

О разложении эффективного радиуса в многоканальной системе и молекулярности околопорогового резонанса

А.В. Нефедьев

Обсуждается разложение эффективного радиуса в двухканальной системе и извлечение информации о природе околопорогового адронного резонанса с помощью параметров, полученных из подгонки экспериментальных данных. В частности, рассмотрена ситуация двух близколежащих сильных порогов и связанного с ними адронного резонанса, располагающегося около нижнего порога. Для случая связанного состояния получены простые выражения, позволяющие оценить вероятность обнаружения такого резонанса в каждом из адронных каналов, а также в виде компактного кваркового состояния, если такая компонента присутствует в его волновой функции.

Ключевые слова: экзотические адроны, околопороговый резонанс, разложение эффективного радиуса

PACS numbers: 11.55.Bq, 14.40.Pq, 14.40.Rt

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2022.07.039225>

Содержание

1. Введение (77).
 2. Метод Вайнберга и его обобщения (78).
 3. Двухканальная система: формула Флатте и эффективный радиус (79).
 4. Низкоэнергетическое разложение в многоканальной системе (80).
 5. Обсуждение (84).
 6. Заключение (85).
- Список литературы (85).

1. Введение

Последние два десятилетия ознаменовались появлением большого объёма экспериментальных данных по так называемым экзотическим адронам, т.е. сильно взаимодействующим состояниям, кварковый состав которых отличен от кварк-антикварковой пары в мезоне или трёх кварков в барионе. Возможность существования многокварковых состояний (например, компактных тетракварков) была предсказана ещё на ранних этапах становления квантовой хромодинамики как теории сильных взаимодействий [1, 2]. Более того, неабелев характер сильных взаимодействий означает возможность включения в состав адронов в качестве конститuentов также и глюонов, что делает возможным существование как адронов, составленных одновременно из кварков и глюонов (например, гибридных мезонов), так и чисто глюонных состояний (глюоболов). До сих пор не получено надёжных экспериментальных указаний на существование таких адронов в природе, хотя имеется некоторое

количество кандидатов. При этом соответствующие теоретические предсказания широко представлены в литературе, и физическая программа любого эксперимента в области физики высоких энергий обязательно включает предложения по поиску таких состояний. Отличительной особенностью указанных адронов является то, что за их образование отвечают силы конфайнмента, так что сами такие состояния имеют достаточно малый размер, т.е. являются компактными.

Между тем недавний существенный прогресс в экспериментальных исследованиях в области адронов, содержащих тяжёлые (очарованный и прелестный) кварки, позволил подняться по энергии выше порога рождения открытого аромата, т.е. достичь энергии, при которой становится энергетически разрешённым распад мезона, состоящего из тяжёлого кварка и отвечающего ему антикварка (т.е. чармония или боттомония), на пару тяжёло-лёгких мезонов за счёт рождения из вакуума лёгкой кварк-антикварковой пары (обзор экспериментальных результатов по измерению инклюзивного сечения e^+e^- -аннигиляции в адроны можно найти в работе [3]). Расположение адронного состояния в спектре вблизи такого порога оказывает сильное влияние на его свойства — в отсутствие физических причин, препятствующих распаду адрона по соответствующему сильному каналу, пренебрегать вероятностью такого перехода нельзя, так что достоверность наивных расчётов, основанных на кварковой модели, оказывается под вопросом.

И действительно, первое же состояние — $X(3872)$, обнаруженное в 2003 г. коллаборацией Belle в спектре чармония выше порога рождения открытого чарма, продемонстрировало свойства, идущие вразрез с предсказаниями кварковой модели [4]. Необычайно близкое (в пределах примерно 200 кэВ) расположение $X(3872)$ к двухчастичному порогу $D^0\bar{D}^{*0}$ указывает на большую вероятность обнаружения этого адронного состояния именно в виде данной мезонной пары, что обусловило привлечение молекулярной модели для описания свойств $X(3872)$ (см., например, обзор [5] и содержащиеся в нём

А.В. Нефедьев

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: nefediev@lebedev.ru

Статья поступила 30 марта 2022 г.,
после доработки 27 июня 2022 г.

ссылки, а также обзор молекулярной модели применительно к экзотическим адронам в спектре тяжёлых кварков [6]).

За неполные 20 лет, прошедшие с момента первого наблюдения $X(3872)$, счёт обнаруженным экзотическим адронным состояниям в спектре чармония и боттомония идёт уже на десятки (см. обзор [7]). Активный набор данных ведёт эксперимент Belle II [8, 9]. Кроме того, работа планируемых в ближайшем будущем Супер чарм-тау фабрик [10, 11] позволит накопить огромный объём экспериментальной информации по экзотическим околопороговым состояниям. Всё это делает задачу построения единообразного теоретического подхода к описанию таких состояний весьма актуальной. В первую очередь такой подход должен обеспечить возможность извлечения из совокупности экспериментальных данных всей содержащейся в них информации об исследуемом резонансе.

2. Метод Вайнберга и его обобщения

Поскольку вблизи двухчастичного порога динамика конститuentов молекулы является нерелятивистской, одним из наиболее часто используемых подходов к описанию формы линии околопорогового резонанса служит низкоэнергетическое разложение амплитуды процесса в околопороговой области и извлечение соответствующих параметров разложения (длины рассеяния a и эффективного радиуса r) из подгонки к данным. В частности, во многих случаях успешное описание данных достигается при использовании распределения Флатте [12]

$$F(E) = \frac{(1/2)g}{E - E_f + (i/2)gk} = -\left(\frac{2(E_f - E)}{g} - ik\right)^{-1} = -\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2}rk^2 - ik\right)^{-1}, \quad (1)$$

где E — энергия системы, E_f — параметр распределения, имеющий размерность энергии, а g — константа связи с адронным каналом, в котором конститuentы имеют импульс k и угловой момент $l = 0$ (S -волновой порог). Данное распределение можно рассматривать в качестве обобщения нерелятивистского распределения Брейта – Вигнера, в котором учтена явная зависимость ширины от энергии, возникающая за счёт близкорасположенного порога S -волнового канала, силу связи с которым определяет величина константы g . В частности, учёт явной зависимости импульса $k \propto \sqrt{E}$ от энергии делает возможным исследование различных пороговых явлений. Кроме того, нетрудно видеть, что лидирующую зависимость от энергии вблизи порога обеспечивает именно унитарный член ik в знаменателе.

Способ извлечения информации о природе изучаемого адронного состояния, закодированной в параметрах низкоэнергетического разложения амплитуды, был предложен в пионерской работе Вайнберга [13] — извлечённые из данных значения длины рассеяния a и эффективного радиуса r дейтрона использовались для определения величины его Z -фактора, интерпретированного как вероятность обнаружения дейтрона (связанного состояния протона и нейтрона с энергией связи E_B) в виде элементарной частицы:

$$a = \frac{2(1-Z)}{2-Z} \frac{1}{\kappa_B} + \dots, \quad r = -\frac{Z}{1-Z} \frac{1}{\kappa_B} + \dots, \quad (2)$$

где $\kappa_B = \sqrt{2\mu E_B}$ — импульс связанного состояния, а через μ обозначена приведённая масса конститuentов. Многоточием заменены поправки, подавленные малым отношением

$$\frac{\kappa_B}{\Lambda} \ll 1, \quad (3)$$

где Λ — обратный радиус действия сил. "Неэлементарность" (т.е. "молекулярность") дейтрона означает, что значение Z близко к нулю, так что длина рассеяния имеет естественный порядок величины $a \sim 1/\kappa_B$, тогда как лидирующий вклад в эффективный радиус оказывается малым, поэтому ни его величину, ни даже его знак нельзя установить модельно независимым образом, поскольку они определяются поправками по отношению (3). При этом возникает весьма характерная картина полюсов амплитуды в околопороговой области, поскольку в пренебрежении малым членом эффективного радиуса уравнение, определяющее положение нулей знаменателя амплитуды (см. формулу (1)), становится линейным по импульсу и содержит лишь один околопороговый полюс при $k = i\kappa_B$, отвечающий связанному состоянию в системе протона и нейтрона.

Поскольку метод Вайнберга, с одной стороны, является весьма полезным приёмом установления природы околопорогового состояния, но, с другой стороны, не может непосредственно применяться к системам, содержащим нестабильные конститuentы, или в отсутствие связанного состояния, в литературе можно обнаружить большое число попыток обобщения данного метода. Так, например, для обнаружения элементарного состояния в непрерывном спектре в работе [14] предложена так называемая спектральная плотность, содержащая ту же информацию о молекулярности околопорогового резонанса, что и Z -фактор Вайнберга, но при этом допускающая обобщение на случай нестабильных конститuentов и природы резонанса, отличной от связанного состояния. Метод определения природы резонанса по количеству отвечающих ему околопороговых полюсов в комплексной плоскости импульса предложен в работе [15]. Учёт вклада поправок за счёт конечного радиуса действия сил обсуждается, например, в недавних работах [16, 17].

В работе [18] предпринята попытка извлечь из соотношений (2) информацию, допускающую простое непосредственное обобщение со связанного состояния на виртуальные уровни и резонансы. В частности, из выражений для длины рассеяния и эффективного радиуса (2) был исключён импульс связанного состояния κ_B , что позволило выразить величину молекулярности состояния, определённую как $X = 1 - Z$, в виде

$$X = \left(1 + \left|\frac{2r}{a}\right|\right)^{-1/2}, \quad (4)$$

где использование модуля авторы мотивировали необходимостью гладкого перехода от связанного состояния к виртуальному уровню, для которых знаки длины рассеяния различаются. Из формулы (4) видно, что малое отношение r/a обеспечивает $X \simeq 1$, что может интерпретироваться как молекулярная природа исследуемого состояния.

Таким образом, извлечение из подгонки к данным параметров низкоэнергетического разложения амплитуды и дальнейшее их использование для установления

природы изучаемого резонанса представляется относительно простым, однако весьма многообещающим феноменологическим подходом, применяемым как теоретическими группами, так и экспериментальными коллаборациями (см., например, недавние работы [19, 20] по извлечению из данных параметров тетракваркового состояния T_{cc}^+ , обнаруженного коллаборацией LHCb [21] в процессах рождения чарма в протон-протонных соударениях).

3. Двухканальная система: формула Флатте и эффективный радиус

Интерпретация околопорогового состояния X(3872) как молекулярного была подвергнута критике в недавней работе [22]. Причиной критики стало большое по модулю (порядка нескольких ферми) и отрицательное по знаку значение эффективного радиуса, извлечённое из подгонок к данным по X(3872). В частности, утверждалось, что даже с учётом поправок за счёт конечного радиуса действия сил (в данном случае роль Δ играет масса пиона m_π) величина эффективного радиуса не может быть сделана положительной, как это требуется для молекулярного состояния, исходя из общих квантово-механических соображений [23, 24]. Соответственно был сделан вывод о несовместимости данных с молекулярной картиной X(3872) и о неизбежном наличии в его волновой функции компактной компоненты¹. Анализ и выводы работы [22] были подвергнуты критике в статье [25] по ряду пунктов, главным из которых является некорректное извлечение эффективного радиуса из низкоэнергетического разложения амплитуды рассеяния в рассматриваемой двухканальной задаче. Действительно, поскольку нейтральный и заряженный каналы $D\bar{D}^*$ разнесены всего на $\Delta \approx 8$ МэВ [26], то реалистическая модель X(3872) должна учитывать вклады обоих каналов.

Простейшее обобщение распределения (1) на двухканальный случай имеет вид

$$F(E) = \frac{(1/2)g}{E - E_f + (i/2)g(k_1 + k_2)}, \quad (5)$$

так что унитарный член теперь содержит два вклада: ik_1 и ik_2 , где k_1 и k_2 — импульсы в нейтральном и заряженном каналах $D\bar{D}^*$ соответственно. При фиксированной полной энергии E системы $D\bar{D}^*$ имеем

$$E = \frac{k_1^2}{2\mu} = \frac{k_2^2}{2\mu} + \Delta, \quad (6)$$

где разность масс заряженных и нейтральных D-мезонов учтена в величине Δ , однако отброшена в соответствующих приведённых массах μ_1 и μ_2 , так что в последней формуле (а также в дальнейшем) положено $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Тогда, исключив энергию из соотношений в формуле (6), нетрудно найти, что

$$k_2 = i\sqrt{2\mu\Delta - k_1^2} \approx i\sqrt{2\mu\Delta} - i\frac{k_1^2}{2\sqrt{2\mu\Delta}} + \dots, \quad (7)$$

где импульс k_2 во втором канале был разложен вблизи порога первого (нижнего) канала в пределе $k_1 \rightarrow 0$.

Коэффициент при члене k_1^2 в знаменателе амплитуды (5) имеет смысл эффективного радиуса (см. формулу (1)), для которого нетрудно найти:

$$r = r_0 + \delta r, \quad (8)$$

где

$$r_0 = -\frac{2}{\mu g}, \quad \delta r = -\frac{1}{\sqrt{2\mu\Delta}}, \quad (9)$$

причём δr "взрывается" в пределе $\Delta \rightarrow 0$. Легко понять, что переход к данному пределу незаконен, поскольку он противоречит разложению, сделанному в формуле (7) и требующему выполнения условия $\Delta \gg k_1^2/(2\mu)$.

Между тем совершенно очевидно, что предел $\Delta = 0$ является адекватным физическим пределом во многих физических приложениях и достигается, например, в точном изоспиновом пределе или в пределе точной симметрии спина тяжёлого кварка, так что он не должен приводить к проблемам. Действительно, положив $\Delta = 0$ в формуле (7) под корнем, т.е. до разложения, мы приходим к естественному в данном пределе результату $k_2 = k_1$, так что задача сводится к одноканальной, и разложение эффективного радиуса может делаться стандартным образом без опасений за нарушение его сходимости.

С точки зрения формальной логики никакой проблемы с разложением эффективного радиуса в рассматриваемой двухканальной системе при $\Delta \neq 0$ также нет. Действительно, по определению такого разложения оно является одноканальным, а порог второго канала лишь ограничивает радиус сходимости полученного разложения. Отсутствию ограничений отвечает предел $\Delta \rightarrow \infty$, т.е. предел раздвижки порогов, большой по сравнению со всеми характерными энергетическими масштабами задачи. Однако в большинстве своём реальные физические системы, к которым применяется данный подход, занимают промежуточное положение, т.е. ни предел $\Delta = 0$, ни предел $\Delta \rightarrow \infty$ не являются для них адекватными. Так, для случая X(3872) отрицательный вклад члена δr из формулы (9), полученный в работе [22], численно велик (сравним по величине с r_0). Ввиду того что появление вклада δr является лишь проявлением наличия в системе второго канала и никак не связано с взаимодействием в ней (данный вклад является универсальным и не зависит от параметров распределения — от константы взаимодействия и/или энергии связи), в работе [25] было предложено определять эффективный радиус без учёта этого вклада, что в итоге позволило получить эффективный радиус X(3872), хотя и отрицательный, но совместимый по величине с поправками на конечный радиус действия сил, за счёт которых он в итоге имеет все шансы принимать положительные значения, в полной аналогии с ситуацией дейтрона, описанной Вайнбергом. Такой подход снимает противоречие с молекулярной моделью X(3872), описанное в работе [22].

Этот же феноменологический подход позволил сделать реалистические оценки параметров низкоэнергетического разложения для состояния T_{cc}^+ [20], которое располагается в непосредственной близости от (немного ниже) порога $D\bar{D}^*$ и является аналогом X(3872). При этом данные LHCb доступны также и в подпороговой области, что позволяет достаточно надёжно подогнать форму линии и извлечь параметры амплитуды. Кроме того, по извлечённым параметрам низкоэнергетического

¹ Данный вывод не противоречит модели X(3872), часто обсуждаемой в литературе и подробно описанной, например, в обзоре [5].

разложения получена величина молекулярности состояния T_{cc}^+ порядка единицы [20], что свидетельствует в пользу его молекулярной природы. Тем не менее анализ сопряжён с теми же трудностями, что и в случае X(3872), а именно с применением наивного одноканального низкоэнергетического разложения амплитуды к двухканальной задаче. Данная проблема породила активную дискуссию в научном сообществе [27]. Поскольку ситуация с физическим состоянием, расположенным вблизи двух сильных порогов, встречается достаточно часто, в данной работе рассмотрено низкоэнергетическое разложение в такой системе. В частности, в обход вспомогательных формул типа формулы (4) получены простые выражения для молекулярностей изучаемого состояния по отношению к каждому из двух каналов, позволяющие их непосредственное вычисление с помощью параметров, извлечённых из подгонки экспериментальных данных.

4. Низкоэнергетическое разложение в многоканальной системе

На первом этапе решается задача в следующей постановке. Имеются два мезон-мезонных канала, обозначаемые индексами 1 и 2, пороги которых разнесены на величину Δ (порог канала 2 лежит выше порога канала 1). Величиной Δ пренебрегается при вычислении приведённых масс в обоих каналах, поэтому, как и раньше, повсеместно положено $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Удобно также определить параметр $\lambda = \sqrt{2\mu\Delta}$.

Потенциал взаимодействия берётся в сепарабельном виде:

$$V_{\alpha\beta}(p, p') = f(p)v_{\alpha\beta}f(p'), \quad f(p) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + p^2}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (10)$$

где параметр Λ определяет обратный радиус действия сил, а

$$v_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} v_0 & v_1 \\ v_1 & v_0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

— постоянная вещественная матрица контактных потенциалов. Заложенное в неё равенство диагональных матричных элементов $v_{11} = v_{22}$ заметно упрощает формулы, однако не приводит к переупрощению задачи, поскольку во многих физических приложениях такого рода соотношения естественным образом возникают за счёт внутренних симметрий изучаемой системы, таких как, например, уже упоминавшиеся выше изоспиновая симметрия или симметрия спина тяжёлого кварка.

Пусть в системе имеется связанное состояние с энергией связи E_B , которое отождествляется с физическим состоянием. Импульс связанного состояния \varkappa_B вводится как в формуле (2). Предполагается работать в пределе

$$\frac{\varkappa_B}{\Lambda} \ll 1, \quad \frac{\lambda}{\Lambda} \ll 1, \quad (12)$$

так что разложение будет вестись по обоим отношениям. Никакого соотношения между параметрами \varkappa_B и λ (т.е. между энергией связи E_B и раздвижкой порогов Δ) не предполагается — в дальнейшем будут изучены разные предельные случаи.

Уравнение Липпмана – Швингера для потенциала (10) имеет вид

$$T_{\alpha\beta}(p, p', E) = V_{\alpha\beta}(p, p') - \sum_{\gamma=1}^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V_{\alpha\gamma}(p, q) G_{\gamma}(q, E) T_{\gamma\beta}(q, p', E), \quad (13)$$

где двухчастичный пропагатор в канале $\alpha = 1, 2$ есть

$$G_{\alpha}(p, E) = \left(M_{\text{th}_{\alpha}} + \frac{p^2}{2\mu_{\alpha}} - M - i0 \right)^{-1}, \quad (14)$$

через $M_{\text{th}_{\alpha}}$ обозначен порог канала α , и отсчёт энергии ведётся от порога нижнего канала, т.е. $E = M - M_{\text{th}_1}$. Ширинами конституентов пренебрежено.

Сепарабельный вид потенциала позволяет явно выделить импульсную зависимость амплитуды:

$$T_{\alpha\beta}(p, p', E) = f(p)\tau_{\alpha\beta}(E)f(p'), \quad (15)$$

где элементы матрицы τ удовлетворяют алгебраической системе уравнений

$$\tau_{\alpha\beta}(E) = v_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma=1}^2 v_{\alpha\gamma}(p, p') J_{\gamma}(E) \tau_{\gamma\beta}(E). \quad (16)$$

Петлевой интеграл можно вычислить в явном виде:

$$J_{\alpha}(E) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} f^2(q) G_{\alpha}(q, E) = -\frac{\mu}{2\pi} f^2(k_{\alpha}) \left(\frac{\Lambda^2 - k_{\alpha}^2}{2\Lambda} + ik_{\alpha} \right), \quad (17)$$

где k_{α} — импульс в канале α .

Тогда решение матричного уравнения (16) для диагональных компонент принимает вид

$$\tau_{11} = \frac{J_2(v_0^2 - v_1^2) + v_0}{J_1 J_2 (v_0^2 - v_1^2) + (J_1 + J_2)v_0 + 1}, \quad \tau_{22} = \tau_{11}(J_1 \leftrightarrow J_2). \quad (18)$$

Обратимся к низкоэнергетическому разложению амплитуд (18), для чего рассмотрим их знаменатель. Наличие в системе связанного состояния означает, что на комплексной плоскости энергии имеется полюс, лежащий на первом (физическом) листе четырёхлистной поверхности Римана под нижним порогом, т.е. при энергии $E = -E_B$. В полюсе знаменатель обращается в нуль, т.е.

$$J_1(-E_B)J_2(-E_B)(v_0^2 - v_1^2) + [J_1(-E_B) + J_2(-E_B)]v_0 + 1 = 0. \quad (19)$$

При наличии двух каналов, пороги которых разнесены на величину Δ , удобно воспользоваться обобщением одноканальной комплексной k -плоскости, обеспечивающим удобную визуализацию четырёхлистной поверхности Римана в комплексной плоскости энергии. Идея, предложенная в работе [28], состоит в совершении конформного преобразования, переводящего комплексную плоскость энергии в свободную от унитарных разрезов комплексную плоскость нового параметра. В частности, для заданной энергии E вместо двух импульсов k_1 и k_2 , связанных с энергией соотношением (6), удобно ввести одну комплексную величину ω , определённую следующим образом:

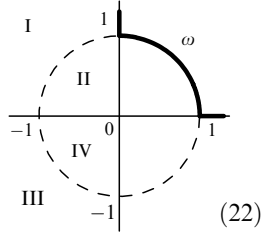
$$k_1 = \frac{\lambda}{2} \left(\omega + \frac{1}{\omega} \right), \quad k_2 = \frac{\lambda}{2} \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right), \quad (20)$$

при этом для энергии имеет место выражение

$$E = \frac{\Delta}{4} \left(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2} + 2 \right). \quad (21)$$

Комплексная ω -плоскость не имеет разрезов, а взаимно однозначное соответствие листов поверхности Римана (обозначены как RS-X, где X = I, II, III, IV) в комплексной плоскости энергии и областей в комплексной плоскости ω имеет вид

- RS-I: $\text{Im } k_1 > 0, \text{ Im } k_2 > 0,$
 RS-II: $\text{Im } k_1 < 0, \text{ Im } k_2 > 0,$
 RS-III: $\text{Im } k_1 < 0, \text{ Im } k_2 < 0,$
 RS-IV: $\text{Im } k_1 > 0, \text{ Im } k_2 < 0.$



Порогу канала 1 отвечают точки $\omega = \pm i$, порогу канала 2 — точки $\omega = \pm 1$, жирная линия соответствует вещественным значениям энергии E , лежащим на первом листе комплексной E -плоскости (физическая область энергий). Кроме того, нетрудно понять, что связанному состоянию с энергией связи E_B отвечает полюс на комплексной плоскости ω , лежащий на мнимой оси вне окружности $|\omega| = 1$, т.е.

$$\omega_0 = i(1 + b), \quad b > 0, \quad (23)$$

причём из выражения (21) нетрудно найти, что

$$\omega_0 = i \frac{\sqrt{E_B} + \sqrt{E_B + \Delta}}{\sqrt{\Delta}} = i(\sqrt{\delta} + \sqrt{1 + \delta}), \quad (24)$$

где были введены расстояния $\Delta_1 = E_B \equiv \Delta\delta$ и $\Delta_2 = E_B + \Delta = \Delta(1 + \delta)$ от положения полюса при $E = -E_B$ до первого и второго порогов соответственно. Тогда

$$b = \sqrt{\delta} + \sqrt{1 + \delta} - 1. \quad (25)$$

Движению вдоль сегмента окружности $|\omega| = 1$ от нижнего порога ($\omega_1 = i$) к верхнему порогу ($\omega_2 = 1$) отвечает изменение ω по закону

$$\omega = \exp \left[i \left(\frac{\pi}{2} - \xi \right) \right] = i \exp(-i\xi), \quad \xi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]. \quad (26)$$

Тогда нетрудно найти законы изменения импульсов и энергии в этой области:

$$k_1 = \lambda \sin \xi, \quad k_2 = -i\lambda \cos \xi, \quad E = \Delta \sin^2 \xi. \quad (27)$$

Низкоэнергетическому разложению амплитуды вблизи нижнего порога отвечает разложение при $\xi \rightarrow 0$. Тогда нетрудно показать, что с точностью до несущественного в данный момент общего множителя разложение знаменателя амплитуд (18) имеет вид

$$f(\xi) = -b - i\xi - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{\lambda}{\Delta} \left(\frac{b^2(4 + b(7b + 12))}{4(1 + b)^2} + \xi^2 \right) + \dots, \quad (28)$$

где разложение велось одновременно по $\xi \ll 1$ и $\lambda/\Delta \ll 1$. Соответственно многоточием заменены члены разложения более высокого порядка по этим малым параметрам. При этом никаких предположений относительно величины b не делалось. Последний член в правой части определяет поправки за счёт конечного радиуса действия

сил. Они являются модельно зависимыми (зависят от вида обрезания петлевого интеграла и формы обрезавшей функции) и исчезают в строгом пределе $\Delta \rightarrow \infty$. Необходимость учёта таких поправок (а также поправок более высокого порядка) определяется требуемой точностью вычислений, а также качеством имеющихся экспериментальных данных. Поучительно оценить характерное значение параметра разложения λ/Δ для типичных околопороговых систем в спектре чармония и боттомония. Например, для X(3872) и T_{cc}^+ имеем $\Delta \simeq 1$ ГэВ и $\mu \simeq 1$ ГэВ, а раздвижка порогов возникает за счёт нарушения изоспиновой симметрии, т.е. $\Delta = M(D^+D^{*-}) - M(D^0\bar{D}^{*0}) \approx 8,2$ МэВ для X(3872) и $\Delta = M(D^+D^{*0}) - M(D^0D^{*+}) = 1,4$ МэВ для T_{cc}^+ . Тогда нетрудно найти, что $\lambda/\Delta \lesssim 0,1$. В случае системы боттомония разность масс заряженных и нейтральных В-мезонов пренебрежимо мала, так что соответствующие заряженные и нейтральные каналы с хорошей точностью можно считать вырожденными по энергии. Поэтому в b -секторе за расщепление порогов отвечает нарушение симметрии тяжёлого кварка, т.е. $\Delta = m_{b^*} - m_b \approx 45$ МэВ. Это даёт отношение $\lambda/\Delta \simeq 0,5$. Отношение такого же порядка возникает и в системе чармония, если рассматривать пороги, расщеплённые на величину $\Delta = m_{D^*} - m_D \approx 140$ МэВ. Таким образом, учёт поправок за счёт конечного радиуса действия сил является заведомым превышением точности (во всяком случае, для доступных в настоящий момент экспериментальных данных) в случае состояний X(3872) и T_{cc}^+ , однако при изучении, например, боттомониеподобных резонансов $Z_b(10610)$ и $Z_b(10650)$, а также их спиновых партнёров или спиновых партнёров X(3872) и T_{cc}^+ более адекватным подходом может являться эффективная теория поля, позволяющая систематически и модельно независимо учитывать более высокие порядки по параметру разложения. Дальнейшее обсуждение поправок по отношению λ/Δ выходит за рамки данной работы, поэтому далее они будут опускаться, так что формулу (28) можно представить в простом виде

$$f(\xi) \approx -b - i\xi - \frac{1}{2} \xi^2, \quad (29)$$

который по форме напоминает разложение эффективного радиуса для одноканальной задачи, сделанное в терминах безразмерной величины ξ . Из формулы (27) видно, что в пределе $\xi \rightarrow 0$ $k_1 \approx \lambda\xi$, так что разложение (29) можно переписать в форме обычного разложения эффективного радиуса в терминах импульса k_1 :

$$-\lambda b - ik_1 - \frac{k_1^2}{2\lambda}, \quad (30)$$

из которого видно, что последний член приводит к уже обсуждавшейся выше проблеме расходимости разложения в пределе $\Delta \rightarrow 0$. При этом нетрудно видеть, что член $\propto \xi^2$ возникает из разложения $\cos \xi$, содержащегося в k_2 (см. соответствующее выражение, содержащееся в формуле (27)).

Мы вернёмся к дальнейшему обсуждению этой проблемы несколько позже, а сейчас перейдём к выводу выражений для молекулярности рассматриваемого резонанса. Важно отметить, что по самой постановке задачи мы имеем дело с чисто молекулярным состоянием без примеси компактной компоненты, т.е. полная молекулярность $X = 1$. Поскольку имеются два канала, то

можно определить вероятности обнаружения физического состояния как в одном канале, так и в другом — X_1 и X_2 соответственно. При этом должно выполняться условие самосогласованности

$$X_1 + X_2 = 1. \quad (31)$$

Из общих физических соображений можно установить свойства, которым должны удовлетворять величины X_1 и X_2 . Действительно, чем ближе к порогу расположено состояние, тем выше вероятность обнаружить его именно в данном канале. Кроме того, очевидно, что в пределе совпадающих порогов ($\Delta = 0$) вероятности обнаружить резонанс в каждом из каналов должны составлять ровно по половине каждая. Иначе говоря, должны иметь место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} X_1(\delta = 0) &= 1, \quad X_2(\delta = 0) = 0, \\ X_1(\delta \rightarrow \infty) &= X_2(\delta \rightarrow \infty) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Как известно [29–32], молекулярность резонанса по отношению к определённому каналу α может непосредственно вычисляться как произведение производной от соответствующего петлевого интеграла и вычета амплитуды в полюсе:

$$X_\alpha = \lim_{M \rightarrow M_{\text{pole}}} \left[(M^2 - M_{\text{pole}}^2) \tau_{\alpha\alpha}(M) \frac{dJ_\alpha(M)}{dM^2} \right], \quad (33)$$

где суммирование по повторяющемуся индексу α не подразумевается. Тогда непосредственным вычислением с использованием формул (18) можно найти:

$$X_1 = \frac{(\ln J_1)'(1 + v_0 J_2)}{(\ln J_1)'(1 + v_0 J_2) + (\ln J_2)'(1 + v_0 J_1)}, \quad (34)$$

$$X_2 = \frac{(\ln J_2)'(1 + v_0 J_1)}{(\ln J_1)'(1 + v_0 J_2) + (\ln J_2)'(1 + v_0 J_1)}, \quad (35)$$

где штрих обозначает производную по энергии E (или по безразмерной величине ω). Все петлевые функции и их производные взяты в полюсе (аргумент $-E_B$ опущен для упрощения вида формул). При выводе были использованы легко проверяемые соотношения, выполняемые в полюсе:

$$J_1(-E_B)(v_0^2 - v_1^2) + v_0 = -\frac{1}{J_2(-E_B)}(1 + v_0 J_1(-E_B)), \quad (36)$$

$$J_2(-E_B)(v_0^2 - v_1^2) + v_0 = -\frac{1}{J_1(-E_B)}(1 + v_0 J_2(-E_B)).$$

Как нетрудно видеть, выражения (34) и (35) явно удовлетворяют обсуждаемому выше требованию $X_1 + X_2 = 1$.

Почитательно сначала рассмотреть предел "расцепленных" каналов, т.е. перейти к пределу $v_1 = 0$. В этом случае система уравнений Липпмана–Швингера распадается на два несвязанных уравнения для компонент амплитуды τ_{11} и τ_{22} , решения которых тривиально находятся в виде

$$\tau_{11} = \frac{1}{v_0^{-1} + J_1(E)}, \quad \tau_{22} = \frac{1}{v_0^{-1} + J_2(E)}. \quad (37)$$

Предполагая наличие полюса в первом (втором) канале и, соответственно, полагая $v_0 J_1(-E_B) + 1 = 0$ ($v_0 J_2(-E_B) + 1 = 0$), нетрудно убедиться в том, что фор-

мулы (34) и (35) дают $X_1 = 1$, $X_2 = 0$ ($X_1 = 0$, $X_2 = 1$) в соответствии с естественными ожиданиями.

Если внедиагональный потенциал $v_1 \neq 0$ и, следовательно, каналы "зацеплены" друг за друга, то ни $v_0 J_1 + 1$ ни $v_0 J_2 + 1$ не обращаются в полюсе в нуль по-отдельности, что позволяет существенно упростить выражения (34) и (35), воспользовавшись тем, что лидирующий член в обоих петлевых интегралах даётся большим обратным радиусом действия сил A , так что можно положить $J_1 \approx J_2$ везде, кроме членов с производными, в которых первый неисчезающий вклад происходит не от лидирующего члена в петлевом интеграле, а от следующего за ним (см. явное выражение для петлевого интеграла (17)). Тогда нетрудно найти, что

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{J_1'}{J_1' + J_2'} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\omega_0^2} \right), \\ X_2 &= \frac{J_2'}{J_1' + J_2'} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\omega_0^2} \right), \end{aligned} \quad (38)$$

куда необходимо подставить явное выражение для положения полюса ω_0 из формулы (24). В результате нетрудно прийти к следующему окончательному результату:

$$X_1 = \frac{\sqrt{1 + \delta}}{\sqrt{\delta} + \sqrt{1 + \delta}}, \quad X_2 = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta} + \sqrt{1 + \delta}}, \quad (39)$$

который, как легко видеть, удовлетворяет всем ранее установленным свойствам величин X , перечисленным в формуле (32). Заметим также, что полученные выражения для молекулярностей свободны от каких-либо проблем в пределе $\Delta \rightarrow 0$. При этом разложение эффективного радиуса в вычислениях не использовалось.

Между тем постановка разобранный выше задачи отличается от той, с которой приходится иметь дело при обработке экспериментальных данных для околопорогового резонанса. Действительно, выше был рассмотрен случай чисто молекулярного состояния, т.е. отсутствие в его волновой функции компактной компоненты было заложено изначально. Напротив, типичная постановка задачи при изучении околопорогового резонанса состоит в том, чтобы из подгонки данных извлечь информацию о его природе, т.е. о положении полюса на комплексной плоскости, а также о составе его волновой функции.

В работе [33] была рассмотрена задача о взаимном влиянии адронной и кварковой динамики в околопороговом резонансе в случае наличия нескольких адронных каналов. В частности, волновая функция резонанса предполагалась в виде

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{Z} |\psi_0\rangle \\ \chi_1(\mathbf{p}) |M_{11} M_{12}\rangle \\ \chi_2(\mathbf{p}) |M_{21} M_{22}\rangle \end{pmatrix}, \quad (40)$$

где $|\psi_0\rangle$ — компактное состояние, $|M_{\alpha 1} M_{\alpha 2}\rangle$ ($\alpha = 1, 2$) — адронные каналы, а $\chi_\alpha(\mathbf{p})$ — волновая функция в канале α в импульсном представлении. В простейшем случае, когда динамика адронных степеней свободы не порождает околопороговых полюсов, выражение для амплитуды даётся распределением (5). Тогда, если в рассматриваемой системе имеется связанное состояние с энергией связи E_B , то Z -фактор, описывающий элементар-

ность этого состояния², имеет вид [33]

$$Z = \left(1 + \frac{\mu g(\kappa_1 + \kappa_2)}{2\kappa_1\kappa_2}\right)^{-1}, \quad (41)$$

где $\kappa_x = \text{Im } k_x(E = -E_B)$, т.е.

$$\kappa_1 = \sqrt{2\mu E_B} = \lambda\sqrt{\delta}, \quad \kappa_2 = \sqrt{2\mu(E_B + \Delta)} = \lambda\sqrt{1 + \delta}. \quad (42)$$

Из выражения (41) нетрудно видеть, что предел $\Delta \rightarrow 0$ по-прежнему не представляет никакой трудности и сводится к подстановке $\kappa_2 = \kappa_1$, что даёт

$$Z(\Delta = 0) = \left(1 + \frac{\mu g}{\sqrt{2\mu E_B}}\right)^{-1}. \quad (43)$$

В обратном пределе $\Delta \gg E_B$ величина Z также принимает простой вид

$$Z(\Delta \rightarrow \infty) = \left(1 + \frac{\mu g}{2\sqrt{2\mu E_B}}\right)^{-1}, \quad (44)$$

из которого, как и следовало ожидать, раздвижка порогов Δ полностью выпадает.

Таким образом, извлекая из подгонки экспериментальных данных два параметра: энергию связи E_B и константу связи g , можно оценить вероятность того, что изучаемый резонанс является элементарным состоянием. Например, для центральных значений параметров, использованных в работе [22]:

$$\Delta = 8,2 \text{ МэВ}, \quad E_B = 18 \text{ кэВ}, \quad g = g_{\text{ЛНсб}} = 0,108 \quad (45)$$

из формулы (41) нетрудно найти $Z \approx 0,1$, что совпадает с оценками цитируемой работы. Иначе говоря, с вероятностью порядка 90 % $X(3872)$ является молекулярным состоянием.

К таким оценкам, впрочем, следует относиться с осторожностью. Во-первых, окончательные выводы о природе окологорогового состояния можно делать только после совместного анализа всей совокупности набранной о нём экспериментальной информации, включающей данные по его рождению в различных процессах и распадам в различные конечные состояния. Во-вторых, используемые для оценки параметры могут содержать неточности, обусловленные конкретными процедурами их извлечения. Например, при анализе с помощью формул Флатте данных, набранных в очень узкой окологороговой области, член $\propto E$ в знаменателе крайне мал, однако при его пренебрежении распределение демонстрирует свойство скейлинга [34], т.е. его параметры могут перешкалироваться с произвольным множителем без изменения формы линии. Сходимость подгонки при этом становится плохой, так что подгонка может "свалиться" в нефизический локальный минимум, параметры задачи в котором сильно отличаются от правильных физических значений. Например, из приведённого в работе [35] графика функции подобия в зависимости от величины параметра распределения E_f видно наличие пологого участка (почти плато), вдоль которого, тем не менее, константа связи g изменяется достаточно сильно.

² Введённая здесь константа связи g связана с константой g_f , использованной в работе [33], соотношением $g = g_f/2$.

Поучительно использовать выражение (41) в формуле (2) для эффективного радиуса, что даёт

$$r = -\frac{2}{\mu g} \frac{\sqrt{E_B + \Delta}}{\sqrt{E_B} + \sqrt{E_B + \Delta}}. \quad (46)$$

Нетрудно видеть, что выражение (46) для эффективного радиуса не содержит членов, сингулярных в пределе $\Delta \rightarrow 0$. При этом в случае $\Delta \gg E_B$ (см., например, параметры, содержащиеся в формуле (45)) находим, что

$$r \approx -\frac{2}{\mu g} = r_0, \quad (47)$$

что совпадает с первым членом в формуле (8). При подстановке $\Delta = 0$ в правой части формулы (46) в эффективном радиусе возникает множитель $\sqrt{E_B + \Delta}/(\sqrt{E_B} + \sqrt{E_B + \Delta}) \approx 1/2$, который, однако, в точности компенсируется множителем 2. Этот множитель необходимо ввести для учёта наличия в системе двух идентичных каналов. Таким образом, снова приходим к выводу, что $r = r_0$. Полученный результат хорошо согласуется с предложением, содержащимся в работе [25], о том, чтобы при определении эффективного радиуса в двухканальной задаче отбросить в формуле (8) второй член $\delta r \propto 1/\sqrt{\Delta}$.

Полученные ранее выражения для молекулярностей (39) можно обобщить на случай наличия в волновой функции компактной компоненты. Для этого достаточно модифицировать нормировку, потребовав условия $X_1 + X_2 = 1 - Z$ при сохранении отношения $X_1/X_2 = \sqrt{1 + \delta}/\sqrt{\delta}$ (см. формулу (39)). Тогда нетрудно прийти к следующим окончательным выражениям:

$$Z = |r_0| \left(|r_0| + \frac{1}{\sqrt{2\mu E_B}} + \frac{1}{\sqrt{2\mu(E_B + \Delta)}} \right)^{-1},$$

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2\mu E_B}} \left(|r_0| + \frac{1}{\sqrt{2\mu E_B}} + \frac{1}{\sqrt{2\mu(E_B + \Delta)}} \right)^{-1}, \quad (48)$$

$$X_2 = \frac{1}{\sqrt{2\mu(E_B + \Delta)}} \left(|r_0| + \frac{1}{\sqrt{2\mu E_B}} + \frac{1}{\sqrt{2\mu(E_B + \Delta)}} \right)^{-1},$$

где величина r_0 определена в формуле (9) и может интерпретироваться как "эффективный радиус" в рассматриваемой двухканальной задаче. В пределе чисто молекулярного состояния $g \rightarrow \infty$ полученные выражения переходят в $Z = 0$ и молекулярности, приведённые в формуле (31). В обратном пределе $g \rightarrow 0$, наоборот, $Z = 1$ и $X_1 = X_2 = 0$, как и следует ожидать для чисто компактного (не молекулярного) состояния.

Нетрудно также понять структуру полученных выражений для X_1 и X_2 . Как видно из определения (33), дополнительный вклад $|r_0|$ в знаменателе происходит из члена $\propto E$ в знаменателе амплитуды (см., например, формулу Флатте (5)), который, в свою очередь, возникает из функции Грина компактного состояния $1/(E - E_0)$ (здесь E_0 — затравочная энергия компактного состояния, которая поглощается затем параметром распределения E_f (см. вывод соответствующих выражений, например, в работе [33])).

Формулы (48) можно непосредственно обобщить на произвольное число порогов N и записать их в простом единообразном виде

$$X_i = \frac{R_i}{\sum_{j=0}^N R_j}, \quad (49)$$

где $i = 0$ отвечает связанному состоянию с $R_0 = |r_0|$ и $R_i = 1/\sqrt{2\mu\Delta_i}$ для всех $i > 0$ (см. определение величин Δ_i после формулы (24)). В формальном пределе $\Delta_i \rightarrow \infty$ соответствующий канал отщепляется от системы и перестаёт влиять на её динамику. В этом пределе $R_i \rightarrow 0$ и, следовательно, $X_i \rightarrow 0$ в соответствии с естественными ожиданиями, так что формула (49) сводится к случаю $N - 1$ канала. Следует отметить, однако, что рассмотрение такого предела имеет чисто академическое значение, поскольку большое расщепление между порогами каналов подразумевает также и большую разницу в массах конstituентов в разных каналах, так что используемое в данной работе приближение одинаковых приведённых масс во всех каналах перестает работать. Заметим, что значение "радиуса" R_i для i -го канала определяется величиной Δ_i , которая имеет смысл "энергии связи" по отношению к соответствующему порогу, — типичное поведение волновой функции связанного состояния на больших расстояниях. При этом поучительно ещё раз подчеркнуть, что "радиус" R_0 , отвечающий за вклад связанного состояния, даётся именно величиной $|r_0|$, не зависящей от расщепления порогов³.

5. Обсуждение

В настоящей работе рассмотрено обобщение разложения эффективного радиуса на случай двухканальной системы и применение полученных результатов к извлечению природы околопорогового резонанса из результатов измерений. Интерес к этой проблеме обусловлен поступлением экспериментальных данных об экзотических адронах и необходимостью исследования их свойств исходя из имеющейся экспериментальной информации. Подгонка данных в околопороговой области с помощью простых аналитических формул по сути является единственным подходом, доступным экспериментальным коллаборациям. Поскольку динамика системы в околопороговой области является существенно нерелятивистской, то низкоэнергетическое разложение амплитуды приобретает черты довольно мощного и удобного метода исследования. Между тем наивное использование одноканальных формул для изучения системы, при описании которой необходимо принимать во внимание два близко расположенных адронных порога, приводит к ряду сложностей, являющихся прямым следствием использования такого подхода за пределами его применимости. В работе показано, как эти сложности можно обойти за счёт использования подходов, явно учитывающих оба адронных канала, а также возможное присутствие компактной компоненты в волновой функции резонанса. Полученные выражения (48) позволяют оценивать вероятность обнаружения исследуемого резонанса в каждом из адронных каналов по отдельности, основываясь исключительно на массах конstituентов (которые определяют раздвижку порогов Δ и величину приведённой массы μ), а также двух параметрах (энергии связи E_B и константе связи с адронными каналами g), извлекаемых непосредственно из подгонки к экспериментальным данным.

При выводе основных формул, полученных в настоящей работе, был сделан ряд пренебрежений и допущений. Прежде всего, отдельного замечания заслуживает проблема распадов конstituентов молекулы. Действительно,

в реальных условиях адроны, входящие в состав молекулярного состояния, нестабильны и могут иметь конечную ширину. В этом случае отождествляющийся со связанным состоянием полюс, лежащий под нижним из двух рассмотренных выше сильных порогов, располагается уже не на вещественной оси, а смещён с неё в комплексную плоскость. Это не приводит к проблемам с базовыми принципами квантовой механики, поскольку поверхность Римана в комплексной плоскости энергии становится теперь многолистной с точками ветвления на всех порогах, в том числе лежащих по энергии ниже полюса и отвечающих каналам распада резонанса за счёт распада его конstituентов. Однако прямое применение формул Вайнберга в этом случае приводит к неудовлетворительному результату: величина Z принимает комплексные значения и потому её непосредственная интерпретация как вероятности представляется невозможной. В этом случае необходимо использовать обобщения метода Вайнберга, переходя, например, к рассмотрению спектральной плотности [14]. Результаты применения такого обобщённого подхода к анализу данных по скалярным мезонам $a_0(980)$ и $f_0(980)$ можно найти в работе [36]. Недостатками такого подхода являются отсутствие простых и наглядных аналитических формул, а также теоретическая неопределённость, связанная с выбором области интегрирования спектральной плотности для оценки вероятности обнаружения резонанса в виде компактной компоненты, — такой интеграл необходимо вычислять по околопороговой области, однако определить точные пределы интегрирования в принципе не представляется возможным. Для строгого решения поставленной задачи необходимо расширить систему связанных каналов и добавить в неё все конечные состояния, за счёт распада в которые у исследуемого резонанса появляется ненулевая ширина. Например, если пренебречь слабыми распадами D-мезонов, то для состояний $X(3872)$ и T_{cc}^+ необходимо добавить соответственно трёхчастичные каналы $D\bar{D}\pi/D\bar{D}\gamma$ и $DD\pi/DD\gamma$. В работе [37] задача о форме линии околопорогового резонанса с учётом трёхчастичной динамики решалась именно в такой расширенной постановке. Выведенные при этом формулы позволили получить реалистическое описание формы линии резонанса в околопороговой области и естественным образом воспроизвести такие эффекты, как исчезающий сигнал ниже формального двухчастичного порога и интерференция различных вкладов в амплитуду за счёт неэквивалентных путей течения реакции распада. К сожалению, эти формулы не обеспечивают простых алгебраических выражений и поэтому мало пригодны для анализа экспериментальных данных.

В работе [38], а также существенно позже в работе [39] для учёта конечной ширины конstituента было предложено использовать достаточно простые аналитические формулы для импульса в двухчастичном канале и его "аналитического продолжения" ниже порога. Как было показано в работе [37], вблизи двухчастичного порога такие формулы демонстрируют неплохое согласие с точным результатом, однако обладают неправильным поведением вблизи трёхчастичного порога. Использование для $X(3872)$ формул с учётом конечной ширины D^* -мезона, предложенных в работе [39], действительно позволяет получить исчезающий сигнал ниже формального двухчастичного порога $D\bar{D}^*$ и, если в системе DD^* имеется связанное состояние, описать подпороговый пик, возникающий за счёт распада \bar{D}^* в составе такого связанного состояния. Однако ввиду отсутствия

³ Строго говоря, такая зависимость возникает при отказе от приближения равных приведённых масс во всех каналах, однако она будет слабой и не будет приводить к сингулярности в пределе $\Delta_i \rightarrow 0$.

экспериментальных данных в подпороговой области влияние этого эффекта на описание данных выше порога оказывается минимальным [40]. Таким образом, решение об использовании в анализе тех или иных расширений простого двухканально подхода должно определяться, в первую очередь, качеством экспериментальных данных. Поскольку, например, данные коллаборации LHCb для T_{cc}^+ [21] обладают существенно более высокой точностью, чем данные коллаборации Belle для $X(3872)$ [4], для их анализа действительно необходимо использовать подходы, явно учитывающие многочастичные эффекты (см., например, работу [20]).

Другим явлением, которое потенциально может играть важную роль при описании экзотических околопороговых резонансов, является взаимодействие в конечном состоянии. В частности, нетривиальные эффекты, возникающие за счёт взаимодействия между мезонами, входящими в состав молекулы, изучались в работах [33, 39]. Кроме того, при специфическом подборе масс конститuentов, а также обменной частицы в амплитуде может возникать логарифмическая особенность, известная как треугольная сингулярность. Обсуждение такой сингулярности для состояния $X(3872)$ можно найти, например, в работах [41–43], а для T_{cc}^+ — в работах [44, 45].

6. Заключение

Целью данной работы являлось расширение анализа Вайнберга на двухканальную систему, при этом полученные формулы содержат всего два параметра: энергию связи и константу взаимодействия с адронными каналами, которые извлекаются из экспериментальных данных и вбирают в себя всю полную информацию об исследуемом резонансе. Если при этом установленная теоретически амплитуда удовлетворяет всем необходимым физическим условиям, таким как унитарность (включая многочастичную), требованиям всех точных и приближённых симметрий, присутствующих в системе, и учитывает необходимые дополнительные эффекты, такие как, например, обсуждавшаяся выше треугольная сингулярность и тому подобное, то соответствующая информация будет содержаться и в извлекаемых параметрах. Если в этом случае мнимая часть извлечённой энергии связи невелика, то для оценок по представленным в работе формулам ей можно пренебречь. Возникающее при этом нарушение унитарности может рассматриваться как модельная ошибка и не превышать неопределённости, возникающие за счёт других эффектов — например, за счёт экспериментальных ошибок.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ (грант 14.W03.31.0026).

On effective range expansion in a multichannel system and compositeness of near-threshold resonance

A.V. Nefediev, *Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation*
E-mail: nefediev@lebedev.ru

We discuss effective range expansion in a two-channel system and establishing the nature of a near-threshold hadronic resonance with the help of parameters obtained from a fit to experimental data. In particular, the situation of two strong thresholds located close to each other and a hadronic resonance residing at the lower of them is considered. For the case of a bound state, simple expressions are derived that allow one to estimate the probability of finding the given resonance in each hadronic channel and as a compact quark state if the resonance wave function contains such a component.

Keywords: exotic hadrons, near-threshold resonance, effective range expansion

PACS numbers: 11.55.Bq, 14.40.Pq, 14.40.Rt

Bibliography — 45 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **194** (1) 77–85 (2024)
DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2022.07.039225>

Список литературы

- Jaffe R L *Phys. Rev. D* **15** 267 (1977)
- Jaffe R L *Phys. Rev. D* **15** 281 (1977)
- Тодышев К Ю *УФН* **190** 995 (2020); Todyshev K Yu *Phys. Usp.* **63** 929 (2020)
- Choi S-K et al. (Belle Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **91** 262001 (2003)
- Калашникова Ю С, Нefeldьев А В *УФН* **189** 603 (2019); Kalashnikova Yu S, Nefediev A V *Phys. Usp.* **62** 568 (2019)
- Guo F-K et al. *Rev. Mod. Phys.* **90** 015004 (2018)
- Brambilla N et al. *Phys. Rep.* **873** 1 (2020)
- Kou E et al. *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2019** 123C01 (2019)
- Жукова В И и др. *УФН* **191** 492 (2021); Zhukova V I et al. *Phys. Usp.* **64** 468 (2021)
- Ачасов М Н и др. *УФН* **194** (1) 60 (2024) <https://doi.org/10.3367/UFNr.2023.10.039583>; Achasov M N et al. *Phys. Usp.* **67** (1) (2024) <https://doi.org/10.3367/UFNe.2023.10.039583>
- Achasov M *Front. Phys.* **19** 14701 (2024)
- Flatté S M *Phys. Lett. B* **63** 224 (1976)
- Weinberg S *Phys. Rev.* **137** B672 (1965)
- Bogdanova L N, Hale G M, Markushin V E *Phys. Rev. C* **44** 1289 (1991)
- Morgan D *Nucl. Phys. A* **543** 632 (1992)
- Li Y et al. *Phys. Rev. D* **105** L071502 (2022)
- Albaladejo M, Nieves J *Eur. Phys. J. C* **82** 724 (2022)
- Matuschek I et al. *Eur. Phys. J. A* **57** 101 (2021)
- Aaij R et al. (LHCb Collab.) *Nat. Commun.* **13** 3351 (2022)
- Du M-L et al. *Phys. Rev. D* **105** 014024 (2022)
- Aaij R et al. (LHCb Collab.) *Nat. Phys.* **18** 751 (2022)
- Esposito A et al. *Phys. Rev. D* **105** L031503 (2022)
- Сморodinский Я А *ДАН СССР* **60** 217 (1948)
- Сморodinский Я А *УФН* **39** 325 (1949)
- Baru V et al. *Phys. Lett. B* **833** 137290 (2022)
- Particle Data Group, Zyla P A et al. *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2020** 083C01 (2020)
- Maiani L, Pilloni A, arXiv:2207.05141; in *Lectures for the School "Frontiers in Nuclear and Hadronic Physics 2022"*, Galileo Galilei Institute, Florence, Italy, February 21–25, 2022
- Kato M *Ann. Physics* **31** 130 (1965)
- Hyodo T, Jido D, Hosaka A *Phys. Rev. C* **85** 015201 (2012)
- Aceti F, Oset E *Phys. Rev. D* **86** 014012 (2012)
- Sekihara T, Hyodo T, Jido D *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2015** 063D04 (2015)
- Guo Z-H, Oller J A *Phys. Rev. D* **93** 096001 (2016)
- Hanhart C, Kalashnikova Yu S, Nefediev A V *Eur. Phys. J. A* **47** 101 (2011)
- Baru V et al. *Eur. Phys. J. A* **23** 523 (2005)
- Aaij R et al. (LHCb Collab.) *Phys. Rev. D* **102** 092005 (2020)
- Baru V et al. *Phys. Lett. B* **586** 53 (2004)
- Hanhart C, Kalashnikova Yu S, Nefediev A V *Phys. Rev. D* **81** 094028 (2010)
- Nauenberg M, Pais A *Phys. Rev.* **126** 360 (1962)
- Braaten E, Lu M *Phys. Rev. D* **76** 094028 (2007)
- Kalashnikova Yu S, Nefediev A V *Phys. Rev. D* **80** 074004 (2009)
- Guo F-K *Phys. Rev. Lett.* **122** 202002 (2019)
- Braaten E, He L-P, Ingles K *Phys. Rev. D* **100** 031501 (2019)
- Braaten E et al. *Phys. Rev. D* **101** 096020 (2020)
- Braaten E et al. *Phys. Rev. D* **106** 034033 (2022)
- Achasov N N, Shestakov G N *Phys. Rev. D* **105** 096038 (2022)

Received 30 March 2022, revised 27 June 2022
Physics – Uspekhi **67** (1) (2024)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2022.07.039225>