

## Работа А.Н. Колмогорова 1934 г. — основа для объяснения статистики природных явлений макромира

Г.С. Голицын

Работа А.Н. Колмогорова 1934 г. [1] "Случайные движения", далее АНК34, использует уравнение типа Фоккера–Планка для шестимерного вектора с полной, а не частной производной по времени и с лапласианом в пространстве скоростей. Коэффициентом диффузии при этом является  $v$ , скорость генерации/диссипации энергии. Уравнение Фоккера–Планка получается при задании ускорений частиц ансамбля марковскими процессами, т.е. случайными процессами,  $\delta$ -коррелированными по времени и между собой. Фундаментальное решение этого уравнения было указано ещё в [1] и было использовано А.М. Обуховым [2] в 1958 г. для описания турбулентного потока в инерционном интервале [3]. Уже недавно [4, 5] было замечено, что уравнение типа Фоккера–Планка, написанное Колмогоровым в [1], содержит в себе описание статистики других случайных природных процессов, землетрясений, морского волнения и пр. [5]. Данное уравнение заменой переменных с масштабами для скоростей и для координат сводится к автомодельному виду, не содержащему явно коэффициента диффузии [6]. Численный счёт подтверждает наличие таких масштабов в системах с числом  $N$  событий, в ансамблях начиная с  $N = 10$ . При  $N = 100$  эти масштабы практически точно совпадают с теорией АНК34. Теория, в принципе уже содержащая результаты 1941 г., проложила путь и к более сложным случайным системам, содержащим достаточное количество параметров, для того чтобы образовать внешний параметр подобия. Это приводит к изменению характеристик случайного процесса, например, к изменению наклона временного спектра, как в случае землетрясений и в ряде других процессов (морское волнение, спектр энергии космических лучей, зоны затоплений при наводнениях и т.д.). Обзор конкретных случайных процессов, изученных экспериментально, даёт методу, как следует поступать при сравнении экспериментальных данных с теорией АНК34. Таким образом, эмпирические данные иллюстрируют справедливость фундаментальных законов теории вероятности. Статья является многократным сокращением монографии автора, где впервые идеи работы АНК34 применялись для объяснения в вероятностном смысле многих экспериментальных закономерностей, десятилетиями рассматривавшихся чисто эмпирически.

**Ключевые слова:** случайные движения, уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, вторые моменты распределения вероятностей для координат и скоростей, теория подобия и размерностей, статистические законы природы

PACS numbers: 05.40.–a, 91.30.–f, 92.60.–e

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFN.2023.05.039355>

### Содержание

1. Общие сведения (86).
  2. Землетрясения (88).
  3. Энергетический спектр космических лучей (90).
  4. Морские ветровые волны (90).
  5. Распределение вероятностей для облачных полей (91).
  6. Ураганы и физические аналоги подобных вихрей (93).
  7. Статистическая структура рельефа поверхности небесных тел (93).
  8. Распределение по размерам для водоёмов и ущерб от наводнений (94).
  9. Обсуждение результатов и заключение о роли АНК34 (95).
- Список литературы (95).

К 90-летию публикации статьи  
А.Н. Колмогорова "Случайные движения" [1]

### 1. Общие сведения

В 1934 г. Андрей Николаевич Колмогоров опубликовал двухстраничную статью "Zufällige Bewegungen" ("Случайные движения"), содержащую в себе основы физико-математического объяснения статистических законов природы [1] (далее АНК34). Уравнение АНК34 имеет вид

$$\frac{\partial p(u_i, x_i, t)}{\partial t} + u_k \frac{\partial p(u_i, x_i, t)}{\partial x_k} = D \frac{\partial^2 p(u_i, x_i, t)}{\partial u_k^2} \quad (1)$$

и отличается от привычного уравнения Фоккера–Планка (ФП) тем, что в его левой части стоит полная субстанциональная производная по времени от плотности распределения шестимерного случайного вектора  $\mathbf{A} = (u_i, x_i)$  вместо  $\partial p(t, x_i)/\partial t$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ), и по повторяющимся индексам производится суммирование. Коэф-

Г.С. Голицын.

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН,  
Пыжевский пер. 3, 109017 Москва, Российская Федерация  
E-mail: [gsg@ifaran.ru](mailto:gsg@ifaran.ru)

Статья поступила 16 февраля 2023 г.

коэффициент диффузии в пространстве скоростей имеет размерность квадрата скорости, меняющегося со временем, т.е.  $[D] = L^2 T^{-3}$ . А.М. Обухов [2] первым использовал это уравнение, в частности, для описания турбулентности. Он же показал, что коэффициент диффузии  $D$  для инерционного интервала турбулентности равен скорости генерации/диссипации кинетической энергии. Он предвидел, что это уравнение может быть применено и для других процессов статистической природы. Обычное же уравнение ФП описывает случайные *блуждания*, а (1) — случайные *движения*.

Обухов показал в [2, 3], что распределение вероятностей  $p(t, u_i, x_i)$  имеет три вторых момента в турбулентных потоках в инерционном интервале, растущих со временем. Угловые скобки означают статистическое усреднение:

$$\langle u_i^2(t) \rangle = \varepsilon t, \quad (2)$$

$$\langle x_i^2(t) \rangle = \varepsilon t^3 = r^2, \quad (3)$$

$$\langle u_i x_i \rangle = \varepsilon t^2 = K. \quad (4)$$

Выражая из (3) время

$$t = \left( \frac{r^2}{\varepsilon} \right)^{1/3} \quad (5)$$

и подставляя его в (2) и (4), получаем закон для структурной функции скорости Колмогорова при нулевом (или малом) начальном значении:

$$u^2(r) = \varepsilon t = (\varepsilon r)^{2/3}, \quad (6)$$

$$\langle u_i x_i \rangle = K = \varepsilon^{1/3} r^{4/3}, \quad (7)$$

где  $K$  — кинематический коэффициент перемешивания.

Мы специально не останавливаемся на записи в двух последних формулах универсальных безразмерных постоянных, которые следует определять из сравнения с экспериментами. Такие эксперименты проводятся в разных условиях (например, при разных граничных условиях). Для справок [3] в формуле (6) такая константа  $C_6 \approx 1,6$ , а в (7) получается  $C_7 \approx 0,18$ . Формула (7) есть закон турбулентной диффузии Ричардсона – Обухова.

Остановимся поподробнее на вторых моментах (2) – (4). Уравнение (1) может быть сведено к полностью автономному виду заменой переменных  $u_i(t) = (\varepsilon t)^{1/2} v_i$ ,  $x_i = (\varepsilon t^3)^{1/2} y_i$ , где безразмерные переменные  $v_i, y_i$  уберут из (1) коэффициент диффузии  $D$ .

Для уравнения (1) можно выписать полное фундаментальное решение в виде

$$p(t, u_i, x_i) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2\pi Dt} \right)^3 \exp \left[ - \left( \frac{u_i^2}{Dt} - \frac{3u_i x_i}{Dt^2} + \frac{3x_i^2}{Dt^3} \right) \right]. \quad (8)$$

Эта формула в полном виде впервые приведена в [3] (см. формулу (24.56)). Она очевидным образом показывает, что наше обезразмеривание в каком-то смысле максимизирует вероятность в (8).

Когда А.М. Обухов в 1958 г. на Международном симпозиуме по загрязнению атмосферы и турбулентности в Оксфорде представил эти результаты, Джордж Бэтчелор задал ему вопрос: что нового даёт такой подход по сравнению с использованием теории подобия и

размерности? Уравнение АНК34 даёт описание случайных процессов в их временном развитии, хотя подстановка (5) связывает временные и пространственные характеристики рассматриваемых процессов, поэтому формулу (5) можно рассматривать как дисперсионное соотношение для  $\omega = 2\pi/t$  и  $k = 2\pi/r$ :

$$\omega = (2\pi\varepsilon)^{1/3} k^{2/3}, \quad (9)$$

нелинейность которого и вводит основные аналитические трудности. Соображения размерности и подобия, сами по себе превратившиеся в точную науку [7], служат другим методом рассмотрения процессов, дополняющим АНК34 и расширяющим его возможности. При рассмотрении полного набора параметров явления из них можно образовать безразмерные параметры подобия, которые могут входить в безразмерные коэффициенты, возникающие при сравнении формул АНК с экспериментальными данными. Существенным новым понятием для таких исследований является термин "промежуточная асимптотика" [8, 9], введённый Г.И. Баренблаттом и Я.Б. Зельдовичем. Пределы действия таких асимптотик устанавливаются сравнением с экспериментами на основе анализа чисел подобия рассматриваемых явлений.

Аналитические формулы теории вероятностей выводятся в предположении бесконечного ансамбля рассматриваемых событий. На практике число событий всегда конечно, даже бывает порядка десятка. Поэтому нужно исследовать влияние конечности ансамбля  $N$  на конечные формулы (2)–(4). С этой целью в [6] были предприняты численные расчёты. Конкретно численно решались в зависимости от времени следующие уравнения:

$$\dot{u}_i = a_i, \quad \dot{x}_i = u_i, \quad (10)$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$  — общее число пар таких уравнений,  $a_i$  — ускорение отдельной частицы без взаимодействия с другими. Уравнения (10) для простоты массово решались в одномерном случае. Однако получаемые при этом общие закономерности сохраняются и в двумерном, и в трёхмерном приближениях. Ускорения  $a_i$  задавались различными типами распределений. Выбор функций распределений и временного шага не влияет сколь-нибудь существенным образом на вторые моменты скоростей и смещений лагранжевых частиц. Результаты таких расчётов изображены на рис. 1. Видно, что при общем числе частиц  $N = 10$  второй момент с заметными на глаз флуктуациями пропорционален времени. Второй же момент смещений практически точно следует зависимости  $\langle x^2(t) \rangle \sim t^3$ . Расстояния между частицами получают интегрированием скоростей, что эквивалентно сглаживанию.

Примем, что лагранжевы результаты действуют и в эйлеровом описании на том основании, что при этом хорошо описываются реальные экспериментальные данные; это было проверено в [6]. Моменты (2) и (3) будем рассматривать как структурные функции с нулевыми или малыми начальными данными, те же соотношения выполняются и для отдельных компонент шестимерного вектора  $u_i x_i$ . Выпишем (3) для вертикальной координаты  $\langle h^2(t) \rangle \approx \varepsilon t^3$ . Если  $h$  — высота пика ветрового волнения на море, а  $t$  — период этого пика, то перед нами знаменитое соотношение между высотой пика и его

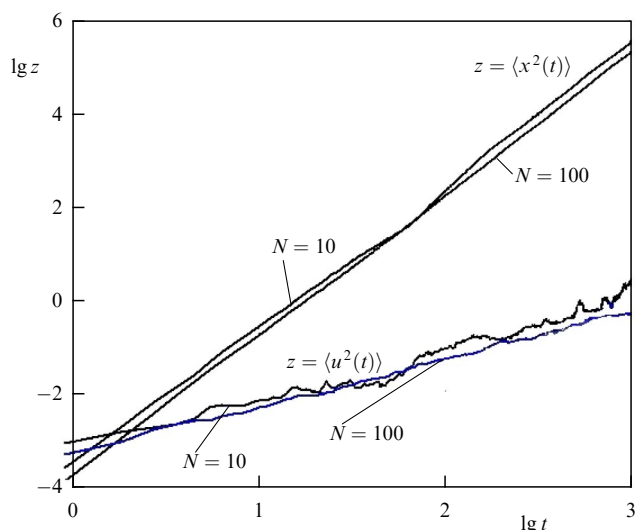


Рис. 1. Вторые моменты функции распределения вероятностей для скоростей  $\langle u^2(t) \rangle$  и расстояний между частицами  $\langle x^2(t) \rangle \sim t^3$ .

периодом, открытое в 1978 г. [10]. Тогда это соотношение было найдено с необычайной точностью, с коэффициентом корреляции  $r > 0,99$  (почему — см. ниже раздел 4). Структурной функции (3) соответствует [3] частотный спектр  $\varepsilon k^{-4}$ , что в 1973 г. было показано тем же автором [11].

Формулу (2) для среднего квадрата скорости можно рассматривать как энергию частицы на единицу её массы. Впервые такая формула в 1944 г. из соображений размерности была предложена Л.Д. Ландау в первом издании *Механики сплошных сред*, где есть формула  $u^2 \approx \varepsilon t$ . Эти моменты сразу дают описание кумулятивных распределений вероятностей, называемых иногда интегральными, которые имеют размерность обратного времени, т.е. частоты:

$$N(\geq E) \approx \frac{\varepsilon}{E} \quad (11)$$

для событий, связанных с энергией, а для пространственных процессов формула (3) позволяет написать

$$N(\geq S) \sim \left(\frac{\varepsilon}{S}\right)^{1/3}, \quad (12)$$

но это много лет оставшееся таинственным распределение для литосферных плит [13]. То же распределение определено в [5] для масс близлежащих спиральных галактик в предположении, что масса пропорциональна площади их поверхности.

Ещё одно наблюдение за вторыми моментами сразу решает проблему, поставленную сэром Джеймсом Лайтхиллом в 1995 г. Последняя декада XX века была объявлена ООН декадой борьбы с природными катастрофами, и Лайтхилл, гидроаэродинамик, член многих академий и российской в том числе, встал во главе Научного комитета. Он сказал, что мы не понимаем, как кинетическая энергия тропического урагана может достигать энергии взрыва многих тысяч мегатонных бомб. А для этого надо произведение двух первых моментов умножить на плотность массы атмосферного столба  $M = 10^4 \text{ кг м}^{-2}$ , эти ураганы развиваются до 15–18 км. Энергия достигается концентрацией углового

момента, концентрируемого конвекцией. Поток плавучести при этом порядка  $b = \varepsilon = \alpha g f / \rho c_p \approx 0,03 \text{ м}^2 \text{ с}^{-3}$ , и тогда для уравнения

$$E = Mb^2 l_C^{-4}, \quad (13)$$

где  $l_C = (4\pi/T) \sin \theta$  — параметр Кориолиса, величина, обратная периоду вращения,  $\theta$  — широта. При  $l_C = 0,5 \times 10^{-4}$  на  $20^\circ$  широты получаем [5, 15, 16]  $E \approx 10^{19}$  Дж. За этой цифрой стоят тысячи работ. Энергия взрыва 1 Мт ТНТ =  $1,6 \times 10^{15}$  Дж. Ранее формула (13) была в 1997 г. получена методами теории подобия и размерности. В целом АНКЗ4 и такой подход позволяют взглянуть на предмет исследований с разных сторон, поддерживая друг друга.

Далее мы приступим к рассмотрению отдельных процессов, вскрывая в них свои и общие особенности. При сравнении с экспериментами, а сравниваются величины с одинаковыми размерностями, возникают численные безразмерные множители, которые сами по себе могут зависеть от других параметров подобия, если в системе имеется достаточное количество размерных управляющих параметров [7].

## 2. Землетрясения

Подавляющее большинство землетрясений (ЗТ), более 90 %, происходит вблизи границ литосферных плит. Конвекция со скоростями в несколько см год $^{-1}$  в мантии неоднородна по пространству и времени. Увлекая плиты, конвекция порождает напряжения на их границах, которые снимаются путём образования разрывов, ЗТ, в хрупкой земной коре. На рубеже 1940-х гг. эмпирически был установлен закон повторяемости ЗТ в зависимости от их силы [17, 18], получивший название закона Гутенберга–Рихтера (ГР):

$$\lg N(\geq m) = a - bm, \quad (14)$$

где  $N(\geq m)$  — кумулятивное число ЗТ за исследуемый период времени с магнитудой  $\geq m$ ;  $a$  — константа, зависящая от выбора единиц измерений и временного интервала, а также от места наблюдений;  $b \approx 1$ . Магнитуда  $m$  связана с логарифмом энергии ЗТ и оценивается по амплитуде поверхностных или объёмных сейсмических волн [18].

Анализ сейсмограмм позволяет оценить параметры разрыва: длину  $L$ , площадь  $S$ , время развития  $\tau$ , среднее смещение блоков коры вдоль разрыва  $u$ , а также рассчитать сейсмический момент, меру энергии ЗТ в виде (см. [18])

$$M = \mu S u, \quad (15)$$

где  $\mu$  — модуль сдвига пород коры. Между величинами магнитуды и сейсмического момента существует приближённая связь, оправдываемая некоторыми теоретическими соображениями и статистикой наблюдений [17, 18]

$$m = \frac{2}{3} \lg M - 6, \quad (16)$$

где величина  $M$  измерена в системе СИ, т.е. [Н м]. Величина  $M$  — момент сил, действующих в системе, т.е.

это тензор (см. Касахара [18]). По размерности момент равен энергии. В терминах момента закон ГР (14) записывается с показателем  $b' \approx 2/3$ . Из (14) и отсюда следует, что

$$N(\geq M) \sim M^{-2/3}.$$

Канамори и Андерсон (см. [18]) на основе простой модели образования трещин и динамики разрыва, а также постулирования масштабного подобия (скейлинга) приняли, что падение напряжения  $\Delta\sigma$  в коре (при ЗТ) приблизительно постоянно. Получено, что площадь разрыва  $S \propto M^{2/3}$ . Это справедливо [7] для ЗТ с  $m \geq 6$ . Отсюда следует другая интерпретация магнитуды [17, 18]:

$$m = \lg \left( \frac{S}{S_0} \right), \tag{17}$$

где  $S_0 \approx 100 \text{ м}^2 = 0,01 \text{ га} = 1 \text{ ар}$ , т.е. в просторечии одна сотка.

Специальная проверка показала, что падение напряжений (см. [5]) в коре при ЗТ находится около 4,5 МПа при изменениях модуля тензора момента на 5–6 порядков. Анализ глобальных каталогов ЗТ показал, что есть значение  $M_{cr} \approx 1,6 \times 10^{20} \text{ Н м}$ , вблизи которого величина показателя  $b$  в (14) меняется с 1 до 1,5. Последнее уверенно наблюдается для ЗТ вблизи срединноокеанических хребтов, в которых выходит наружу магма со скоростью  $3 \text{ км}^3 \text{ год}^{-1}$ , застывая в кору, и где кора тонкая. Для анализа процесса ЗТ используем сначала теорию подобия [17].

За материальные константы коры [18] примем модуль сдвига  $\mu = (3-7) \times 10^{10} \text{ Н м}^{-2}$ , плотность  $\rho = 3 \times 10^5 \text{ кг м}^{-3}$  и величину сбрасываемости напряжения  $\Delta\sigma = 4,5 \times 10^6 \text{ Н м}^{-2}$ . Первопричиной и мерой мощности всех геодинамических процессов является геотермический поток  $F \approx 4,5 \times 10^{13} \text{ Вт}$  при средней плотности  $86 \text{ мВт м}^{-2}$  [19]. Глобальные данные для ЗТ выявляют и толщину плит  $h$ . Мы имеем четыре параметра с тремя размерностями. Можно образовать масштабы длины и времени [17], характеризующие отдельные ЗТ:

$$L = \left( \frac{M}{\Delta\sigma} \right)^{1/3}, \quad T = \frac{M}{F}.$$

В XX веке самое сильное ЗТ было в 1960 г. в Чили с  $m = 9,5$ , т.е.  $\lg M = 20$ . Из четырёх внешних параметров системы можно образовать один безразмерный параметр подобия

$$\Pi = \frac{L}{h} = \frac{M^{1/3}}{\Delta\sigma^{1/3} h}. \tag{18}$$

Из соображений размерности можно записать число событий с размерностью частоты

$$N(\geq M) = \frac{F}{M} f(\Pi), \tag{19}$$

где  $f(\Pi)$  — функция критерия подобия  $\Pi$ , определяемая из наблюдений. По глобальным каталогам вблизи срединноокеанических хребтов  $\Pi \geq 1$ , и тогда мы можем предположить, что  $f(\Pi) \rightarrow \text{const}$ . При  $\Pi < 1$  эту

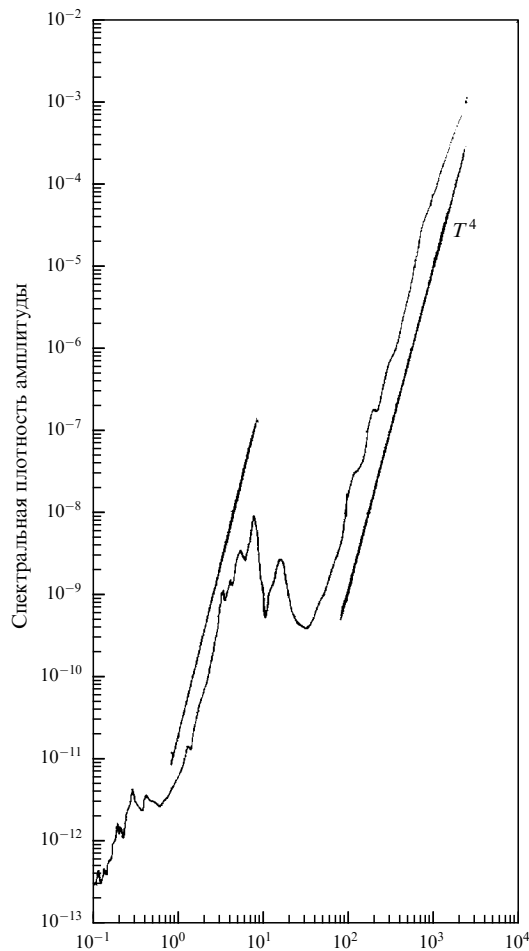


Рис. 2. Спектры микросейсм из [5].

функцию можно разложить в ряд Маклорена, который должен начинаться с линейного члена (нет возбуждения — нет и ЗТ). Тогда  $f(\Pi) = c_1 \Pi = c_1 M^{-1/3} \Delta\sigma^{-1/3} / h$ . Обработка глобальных каталогов дала [5, 20] значение константы  $c_1 \approx 0,35$ . При  $\Pi > 1$  также получено  $c_1 \approx 0,34 \pm 0,02$  для  $b \approx 2/3$ . Отметим, что для  $5 < m < 7,5$  в [21] было получено  $b = 0,65 \pm 0,02$ . Таким образом, если ЗТ происходит внутри коры, то  $b \approx 2/3$ , а если выходит за её пределы, то  $\lg N(\geq M) \sim M^{-1}$ . Поэтому, если  $\Pi > 1$ , то такие ЗТ будут происходить реже в полтора раза, чем при  $\Pi < 1$ , когда  $\lg N(\geq M) \sim M^{-2/3}$ .

Известны наведённые ЗТ, возникающие после создания больших водохранилищ, добычи в больших объёмах нефти и газа [22]. Тогда возникают изменения внутреннего давления в системе — величины  $dp/dz = -\rho g$ . Такие изменения приводят к нарушению изостазии, т.е. к появлению новых и изменению старых напряжений в коре [5, 22, 23]. Эти ЗТ удовлетворительно описываются законами Гутенберга–Рихтера. Спектры микросейсм (рис. 2) в двух участках периодов от 1 до 0,1 Гц и от  $10^{-2}$  до  $5 \times 10^{-4}$  Гц пропорциональны  $\omega^{-4} \sim T^4$ , соответствуя второму моменту (3). Первый интервал отражает обрушение о берег морских волн с таким спектром, второй — минутных периодов, соответствует просто совокупности многих случайных причин внутри и вне земной поверхности в согласии с АНК34.

Наблюдаемые в нашей Галактике звездотрясения также близки по своим распределениям к законам Гу-

тенберга – Рихтера, т.е. в соответствующих условиях эти законы действуют повсюду [5, 24, 25].

### 3. Энергетический спектр космических лучей

Теоретический вывод этого спектра около полувека ожидал своего появления, неясен был и сам механизм ускорения частиц космических лучей (КЛ) вплоть до ультрарелятивистских энергий  $10^{12}$  ГэВ. В монографии [26], во многом полезной и сейчас, есть фраза, что, может быть, для полного объяснения энергии КЛ и их спектра потребуются и какая-то новая физика. Э. Ферми ещё в 1949 г. высказал гипотезу о том, что ускорение может происходить на неоднородностях галактического магнитного поля. Но только в 2001 г. бывший аспирант Р.З. Сагдеева М. Мальков [27] объяснил, что это происходит на фронтах бесстолкновительных ударных волн. В 2014 г. были опубликованы результаты российско-европейского эксперимента ПАМЕЛА [28], в котором пятилетние измерения на спутнике Ресурс-5, работавшем с 2003 г., показали степенной характер спектра с показателем  $n = 2,67 \pm 0,02$ . На рисунке 3 приведён полученный по данным наземных измерений спектр [26] с показателем 2,7, или в интегральной (кумулятивной) форме  $n = 1,7$ , близкое к этому значению  $5/3$ .

В нашей Галактике два-три раза в столетие взрываются сверхновые звёзды, порождая КЛ, магнитные поля, турбулентность в межзвёздном газе и ударные волны. В экспериментальном определении спектра КЛ есть своя специфика: это число частиц, регистрируемых в определённом интервале энергий в единицу времени и на единицу площади. Это эквивалентно подводу энергии в Галактику с радиусом 50 тыс. световых лет и толщиной диска  $200 \text{ пк} = 6 \times 10^{18} \text{ м}$ . Энергия взрыва сверхновой  $10^{42} - 10^{43} \text{ Дж}$ , т.е. средний ввод мощности в систему  $G \approx 2 \times 10^{33} \text{ Вт}$ , и часть её идёт на ускорение КЛ. В [26]

приведена оценка объёмной плотности энергии КЛ  $w_0 \approx 0,5 \text{ эВ см}^{-3} \approx 10^{-13} \text{ Дж м}^{-3}$ . Полная энергия частиц КЛ в Галактике  $W \approx 10^{48} \text{ Дж}$ . Оценка времени жизни частиц будет  $\tau = W/G = 5 \times 10^{14} \text{ с} = 1,6 \times 10^7 \text{ лет}$ , а возраст Галактики порядка  $10^{10} \text{ лет}$ , и в ней сменилось порядка тысячи поколений частиц. Но эти частицы [26] закручиваются галактическим магнитным полем со средней напряжённостью  $H \approx 5 \times 10^{-6} \text{ Гс}$ . Плотность энергии этого поля  $H^2/8\pi \approx 10^{-13} \text{ Дж м}^{-3}$ , т.е. та же, что и для энергии КЛ, а за время своей жизни частицы успевают многократно ускориться на случайных ударных волнах, распространяющихся в межзвёздном газе после взрыва сверхновой.

Было сказано, что специфика КЛ состоит в том, что они измеряются на единицу площади. Эту единицу остаётся взять только из объёмной плотности энергии самих лучей. Как и для газа, будем считать, что эта плотность  $w_0 \sim nE$  (в газе  $E = kT$ ), а  $n$  — концентрация с размерностью  $\text{см}^{-3}$ . Тогда величину с размерностью площади  $S$  оцениваем в виде  $(w_0/E)^{2/3}$ . Концентрация по энергии [26]

$$n(\geq E) = \int_E^\infty n(E) dE = \frac{4\pi}{c} \int_E^\infty I(E) dE = \frac{4\pi}{c} I(\geq E) \quad (20)$$

— величина, пропорциональная интегральному спектру,  $c$  — скорость света. Далее проще определить по размерности интегральный спектр  $I(\geq E) = S^{-1}T^{-1}$ ,  $w_0 = ES^{-3/2}$ ,  $G = ET^{-1}$ ,  $[E] = E$ , здесь мы вместо массы используем размерность энергии, и, беря размерность времени из  $G/E$ , а площадь из  $(w_0/E)^{2/3}$ , получаем

$$I(\geq E) \sim c_1 \frac{G}{E} \left(\frac{w_0}{E}\right)^{2/3} \sim E^{-5/3}. \quad (21)$$

Спектр после колена определяется уже частицами, не удерживаемыми магнитным полем, т.е. для них генератором является спектр (21). Проводя те же процедуры, что и при выводе (21), получаем [29]

$$I(\geq E) = C_2 c^{-2/3} G^{5/3} w_0^{4/9} E^{-19/9} \sim E^{-19/9}, \quad (22)$$

а в [26] показатель спектра оценён в 2,1, в [28] в этих участках спектра измерений не производилось. У нас же  $19/9 = 2 + 1/9$ , т.е. разница в  $1/90$ .

Какова же связь с АНК34? Интегральный спектр  $I(\geq E)$  обратно пропорционален времени, и в этом его связь с первым моментом (2), но он ещё обратно пропорционален единице площади, на которой ведутся измерения. Такая нестандартность процедуры измерений и есть новый момент — не в физике, а в определении спектра, что и способствует появлению третьей в показателе спектра.

### 4. Морские ветровые волны

Волны на поверхности моря — одно из самых завораживающих природных явлений. И они прямое проявление АНК34, но это было открыто только в 1978 г. [10, 11]: Тоба установил, что средняя высота пика  $h$  пропорциональна его периоду в степени  $T^{3/2}$ . Квадрат такого соотношения есть третий инвариант АНК34:  $h^2 \sim T^3$ ! Сначала многие не понимали происхождение такого соотношения, пока не был выведен и проверен экспери-

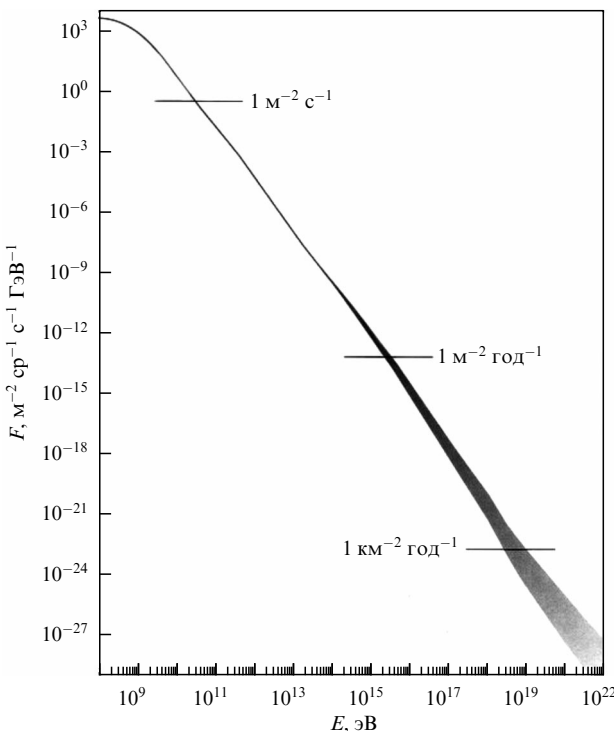
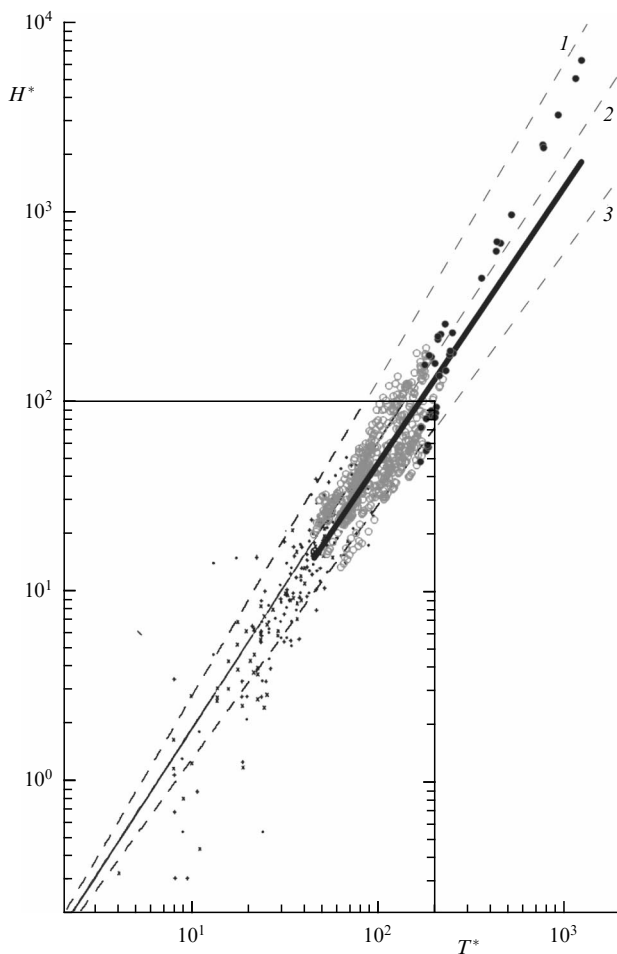


Рис. 3. Спектр энергии космических лучей, Википедия.



**Рис. 4.** Проверка статистического закона Тобы по данным для индивидуальных волн. 1 —  $H^* = 0,062T^{*(3/2)}$ , 2 —  $H^* = 0,062T^{*(5/3)}$ , 3 —  $H^* = 0,062T^{*(4/3)}$ . Чёрные крестики — результаты из работы [10]. Серые и чёрные кружки — данные, полученные на Горьковском водохранилище (серые кружки —  $\Omega = 1,5-3,5$ , чёрные кружки —  $\Omega = 0,3-0,8$ ), сплошная чёрная линия — аппроксимация  $H^* = 0,062T^{*(1,448 \pm 0,003)}$  (подробнее см. [33]).

ментально [11] частотный спектр волнения  $S_h(\omega) \sim \varepsilon\omega^{-4}$ , интегрирование которого и даёт соотношение Тобы. Но сейчас сам этот спектр является следствием третьего инварианта  $\langle x_i^2(t) \rangle = \varepsilon t^3$ . Если это рассматривать как структурную функцию [3], то её спектр и есть  $\varepsilon\omega^{-4}$ !

Ситуация на самом деле такова, что для ветрового волнения были давно установлены два параметра подобия, связанные с условиями волнения, действия которых были замечены ещё древними мореплавателями. Это возраст волнения [31, 32]

$$\Omega = \frac{U}{c_\phi},$$

где  $U$  — скорость ветра, его принято относить к 10 м над уровнем моря,  $c_\phi$  — фазовая скорость основного пика. На глубокой воде дисперсионное соотношение  $\omega^2 = kg$ , и там  $c_\phi = \omega(k)/k = (g/k)^{1/2}$ .

Второй параметр подобия — разгон волн, расстояние  $x$  до наветренного берега (fetch)  $F = gx/U^2$ . Отметим, что произведение  $\Omega F = \omega_p x/U = \omega_p T$ , где  $T$  — время воздействия ветра на волну. Давно замечено, что свежие волны более крутые, чем развитые, уже склонные к об-

рушению. Начало систематических теоретических исследований было положено около 60 лет назад К. Хассельманом, который вывел для них кинетические уравнения и организовал их экспериментальное исследование (в 2021 г. удостоен Нобелевской премии). С тех пор продолжают исследования законов разгона, конкретно, зависимостей [31]

$$\frac{Uf_r}{g} = AF^{-\alpha}, \quad \frac{g^2\varepsilon}{U^4} = BF^\beta, \quad \varepsilon = \frac{h_r^2}{16}, \quad (23)$$

где  $h_r$  — так называемая существенная высота волны, мера её кинетической энергии.

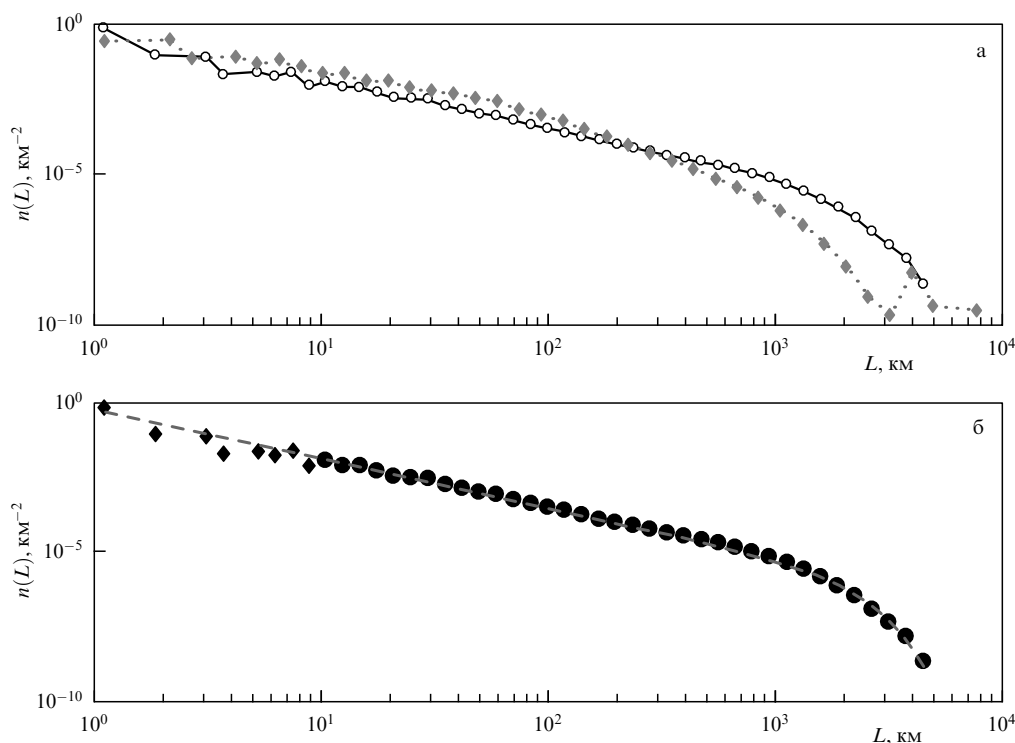
Измерения дают показатели  $\alpha$  в пределах от 0,23 до 0,33, а  $\beta$  — от 0,7 до 1,0. Значения этих показателей меньше, когда вода холоднее воздуха. Когда вода теплее, то в ней (и в воздухе) возникает конвекция. Всё это облегчает передачу моментов импульса и энергии ветра к воде. В целом этот процесс согласуется с АНК34, так что  $3\alpha \approx \beta$ . В наиболее длительных комплексных и продолжительных измерениях [32]  $\alpha = 0,33$  и  $\beta = 1,0$ . В [33] собраны многочисленные измерения закона Тобы  $h^2 \sim T^3$ , представленные на рис. 4, где штриховые кривые соответствуют показателям спектра, рассчитанным в [34], отличающимся на  $\pm 1/3$  от основного показателя  $-4$ , жирная линия  $-13/3$  для молодых волн с  $\Omega > 2$  и  $-11/3$  для возрастов  $1,2 > \Omega > 0,83$ , в промежутке  $-4$ , что соответствует не старым, но уже развитым волнам (ранее возрастом считалась обратная величина).

Возраст волн меняет как спектр волнения, так и диффузию загрязнений на водной поверхности. Оценённые и проверенные здесь показатели волнения изменяют как коэффициент вихревой диффузии, слегка уменьшая его, так и площадь загрязнения (см. [5, 43]). Поскольку здесь частотный спектр и дисперсионное уравнение другие, это и видоизменяет показатель в выражении для распространения площади пятен от времени [5].

### 5. Распределение вероятностей для облачных полей

Статистика размеров облачных полей — наиболее чёткое природное проявление теории турбулентности Колмогорова–Обухова 1941 г. Это стало ясно окончательно после подробного анализа результатов съёмки форм глобальной облачности со специального спутника США CloudSat [35]. Спектры горизонтальных линий  $n(L)$  длин отдельных облаков и безоблачных отрезков представлены на рис. 5. Эти длины аппроксимированы как  $n(L) = L^{-\beta} \exp[-(L/L_*)^2]$ , где  $\beta = -1,66 \pm 0,00\dots$  и  $L_* = 1850$  км. Облако — это конденсированные частицы водяного пара при необходимых величинах влажности и температуры. Обе величины считаются пассивными скалярами, переносимыми флуктуациями скорости [3]. Можно считать, что слабые отличия спектров для облаков и участков голубого неба возникают из-за нечёткости определения границ экспериментальных участков на небосводе. Такие же точно выводы были получены и для форм серебристых облаков — ледяных частиц на высотах 80–90 км [36]. Таким образом, и различные типы облаков — опять прямые следствия АНК34.

Около полувека назад Бенуа Мандельброт [37] ввёл понятие фрактала, статистической закономерности сте-



**Рис. 5.** Распределения горизонтальных линий  $n(L)$  для облаков и безоблачных отрезков, соответственно открытых кружков и серых следов (а); (б) серая линия —  $n(L) = L^{-\beta} \exp[-(L/L_*)^2]$ , где  $\beta = 1,66 \pm 0,00$  и  $L_* = 1850$  км.

пенного вида между двумя случайными закономерностями. Для характеристик облаков предложено [38] использовать связь между площадями  $A = R^2 = BP^\alpha$  и их периметром  $P = CR^\beta$ . Сорок лет назад было найдено, что  $\beta = 1,35$ . Там же было обращено внимание, что это число близко к  $4/3$  (отличие лишь на  $1/60$  [39]). Позже  $\beta = 1,35$  было найдено и для серебристых облаков [36], и в ряде численных расчётов (см. [39]). Объяснение  $4/3$  было дано в [39]. Нетрудно видеть, что из соотношений между площадью  $A$  и периметром  $P$  следует,

$$\frac{\alpha\beta}{2} = 1, \quad (24)$$

$$BC^\alpha = 1, \quad (25)$$

$$C = B^{-1/\alpha}, \quad (26)$$

и если  $\beta = 4/3$ , то  $\alpha = 3/2$ ,  $C = 0,15^{-2/3} = 3,7 \text{ км}^{-1/3}$ .

К сожалению, авторы многих регрессионных расчётов не дают, хотя бы со стандартной 95%-ной точностью, оценок неопределённостей показателей типа  $\alpha$  и  $\beta$ . Для оценок таких пределов мы [39] оцифровали 76 точек на рис. 1 из [38] и нашли, что  $\beta = 1,35 \pm 0,02$ . Величины  $B$  и  $C$  показывают арифметическое предфрактальное соотношение, что, к сожалению, также редко приводится в работах с анализом фракталов, а оно тоже несёт полезную информацию.

В [39] дан теоретический вывод для  $\beta = 4/3$  на основе соображений теории подобия и размерностей с использованием результатов АНК34. К сожалению, до сих пор из фундаментальных соображений не предложено выражения для удлинения линий в турбулентном потоке (см. [3]). Из соображений размерности в [39] предложено, что изменение длины по времени  $l_P(t) = [K_1(l, t) t]^{1/2}$  и что

длина  $l_A = [A(t)]^{1/2}$  растёт по параболическому закону, а периметр  $P(t)$  со временем  $\tau = (t^2/\varepsilon)^{1/3}$ , но с  $K_1(t)$ , т.е. из-за турбулентности. Далее мы сможем определить отношение  $K_1(t)/K_2$ , не вдаваясь в их отдельные значения. Отношение периметра к среднему радиусу будет параметром подобия:

$$\Pi = \frac{P}{\sqrt{A}} = \frac{B^{-1/\alpha} A^{1/\alpha}}{\sqrt{A}} = \left( \frac{K_1 \tau}{K_2 t_2} \right)^{1/2} = \left[ \left( \frac{a(R^2/\varepsilon)^{1/3}}{t_2} \right) \right]^{1/2}, \quad (27)$$

где  $a = K_1/K_2$  — отношение коэффициентов диффузии для периметра и для площади. Используя  $\alpha = 3/2$  и найденные выше соотношения с учётом предфрактальных величин  $B$  и  $C$  по результатам [38], получаем с достоверностью 95 %

$$\Pi = 3,54 A^{1/6} = CR^{1/3}, \quad (28)$$

что и иллюстрирует близость показателя  $\beta$  к  $4/3$ . Параметр подобия  $\Pi > 1$  — это отношение периметра облака к его среднему размеру. Для получения скорости диссипации  $\varepsilon$  воспользуемся результатом [40], что скорость генерации кинетической энергии атмосферы  $2,3 \text{ Вт м}^{-2}$ . При массе атмосферного столба  $M = 10^4 \text{ кг м}^{-2}$  получим  $\varepsilon^{-1/6} = 40,4 \text{ с}^{-1/2} \text{ км}^{-1/3}$ . Отсюда и из (27) получаем для параметра подобия  $\Pi$  для площадей  $A$  от  $10$  до  $10^6 \text{ км}^2$  значения от  $5,4$  до  $37,2$ , в среднем по глобусу. Подчеркнём, что основная гипотеза А.Н. Колмогорова — это марковость сил, т.е. ускорений, действующих в системе, и запись для распределений вероятностей компонент шестимерного вектора  $p(t, u_i, x_i)$  в виде уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова соответствует АНК34.

## 6. Ураганы и физические аналоги подобных вихрей

Эти образования также подчиняются законам АНК34, но с заданным основным периодом вращения и с заданным нижним граничным условием на поверхности раздела между океаном и атмосферой, которые не находятся в термодинамическом равновесии. 1990-е годы были объявлены ООН декадой борьбы с катастрофическими природными явлениями. Деятельностью этой декады руководил Международный научный комитет, председателем которого был известный английский учёный, член академий большинства ведущих стран, и нашей в том числе, сэр Джеймс Лайтхилл. В 1995 г. на одном из заседаний своего комитета он сказал, что мы до сих пор не понимаем, почему энергия урагана достигает энергии взрыва многих тысяч водородных бомб. В разделе 1 настоящей статьи это разъяснено на основе АНК34, но в 1997 г. я получил формулу (13) из соображений подобия и размерности, оценив порознь скорость и размер урагана.

Сила Кориолиса меняется с широтой, для широты  $\theta = 20^\circ$   $l_C = 5 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ , поток тепла от воды оценивается вместе с теплотой конденсации порядка  $1 \text{ кВт м}^{-2}$ , что даёт поток плавучести  $b \approx 0,03 \text{ м}^2 \text{ с}^{-3}$ . Ураганы наблюдаются и на полярных морях, когда холодный воздух с покрытых льдами широт с температурами  $T \leq -30^\circ \text{С}$  вторгается на воду с  $T \approx 0^\circ$ . В [5, 42, 43] приведены номограммы, отражающие *необходимые* условия возникновения интенсивных вихрей. При их построении учитывались условия испарения воды и последующей теплоотдачи из-за конденсации водяного пара, а также температурная изменчивость термодинамических параметров среды. Поскольку площадь вихря обратно пропорциональна  $l_C^3$ , полярные ураганы, называемые мезоциклонами, обычно в несколько раз меньше тропических, что реально и наблюдается [5, 16]. При этом обмен количествами движения, тепла и влаги описывается так называемыми балк-формулами. Эти полуэмпирические многократно уточняемые формулы все пропорциональны  $U_{10}$ , т.е. скорости ветра на высоте 10 м. Поскольку АНК34 позволяет оценить квадрат скорости из метеорологических данных, это даёт дополнительную оценку на размеры ураганов. Тропические ураганы развиваются за полсутки, полярные — за несколько часов, что и учитывалось при построении номограмм для необходимых условий развития вихрей, а стратификация атмосферы, важная для получения *достаточных* условий, учитывалась в среднем. Недостаточная точность измерений вертикальной структуры атмосферы по плотности со спутников будет ещё долго (если не всегда) тормозить развитие численного прогноза по спутниковым данным. Но если такой вихрь уже существует, то численные модели прогноза погоды могут прогнозировать его движение со всё возрастающей точностью.

Аналогично описываются и спиральные вихри на поверхности морей и океанов опять при более холодной атмосфере, которые видны при небольшом волнении [44]. Эти спиральные вихри не наблюдаются в полосе  $\pm 5^\circ$  от экватора. При остывании воды с поверхности в ней возникает конвекция с потоком плавучести  $b$  на пять порядков меньшим, чем в ураганах, поскольку материальные параметры для воды во много раз меньше, чем для воздуха. Это приводит к диаметру вихрей порядка

нескольких километров и скоростям в них  $\sim 5 \text{ см с}^{-1}$  [43, 45].

Во время Второй мировой войны наблюдались массовые пожары при бомбардировках Гамбурга, Дрездена и Хиросимы. Конвекция горячего воздуха с больших площадей пожара вызывает конвекцию воздушных масс из окружающей среды, что концентрирует угловой момент, порождая огненный смерч. Расчёты [46] показывают, что через несколько часов после начала модельного пожара циклонический вихрь достигает ураганной силы до  $70 \text{ м с}^{-1}$  (в соответствии с законами АНК34!).

Единообразие крупномасштабных процессов в природе очевидно и воодушевляет на их детальное исследование.

## 7. Статистическая структура рельефа поверхности небесных тел

Космические исследования выявили много новых закономерностей, остававшихся непонятыми физически в течение десятилетий. Сюда относится прежде всего правило Каулы [47, 48]. Было замечено, что флуктуации силы тяжести, а потом и рельефа, будучи разложены в пространственный спектр по сферическим гармоникам, начиная с номера  $n \geq 4$  убывают как  $n^{-2}$ . Позднее это же было найдено и для Луны, Марса, Венеры и для более мелких тел (см. [5, 50, 51]). Объяснение и смысл его были даны только в 2019 г. [5, 50, 51] и основываются на правилах АНК34, даже проще на простом уравнении Фоккера–Планка для плотности поля рельефа  $p(y, h)$ , где  $y$  — меридиональная координата,  $h$  — вертикальная.

Стандартная форма уравнения Фоккера–Планка имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial h^2}, \quad p = p(h(t), t), \quad (29)$$

где  $h(t)$  — случайная запись высотомера. При известной скорости полёта  $u$  время в записи трансформируется в горизонтальную координату  $y = ut$ , и тогда

$$\frac{\partial p}{\partial y} = D_1 \frac{\partial^2 p}{\partial h^2}, \quad D_1 = \frac{D}{u}, \quad (30)$$

второй момент которого имеет вид  $\langle h^2(y) \rangle = 2(D/u)y$ . Эта структурная функция имеет спектр

$$S(k) = \frac{D}{2\pi} k^{-2}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda_y}, \quad (31)$$

где  $\lambda_y$  — горизонтальная длина волны случайного рельефа. Это уравнение применимо к небольшим областям  $2 < y < 60 \text{ км}$  [5, 48]. По измерениям в штате Орегон для 24 пролётов в разных направлениях над горными, холмистыми и равнинными областями  $S(k) \sim k^{-n}$ , где  $n = 2,03 \pm 0,04$ .

Произведя все необходимые действия со сферическими гармониками [50, 51], для вертикальной компоненты рельефа получим

$$S_n = \frac{4\pi r D_1}{n(n+1)}, \quad (32)$$

где  $r$  — радиус небесного тела, т.е. гармоники убывают чуть быстрее, чем  $n^{-2}$ . В книге [48] приведено 180 сферических гармоник для Земли и 60 гармоник для Венеры в



логарифмических масштабах. Обработка гармоник в первом случае дала  $D_1 = 1,3 \pm 0,3$  м, а во втором —  $D_1 = 0,2 \pm 0,03$  м с точностью порядка 20%. У Венеры в 65 раз более плотная атмосфера, поэтому эрозионные процессы там более интенсивные, чем у нас, так что рельеф там выражен на порядок меньше.

С пространственным спектром рельефа, пропорциональным  $k^{-2}$ , связаны и другие особенности поверхности, видоизменённые иными процессами эрозии, определяемыми климатом, в первую очередь осадками, испарениями, структурой почв и др. Поэтому кумулятивное распределение числа рек по длине  $l$  пропорционально  $N(\geq l) \sim l^{-n}$ , где  $n = 1,9$ , а для озёр по площадям  $S$  имеем  $N(\geq S) \propto S^{-n}$  с  $n = 0,95$  (см. [4, 46]). Равенство показателей в кумулятивных распределениях длин рек и среднего линейного размера озёр говорит об однозначной роли рельефа. Небольшое отклонение  $n$  от 1 или 2 говорит о роли крупномасштабных процессов эрозий, формирующих рельеф чисто случайным марковским образом.

Небесные тела — конечные сферы, и их спектральные гармоники дискретны. Соответствующий анализ с использованием присоединённых полиномов Лежандра выполнен в [49–51]. Производная рельефа по углу, т.е. склон  $g \cos \theta$ , и является марковской случайной переменной. По склону течёт вода, сыплются куски породы, он сопротивляется ветру, т.е. является рельефообразующим фактором. После выполнения всех необходимых действий получаем выражение для сферической гармоники в виде [50]

$$S_n = \frac{\alpha^2}{n(n+1)}, \quad E_n = 2\pi r^2 \sum_{n=1}^{\infty} S_n, \quad (33)$$

где  $\alpha^2$  — средний квадрат случайного угла.

## 8. Распределение по размерам для водоёмов и ущерб от наводнений

Когда я был директором Института физики атмосферы (1990–2008 гг.), мои научные мысли были далеки от гидрологии. Но в 1998 г. я заметил рисунок числа величин ущерба  $Y$  от наводнений (рис. 6):

$$N(\geq Y) \sim Y^{-n}, \quad n = 0,65;$$

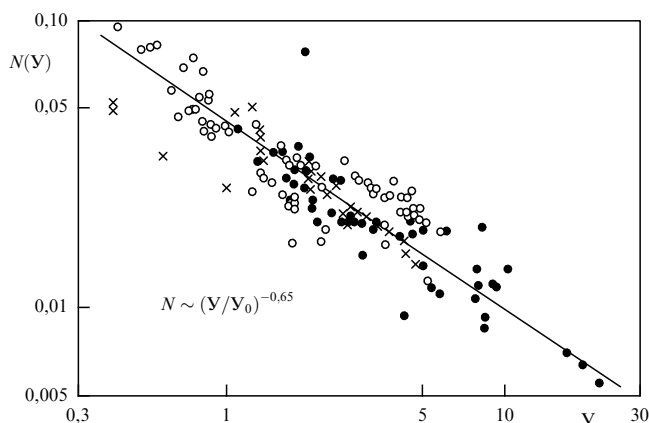


Рис. 6. Кумулятивное распределение числа наводнений в зависимости от нанесённого ими ущерба [53].

без указаний пределов по  $n$ , на глаз они составляют  $\pm 0,03$ . Около 20 лет я помнил о нём, и что 0,65 близко к  $2/3$ . После 2008 г. я оставался ещё профессором по теории климата в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова (МГУ) и Московском физико-техническом институте (МФТИ) и начал писать книгу [52] по этим вопросам.

Ущерб оценивается по площади затопления, зависящей от рельефа, а случайной величиной является объём осадков

$$V = p\tau S, \quad (34)$$

где  $p$  — средняя интенсивность осадков за время их выпадения  $\tau$  над речным водосбором площадью  $S$ . Тогда наша формула (34) даёт, что кумулятивное распределение осадков по объёму (см. раздел 1)

$$N(\geq V) \sim AV^{-1},$$

где  $A$  — величина с размерностью  $V/T$ . Будем считать ущерб  $Y = \alpha V$  пропорциональным объёму осадков, где  $[\alpha] = YV^{-1}$ ,  $Y$  — размерность ущерба, например, в деньгах. Площадь затопления  $S_y = h\beta^{-1}L$ , где  $h = h(V)$  — средняя глубина затопления,  $\beta$  — средний угол бокового склона долины реки,  $L \sim h/\beta_1$  — длина затопляемой долины, где  $\beta_1$  — коэффициент уклона для стока реки.

Удельный ущерб на единицу площади будет  $y = \alpha_1 h$ , где  $[\alpha_1] = YL^{-3}$ . Теперь объём затапливаемой местности воды будет

$$V = hS_y = \frac{yS_y}{\alpha_1} = \frac{Y}{\alpha_1},$$

и в итоге  $V \sim hS_y = \alpha_1 h^3/\beta\beta_1$ . Площадь и ущерб определяются геоморфологическим параметром  $\beta\beta_1$ , зависящим от конкретных условий и служащим естественным параметром подобия, заданным внешними условиями. Этот параметр

$$\Pi = (\beta\beta_1)^{-1/3} = h^{-1} \left( \frac{Y}{\alpha_1} \right)^{1/3}. \quad (35)$$

Перепишем эмпирику в общем виде:

$$N(\geq Y) = c(\Pi)\alpha Y^{-1}, \quad (36)$$

где для численного коэффициента  $c$  оказывается возможной зависимость от безразмерного параметра подобия. Учитывая лишь первый линейный член в разложении  $c(\Pi) \sim \Pi$ , получим  $\Pi(Y) \sim Y^{1/3}$  в хорошем соответствии с эмпирикой (36).

Этот вывод с дополнительными подробностями изложен в [54]. Там же приведены данные о статистике "мутневых грибов", площадей морской поверхности, занятых мутными речными стоками: площади этих грибов  $P \sim A^b$ ,  $b = 0,6–0,7$ , а число грибов в зависимости от их площадей распределено как  $N(\geq P) \sim P^{-\beta}$ ,  $\beta = 1,02 \pm 0,03$ . Таким образом, все представленные результаты определяются соотношениями между площадями водосборов  $A$  с площадью затопления  $P$  и объёмом осадков  $V$  на них. Напоминаю, что  $[S] = [V]^{2/3}$  по размерности, т.е. действует нижняя плёнка от объёма осадков.

## 9. Обсуждение результатов и заключение о роли АНКЗ4

Напомним, что теория АНКЗ4 описывает *случайные движения*, а не *случайные блуждания*, как обычное уравнение Фоккера–Планка. Перечислим основные моменты АНКЗ4 при марковском характере ускорений:

1. Пропорциональность времени среднего квадрата скорости, т.е. энергии на единицу массы в случайных процессах. Первым на такое соотношение указал Л.Д. Ландау в 1944 г. в *Механике сплошных сред*, 1-е изд. Отсюда следует и статистика потока случайных событий в виде кумулятивных распределений  $N(\geq E) = C\varepsilon/E$ , где  $\varepsilon$  — мера возбуждения процесса,  $C$  — безразмерный коэффициент, который может зависеть от безразмерных параметров подобия, действующих в системе [7]. Таково распределение городов по числу населения, камней по весу на поверхности Марса, спектр рельефа небесных тел (см. раздел 7 и [5]). Таков закон повторяемости землетрясений с двумя участками своего спектра (см. раздел 3 и [5]).

2. Пропорциональность среднего квадрата расстояния между случайными событиями кубу времени, т.е. пропорциональность структурной функции  $t^3$ , поэтому соответствующий частотный спектр  $\omega^{-4}$ , что соответствует основной части спектра морского волнения и соотношению Тобы [10] между квадратом высоты пика морского ветрового волнения и его периодом  $h^2 \sim T^3$ , последнее — просто соотношение (3).

3. Для земных ураганов это объясняет, почему их энергия порядка энергии взрывов тысяч мегатонных бомб. Формула (12) содержит произведение первого и второго момента АНКЗ4 с умножением на массу воздуха при замене времени на выражение, получаемое из параметра Кориолиса  $l_C = (4\pi/T) \sin \theta$ , где  $\theta$  — широта. Поскольку действует  $l_C^{-4}$ , то полярные ураганы (мезоциклоны) в несколько раз меньше тропических.

4. Кумулятивное распределение объектов по площадям имеет размерность обратного времени, поэтому согласно (3)  $N(\geq S) = C(\varepsilon/S)^{-1/3}$ , и литосферные плиты эмпирически распределены с показателем 0,33 [12]. Так же распределены по массам и спиральные галактики [5], что можно понять в предположении, что их массы пропорциональны их площадям.

5. Системы способны обладать собственными параметрами подобия, которые могут изменять режимы автомодельности исследуемых процессов, что надо всегда иметь в виду [7], и здесь появляется понятие промежуточных асимптотик [7–9].

6. Существование автомодельной формы уравнения (1), основы АНКЗ4, открывает путь к его использованию и для описания других вероятностных процессов.

Всё это иллюстрирует мысль, что в больших размерах мироздание стремится устроиться по общим законам. К книге [5] даны два эпитафа. Первый принадлежит Гиббсу: "Цель науки — найти точку зрения, с которой проблема может быть решена наиболее просто и естественно". Можно сказать, что АНКЗ4, дополненная теорией подобия и размерности, может решить целый круг проблем и отвечает цели Гиббса. Второй эпитаф принадлежит А.Н. Колмогорову (согласно [7]) и был высказан около полувека тому назад: "Случайность — необходимый, если не важнейший элемент мироздания, но в ней есть определённый порядок, ведущий к конкрет-

ным, часто устойчивым структурам. Устойчивость ограничена во времени и в пространстве, которые свои в конкретных условиях". Этот порядок проявляется в асимптотиках моментов распределений. Таким образом, АНКЗ4 с дополнениями теории подобия иллюстрирует оба эпитафа.

**Дополнение при корректуре.** Та же методика, что и представленная выше, позволяет вычислить и форсинг для торнадо и смерчей, и их разрушительную силу. В статье [55] использованы данные для зарегистрированных и количественно описанных 164 вихрей в РФ за 2001–2021 гг. В описании даётся линейный размер у поверхности  $2R$  в метрах. Вихри с вертикальной осью цилиндрически симметричны, поэтому знание диаметра даёт его площадь  $S = \pi R^2$ . Их скорости оцениваются индексом Фуджиты,  $F0, \dots, F4$ , относящимся к интервалу скоростей от 18–32, ..., 93–116 м с<sup>-1</sup>. Для скоростей берутся средние значения. Тогда для оценки форсинга  $\varepsilon = \bar{u}^2/t = \bar{u}^3/S^{1/2}$ , где  $t = (\bar{u}^2/S)^{1/2}$ . Разрушения в сельской местности происходят в нижних слоях атмосферы, примерно 10 м (в лесах до 30 м), и тогда энергия вихря в нижних (10 м) слоях атмосферы при площади 100 м<sup>2</sup> будет в пределах от  $4 \times 10^7$  до  $1,1 \times 10^{11}$  Дж, а разрушительная энергия для дома объёмом 10<sup>3</sup> м<sup>3</sup> будет в единицах тротилового эквивалента от 10 кг до 26,4 т, что уже не так далеко от снарядов для атомных пушек.

### Благодарности

В заключение хочу сказать, что я благодарен моим учителям, а потом и коллегам, которые учили меня работать и обсуждать результаты. В первую очередь я благодарен академику А.М. Обухову (директору созданного им в 1956 г. Института физики атмосферы, ныне носящего его имя), который, принимая меня в свой институт 1 февраля 1958 г., сказал, что хотел бы видеть меня геофизиком широкого профиля. Благодарен я и старшим коллегам: А.С. Монину, А.М. Яглому, Г.И. Баренблатту, учившим меня, как надо делать науку и анализировать результаты. Я благодарен также десяткам других моих коллег как из России, так и из многих других стран.

### Список литературы

1. Kolmogoroff A *Ann. Math.* **35** 116 (1934)\*
2. Obukhov A M, in *Advances in Geophysics* Vol. 6 (Eds H E Landsberg, Van Miegheem) (New York: Academic Press, 1959) p. 113, [https://doi.org/10.1016/S0065-2687\(08\)60098-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2687(08)60098-9)
3. Монин А С, Яглом А М *Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности* Т. 2 (М.: Наука, 1967); Пер. на англ. яз.: Monin A S, Yaglom A M *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence* Vol. 2 (Cambridge, MA: MIT Press, 1975)
4. Голицын Г С *Метеорология и гидрология* (3) 5 (2018); Golitsyn G S *Russ. Meteorol. Hydrol.* **43** 135 (2018)
5. Голицын Г С *Вероятностные структуры макромира: землетрясения, ураганы, наводнения* (М.: Физматлит, 2022)
6. Гледзер Е Б, Голицын Г С *Докл. РАН* **433** 466 (2010); Gledzer E B, Golitsyn G S *Dokl. Phys.* **55** 369 (2010)
7. Баренблатт Г И *Автомодельные явления — анализ размерностей и скейлинг* (Долгопрудный: Интеллект, 2009); Barenblatt G I *Scaling* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003) <https://doi.org/10.1017/CBO9780511814921>

\* Перевод на русский язык трудов А.Н. Колмогорова см. во многих изданиях с 1983 г.

8. Баренблатт Г И, Зельдович Я Б *Успехи математических наук* **26** (2) 115 (1971); Barenblatt G I, Zel'dovich Ya B *Russ. Math. Surv.* **26** (2) 45 (1971)
9. Barenblatt G I, Zeldovich Ya B *Annu. Rev. Fluid Mech.* **4** 285 (1972)
10. Toba Y J. *Phys. Oceanogr.* **8** 494 (1978)
11. Toba Y J. *Oceanogr. Soc. Jpn.* **29** (3) 209 (1973)
12. Bird P *Geochem. Geophys. Geosyst.* **4** (3) 1027 (2003)
13. Golitsyn G S *Russ. J. Earth Sci.* **17** ES5001 (2017) <http://dx.doi.org/10.2205/2017ES000607>
14. Emanuel K A *Annu. Rev. Earth Planet Sci.* **31** 75 (2003)
15. Голицын Г С *Докл. РАН* **354** 535 (1997); Golitsyn G S *Dokl. Earth Sci.* **354** 633 (1997)
16. Rasmussen E A, Turner J (Eds) *Polar Lows: Mesoscale Weather Systems in Polar Regions* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003)
17. Голицын Г С *Докл. РАН* **346** 536 (1996); Golitsyn G S *Dokl. Earth Sci.* **346** 166 (1996)
18. Kasahara K *Mechanics of Earthquakes* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981)
19. Schubert G, Turcotte D L, Olson P *Mantle Convection in the Earth and Planets* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001) <https://doi.org/10.1017/CBO9780511612879>
20. Golitsyn G S *Comput. Seismol.* (32) 138 (2001)
21. Смирнов В Б, Исполинова С И *Докл. РАН* **342** 809 (1995)
22. Volant P, Grasso J-R J. *Geophys. Res.* **99** 21879 (1994)
23. Николаев А В, Галкин И Н (Отв. ред.) *Наведенная сейсмичность: государственная научно-техническая программа России "Глобальные изменения природной среды и климата"* (М.: Наука, 1994)
24. Cheng B et al. *Nature* **382** 518 (1996)
25. Голицын Г С *Письма в Астрон. журн.* **24** 827 (1998); Golitsyn G S *Astron. Lett.* **24** 716 (1998)
26. Березинский В С и др. *Астрофизика космических лучей* (Под ред. В Л Гинзбурга) 2-е изд. (М.: Физматлит, 1990); Пер. на англ. яз.: Berezinskii V S et al. *Astrophysics of Cosmic Rays* (Ed. V L Ginzburg) (Amsterdam: North-Holland, 1990)
27. Malkov M A, Diamond P H *Phys. Plasmas* **8** 2401 (2001)
28. Карелин А В и др. *ЖЭТФ* **146** 513 (2014); Karelin A V et al. *J. Exp. Theor. Phys.* **119** 448 (2014)
29. Голицын Г С *Письма в Астрон. журн.* **31** 500 (2005); Golitsyn G S *Astron. Lett.* **31** 446 (2005)
30. Голицын Г С *УФН* **178** 753 (2008); Golitsyn G S *Phys. Usp.* **51** 723 (2008)
31. Komen G J et al. *Dynamics and Modelling of Ocean Waves* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994)
32. Hasselmann K et al. *Ergänzung Deutsch. Hydrogr. Z.* **A 8** (12) 1 (1973)
33. Голицын Г С, Троицкая Ю И, Байдаков Г А *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **57** (1) 67 (2021); Golitsyn G S, Troitskaya Yu I, Baydakov G A *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **57** 60 (2021)
34. Gagnaire E, Benoit M, Badulin S I J. *Fluid Mech.* **669** 178 (2011)
35. Guillaume A et al. *J. Atmos. Sci.* **75** 2187 (2018)
36. von Savigny C et al. *Geophys. Res. Lett.* **38** L02806 (2011) <https://doi.org/10.1029/2010GL045834>
37. Mandelbrot B *Fractals, Form, Chance and Dimension* (San Francisco: W.H. Freeman and Co., 1977)
38. Lovejoy S *Science* **216** 185 (1982)
39. Голицын Г С, Чхетиани О Г, Вазаева Н В *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **59** 242 (2023)
40. Oort A H *Mon. Weather Rev.* **92** (11) 483 (1964)
41. Голицын Г С *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **44** 579 (2008); Golitsyn G S *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **44** 537 (2008)
42. Golitsyn G S *Adv. Atmos. Sci.* **26** 585 (2009)
43. Голицын Г С *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **48** 391 (2012); Golitsyn G S *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **48** 350 (2012)
44. Munk W et al. *Proc. R. Soc. Lond. A* **456** 1217 (2000)
45. Митягина М И, Лаврова О Ю *Исследование Земли из космоса* (5) 72 (2009)
46. Андрианов С А и др. *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **39** (1) 3 (2003); Andrianov S A et al. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **39** 1 (2003)
47. Kaula W M *Theory of Satellite Geodesy; Applications of Satellites to Geodesy* (Waltham, MA: Blaisdell Publ. Co., 1966)
48. Turcotte D L *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics* 2nd ed. (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997)
49. Rexer M, Hirt C *Surv. Geophys.* **36** 803 (2015)
50. Gledzer E B, Golitsyn G S *Russ. J. Earth Sci.* **19** ES6007 (2019)
51. Гледзер Е Б, Голицын Г С *Докл. РАН* **485** 391 (2019); Gledzer E B, Golitsyn G S *Dokl. Earth Sci.* **485** 391 (2019)
52. Голицын Г С *Статистика и динамика природных процессов и явлений* (Синергетика: от прошлого к будущему, № 68) (М.: КРАСАНД, 2012)
53. Smith K, Ward R *Floods: Physical Processes and Human Impacts* (Chichester: Wiley, 1998)
54. Голицын Г С *Водные ресурсы* **45** (4) 380 (2018); Golitsyn G S *Water Resources* **45** 503 (2018)
55. Голицын Г С, Чернокульский А В, Вазаева Н В *Докл. РАН* **513** 134 (2023); Golitsyn G S, Chernokulsky A V, Vazaeva N V *Dokl. Earth Sci.* (2023) <https://doi.org/10.1134/S1028334X23601554>

### A.N. Kolmogorov's 1934 paper is the basis for explaining the statistics of natural phenomena of the macrocosm

G.S. Golitsyn. A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Puzhevskii per. 3, 109017 Moscow, Russian Federation. E-mail: gsg@ifaran.ru

The 1934 paper by A.N. Kolmogorov [1], "Random Motions," hereinafter ANK34, uses a Fokker–Planck-type equation for a 6-dimensional vector with a total rather than a partial derivative with respect to time, and with a Laplacian in the space of velocities. The diffusion coefficient in this case is  $\epsilon$ , the rate of energy generation/dissipation. The equation is obtained by specifying the accelerations of the particles of the ensemble by Markov processes, i.e., random processes  $\delta$ -correlated in time and with each other. The fundamental solution of this equation was already indicated in [1] and was used by A M Obukhov [2] in 1958 to describe a turbulent flow in the inertial interval [3]. It was only recently [4, 5] noticed that the Fokker–Planck-type equation written by Kolmogorov in [1] contains a description of the statistics of other random natural processes, earthquakes, sea waves, and others [5]. This equation, by a change of variables with scales for velocities and for coordinates, is reduced to a self-similar form that does not explicitly contain the diffusion coefficient [6]. Numerical calculations confirm the presence of such scales in systems with the number  $N$  of events, in ensembles starting from  $N = 10$ . For  $N = 100$ , these scales almost exactly coincide with the ANK34 theory. This theory, in principle, containing the results of 1941, paved the way for more complex random systems with enough parameters to form an external similarity parameter. This leads to a change in the characteristics of a random process, for example, to a change in the slope of the time spectrum, as in the case of earthquakes and in a number of other processes (sea waves, cosmic ray energy spectrum, inundation zones during floods, etc.). A review of specific random processes studied experimentally provides a methodology for how to proceed when comparing experimental data with the ANK34 theory. Thus, empirical data illustrate the validity of the fundamental laws of probability theory. The article is an abridged version of the author's monograph [5], where for the first time the ideas of ANK34 were used to explain in a probabilistic sense many experimental patterns that have been considered by pure empiricism for decades.

**Keywords:** random motions, Fokker–Planck–Kolmogorov equation, second moments of probability distribution for coordinates and velocities, theory of similarity and dimensions, statistical laws of nature

PACS numbers: **05.40.–a, 91.30.–f, 92.60.–e**

Bibliography — 55 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **194** (1) 86–96 (2024)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2023.05.039355>

Received 16 February 2023

*Physics–Uspekhi* **67** (1) (2024)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2023.05.039355>