  $F_*$  треугольной ямы произвольной асимметрии определяется значением пологого наклона потенциального рельефа, соответствующего предельно асимметричной

яме. В свою очередь  $F_r$  и  $F_l$  связаны с  $F_*$  и  $\kappa$  соотношениями:  $F_r = (2F_*)/(\kappa + 1)$ ,  $F_l = (2F_*)/(\kappa - 1)$ .

Вычисление интеграла в (1) приводит к результату

$$I(E) = \frac{2\sqrt{2m}}{3\pi F_*} E^{3/2}, \quad (14)$$

который не зависит от параметра асимметрии  $\kappa$ .<sup>4</sup> Для того чтобы применить правило квантования Бора – Зоммерфельда (3), следует учесть, что для выбранной параметризации правая стенка ямы не может оказаться вертикальной, так что  $C_b = 1/4$ , а значение константы  $C_a$  зависит от значения  $\kappa$ :  $C_a = 1/2$  при  $\kappa = 1$  и  $C_a = 1/4$  при  $\kappa < 1$ .<sup>5</sup> Таким образом, подстановка (14) в (3) и последующее решение полученного уравнения относительно  $E_n$  даёт:

$$E_n = \left[ \frac{3\pi}{2} \left( n + C_a + \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} E_*, \quad (15)$$

где параметр  $E_*$ , размерности энергии, определён соотношением

$$E_* \equiv \left( \frac{\hbar^2 F_*^2}{2m} \right)^{1/3}. \quad (16)$$

В действительности энергия нулевых колебаний рассматриваемой системы зависит от параметра асимметрии при  $\kappa < 1$ . Это станет ясным из результатов точного решения задачи, проведённого в следующем разделе. Здесь же в таблице мы приводим сопоставление результатов квазиклассического описания с имеющимися в литературе результатами решения уравнения Шрёдингера для частных случаев  $\kappa = 0$  и  $\kappa = 1$  [2, 30]. Например, для основного состояния выражение (15) с  $n=0$  и  $C_a = 1/4$  даёт  $E_0/E_* \approx 1,771$ , тогда как точное значение при  $\kappa = 0$  равно 1,617. При  $\kappa = 1$  имеем  $C_a = 1/2$  и формула (15) даёт  $E_0/E_* \approx 2,320$ , тогда как точное значение равно 2,338. Для  $\kappa < 1$  с ростом квантового числа  $n$  результаты квазиклассического рассмотрения быстро приближаются к точному результату, соответствующему  $\kappa = 0$ . Последнее и означает отсутствие зависимости  $E_n$  от  $\kappa$  при больших квантовых числах, когда справедлив принцип соответствия и расстояния между соседними уровнями определяются классической частотой движения, не зависящей от параметра асимметрии (см. формулы (2), (14)). Таблица демонстрирует прекрасное совпадение результатов для  $\kappa < 1$  и  $\kappa = 1$ . Тем не менее отличие результатов с  $\kappa < 1$  и  $\kappa = 1$  сохраняется и при больших  $n$ . В квазиклассическом рассмотрении это связано с различными граничным условием и значением константы  $C_a$ . Точное рассмотрение, проведённое в разделе 3 для про-

<sup>4</sup> Согласно соотношению (2), период классического колебания частицы в треугольной потенциальной яме равен  $T(E) = (2/F_*)\sqrt{2mE}$  и стремится к нулю при  $E \rightarrow 0$ . Этим поведение классической частицы в треугольной яме отличается от её поведения в параболической яме, для которого период не зависит от энергии.

<sup>5</sup> Квазиклассическое приближение для энергетического спектра частицы в треугольной яме с  $\kappa = 1$  рассматривалось в задаче 119 из [30], где ошибочно использовалось  $C_a = 1/4$ , как при  $\kappa < 1$ . За счёт этого получалась неправильная формула (119.5), в которой должно было быть  $n + 3/4$  вместо  $n + 1/2$  (на что обратил внимание редактор в своей сноске на с. 323). Только после такого исправления может быть достигнуто совпадение формулы (119.7) с асимптотикой (40.14) (задача 40) из [30].

**Таблица.** Энергетический спектр частицы  $E_n(\kappa)$  (в единицах  $E_* \equiv (\hbar^2 F_*^2/2m)^{1/3}$ ) в бесконечной треугольной потенциальной яме, рассчитанный при различных значениях параметра асимметрии ( $\kappa = 0$  — симметричная яма,  $\kappa = 1$  — предельно асимметричная яма) в квазиклассическом приближении и путём решения уравнения Шрёдингера

$n$	$E_n(\kappa)/E_*$			
	Квазиклассическое приближение (формула (15))		Точные значения [2, 30]	
	$\kappa < 1$	$\kappa = 1$	$\kappa = 0$	$\kappa = 1$
0	1,771	2,320	1,617	2,338
1	3,683	4,082	3,712	4,088
2	5,178	5,517	5,156	5,521
3	6,479	6,784	6,489	6,787

извольных значений  $\kappa$ , выявит неаналитичность поведения при  $\kappa \rightarrow 1$  (см. формулу (26) ниже).

### 3. Квантово-механическое рассмотрение

Запишем уравнение Шрёдингера для частицы с массой  $m$  и энергией  $E$  в потенциале (10) для левого и правого полупространства (отрицательных и положительных  $x$ ):

$$\frac{d^2\psi_j(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - F_j x) \psi_j(x) = 0, \quad j = l, r. \quad (17)$$

Общие решения дифференциальных уравнений (17) в каждом полупространстве содержат по две произвольные постоянные, которые, так же как и энергетический параметр  $E$ , могут быть однозначно определены из условия нормировки и четырёх граничных условий:

$$\int_{-\infty}^0 dx |\psi_l(x)|^2 + \int_0^{\infty} dx |\psi_r(x)|^2 = 1, \quad \psi_l(-\infty) = 0, \quad (18)$$

$$\psi_r(\infty) = 0, \quad \psi_l(-0) = \psi_r(+0), \quad \psi_l'(-0) = \psi_r'(0).$$

Уравнения (17) в новых переменных

$$y_r = \left( \frac{2mF_r}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left( x - \frac{E}{F_r} \right), \quad (19)$$

$$y_l = - \left( \frac{2m|F_l|}{\hbar^2} \right)^{1/3} \left( x + \frac{E}{|F_l|} \right)$$

сводятся к уравнениям

$$\frac{d^2\tilde{\psi}_j(y_j)}{dy_j^2} - y_j\tilde{\psi}_j(y_j) = 0, \quad j = l, r \quad (20)$$

для новых волновых функций  $\tilde{\psi}_j(y_j) = \psi_j(x)$  ( $x < 0$  при  $j = l$  и  $x > 0$  при  $j = r$ ). Общие решения уравнений (20) выражаются через функции Эйри первого и второго рода [2, 31]

$$\tilde{\psi}_j(y_j) = C_j \text{Ai}(y_j) + D_j \text{Bi}(y_j), \quad j = l, r, \quad (21)$$

где  $C_j$  и  $D_j$  — произвольные постоянные. Поскольку  $y_j \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , а  $\text{Bi}(\infty) \rightarrow \infty$ , то граничные условия  $\psi_j(\infty) = 0$  (см. (18)) выполняются при  $D_j = 0$  за

счёт равенства  $Ai(\infty) = 0$ . Постоянные  $C_j$  находятся из условий нормировки и непрерывности решения в точке  $x = 0$ , тогда как квантование энергетической переменной  $E$  следует из условия непрерывности первых производных волновых функций в той же точке, которое при учёте уравнений (18), (19) и (21) можно записать в виде

$$-|F_l|^{1/3} \frac{Ai'(y_l)}{Ai(y_l)} \Big|_{y_l = -\frac{E}{|F_l|} \left(\frac{2m|F_l|}{\hbar^2}\right)^{1/3}} = F_r^{1/3} \frac{Ai'(y_r)}{Ai(y_r)} \Big|_{y_r = -\frac{E}{F_r} \left(\frac{2mF_r}{\hbar^2}\right)^{1/3}}, \tag{22}$$

где  $Ai'(y)$  — производная функции  $Ai(y)$ .

Введём безразмерную переменную:

$$\gamma \equiv \frac{y_l}{y_r} = \left(\frac{F_r}{|F_l|}\right)^{2/3} = \left(\frac{1-\kappa}{1+\kappa}\right)^{2/3}, \tag{23}$$

которая равна отношению значений переменной  $y$ , подставляемых в уравнение (22), и определяется коэффициентом асимметрии  $\kappa$ . Если обозначить  $y_r$  через  $y$ , то уравнение (22) примет вид

$$\frac{Ai'(\tilde{y})}{Ai(\tilde{y})} \Big|_{\tilde{y} = \gamma y} + \sqrt{\gamma} \frac{Ai'(y)}{Ai(y)} = 0. \tag{24}$$

Это уравнение имеет бесчисленное множество решений. Наименьшее по модулю отрицательное значение  $y$  снабдим индексом  $n = 0$ , а остальные решения будем нумеровать целочисленным индексом  $n = 1, 2, \dots$  по мере возрастания  $|y|$ . Тогда искомым энергетический спектр  $E_n$  определится соотношением

$$E_n = -E_* \left(\frac{2}{1+\kappa}\right)^{2/3} y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{25}$$

где размерный энергетический параметр  $E_*$  даётся формулами (13), (16).

Отметим, что при обращении знака коэффициента асимметрии,  $\kappa \rightarrow -\kappa$ , параметр  $\gamma$ , определённый формулой (23), становится равным своему обратному значению,  $\gamma \rightarrow \gamma^{-1}$ . При этом из структуры уравнения (24) следует, что поскольку  $y_n$  есть функция параметра  $\gamma$ , а значит и параметра асимметрии  $\kappa$ ,  $y_n = y_n(\kappa)$ , то  $y_n(-\kappa) = \gamma y_n(\kappa)$ . Поэтому при замене  $\kappa \rightarrow -\kappa$  имеет место преобразование  $E_n(-\kappa) = E_n(\kappa)$ , как и должно быть из условия симметрии.

Перейдём к анализу решений уравнения (24). При  $\kappa = 0$  из соотношения (23) следует, что  $\gamma = 1$ , так что  $y_n$  являются корнями уравнения  $Ai'(y) = 0$ . Используя табличные значения этих корней и умножая их на  $2^{2/3}$ , согласно формуле (25), приходим к значениям, представленным для  $E_n(0)/E_*$  в предпоследнем столбце таблицы, соответствующем точным значениям при  $\kappa = 0$ . При  $\kappa = 1$  имеем  $\gamma = 0$ . Поскольку отношение  $Ai'(0)/Ai(0) \approx -0,7290$  не равно нулю, то корнями уравнения (24) могут быть только корни уравнения  $Ai(y) = 0$ . Обозначая эти корни через  $z_n$ , получаем, что, согласно (25),  $E_n(1)/E_* = -y_n = -z_n$ . Численные значения при  $\kappa = 1$  представлены в последнем столбце таблицы. Для выяснения асимптотического поведения функции  $E_n(\kappa)$  при  $\kappa \rightarrow 1$  разложим функцию  $Ai(y)$  в ряд по  $y - z_n$  и воспользуемся приближённым равенством  $Ai(y) \approx Ai'(z_n)(y - z_n)$ . Подставляя его в уравнение (24), получаем  $y_n \approx z_n - [Ai(0)/Ai'(0)]\sqrt{\gamma}$ ,

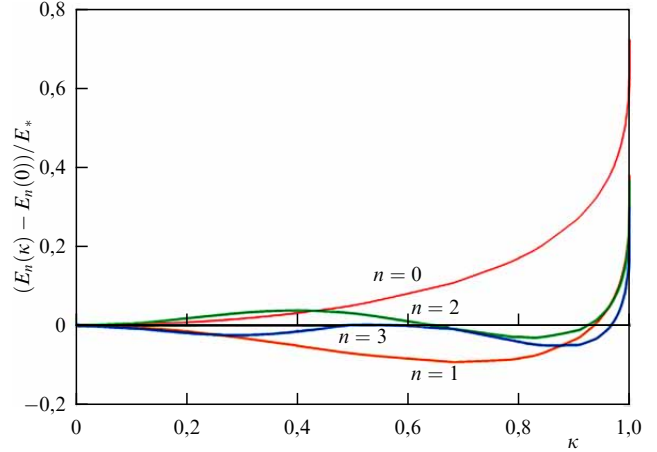


Рис. 3. Относительные изменения спектра  $E_n(\kappa)$  как функции параметра асимметрии  $\kappa$ .

откуда с учётом (25) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{E_n(\kappa)}{E_*} \Big|_{\kappa \approx 1} &\approx \frac{E_n(1)}{E_*} - 2^{-1/3} \frac{Ai(0)}{Ai'(0)} (1-\kappa)^{1/3} \approx \\ &\approx -z_n + 1,089 (1-\kappa)^{1/3}. \end{aligned} \tag{26}$$

Из данного выражения следует, что энергетический спектр  $E_n(\kappa)$  характеризуется бесконечной производной  $E'_n(\kappa)$  при  $\kappa \rightarrow 1$ .

Для численного расчёта зависимости энергетического спектра от параметра асимметрии потенциальной ямы необходимо определить границы возможных значений корней уравнения (24) при различных значениях  $\kappa$  из интервала  $(0, 1)$ . Ясно, что эти корни  $y_n$  отрицательны и ограничены значениями  $z_n$  и  $z_n/\gamma$ , при которых обращаются в нуль функции Эйри  $Ai(y)$  и  $Ai(\gamma y)$ . Например, значение  $y_0$  ограничено интервалом  $(z_0, 0)$  при любых  $\kappa$ , а  $y_1$  попадает в интервал  $(z_0/\gamma, z_0)$  при  $\kappa < 0,3961$  и в интервал  $(z_1, z_0)$  при  $\kappa > 0,3961$ . По мере увеличения квантового числа  $n$  количество интервалов, ограниченных различными значениями  $z_n$  и  $z_n/\gamma$ , возрастает. Выполненные расчёты показали, что функции  $E_n(\kappa)$  медленно изменяются с изменением  $\kappa$ , за исключением узкой области вблизи значения  $\kappa = 1$ . Поскольку значения  $E_n(\kappa)$  существенно изменяются с изменением квантового числа  $n$  по сравнению с изменениями, следующими за изменениями  $\kappa$  (см. таблицу), целесообразно представить зависимости  $E_n(\kappa)$  отсчитываемыми от  $E_n(0)$  (рис. 3). Зависимость энергии основного состояния  $E_0$  от параметра асимметрии  $\kappa$  монотонно возрастающая, тогда как зависимости  $E_n(\kappa)$  при  $n = 1, 2, 3$  описываются немонотонными функциями. При этом кривая, соответствующая  $n = 1$ , имеет два участка немонотонности,  $n = 2$  — три участка, а с  $n = 3$  — четыре участка. В соответствии с формулой (26), вблизи точки  $\kappa = 1$  функции  $E_n(\kappa)$  имеют стремящуюся к бесконечности первую производную.

Выражения для волновых функций  $\psi_n(x)$  в каждом полупространстве следуют из соотношений (18)–(21), (23)–(25):

$$\psi_n(x) = \begin{cases} C_n Ai\left(\left(\frac{2}{1+\kappa}\right)^{1/3} \left(\frac{x}{x_*}\right) + y_n\right), & x > 0, \\ C_n \frac{Ai(y_n)}{Ai(\gamma y_n)} Ai\left(-\left(\frac{2}{1-\kappa}\right)^{1/3} \left(\frac{x}{x_*}\right) + y_n\right), & x < 0. \end{cases} \tag{27}$$

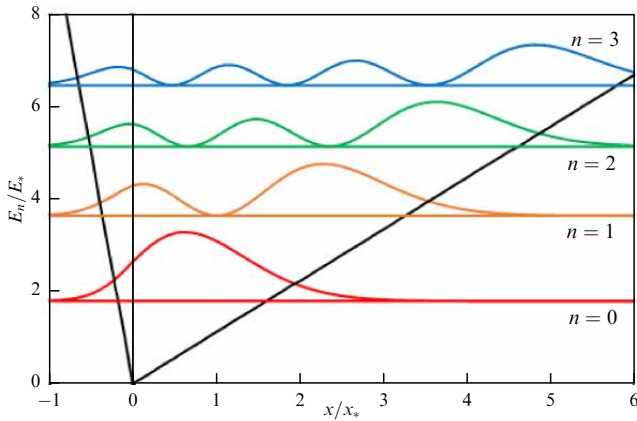


Рис. 4. Уровни энергий  $E_n$  и соответствующие им плотности вероятностей обнаружить частицу в точке  $x$  в состояниях с  $n = 0, 1, 2, 3$  при  $\kappa = 0,8$ .

Здесь

$$x_* \equiv \frac{E_*}{F_*} = \left( \frac{\hbar^2}{2mF_*} \right)^{1/3}, \quad (28)$$

а константа  $C_n$  легко находится из условия нормировки в (18):

$$C_n = x_*^{-1/2} \left( \frac{1+\kappa}{2} \right)^{1/3} [\text{Ai}'^2(y_n) - y_n \text{Ai}^2(y_n)]^{-1/2}, \quad (29)$$

которое учитывает тождество

$$\int_y^\infty d\xi \text{Ai}^2(\xi) = \text{Ai}'^2(y) - y \text{Ai}^2(y), \quad (30)$$

следующее из дифференциального уравнения (20).

Уровни энергии  $E_n$  и плотности вероятностей обнаружить частицу в точке  $x$  в состояниях с  $n = 0, 1, 2, 3$  при  $\kappa = 0,8$  изображены на рис. 4. Вероятности нахождения частицы в левой и правой подбарьерных областях зависят от наклонов сторон треугольной ямы. Это объясняет возникновение зависимостей  $E_n$  от параметра асимметрии  $\kappa$ . Для математического обоснования данного утверждения рассчитаем, например, зависимость вероятностей нахождения частицы в левой и правой подбарьерных областях от параметра асимметрии  $\kappa$  при  $n = 0$ .

$$P_r \equiv \int_{x_r}^\infty dx |\psi_0(x)|^2 = \frac{1+\kappa}{2} \frac{\text{Ai}'^2(0)}{\text{Ai}'^2(y_0) - y_0 \text{Ai}^2(y_0)},$$

$$\frac{P_l}{P_r} = \sqrt{\gamma} \frac{\text{Ai}^2(y_0)}{\text{Ai}^2(\gamma y_0)}. \quad (31)$$

Графики зависимостей  $P_r$  и  $P_l$  от  $\kappa$  представлены на рис. 5. Из них следует, что вероятность проникновения частицы под барьер тем больше, чем меньше наклон линейной функции, описывающей этот барьер. Вероятности проникновения под левый и правый барьер одинаковы для симметричного случая  $\kappa = 0$  и наиболее отличаются в предельно асимметричном случае  $\kappa = 1$ , когда частица не может пройти через вертикальный барьер ( $P_l = 0$ ).

Вернемся к анализу рис. 3. Для возбуждённых уровней  $n = 1, 2, 3$  возникает новый фактор, влияющий на степень проникновения частицы в подбарьерную область, — близость к ней одного из нулей волновой функции, по-

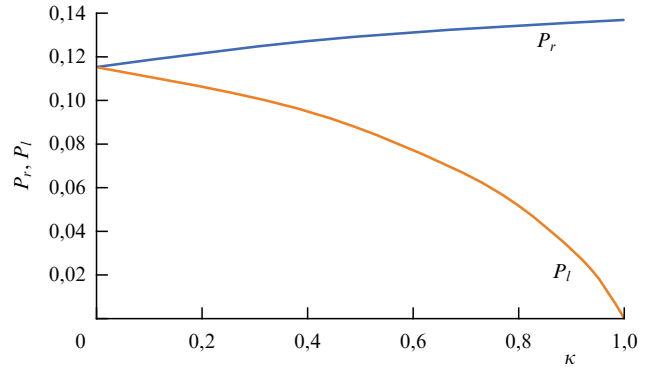


Рис. 5. Вероятности нахождения частицы в левой и правой подбарьерных областях как функции параметра асимметрии  $\kappa$  при  $n = 0$ .

ложение которого зависит от параметра асимметрии  $\kappa$ . Поскольку количество нулей волновой функции совпадает с номером уровня  $n$ , то вероятности проникновения частицы под барьеры становятся зависящими от  $n$ . Поэтому в зависимости энергетического спектра от  $\kappa$  можно ожидать возникновения участков немонотонности, число которых равно номеру уровня  $n$ . Это и наблюдается на рис. 3. Кроме того, с ростом  $n$  зависимость энергетических уровней от  $\kappa$  становится менее выраженной, что согласуется с принципом соответствия, согласно которому расстояния между соседними уровнями, определяющие классической частотой движения, не зависят от  $\kappa$ .

#### 4. Приложение полученных результатов к рэтчет-системам

Наиболее популярным модельным потенциалом, используемым для описания рэтчет-систем, является периодический пилообразный потенциал (пусть далее ширины его участков  $l$  и  $L - l$ ,  $L$  — период) [11–16, 20]. Именно для такого потенциала проще всего задаётся асимметрия (параметром  $\kappa \equiv 2l/L - 1$ ), являющаяся основным параметром рэтчет-систем. Каждый период пилообразного потенциала содержит треугольную яму и треугольный барьер. Для наглядности представим, что рис. 2 изображает такую яму глубины  $V_0$ , которая одновременно определяет и высоту барьера. В разделе 2 на примере потенциала Морзе было показано, что при малости энергетического кванта  $\hbar\omega_0$  по сравнению с глубиной потенциальной ямы положения нижних энергетических уровней определяются формой потенциальной кривой вблизи её минимума. Для гладкой кривой такой формой с достаточной точностью является парабола и нижние энергетические уровни при  $\hbar\omega_0/4V_0 \ll 1$  описываются формулой (7) для спектра гармонического осциллятора. Ясно, что для V-образной ямы глубины  $V_0$  нижние уровни при  $E_* \ll V_0$  (где  $E_*$  определено соотношениями (13), (16))<sup>6</sup> должны описываться энергетическим спектром бесконечной V-образной ямы (25).

Поскольку параметр  $V_0$  является высотой барьера пилообразного потенциала, то условие  $E_* \ll V_0$  одновременно обеспечивает и возможность использования фор-

<sup>6</sup> Это неравенство также можно переписать в виде условия квазиклассичности (см. сноску 3)  $\lambda_{\text{дВ}} \equiv 2\pi\hbar/(2mV_0)^{1/2} \ll x_*$ , где  $x_*$  — характерная ширина треугольной ямы на энергетическом уровне нулевых колебаний, определённая соотношением (28).

мулы Гамова [32–35] для описания туннельного тока, возникающего в рэтчет-системе с таким потенциалом при нулевой температуре (строгое доказательство данной формулы и поправки к ней приводятся в [36]). При этом оказывается, что результат вычисления туннельного тока не зависит от параметра  $l$  и, следовательно, от асимметрии барьера. Только высота барьера  $V_0$  и путь туннелирования  $L$  определяют туннельный ток:

$$J = A \exp\left(-\frac{4L\sqrt{2mV_0}}{3\hbar}\right). \quad (32)$$

Предэкспоненциальный фактор  $A$  можно не конкретизировать, если интересоваться потоками с экспоненциальной точностью<sup>7</sup>. Отсутствие в формуле (32) зависимости от асимметрии барьера ещё раз указывает на определяющую роль именно длины проникновения частицы в подбарьерную область как фактора, который характеризует обсуждаемые рэтчеты.

В работах [22, 23] на основе формулы (32) рассчитывался туннельный поток частиц, возникающий в пилообразном периодическом потенциале под действием адиабатических дихотомных флуктуаций однородной внешней силы. Как было упомянуто выше, системы с механизмом возникновения направленного движения вследствие флуктуаций приложенной силы с нулевым средним значением относятся к так называемым "качающимся рэтчетам" (rocking ratchets). Современную классификацию рэтчетов можно найти в обзоре [20]. Функционирование рэтчетов указанного типа обеспечивается именно асимметрией стационарного периодического потенциального профиля  $V(x)$ , модифицируемого дихотомными флуктуациями внешней силы  $\pm F$ . Тогда при  $F > 0$  в состоянии длительности  $\tau_+$  в наклонном потенциальном профиле  $U_+(x) = V(x) - Fx$  возникает положительный поток частиц  $J(F)$ . В состоянии длительности  $\tau_-$  в потенциальном профиле  $U_-(x) = V(x) + Fx$  с противоположным наклоном возникает отрицательный поток частиц  $J(-F)$ . Для симметричного дихотомного процесса с равными длительностями состояний ( $\tau_+ = \tau_-$ ) среднее по времени значение приложенной силы равно нулю, однако средний поток  $J = [J(F) + J(-F)]/2$  может быть отличен от нуля. Такая ситуация возникает, если функция  $V(x)$  не относится к классу пространственно-симметричных периодических функций, строгое определение и свойства которых представлены в [37]. Туннельные токи разных знаков могут возникать при низких температурах и в рэтчетах другого типа, функционирующих за счёт флуктуаций самих периодических потенциальных профилей, не относящихся к классу пространственно-симметричных [38].

Поскольку в данной работе мы обсуждаем кусочно-линейные формы потенциальных профилей, то далее продолжим анализ пилообразных потенциалов  $V(x)$ . В то время как туннельный ток через какой-либо барьер невозмущённого пилообразного потенциала  $V(x)$  не зависит от его асимметрии, потоки через барьеры потенциалов  $U_{\pm}(x)$ , возмущённых приложенными силами  $\pm F$ ,

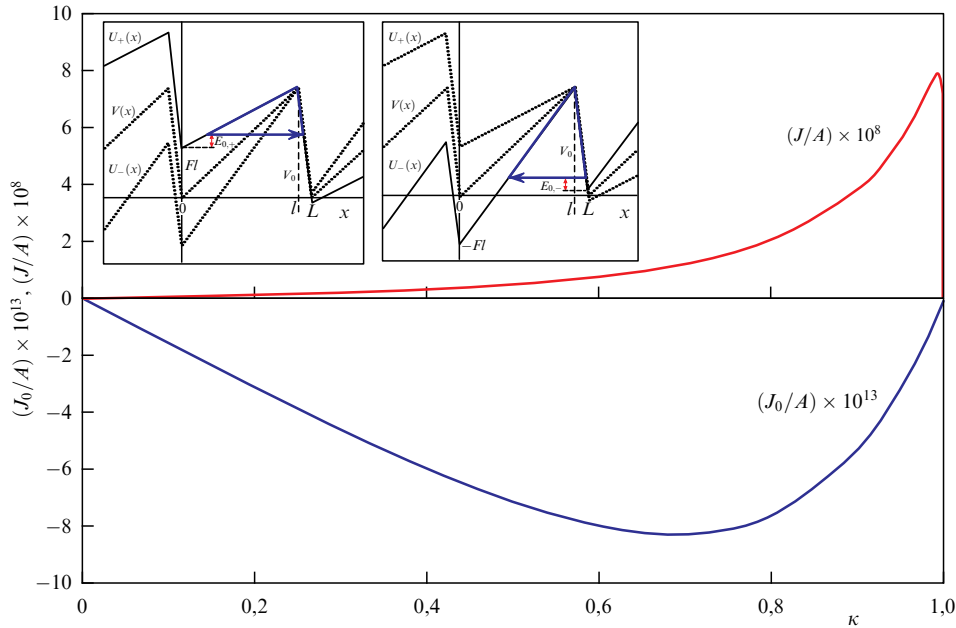
становятся зависящими от неё, чему есть две причины. Первая — изменение приложенными силами наклонов прямолинейных участков пилообразного потенциала и значений его минимумов. Действительно, значения минимумов исходной функции  $V(x)$  одинаковы, тогда как минимумы функций  $U_{\pm}(x)$ , ближайшие к какому-либо максимуму, становятся различными: один из них выше, а другой ниже исходного (см. вставки на рис. 6). Поэтому приложение сил понижает один из барьеров, окружающих потенциальную яму, и именно через этот барьер и протекает туннельный ток. Поскольку из-за асимметрии исходного профиля  $V(x)$  величины барьеров и туннельных путей в потенциалах  $U_+(x)$  и  $U_-(x)$  различны, то туннельные потоки в них будут различны по абсолютной величине и противоположны по направлению. Поэтому при усреднении компенсации потоков не происходит, возникает ненулевой средний поток, что свидетельствует о наличии рэтчет-эффекта (выпрямления неравновесных флуктуаций вследствие асимметрии системы).

Итак, первая причина возникновения зависимости туннельных токов от коэффициента асимметрии — разное искажение формы исходного периодического потенциального профиля  $V(x)$  при симметричных флуктуациях действующей силы из-за его пространственной асимметрии. Предполагая для простоты туннелирования происходящим из минимумов потенциальных профилей  $U_{\pm}(x)$ , легко рассчитать средний туннельный ток с помощью формулы (32). При этом барьер и туннельный путь будут отличаться от параметров  $V_0$  и  $L$  учётом искажений, вносимых приложенными силами  $\pm F$ . Поскольку такие искажения различны для разных асимметрий барьера, характеризуемых параметром  $l$ , то средний туннельный ток также будет зависеть от  $l$ . Результаты описанного расчёта представлены в работе [22] с целью показать, что обращение направления туннельного тока, возникающего при низких температурах, относительно термоактивационного потока при высоких температурах, теоретически предсказанное в [39] и экспериментально подтверждённое в [40, 41], может возникнуть только при относительно малых значениях флуктуирующей силы  $F$ . На рисунке 6 нижняя кривая отображает зависимость потока  $J_0$  от параметра асимметрии  $\kappa = 2l/L - 1$  (здесь  $L$  — период пилообразного потенциала  $V(x)$ ) для граничного значения силы  $FL/V_0 = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0,618$ , при котором  $J_0 < 0$  для всех  $\kappa$ , кроме предельных значений  $\kappa = 0$  и  $\kappa = 1$ . Увеличение  $F$  относительно данного граничного значения приводит к знакопеременной зависимости  $J_0$  от  $\kappa$  в интервале  $0,618 < FL/V_0 < 2/3 \approx 0,667$ , а при  $FL/V_0 > 0,667$  — к положительным  $J_0$  при любом  $\kappa$ , как и в случае термоактивационных преодолений барьеров.

Вторая причина возникновения зависимости туннельных потоков от коэффициента асимметрии — зависимость от него самого энергетического спектра частицы. В рамках того же приближения  $E_* \ll V_0$  нижние энергетические уровни частицы в пилообразном потенциале приближённо совпадают с уровнями в бесконечной треугольной яме той же асимметрии. Поэтому для описания туннелирования с нижних уровней нулевых колебаний в потенциалах  $U_{\pm}(x)$  можно использовать результаты предыдущего раздела, в частности, формулу (25) с  $n = 0$ . Туннельные пути в этих потенциалах изображены стрелками на вставках к рис. 6. В работе [23] анализировался вклад нулевых колебаний в граничные значения

<sup>7</sup> Известно, что предэкспоненциальный множитель изменяет своё значение, когда кривая потенциальной энергии становится вертикальной, но показатель экспоненты в (32) от этого не зависит. Поэтому и коэффициент прохождения через треугольный потенциальный барьер с вертикальной стенкой (см. задачу 1 после § 50 из [3]) имеет такой же вид, хотя выражение (32) получено для треугольного барьера произвольной симметрии.





**Рис. 6.** Зависимости туннельного тока рэтчета с флуктуирующей силой от параметра асимметрии  $\kappa = 2l/L - 1$  пилообразного потенциала, вычисленные без учёта (нижняя кривая  $J_0$ ) и с учётом (верхняя кривая  $J$ ) нулевых колебаний при  $FL/V_0 = 0,618$  и  $E_*/V_0 = 0,1$ . На вставках показаны изменения формы асимметричного пилообразного потенциала, вызванные приложенными силами  $\pm F$  и приводящие к изменениям энергетических барьеров и путей туннелирования (изображены стрелками). За счёт нулевых колебаний с энергетическими уровнями  $E_0$  значения барьеров, которые частица преодолевает при туннелировании, меньше исходных барьеров, отсчитываемых относительно дна потенциальных ям.

флуктуирующей силы. Здесь же представлена зависимость  $J$  от  $\kappa$ , соответствующая вышеприведённому граничному значению флуктуирующей силы ( $FL/V_0 \approx 0,618$ ), но при учёте вклада энергии нулевых колебаний (верхняя кривая на рис. 6).

Сопоставим верхнюю и нижнюю кривые на рис. 6. Прежде всего отметим, что учёт нулевых колебаний при туннелировании существенно увеличивает значения туннельного тока. Этот результат хорошо известен и объясняется тем, что энергетический барьер, отсчитываемый от уровней нулевых колебаний, меньше барьера, отсчитываемого от дна потенциальной ямы. Хотя такое изменение невелико по сравнению с высотой барьера, но экспоненциальная зависимость туннельного тока от величины барьера может сделать вклад данного изменения в величину туннельного тока достаточно большим [42]. Дополнительное увеличение значений тока связано с тем, что рэтчет-эффект как следствие компенсации разнонаправленных потоков частиц в двух состояниях дихотомного процесса очень чувствителен даже к небольшим изменениям параметров системы [20].

Наиболее впечатляющее отличие обсуждаемых кривых друг от друга состоит в том, что они соответствуют зависимостям противоположного знака, поэтому учёт нулевых колебаний не только существенно увеличивает рэтчет эффект, но также может обращать направление туннелирования. При этом вклад в поток вследствие зависимости энергетического спектра от асимметрии потенциального профиля доминирует над вкладом из-за простого искажения формы барьера приложенным полем. Действительно, немонотонная функция  $J_0(\kappa)$  с минимумом при  $\kappa \approx 0,7$  не имеет особенностей, тогда как зависимость  $J(\kappa)$  характеризуется бесконечной производной при  $\kappa \rightarrow 1$ , что есть следствие непроникновения частицы под вертикальный потенциальный барьер.

## 5. Заключение

В данных методических заметках точно решена задача об энергетическом спектре квантовой частицы в бесконечной треугольной ( $V$ -образной) потенциальной яме с произвольным коэффициентом асимметрии  $\kappa$ , изменяющимся от нуля (для симметричной ямы) до единицы (для предельно асимметричной ямы). Показана связь полуценной зависимости энергетического спектра от коэффициента асимметрии с глубиной проникновения квантовой частицы в классически запрещённые области. Оценка энергетического спектра из правила квантования Бора – Зоммерфельда с использованием классического подхода для определения частоты колебаний не принимает во внимание проникновение частицы в подбарьерные области. Как следствие, зависимость от параметра асимметрии ямы отсутствует для любой геометрии, за исключением частного случая вертикальной стенки,  $\kappa = 1$ , для которого квазиклассический подход характеризуется особым граничным условием.

Результаты, полученные для энергетического спектра частицы в бесконечной треугольной яме в рамках квазиклассического приближения, справедливы и для ямы конечной глубины, если интересоваться спектром только вблизи её дна. Данное обстоятельство, а также использование формулы Гамова позволяет рассчитать туннельный ток рэтчет-систем типа "качающихся", функционирующих в пилообразном потенциале (содержащем как треугольные потенциальные ямы, так и треугольные барьеры) под действием флуктуирующей однородной силы. Зависимость туннельного тока рэтчета от коэффициента асимметрии потенциала обусловлена двумя механизмами: искажением формы исходного асимметричного треугольного барьера симметричными флуктуациями силы и зависимостью энергетического спектра

частицы в треугольных ямах пилообразного потенциального профиля от этого коэффициента, причём второй механизм доминирует над первым. Показано, что при определённом подборе параметров броуновского рэтчета учёт второго механизма не только способен существенно увеличить рэтчет-эффект, но и обратить направление движения туннелирующих частиц.

Следует особо отметить роль областей подбарьерного проникновения частицы в формировании зависимости энергетического спектра частицы от асимметрии V-образной потенциальной ямы. Учёт такой зависимости чрезвычайно важен и в изучении характеристик квантовых броуновских моторов, свойства которых определяются асимметрией потенциального профиля.

Работа частично выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь "Фотоника и электроника для инноваций" (НИР 1.17.1 "Моделирование и создание фотонных и оптоэлектронных наноструктур на основе графеноподобных материалов для управления оптическим излучением"), а также в рамках задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (регистрационный номер 122040500071-0).

## Список литературы

1. Khonina S N et al. *Sci. World J.* **2013** 807462 (2013)
2. Vallée O, Soares M *Airy Functions and Applications to Physics* (London: Imperial College Press, 2004)
3. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1989); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 2013)
4. Fowler R H, Nordheim L "Electron emission in intense electric fields" *Proc. R. Soc. London A* **119** 173 (1928)
5. Liang S-D *Quantum Tunneling and Field Electron Emission Theories* (New Jersey: World Scientific, 2014)
6. Berti E, Cardoso V, Starinets A O *Class. Quantum Grav.* **26** 163001 (2009)
7. Sauvan C *Opt. Express* **29** 8268 (2021)
8. Климов В В *УФН* **193** 279 (2023); Klimov V V *Phys. Usp.* **66** 263 (2023)
9. Ferrari V, Mashhoon B *Phys. Rev. Lett.* **52** 1361 (1984)
10. Dutta Roy P, Das J, Kar S *Eur. Phys. J. Plus* **134** 571 (2019)
11. Reimann P *Phys. Rep.* **361** 57 (2002)
12. Розенбаум В М, Шапочкина И В, Трахтенберг Л И *УФН* **189** 529 (2019); Rozenbaum V M, Shapochkina I V, Trakhtenberg L I *Phys. Usp.* **62** 496 (2019)
13. Rozenbaum V M, Korochkova T Ye, Shapochkina I V, Trakhtenberg L I *Phys. Rev. E* **104** 014133 (2021)
14. Astumian R D *Science* **276** 917 (1997)
15. Cubero D, Renzoni F *Brownian Ratchets: from Statistical Physics to Bio and Nano-Motors* (Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2016)
16. Roth J S et al. *Appl. Phys. Lett.* **106** 183703 (2015)
17. Goychuk I, Hänggi P *Adv. Phys.* **54** 525 (2005)
18. Hänggi P, Marchesoni F *Rev. Mod. Phys.* **81** 387 (2009)
19. Erbas-Cakmak S et al. *Chem. Rev.* **115** 10081 (2015)
20. Гуляев Ю В, Бугаев А С, Розенбаум В М, Трахтенберг Л И *УФН* **190** 337 (2020); Gulyaev Yu V, Bugaev A S, Rozenbaum V M, Trakhtenberg L I *Phys. Usp.* **63** 311 (2020)
21. Fornés J A *Principles of Brownian and Molecular Motors* (Springer Series in Biophysics, Vol. 21) (Cham: Springer, 2021)
22. Shapochkina I V, Rozenbaum V M, Trusevich N G, Trakhtenberg L I *Npnl. Phenom. Complex Syst.* **25** 349 (2022)
23. Rozenbaum V M et al. *J. Chin. Chem. Soc.* **70** 421 (2023)
24. Fröman N, Fröman P O *JWKB Approximation* (Amsterdam: North-Holland, 1965); Пер. на русск. яз.: Фреман Н, Фреман П У *ВКБ-приближение* (М.: Мир, 1967)
25. Мигдал А Б *Качественные методы в квантовой теории* (М.: Наука, 1975); Пер. на англ. яз.: Migdal A B *Qualitative Methods in Quantum Theory* (Reading, MA: W.A. Benjamin, Advanced Book Program, 1977)
26. Шпатаковская Г В *УФН* **182** 457 (2012); Shpatakovskaya G V *Phys. Usp.* **55** 429 (2012)
27. Багров В Г, Белов В В, Кондратьева М Ф *Теоретическая и математическая физика* **98** 48 (1994); Bagrov V G, Belov V V, Kondrat'eva M F *Theor. Math. Phys.* **98** 34 (1994)
28. Аникин А Ю, Доброхотов С Ю, Цветкова А В *Теоретическая и математическая физика* **204** 171 (2020); Anikin A Yu, Dobrokhotov S Yu, Tsvetkova A V *Theor. Math. Phys.* **204** 984 (2020)
29. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* 3-е изд., испр. и доп. (М.: Наука, 1973); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Mechanics* 3rd ed. (Oxford: Butterworth-Heinemann, 1998)
30. Flugge S *Practical Quantum Mechanics* (New York: Springer-Verlag, 1974); Пер. на русск. яз.: Флюгге З *Задачи по квантовой механике* Т. 1 (М.: Мир, 1974)
31. Abramowitz M, Stegun I A (Eds) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Washington: National Bureau of Standards, 1964); Пер. на русск. язык: Абрамовиц М, Стиган И (Ред.) *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* (М.: Наука, 1979)
32. Gamow G Z. *Phys.* **51** 204 (1928)
33. Гамов Г А *УФН* **10** 531 (1930)
34. Gurney R W, Condon E U *Nature* **122** 439 (1928)
35. von Laue M Z. *Phys.* **52** 726 (1928)
36. Gurvitz S A *Phys. Rev. A* **38** 1747 (1988)
37. Rozenbaum V M, Shapochkina I V, Teranishi Y, Trakhtenberg L I *Phys. Rev. E* **100** 022115 (2019)
38. Розенбаум В М, Шапочкина И В, Трахтенберг Л И *Письма в ЖЭТФ* **118** 369 (2023); Rozenbaum V M, Shapochkina I V, Trakhtenberg L I *JETP Lett.* **118** 369 (2023)
39. Reimann P, Grifoni M, Hänggi P *Phys. Rev. Lett.* **79** 10 (1997)
40. Linke H et al. *Science* **286** 2314 (1999)
41. Linke H et al. *Appl. Phys. A* **75** 237 (2002)
42. Гольдманский В И, Трахтенберг Л И, Флеров В Н *Туннельные явления в химической физике* (М.: Наука, 1986); Пер. на англ. яз.: Gol'danskii V I, Trakhtenberg L I, Fleurov V N *Tunneling Phenomena in Chemical Physics* (New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1989)

## Quantum particle in a V-shaped well of arbitrary asymmetry. Brownian motors

V.M. Rozenbaum<sup>(1,2,a)</sup>, I.V. Shapochkina<sup>(1,2,b)</sup>, L.I. Trakhtenberg<sup>(3,4,c)</sup>

<sup>(1)</sup> Belarusian State University, prosp. Nezavisimosti 4, 220030 Minsk, Belarus

<sup>(2)</sup> DUT-BSU Joint Institute, Dalian University of Technology, 116024 Dalian, People's Republic of China

<sup>(3)</sup> Semenov Federal Research Center for Chemical Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Kosygina 4, 119991 Moscow, Russian Federation

<sup>(4)</sup> Lomonosov Moscow State University, Leninskie gory 1, 119991 Moscow, Russian Federation

E-mail: <sup>(a)</sup> vik-roz@mail.ru, <sup>(b)</sup> shapoch@mail.ru, <sup>(c)</sup> litrakh@gmail.com

The dependence of the energy spectrum of a quantum particle in an infinite V-shaped potential well on its asymmetry parameter is analyzed. The relationship between the occurrence of this dependence and different depths of quantum particle penetration into classically forbidden regions under the well walls is shown. In particular, an estimate of the energy spectrum using the Bohr-Sommerfeld quantization rules, which does not take into account the particle penetration into subbarrier regions, shows that there is no dependence on the well asymmetry parameter. An exception is the transition to the case of a vertical wall, when the semiclassical approach is characterized by a special boundary condition. The results are illustrated by the dependence of the tunnel current of a Brownian motor (ratchet) with an applied fluctuating force on the asymmetry of the sawtooth potential. With a certain selection of ratchet parameters, considering zero-point oscillations describes the occurrence of a particle flow in the direction opposite to that obtained without such consideration.

**Keywords:** energy spectrum, asymmetric systems, Airy functions, Brownian motors, ratchets

PACS numbers: 03.65.Ge, **05.40** – a, 05.60.Gg

Bibliography — 42 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **194** (10) 1108 – 1117 (2024)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2024.06.039704>

Received 15 February 2024, revised 5 May 2024

*Physics – Uspekhi* **67** (10) (2024)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2024.06.039704>