

Оптические нанорезонаторы

В.В. Климов

Представлены анализ и обобщение классических и самых современных подходов к описанию и разработке принципов функционирования открытых оптических нанорезонаторов, т.е. резонаторов, все размеры которых меньше резонансной длины волны излучения в вакууме. Особое внимание уделено физике таких явлений, как связанные состояния в континууме, анапольные состояния, суперрезонансные моды и идеальные неизлучающие моды, имеющие экстремально большие добротности и локализации электромагнитных полей. Проведён анализ оптических свойств собственных колебаний в нанорезонаторах из метаматериалов. Рассмотренные эффекты, помимо того что они имеют фундаментальное значение, могут найти применение при разработке оптических наноантенн, нанолазеров, биосенсоров, устройств фотовольтаики и нелинейной нанофотоники.

Ключевые слова: нанорезонаторы, квазинормальные моды, идеальные неизлучающие моды, суперрезонансные состояния, анапольные состояния, связанные состояния в континууме, платоновы тела, добротность, наноантенны, нанолазеры, метаматериалы, резонансы Ми, плазмонные резонансы, биосенсоры

PACS numbers: 03.50.De, **32.50.+d**, 32.70.Jz, **42.25.-p**, 42.50.Pq, **42.79.-e**, **78.67.-n**, 78.67.Pt

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2022.02.039153>

Содержание

1. Введение (279).
2. Общие подходы к описанию свойств оптических нанорезонаторов (280).
2.1. Моды закрытых резонаторов. 2.2. Моды открытых нанорезонаторов. 2.3. Анапольные распределения токов и моды собственных колебаний. 2.4. Симметричные свойства мод в оптических нанорезонаторах. 2.5. Методы теории возмущений для описания свойств оптических нанорезонаторов. 2.6. Численные методы для описания свойств оптических нанорезонаторов.
3. Моды в плазмонных нанорезонаторах (286).
3.1. Оптические свойства сферических плазмонных резонаторов. 3.2. Оптические свойства сфероидальных и эллипсоидальных плазмонных резонаторов. 3.3. Оптические свойства кластеров из плазмонных резонаторов.
4. Моды в диэлектрических нанорезонаторах (289).
4.1. Сферические диэлектрические нанорезонаторы. 4.2. Сфероидальные нанорезонаторы. 4.3. Диэлектрические нанорезонаторы более сложных форм.
5. Моды в нанорезонаторах из метаматериалов (297).
5.1. Моды в сфере с отрицательным показателем преломления. 5.2. Моды в киральной сфере. 5.3. Моды в сфере из гиперболического метаматериала.
6. Примеры возможного использования оптических нанорезонаторов (301).

7. Заключение (302).
- Список литературы (302).

1. Введение

Для современных оптических устройств критически важным становится локализация света в объёмах, все размеры которых меньше длины волны в вакууме, т.е. в нанорезонаторах. Такая локализация чрезвычайно важна для современных приложений нанооптики, таких как лазеры и спазеры, оптические наноантенны, метаповерхности, химические и биологические сенсоры, оптические компьютеры, фильтры, переключатели, детекторы, элементы оптической памяти. Компактность подобных устройств позволит интегрировать их в оптические микросхемы, что чрезвычайно важно, так как процесс миниатюризации в производстве электронных микросхем почти достиг теоретического предела. В связи с этим в настоящее время активно исследуются резонансные оптические свойства плазмонных наночастиц [1–6] и диэлектрических наночастиц с высоким показателем преломления [7–25]. На рисунке 1 приведены примеры оптических нанорезонаторов.

Очень сложная физика оптических явлений в указанных наноструктурах приводит ко многим интересным приложениям, таким как наноантенны [5, 6, 8–14], плазмонные [2, 4] и неплазмонные [22, 25, 26] нанолазеры и нелинейная нанофотоника [17, 21, 27, 28]. Как и в любой другой области физики, все эффекты здесь связаны с существованием в наночастицах тех или иных мод собственных колебаний.

С прикладной точки зрения особенно интересны моды с сильной локализацией поля и малыми радиационными потерями. В последнее время моды такого рода привлекли самое пристальное внимание ведущих

В.В. Климов
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: klimov256@gmail.com

Статья поступила 10 августа 2021 г.,
после доработки 17 января 2022 г.

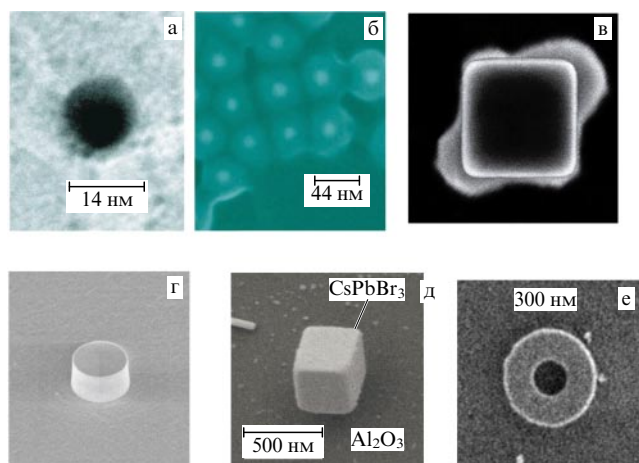


Рис. 1. (а) Изображение золотого сферического нанорезонатора диаметром 14 нм в трансмиссионном электронном микроскопе [2]. (б) Изображение спазера на основе резонатора, показанного на рис. а [2]. (в) Изображение, полученное с помощью сканирующего электронного микроскопа (СЭМ), золотого монокристаллического нанорезонатора с ребром 100 нм, на противоположные стороны которого нанесён полимер, допированный коллоидными квантовыми точками CdSe/CdS/Zn (ядро/оболочка/оболочка) [3]. (г) СЭМ-изображение цилиндрического AlGaAs-нанорезонатора (показатель преломления $n = 3,4$) высотой 635 нм и диаметром 930 нм на кварцевой подложке [20, 21]. (д) СЭМ-изображение кубического CsPbBr₃-нанорезонатора с ребром 310 нм на сапфировой подложке [22]. (е) СЭМ-изображение кольцевого Si-резонатора с внешним и внутренним диаметрами 800 и 300 нм соответственно и толщиной 80 нм [23].

научных групп, обнаруживших несколько типов слабо излучающих систем: связанные состояния в континууме [27–30], анапольные распределения токов [19, 31–36], суперрезонансные моды [25, 37, 38], идеальные неизлучающие моды [39–41].

Из-за потерь на излучение, межмодовой интерференции и усиления как электрических, так и магнитных полей физика высокодобротных мод в нанорезонаторах очень сложна. В частности, поля обычных квазинормальных мод неограниченно возрастают на бесконечности. Ввиду исключительной важности открытых нанорезонаторов в настоящее время для их описания и создания на их основе новых наноустройств интенсивно разрабатывается целый ряд подходов, которые недостаточно хорошо известны широкому кругу физиков, работающих в области нанооптики и наноплазмоники и их приложений.

Цель настоящего обзора — анализ и обобщение самых современных подходов к описанию и разработке открытых нанорезонаторов, т.е. резонаторов с размерами, меньшими длины волны излучения в вакууме. Существует большой поток работ в данном направлении, но они носят в значительной степени феноменологический и чисто вычислительный характер. Поэтому одной из важных целей обзора является изложение ситуации с единой, чётко определённой точки зрения. Мы ограничимся рассмотрением резонаторов простых форм с высокой симметрией, что позволяет более или менее точно описать их резонансные свойства. Свойства асимметричных резонаторов тоже очень интересны (см., например, [42]), но они критически (даже хаотически) зависят от малых вариаций формы и их обсуждение заслуживает отдельного обзора.

В разделе 2 представлены общие подходы к описанию оптических нанорезонаторов, а также проанализирова-

ны различные определения и методы нахождения их собственных мод и собственных значений. Особое внимание уделено работам, в которых разрабатываются альтернативные методы описания собственных мод, не имеющие недостатков, присущих стандартному описанию. В разделе 2 также проанализировано основное программное обеспечение для нахождения собственных мод и собственных значений. В разделе 3 представлены работы, посвящённые исследованиям собственных колебаний в плазмонных нанорезонаторах различных форм (сферы, сфероиды, эллипсоиды, платоновы тела, кластеры из наночастиц). В разделе 4 рассмотрены работы по исследованию собственных колебаний в диэлектрических нанорезонаторах различных форм (сферы, сфероиды, цилиндры). В разделе 5 проведён анализ работ, посвящённых исследованиям собственных колебаний в нанорезонаторах из киральных и гиперболических метаматериалов, а также из метаматериалов с отрицательным показателем преломления. В разделе 6 представлены примеры использования нанорезонаторов для нанолазеров, биосенсоров и нелинейно-оптических устройств, оптических и квантовых компьютеров. Всюду в обзоре предполагается, что зависимость полей от времени имеет вид $\exp(-i\omega t)$.

2. Общие подходы к описанию свойств оптических нанорезонаторов

2.1. Моды закрытых резонаторов

Описание свойств электромагнитных волн в резонаторах является классической задачей математики и теории электромагнитных волн (см., например, [43–45]). В классических работах основное внимание уделяется закрытым резонаторам, т.е. резонаторам, не имеющим потерь на излучение.

Собственные колебания закрытых резонаторов описываются уравнениями Максвелла с условием идеальной проводимости стенок:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_n &= k_{0,n}^2 \varepsilon \mathbf{E}_n, \\ \mathbf{E}_{n,\tan}|_S &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для резонаторов без внутренних потерь $\text{Im} \varepsilon = 0$, собственные частоты системы (1) $\omega_n = ck_{0,n}$ представляют собой действительные числа, а моды для разных частот являются ортогональными. Это позволяет решить все практически интересные задачи о возбуждении таких резонаторов и взаимодействии волн в них. Потери в стенках волноводов можно учесть по теории возмущений [43]. Теория закрытых резонаторов является основой рассмотрения любых резонаторов.

2.2. Моды открытых нанорезонаторов

Помимо закрытых резонаторов как в сверхвысокочастотной (СВЧ) технике, так и в современных приложениях нанооптики большое значение имеют открытые нанорезонаторы, собственные колебания которых приводят к излучению энергии и тем самым к затуханию колебаний в резонаторах [46].

2.2.1. Что такое моды открытого нанорезонатора? Понятие "мода резонатора" кажется хорошо известным, и это действительно так для замкнутых резонаторов, исполь-

зуемых в СВЧ-технике. Однако применительно к оптическим нанорезонаторам на основе наночастиц понятие "мода резонатора" становится далеко не тривиальным, поскольку такие резонаторы являются открытыми системами [46] и колебания в их объёме взаимодействуют с континуумом мод свободного пространства. Последнее приводит к тому, что определение мод в открытых резонаторах как решений уравнений Максвелла без источников становится неполным, так как для открытых резонаторов надо ещё задать характер поведения полей на бесконечности, которое может быть самым разным как с формальной точки зрения, так и при рассмотрении конкретных задач. Задание тех или иных условий на бесконечности накладывает ограничения на выбор спектральных параметров, которые могут быть собственными значениями мод резонатора. В любом случае основными характеристиками резонаторов являются резонансные частоты ω_n и добротности Q_n , согласно определению пропорциональные отношению энергии в n -й моде резонатора $W_{n, \text{stored}}$ к мощности $P_{n, \text{rad}}$, излучаемой той же модой за один период:

$$Q_n = \frac{\omega_n W_{n, \text{stored}}}{P_{n, \text{rad}}}. \quad (2)$$

Это определение предполагает, что собственные моды уже найдены тем или иным способом. Однако на практике в случае открытых резонаторов часто найти собственные колебания непосредственно затруднительно, и тогда чрезвычайно полезным оказывается понятие обобщённой добротности, справедливое, в отличие от (2), при любых частотах [47–49]:

$$Q(\omega) = \frac{\omega W_{\text{stored}}(\omega)}{P_{\text{rad}}(\omega)}. \quad (3)$$

В (3) запасённую энергию $W_{\text{stored}}(\omega)$ и излучённую мощность $P_{\text{rad}}(\omega)$ можно найти, решив задачу рассеяния при произвольной частоте. При частотах, соответствующих частотам собственных колебаний, выражение (3), естественно, совпадает с обычным определением (2). Однако понятие обобщённой добротности оказывается очень полезным в нетривиальных случаях, когда запасённая энергия не обладает резонансными свойствами, а радиационные потери имеют минимумы (см. разделы 4.1.4, 4.2.2, 4.3.3, 5.1). Вычисление запасённой в резонаторе энергии W_{stored} для открытых резонаторов может быть проведено различными способами [50]. В настоящем обзоре под запасённой энергией мы будем понимать, как обычно [43], положительную энергию, сосредоточенную внутри резонатора.

2.2.2. Моды, в которых собственное значение — частота. В случае открытых резонаторов, а именно такой случай является предметом настоящего обзора, обычно считается (как и в теории закрытых резонаторов), что собственным значением является частота колебаний, а моды определяются как решения уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_n &= k_{0,n}^2 \varepsilon \mathbf{E}_n \text{ в нанорезонаторе,} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_n &= k_{0,n}^2 \mathbf{E}_n \text{ вне нанорезонатора,} \end{aligned} \quad (4)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость резонатора, с граничными условиями Зоммерфельда на бесконечности [4 УФН, т. 193, № 3

сти [51]:

$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\exp(ik_{0,n}r)}{r} \mathbf{F}(\theta, \varphi). \quad (5)$$

Однако такая постановка задачи противоречива, поскольку ввиду наличия излучения из закона сохранения энергии следует: собственные частоты Ω_n являются комплексными числами, $\Omega_n = \omega_n - i\Gamma_n/2$, что в свою очередь приводит к неограниченному возрастанию полей мод на бесконечности:

$$E_n(\mathbf{r}) \sim \frac{\exp(i\Omega_n r/c)}{r} = \frac{\exp(i\omega_n r/c) \exp(\Gamma_n r/2c)}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty. \quad (6)$$

Впервые на данный факт обратил внимание Л.А. Вайнштейн [46]: "Это возрастание является неизбежным следствием экспоненциального затухания поля при $t \rightarrow \infty$. Действительно, поскольку при $R \rightarrow \infty$ поле каждого собственного колебания имеет характер сферической волны, уходящей на бесконечность со скоростью света, то, например, при $t = 0$ поле на большом расстоянии R обусловлено волной, излучённой шаром при $t = -R/c$, когда амплитуда колебаний в нём была гораздо больше, чем при $t = 0$, в силу чего это поле экспоненциально велико. Высказанные соображения являются весьма общими и позволяют утверждать, что экспоненциальное возрастание поля собственных колебаний при $R \rightarrow \infty \dots$ имеет место для всех открытых резонаторов (трёхмерных)".

Собственные моды открытых систем также известны как распадающиеся состояния, вытекающие моды, квазимоды или квазинормальные моды.

Главная проблема при описании и компьютерном моделировании квазимод, или мод открытых резонаторов, заключается в том, чтобы определить, как их можно нормировать. Ввиду возрастания этих мод на бесконечности обычные процедуры нормировки неприменимы и необходимы нестандартные решения.

Целый ряд подходов к нормировке квазимод предложен в работах [46, 52–59]. В работе [58] собственные функции сферических резонаторов, являющиеся решениями уравнений Максвелла без источников

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_n - k_{0,n}^2 \varepsilon(|\mathbf{r}|) \mathbf{E}_n = 0, \quad (7)$$

предлагается нормировать с помощью соотношения

$$\begin{aligned} \int_V d\mathbf{r} \varepsilon(|\mathbf{r}|) \mathbf{E}_n^2(\mathbf{r}) + \\ + \frac{1}{2k_n^2} \int_S dS \left(\mathbf{E}_n \frac{\partial \mathbf{E}_n}{\partial r} + r \mathbf{E}_n \frac{\partial^2 \mathbf{E}_n}{\partial r^2} - r \left(\frac{\partial \mathbf{E}_n}{\partial r} \right)^2 \right) = 1, \end{aligned} \quad (8)$$

где интегрирование ведётся по объёму и поверхности сферы, в которую можно заключить нанорезонатор. В (8) объёмный и поверхностный интегралы, взятые по отдельности, расходятся, но их сумма остаётся конечной.

Для нахождения собственных частот и добротностей нанорезонаторов можно использовать метод интегральных уравнений (см., например, [60–63]), в котором, по видимому, нет проблем с расходимостью полей на бесконечности, возникающих при решении уравнений в частных производных (4). Тем не менее малая распространённость метода интегральных уравнений говорит о сложности его применения.

2.2.3. Моды, в которых собственное значение — диэлектрическая проницаемость. Более надёжные и однозначные результаты получаются, если в качестве собственного значения использовать не частоту (как обычно делается), а диэлектрическую проницаемость ε_n тела [1, 64, 65]. В данном случае собственные функции удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_n &= k_0^2 \varepsilon_n \mathbf{E}_n \text{ в резонаторе,} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_n &= k_0^2 \mathbf{E}_n \text{ вне резонатора}\end{aligned}\quad (9)$$

и условиям Зоммерфельда на бесконечности.

В (9) $\omega = k_0 c$ — действительная частота, а собственное значение диэлектрической проницаемости ε_n — комплексное число, причём можно показать [1, 64, 65] отрицательность его мнимой части, $\text{Im } \varepsilon_n < 0$, что можно интерпретировать как усиливающую среду, которая компенсирует потери на излучение. Именно последнее обстоятельство приводит к убыванию полей собственных функций $\mathbf{E}_n$ на бесконечности. Кроме того, наименьшие по абсолютной величине собственные значения ε_n имеют отрицательную действительную часть, что делает рассматриваемый метод особенно полезным для описания свойств плазмонных нанорезонаторов. Подчёркнём ещё раз: в системе (9) фактические материальные свойства резонатора не фигурируют.

Разложение решений уравнений Максвелла по собственным модам при произвольном возбуждающем поле $\mathbf{E}^0$ в рамках "ε-метода" имеет простой вид:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \sum_n \mathbf{E}_n \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon_n - \varepsilon(\omega)} \frac{\int_V \mathbf{E}_n \mathbf{E}^0 dV}{\int_V \mathbf{E}_n^2 dV}, \quad (10)$$

где $\varepsilon(\omega)$ описывает зависимость от частоты диэлектрической проницаемости конкретного материала, из которого сделан резонатор, а интегрирование ведётся по объёму резонатора V .

Как видно, $\varepsilon(\omega)$ входит в решение (10) довольно простым образом, позволяя тем самым легко проводить расчёты нанорезонаторов одинаковой формы, но из различных материалов. Это весьма важно при оптимизации тех или иных наноструктур.

Наиболее важной чертой решения (10) является наличие в знаменателе резонансного фактора $(\varepsilon_n - \varepsilon(\omega))$. При частотах ω_n , таких что $\varepsilon_n - \varepsilon(\omega_n) \approx 0$, в системе возникает резонанс, а в решении становится существенным лишь один член:

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}_n \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon_n - \varepsilon(\omega)} \frac{\int_V \mathbf{E}_n \mathbf{E}^0 dV}{\int_V \mathbf{E}_n^2 dV}. \quad (11)$$

В последнем случае можно говорить о возбуждении на частоте ω_n локализованной моды с пространственной структурой, описываемой полем моды $\mathbf{E}_n$, которая совсем не зависит от конкретного материала!

Ширина резонанса как функция частоты существенно зависит от мнимых частей ε_n и $\varepsilon(\omega)$. Важно заметить, что мнимые части ε_n и $\varepsilon(\omega)$ всегда имеют разные знаки, поэтому ширина резонанса (11) определяется суммой их модулей. Как будет показано далее, в случае нанорезонаторов мнимая часть $\varepsilon_n'' \sim (ka)^3$ и становится весьма малой и тогда ширина резонанса определяется в основном потерями внутри наночастиц, т.е. мнимой частью $\varepsilon(\omega)$. В тех случаях, когда мнимая часть $\varepsilon(\omega)$ мала, учёт

мнимой части ε_n становится необходимым и при этом возникает целый ряд интересных эффектов [66].

Таким образом, в рамках "ε-подхода" плазмонные колебания возникают естественным образом в результате решения спектральной задачи, в которой собственным значением является диэлектрическая проницаемость, а не частота. Другой важной особенностью описываемого подхода является то, что свойства плазмонов фактически зависят только от формы частицы, а не от конкретного материала, из которого она создана. Оба этих фактора делают ε-подход чрезвычайно полезным в самых различных приложениях и задачах. Более того, можно сказать, что ε-подход фактически является конструктивным определением локализованных плазмонов.

2.2.4. Идеальные неизлучающие моды. Обычно моды открытых резонаторов находят посредством решения однородных уравнений Максвелла с условиями излучения Зоммерфельда на бесконечности (5), поэтому такие моды *принципиально* связаны с потерями на излучение. Более того, такие моды неограниченно возрастают на бесконечности, что приводит к необходимости разработки очень сложных искусственных подходов для их описания (см., например, [46, 52–59]).

Однако нахождение всех мод — нетривиальная задача, и исследованные в недавних работах [18–23, 27–38] *квазинормальные* моды не исчерпывают всех решений однородных уравнений Максвелла в нанорезонаторах. Недавно в работах [39–41] был найден принципиально новый класс собственных колебаний в нанорезонаторах — идеальные неизлучающие моды, которые являются решениями однородных уравнений Максвелла и принципиально не содержат волн, уносящих энергию!

Более конкретно, в [40] предложено искать электромагнитное поле снаружи нанорезонатора в виде суперпозиции решений уравнений Максвелла, несингулярных в неограниченном свободном пространстве. Такой подход принципиально отличается от обычного подхода, в котором предполагается, что функции, описывающие поля вне тела, могут иметь сингулярности при аналитическом продолжении в область внутри резонатора. Например, при разложении любой компоненты поля $E(r, \theta, \varphi, \omega)$ вне резонатора по сферическим гармоникам $Y_n^m(\theta, \varphi)$ в соответствии с условием Зоммерфельда обычно используются *сингулярные* при $r = 0$ (внутри резонатора) сферические функции Ханкеля $h_n^{(1)}(k_0 r)$:

$$E(r, \theta, \varphi, \omega) \sim \sum a_{nm} h_n^{(1)}(k_0 r) Y_n^m(\theta, \varphi). \quad (12)$$

В [40] для нахождения полей неизлучающих мод вне резонатора предложено использовать только *несингулярные* внутри тела функции, например сферические функции Бесселя $j_n(kr)$, так что вместо (12) асимптотика полей имеет вид

$$E(r, \theta, \varphi, \omega) \sim \sum a_{nm} j_n(k_0 r) Y_n^m(\theta, \varphi). \quad (13)$$

Очевидно, что если решение (4) с асимптотикой (13) существует, то оно в принципе не будет иметь потока энергии и излучения на бесконечности!

Так как (13) не имеет особенностей во всём пространстве, начальную задачу о нахождении полей в бесконечном пространстве можно свести к задаче нахождения полей только внутри нанорезонатора. В результате

систему уравнений, определяющую неизлучающие моды в наночастице с проницаемостью ε , можно записать в виде системы двух уравнений для двух вспомогательных полей, $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, внутри области V , которая определяет резонатор:

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = ik_0 \mathbf{H}_1, \quad \nabla \times \mathbf{H}_1 = -ik_0 \varepsilon \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{r} \in V, \quad (14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_2 = ik_0 \mathbf{H}_2, \quad \nabla \times \mathbf{H}_2 = -ik_0 \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{r} \in V,$$

связанных только через граничные условия непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитных полей

$$\mathbf{E}_{t,1} = \mathbf{E}_{t,2}, \quad \mathbf{H}_{t,1} = \mathbf{H}_{t,2} \quad (15)$$

на поверхности резонатора.

Система (14), (15) при некоторых действительных значениях частоты или диэлектрической проницаемости становится совместной, что и означает появление "идеальных" неизлучающих мод. Физические поля внутри резонатора равны $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$, в то время как физические поля снаружи частицы определяются аналитическим продолжением вспомогательного решения $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ во внешнюю область.

Моды, найденные таким образом, образуют ортогональную систему и не имеют аналогов. В частности, их поля, в отличие от полей так называемых анапольных распределений токов [19, 31–36], вне частицы отличны от нуля и имеют вполне определённые разложения по сферическим гармоникам (13). Эти моды также отличаются от мод "связанные состояния в континууме", так как они не убывают экспоненциально быстро. Ближе всего новые моды находятся к странным (merkwürdige) модам Неймана–Вигнера [67], однако принципиальная разница между новыми модами и последними состоит в том, что потенциал нанорезонатора (диэлектрическая проницаемость) отличен от значения в свободном пространстве только в конечной пространственной области, тогда как потенциал странных мод Неймана–Вигнера [67] отличен от нуля во всём пространстве. Полное отсутствие излучения позволяет называть рассматриваемые новые моды идеальными неизлучающими модами.

Система уравнений (14), (15) очень сложна, и строгой математической теории для неё в общем случае пока не существует. Тем не менее в [40, 41] удалось найти условия существования идеальных неизлучающих мод для произвольных сфероидов, гипертсфероидов и эллиптических цилиндров, хорошо описывающих практически все интересные для приложений формы наночастиц. Идеальные неизлучающие моды не являются абстрактными решениями, они имеют большое значение для нахождения условий, при которых мощность рассеяния становится минимальной или даже нулевой, в то время как запасённая в нанорезонаторе энергия остаётся конечной. Это приводит к неограниченному возрастанию добротности данных мод (см. разделы 4.1.2, 4.2.2, 4.3.3).

2.3. Анапольные распределения токов и моды собственных колебаний

Понятие *ананоль* ввёл Зельдович [68] для обозначения тока, электромагнитные поля которого равны нулю там, где этот ток отсутствует. Анаполь является простейшим представителем семейства декартовых тороидальных (ананольных) мультиполей, необходимых (наряду с

декартовыми электрическими и магнитными мультиполями) для полного описания поля произвольных источников тока. Наглядной моделью тороидального анаполя может служить соленоид в виде тора, по обмотке которого течёт ток. Изменение анапольного (тороидального) момента со временем приводит в общем случае к излучению системой электромагнитных волн. Однако существуют такие распределения плотностей зарядов и токов $\rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, когда поля декартовых электрических мультиполей

$$Q_{l,m} \sim \int Y_{lm}^* \frac{\partial}{\partial r} [r j_l(kr)] \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \quad (16)$$

и декартовых тороидальных мультиполей

$$T_{l,m} \sim \int Y_{lm}^* j_l(kr) [\mathbf{r} \mathbf{J}(\mathbf{r})] d^3 \mathbf{r} \quad (17)$$

полностью компенсируют друг друга! Иногда такие распределения токов называют анапольными состояниями или даже анапольными модами (см. раздел 4.1.3). Эти определения, конечно, не вполне корректны, поскольку моды, по определению, являются решениями однородных уравнений Максвелла.

2.4. Симметричные свойства мод в оптических нанорезонаторах

Пространственная структура собственных мод резонаторов жёстко связана с симметрией формы резонаторов. В [69, 70] разработан алгоритм классификации собственных мод в резонаторах простейших форм в зависимости от их группы симметрии. Для каждого типа мод $\mathbf{E}_n$ найдено его векторное мультипольное содержание,

$$\mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = \sum a_n \mathbf{M}_{nmp}(\mathbf{r}) + \sum b_n \mathbf{N}_{nmp}(\mathbf{r}), \quad (18)$$

где $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — векторные сферические гармоники магнитного и электрического типов соответственно [51]. Соотношение (18) создаёт мостик между модальным и мультипольным описаниями.

Авторы [69] утверждают, что с помощью их подхода можно проектировать, прогнозировать и объяснять явления рассеяния и оптические свойства нанорезонаторов на основе только их симметрии без необходимости численного моделирования. Однако, несмотря на полезную качественную картину мультипольного состава мод определённой симметрии, без численного анализа, по видимому, нельзя установить для конкретных форм резонатора, какие из мультиполей в (18) подавлены, а какие — нет (см. также раздел 4.3.2).

2.5. Методы теории возмущений

для описания свойств оптических нанорезонаторов

2.5.1. Метод Рэлея (квазистатика). Ещё в 1897 г. Рэлей показал [71], что для описания рассеяния света на наночастицах часто можно использовать теорию возмущений по малому параметру

$$ka = \frac{\omega a}{c} = \frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1, \quad (19)$$

где a — характерный размер наночастицы, λ — длина волны излучения в окружающем пространстве. В [72, 73] метод Рэлея получил дальнейшее развитие. Применительно к нанорезонаторам данный подход можно сформулировать так [1]: все поля ищутся в виде рядов по

степеням k :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}^{(0)} + k\mathbf{E}^{(1)} + k^2\mathbf{E}^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}^{(0)} + k\mathbf{H}^{(1)} + k^2\mathbf{H}^{(2)} + \dots\end{aligned}\quad (20)$$

Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ в рамках такого подхода по степеням k (частоты) не раскладывается.

Далее, подставляя ряды (20) в уравнения Максвелла и приравнявая нулю члены при одинаковых степенях k , систему уравнений Максвелла можно свести к набору задач теории потенциала. В частности, собственные значения ε_n и собственные функции $\mathbf{E}_n$ ε -метода (см. раздел 2.2.3) в первом приближении могут быть найдены из решения уравнений

$$\nabla(\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}_n) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}_n = 0, \quad (21)$$

которые с помощью подстановки $\mathbf{E}_n = -\nabla\varphi_n$ сводятся к решению уравнений Лапласа

$$\Delta\varphi_n^{\text{in}} = 0, \quad \Delta\varphi_n^{\text{out}} = 0, \quad \varepsilon_n \frac{\partial\varphi_n^{\text{in}}}{\partial\mathbf{n}} \Big|_S = \bar{\varepsilon} \frac{\partial\varphi_n^{\text{out}}}{\partial\mathbf{n}} \Big|_S, \quad (22)$$

где $\bar{\varepsilon}$ — диэлектрическая проницаемость пространства, окружающего наночастицу, φ_n^{in} , φ_n^{out} — потенциалы собственных функций внутри и снаружи частицы соответственно, $\partial\varphi_n/\partial\mathbf{n}|_S$ — нормальная производная на границе частицы. Последнее уравнение в (22) обеспечивает непрерывность нормальных компонент индукции или тангенциальных компонент магнитного поля. При этом решение уравнений Максвелла с заданными возбуждающими полями (10) остаётся тем же самым. Заметим, что в данном случае для описания плазмонных колебаний вообще нет необходимости находить магнитные поля.

Квазистатическое описание плазмонных резонансов (22) в наночастицах существенно проще полной системы уравнений Максвелла, так как вместо уравнений Гельмгольца надо решать уравнения Лапласа и Пуассона, решение которых может быть найдено для нанорезонаторов разнообразных форм.

Самая важная особенность квазистатического описания (22) заключается в том, что оно позволяет иметь дело только с плазмонными колебаниями. Другие моды частиц (моды шепчущей галереи и т.д.) не возникают в этом описании и не затрудняют получение и интерпретацию результатов.

С математической точки зрения квазистатический ε -метод отличается от полного ε -метода тем, что в первом резонансные значения диэлектрической проницаемости ε_n являются отрицательными действительными числами. Отсутствие мнимой части в резонансных значениях диэлектрической проницаемости ε_n связано с отсутствием в квазистатическом приближении излучения, в то время как мнимые части ε_n возникают именно благодаря потерям на излучение.

Исходя из вышесказанного мы приходим к выводу, что квазистатический ε -метод хорошо описывает именно плазмонную часть спектра и может быть эффективно применён для определения свойств локализованных плазмонов.

Естественно, использование ε_n и модовых распределений $\mathbf{E}_n = -\nabla\varphi_n$, найденных в квазистатическом приближении, в (11) позволяет найти поля только в ближней зоне. Однако этого вполне достаточно для того, чтобы

определить не только собственные частоты ω_n (решая уравнение $\varepsilon(\omega_n) = \varepsilon_n$), но и их обобщённые добротности (2), для которых выражения запасённой энергии в резонаторе и энергии, излучаемой за один период, имеют вид

$$\begin{aligned}W_{n,\text{stored}} &= \frac{d(\omega_n \varepsilon(\omega_n))}{d\omega_n} \int_V dV |\mathbf{E}_n|^2, \quad P_{n,\text{rad}} = \frac{\omega k^3}{3} |\mathbf{d}_n|^2, \\ \mathbf{d}_n &= \frac{\varepsilon(\omega_n) - 1}{4\pi} \int_V dV \mathbf{E}_n,\end{aligned}\quad (23)$$

где $\mathbf{d}_n$ — электрический дипольный момент n -й моды нанорезонатора.

2.5.2. Теория возмущений для тел с большой диэлектрической проницаемостью. Метод Рэлея–Стивенсона (см. раздел 2.5.1) можно применять и к диэлектрическим телам с положительной диэлектрической проницаемостью, размеры L которых малы по сравнению с длиной волны λ_{diel} внутри тела, $L \ll \lambda_{\text{diel}} = \lambda_0/N$, где $N = \sqrt{\varepsilon} \rightarrow \infty$. Это ограничение, очевидно, исключает исследование нанорезонаторов с большой диэлектрической проницаемостью, когда размер резонатора меньше длины волны в вакууме, но больше длины волны в материале резонатора, $\lambda_0 \gg L \geq \lambda_{\text{diel}} = \lambda_0/N$.

При стремлении показателя преломления N к бесконечности целесообразно сосредоточиться на конкретном резонансном режиме, соответствующем *конечному* волновому числу k в диэлектрике, чтобы понять, что происходит с полями при $N \rightarrow \infty$ [74]. Во время этого предельного перехода kL приближается к конечному, отличному от нуля асимптотическому значению, являющемуся характеристикой моды. Волновое число k_0 в вакууме при таком переходе ($k_0 = 2\pi/\lambda_0 = k/N = \omega/c_0$) приближается к нулю вместе с частотой, а длина волны λ_0 стремится к бесконечности. В [74] предложено искать моды таких нанорезонаторов посредством разложения полей в ряды:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \frac{\mathbf{H}_2}{N^2} + \dots, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_1}{N} + \frac{\mathbf{E}_3}{N^3} + \dots \quad (24)$$

В результате в нулевом приближении собственные частоты колебаний $\omega_m = ck_m/N$ и их пространственная структура могут быть найдены из системы уравнений:

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_m &= k_m^2 \mathbf{H}_m \text{ в резонаторе,} \\ \nabla \times \mathbf{H}_m &= 0 \text{ вне резонатора,} \\ \nabla \mathbf{H}_m &= 0 \text{ везде.}\end{aligned}\quad (25)$$

В частном случае осесимметричных нанорезонаторов может существовать подмножество мод — так называемых изолированных (confined) мод, магнитные поля которых в пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$ равняются нулю вне резонатора и подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_m &= k_m^2 \mathbf{H}_m \text{ в резонаторе,} \\ \mathbf{H}_m &= 0 \text{ на границе резонатора.}\end{aligned}\quad (26)$$

Электрические поля имеют следующий порядок малости и находятся из соотношения

$$\mathbf{E}_m = \frac{i}{k_m N} \nabla \times \mathbf{H}_m. \quad (27)$$

Причём, несмотря на стремление электрического поля к нулю, энергия электрического поля в резонаторе остаётся конечной.

Подход ван Блейдела [74] является чрезвычайно важным не только ввиду возможности построить хорошую теорию возмущений, но и благодаря тому, что он позволяет понять общие свойства диэлектрических нанорезонаторов произвольной формы. В частности, применяя свой подход, ван Блейдел [74] показал, что для резонаторов с очень высокой диэлектрической проницаемостью радиационная добротность Q_{rad} зависит от ε как

$$Q_{\text{rad}} \sim \varepsilon^P, \quad (28)$$

где $P = 1,5$ для мод, излучающих как магнитный диполь (неизолированные (nonconfined) моды общего вида (см. (25))), и $P = 2,5$ для мод, излучающих как электрический диполь (изолированные моды (26)), а также для мод, излучающих как магнитный квадруполь.

Уравнение (28) и значения P , указанные выше, довольно общие и справедливы независимо от формы резонатора. Однако хорошую точность они дают только для больших значений ε . Например, для изолированных ТМ-мод осесимметричных нанорезонаторов с $\varepsilon = 80$ из (28) получим $Q = 57000(!)$.

В [75] на основании (28) найдены более точные аппроксимационные формулы для добротностей диэлектрических наночилиндров с различными аспектными соотношениями.

2.5.3. Обобщённая теория возмущений Бриллюэна – Вигнера. В разделах 2.5.1, 2.5.2 рассмотрены теории возмущений, основанные на малости размеров резонатора относительно длины волны или на малости $1/\varepsilon$ для материала резонатора. Теория возмущений Вигнера – Бриллюэна [30, 69, 76, 77] строится исходя из малости вариаций формы тела, для которого набор собственных функций и собственные значения известны, — как правило, сферы. Для сферы известен полный набор собственных функций — это векторные сферические гармоники с нормировкой (8) — и разложение любой моды $\mathbf{E}_n$ резонатора с неоднородностями диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon(\mathbf{r})$,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_n = (\varepsilon^* + \Delta\varepsilon(\mathbf{r})) \frac{\Omega_n^2}{c^2} \mathbf{E}_n, \quad (29)$$

можно представить в виде

$$\mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = \sum_s C_{ns} \mathbf{Y}_s(\mathbf{r}), \quad (30)$$

где Ω_n — комплексная собственная частота моды $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{Y}_s(\mathbf{r})$ — собственная функция сферы с диэлектрической проницаемостью ε^* и комплексной собственной частотой ω_s , а s — составной индекс, включающий в себя поляризацию, а также орбитальное, азимутальное и радиальное квантовые числа.

Из обобщённой теории возмущений Вигнера – Бриллюэна следует дисперсионное уравнение

$$\frac{1}{\omega_{s'}} \sum_s C_{ns} [\delta_{ss'} + V_{ss'}] = \frac{1}{\Omega_n} C_{ns'}, \quad (31)$$

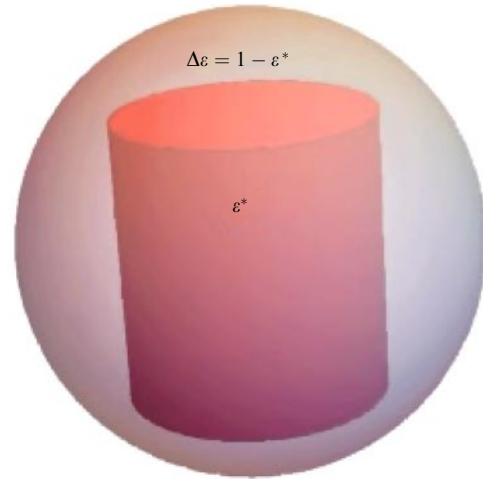


Рис. 2. Иллюстрация применения теории возмущений Бриллюэна – Вигнера на примере цилиндра внутри сферической области. В сферу с диэлектрической проницаемостью ε^* вне цилиндра вносится возмущение $\Delta\varepsilon = 1 - \varepsilon^*$. В результате возмущённый резонатор имеет форму цилиндра с проницаемостью ε^* .

где интеграл перекрытия

$$V_{ss'} = \frac{1}{2\varepsilon^*} \int dV \Delta\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{Y}_s \mathbf{Y}_{s'} \quad (32)$$

описывает взаимодействие между различными невозмущёнными модами сферического резонатора за счёт его малой деформации.

Можно подобрать такую неоднородность диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon(\mathbf{r})$, что фактически (29) будет описывать резонатор, отличный от сферического. Важно, чтобы этот резонатор оказался внутри первоначального сферического резонатора, иначе сходимость будет плохой. Например, если выбрать $\Delta\varepsilon = 1 - \varepsilon^*$ в области между цилиндром, вписанным в исходную сферу, и её поверхностью, то (31) будет описывать собственные колебания цилиндра (рис. 2). Применения данного метода рассмотрены в разделе 4.

2.6. Численные методы для описания свойств оптических нанорезонаторов

Обычные квазинормальные моды, их частоты и добротности относительно легко находятся с помощью изучения спектров рассеяния на наночастицах с использованием коммерческих программных пакетов COMSOL [78] или CST Studio Suite [79], позволяющих задать специальную пространственную структуру пучков для возбуждения и исследования мод, остающихся незамеченными при возбуждении плоской волной.

Указанные программные пакеты можно использовать и для нахождения коэффициентов разложения в различных методах теории возмущений. Более детальный анализ обычных мод открытых резонаторов с использованием тех же пакетов может быть проведён, например, с помощью численного подхода, предложенного в [80, 81].

Для анализа собственных частот можно также воспользоваться численным решением поверхностных или объёмных интегральных уравнений. Эти методы высокоэффективны, так как имеют малую размерность. Однако соответствующие алгоритмы сложны и их надо реализовывать вручную (см., например, [61]).

3. Моды в плазмонных нанорезонаторах

Уникальность плазмонных нанорезонаторов заключается в том, что металлические наночастицы обладают собственными колебаниями с частотами в оптической области от ультрафиолетового (УФ) диапазона до инфракрасного (ИК). С другой стороны, существует много методов создания плазмонных наночастиц, в частности с помощью коллоидной химии и электронной нанолитографии. Наконец, свойства плазмонных нанорезонаторов в первом приближении можно выяснить, используя квазистатистическое приближение (см. раздел 2.5.1). Всё это привело к бурному развитию исследований резонансных свойств плазмонных наночастиц [1].

3.1. Оптические свойства сферических плазмонных резонаторов

Сферическая геометрия является уникальной, поскольку позволяет детально описать все оптические свойства сферических нанорезонаторов, которые полностью определяются полюсами коэффициентов отражения сферических волн различной поляризации, падающих на сферическую частицу с произвольными размером и составом [1, 51, 82]:

$$q_n = \frac{\varepsilon_1 \frac{d}{dz_2} [z_2 j_n(z_2)] j_n(z_1) - \varepsilon_2 \frac{d}{dz_1} [z_1 j_n(z_1)] j_n(z_2)}{\varepsilon_1 \frac{d}{dz_2} [z_2 h_n^{(1)}(z_2)] j_n(z_1) - \varepsilon_2 \frac{d}{dz_1} [z_1 j_n(z_1)] h_n^{(1)}(z_2)},$$

ТМ-поляризация, (33)

$$p_n = \frac{\mu_1 \frac{d}{dz_2} [z_2 j_n(z_2)] j_n(z_1) - \mu_2 \frac{d}{dz_1} [z_1 j_n(z_1)] j_n(z_2)}{\mu_1 \frac{d}{dz_2} [z_2 h_n^{(1)}(z_2)] j_n(z_1) - \mu_2 \frac{d}{dz_1} [z_1 j_n(z_1)] h_n^{(1)}(z_2)},$$

ТЕ-поляризация. (34)

Здесь $z_{1,2} = \sqrt{\varepsilon_{1,2} \mu_{1,2}} k_0 a = k_{1,2} a$, a — радиус резонатора, $\varepsilon_{1,2}$, $\mu_{1,2}$ — диэлектрические и магнитные проницаемости сферы (индекс 1) и окружающего пространства (индекс 2) соответственно.

Для плазмонных немагнитных нанорезонаторов в вакууме дисперсионные уравнения для частот дипольных, квадрупольных и октупольных резонансов могут быть найдены из (34) разложением по малому размеру параметру $k_0 a$ [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{res},1}(\omega) + 2 + \frac{12}{5}(k_0 a)^2 + 2i(k_0 a)^3 + \dots &= 0, \\ \varepsilon_{\text{res},2}(\omega) + \frac{3}{2} + \frac{5}{14}(k_0 a)^2 + \frac{65}{392}(k_0 a)^4 + \frac{i}{12}(k_0 a)^5 + \dots &= 0, \\ \varepsilon_{\text{res},3}(\omega) + \frac{4}{3} + \frac{56}{405}(k_0 a)^2 + \frac{11788}{601425}(k_0 a)^4 + \\ + \frac{469672}{95954625}(k_0 a)^6 + \frac{4i}{2025}(k_0 a)^7 + \dots &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

где, как обычно, $k_0 = \omega/c$. Важно, что мнимые части резонансной диэлектрической проницаемости (которые связаны с потерями на излучение) при повышении мультипольности возникают во всё более высоких порядках по степеням $k_0 a$, что обусловлено малостью соответствующих интенсивностей излучения, приводя тем самым к большим добротностям таких собственных колебаний.

Плазмонные колебания при выполнении условий (35) имеют место для сколь угодно малых сфер и представляют интерес с точки зрения различных приложений.

Потенциалы квазистатистических электрических полей, соответствующих резонансам (35), находятся из (22) и имеют простой вид:

$$\Phi_n^m = \begin{cases} \left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n^m(\theta, \varphi), & r < a, \\ \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n^m(\theta, \varphi), & r > a, \end{cases} \quad (36)$$

очень напоминающий решение квантово-механической задачи для атома водорода.

Выражения (35), (36) вместе с решением общей задачи рассеяния в рамках ε -метода (11) дают хорошее описание всех оптических свойств сферических плазмонных нанорезонаторов.

Несмотря на то что электрические поля собственных колебаний в плазмонных нанорезонаторах описываются простыми сферическими гармониками, потоки энергии даже для очень малых нанорезонаторов имеют довольно сложный вид. В частности, в [83–85] показано, что вблизи резонансов в картине потоков энергии в резонаторе и вокруг него имеются нетривиальные вихри. При учёте слабой диссипации эти вихри заканчиваются внутри сферы [86].

Весьма интересный режим рассеяния сходящейся сферической волны $h_n^{(2)}(k_0 r)$ на плазмонной сфере найден в [87], где показано, что при выполнении условия

$$\varepsilon_1 \frac{d}{dz_2} [z_2 h_n^{(2)}(z_2)] j_n(z_1) = \varepsilon_2 \frac{d}{dz_1} [z_1 j_n(z_1)] h_n^{(2)}(z_2) \quad (37)$$

отражённая сферическая волна, пропорциональная $h_n^{(1)}(k_0 r)$, полностью отсутствует и решение уравнений Максвелла превращается в единый вихрь, начинающийся в бесконечности и заканчивающийся в центре сферы, т.е. возникает идеальное когерентное поглощение (Coherent Perfect Absorption — CPA). Обратим внимание, что условие (37) совпадает с условием обращения в нуль комплексно сопряжённого знаменателя коэффициента Ми (33), поэтому найденное в [87] решение можно рассматривать как обращённое во времени решение для спазера [2].

Сходящуюся сферическую волну $h_n^{(2)}(k_0 r)$, приводящую к идеальному поглощению, нельзя точно реализовать на практике. Поэтому для реализации идеального когерентного поглощения плазмонной наночастицей в [88] использована специально подобранная суперпозиция радиально поляризованных пучков Бесселя в виде

$$\begin{aligned} E_{\text{in}}(\mathbf{r}) &= \begin{pmatrix} E_\rho \\ E_\varphi \\ E_z \end{pmatrix} = \int_0^{k_0} dk_\rho E_0(k_\rho) \begin{pmatrix} ik_z J_1(k_\rho \rho) \\ 0 \\ k_\rho J_0(k_\rho \rho) \end{pmatrix} \times \\ &\times \exp\left(-i\sqrt{k_0^2 - k_\rho^2} z\right), \end{aligned} \quad (38)$$

где весовая функция $E_0(k_\rho)$ подбирается для достижения полного поглощения. При предположении, что поглощающая наночастица может быть описана в дипольном приближении, в [88] найден явный вид для $E_0(k_\rho)$.

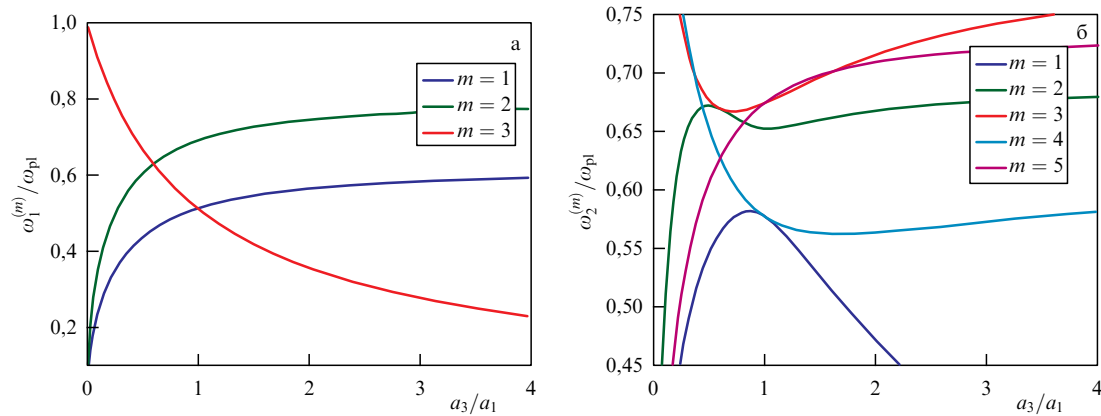


Рис. 3. Собственные частоты плазменных колебаний трёхосного эллипсоида как функция отношения полуосей a_3/a_1 (при $a_2/a_1 = 0,6$) для (а) $n = 1$, (б) $n = 2$ [90].

3.2. Оптические свойства сфероидальных и эллипсоидальных плазменных резонаторов

Оптические свойства плазменных резонаторов сфероидальной и эллипсоидальной форм также могут быть найдены в рамках квазистатического приближения.

Для вытянутых сфероидов с полуосями $a = b < c$ дисперсионное уравнение, определяющее частоты плазменных колебаний, имеет вид [1]

$$\varepsilon(\omega_n^m) = \varepsilon_n^m = \frac{(Q_n^m(\xi_0))' P_n^m(\xi_0)}{(P_n^m(\xi_0))' Q_n^m(\xi_0)}, \quad (39)$$

где параметр $\xi_0 = c/\sqrt{c^2 - a^2}$, P_n^m , Q_n^m — присоединённые полиномы Лежандра первого и второго рода соответственно. Соответствующие (39) распределения модовых потенциалов имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_n^m &= P_n^m(\eta) P_n^m(\xi) Q_n^m(\xi_0) \begin{bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{bmatrix}, \quad \xi < \xi_0, \\ \varphi_n^m &= P_n^m(\eta) P_n^m(\xi_0) Q_n^m(\xi) \begin{bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{bmatrix}, \quad \xi > \xi_0, \end{aligned} \quad (40)$$

где η , ξ , φ — вытянутые сфероидальные координаты [89]. Для плазменного нанорезонатора в форме сплюснутого сфероида выражения (40) также справедливы после соответствующего аналитического продолжения.

Наиболее общей формой плазменного нанорезонатора, для которого известны собственные частоты, является трёхосный наноэллипсоид [1, 90, 91]. Для произвольного плазменного резонатора в виде наноэллипсоида с полуосями $a_1 > a_2 > a_3$ вдоль каждой из осей x_1 , x_2 , x_3 декартовой системы координат дисперсионное уравнение, определяющее частоты плазменных колебаний ω_n^m , имеет вид

$$\varepsilon(\omega_n^m) = \varepsilon_n^m(a_1, a_2, a_3) = \frac{E_n^m(a_1; a_1, a_2, a_3) F_n^m(a_1; a_1, a_2, a_3)}{E_n^m(a_1; a_1, a_2, a_3) F_n^m(a_1; a_1, a_2, a_3)}. \quad (41)$$

Для собственных функций плазменных колебаний соответственно имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_n^m &= E_n^m(\mu; a_1, a_2, a_3) E_n^m(\nu; a_1, a_2, a_3) \times \\ &\times \begin{cases} F_n^m(a_1; a_1, a_2, a_3) E_n^m(\rho; a_1, a_2, a_3), & \rho \leq a_1, \\ E_n^m(a_1; a_1, a_2, a_3) F_n^m(\rho; a_1, a_2, a_3), & \rho > a_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (42)$$

В (41), (42) F_n^m , E_n^m — внешние и внутренние функции Ламе соответственно, ρ , μ , ν — эллипсоидальные координаты [92], n — натуральные числа, m изменяется от 1 до $2n + 1$, как в сферических гармониках. На рисунке 3 [90] показаны зависимости собственных частот низших плазменных колебаний от аспектного отношения a_3/a_1 в наноэллипсоиде, диэлектрическая проницаемость которого описывается законом Друде:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}. \quad (43)$$

В работе [90] приведены также графики собственных частот для мод более высокого порядка.

В трёхосном эллипсоиде отсутствует осевая симметрия, поэтому происходит расщепление собственного значения, вырожденного в случае сферы, на $2n + 1$ различных собственных значений. Более того, при изменении параметров эллипсоида собственные значения изменяются немонотонным и нетривиальным образом. Это чрезвычайно важно, так как позволяет эффективно управлять оптическими процессами, в которых имеется несколько частот, например, для создания ярких искусственных флуорофоров [91].

Уравнения (41), (42) исчерпывают решение задачи о плазменных колебаниях в трёхосном наноэллипсоиде в квазистатическом (рэлееском) приближении. Поправки за счёт эффектов запаздывания и явные выражения для собственных функций эллипсоидальных резонаторов в декартовых координатах можно найти в [90].

Влияние модовой структуры в серебряном наносфероиде на временную динамику плазменных колебаний в нём рассмотрено в работе [93], где показано, что для такой наночастицы использование только двух квазинормальных мод позволяет хорошо описать экспериментальные данные по измерению ультрабыстрой динамики с помощью фотоэмиссионной электронной микроскопии (PhotoEmission Electron Microscopy — PEEM) [94].

3.3. Оптические свойства кластеров из плазменных резонаторов

В разделах 3.1, 3.2 представлены результаты работ по плазменным резонансам в изолированных частицах, топологически эквивалентных сфере. Ещё более интересные резонансные колебания возможны в кластерах

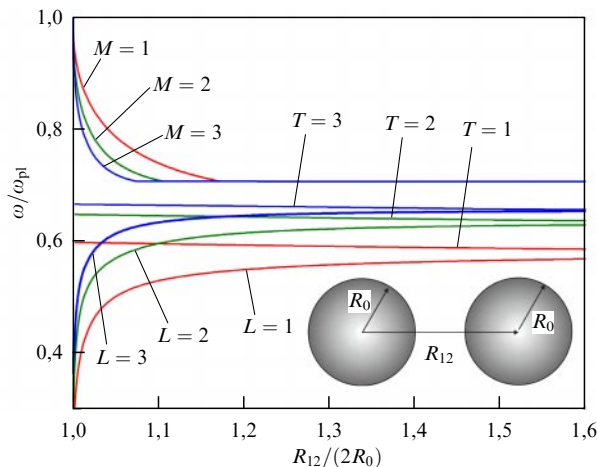


Рис. 4. Собственные частоты поперечных плазмонных колебаний ($m = 1$) в кластере из двух наносфер в зависимости от расстояния между ними. В верхней части рисунка хорошо заметно возникновение новых мод (M -мод) на малых расстояниях между сферами. Предполагается, что диэлектрическая проницаемость описывается законом Друде (43).

наночастиц, так как они имеют более сложную геометрию и большее число управляющих параметров.

В работах [95–97] разработано аналитическое описание резонансных свойств колебаний в димере из двух сферических наночастиц.

На рисунке 4 показаны зависимости собственных частот поперечных колебаний ($m = 1$) плазмонного димера от расстояния между наночастицами. Моды L и T связаны с гибридизацией мод отдельных наночастиц [98, 99], в то время как высокочастотные M -моды, появляющиеся только на малых расстояниях $R_{12}/(2R_0) \leq 1,2$, не имеют аналога и соответствует связанным состояниям, возникающим в режиме сильного взаимодействия.

Для собственных частот M -мод имеет место аналитическое решение [95–97]:

$$\omega_m^{(M)} = \frac{\omega_{pl}}{\sqrt{1 - \varepsilon_m^{(M)}}},$$

$$\varepsilon_m^{(M)} = -(m + M + \delta_m) \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{\frac{R_{12}^2}{4R_0^2} - 1} \right), \quad (44)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad M = 1, 2, 3, \dots$$

Поправки δ_m , не зависящие от номера моды M , равны: $[1/2, -0,08578, -0,2639, -0,33, -0,3769, -0,4, -0,4172, 0,4289, -0,4377, -0,4446]$ для $m = 0-9$ соответственно. Эти выражения показывают, что при сближении наносфер резонансные частоты M -мод димера стремятся к плазменной частоте ω_{pl} .

Для L -мод имеется аналогичное аналитическое решение [95–97]:

$$\omega_m^{(L)} = \frac{\omega_{pl}}{\sqrt{1 - \varepsilon_m^{(L)}}},$$

$$\varepsilon_m^{(L)} = -\frac{(m + L - 1/2)^{-1}}{\operatorname{arsinh} \left(\sqrt{R_{12}^2/(4R_0^2) - 1} \right)} + \dots, \quad (45)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad L = 1, 2, \dots,$$

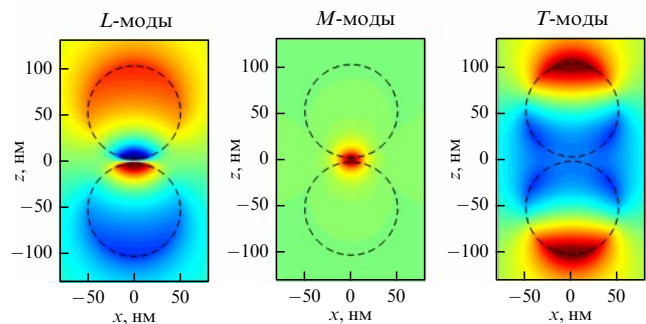


Рис. 5. Пространственное распределение потенциала в некоторых плазмонных модах в кластере из двух наносфер ($m = 0$, осесимметричные продольные колебания) [97].

т.е. при сближении наносфер резонансные частоты L -мод димера стремятся к нулю.

На рисунке 5 показано пространственное распределение потенциала продольных мод M, L, T ($m = 0$). Видно, что пространственная структура антисимметричных (L -моды) и симметричных (T -моды) волновых функций в целом соответствует структуре волновых функций изолированных плазмонных нанорезонаторов. А именно: положительный заряд расположен на одной полусфере, а равный ему в силу электронейтральности сферы отрицательный заряд расположен на противоположной части сферы. Взаимодействие между плазмонными нанорезонаторами в данном случае сводится лишь к некоторому количественному перераспределению заряда на противоположных полусферах.

В случае симметричных M -мод ситуация другая: как положительные, так и отрицательные заряды концентрируются вблизи щели между наносферами. На удалённых от зазора точках наносфер волновые функции плазмонных молекул фактически обращаются в нуль.

По мере увеличения расстояния между сферами локализация M -мод уменьшается, и при критическом расстоянии между сферами эти моды исчезают, в то время как гибридизованные L - и T -моды не испытывают существенных изменений.

Различие в локализации M -мод и L - и T -мод обуславливает их принципиальную разницу по отношению к возбуждающим полям. L - и T -моды имеют поляризуемость порядка объёма наносферы, $\alpha \sim R_0^3$, и эффективно взаимодействуют с однородными внешними полями с соответствующими ориентацией и симметрией. Напротив, M -моды имеют сравнительно малую поляризуемость, $\alpha \sim \Delta^3$, где Δ — величина щели между сферами, поэтому они слабо (по сравнению с L - и T -модами) возбуждаются однородными оптическими полями. С другой стороны, M -моды эффективно взаимодействуют с сильно неоднородными полями, которые локализованы вблизи щели между сферами. Поля такого рода возникают при излучении атомов и молекул, расположенных вблизи щели. Это обстоятельство делает M -моды чрезвычайно перспективными с точки зрения создания наносенсоров и элементов наноустройств, чувствительных к излучению отдельных молекул.

Аналогичное исследование резонансных свойств кластера из двух плазмонных наносфероидов проведено в [100].

В настоящее время активно исследуются плазмонные резонансные наноструктуры, основанные на технологии

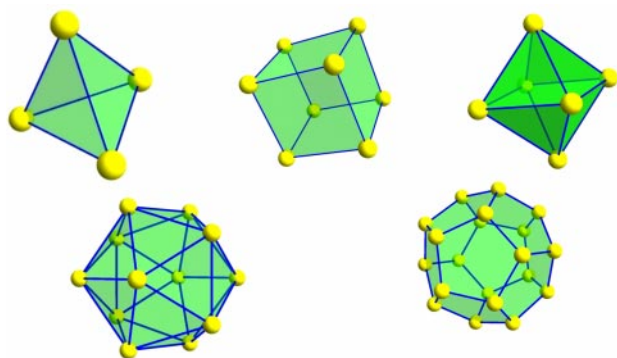


Рис. 6. Платоновы кластеры наночастиц, показанных жёлтыми шариками.

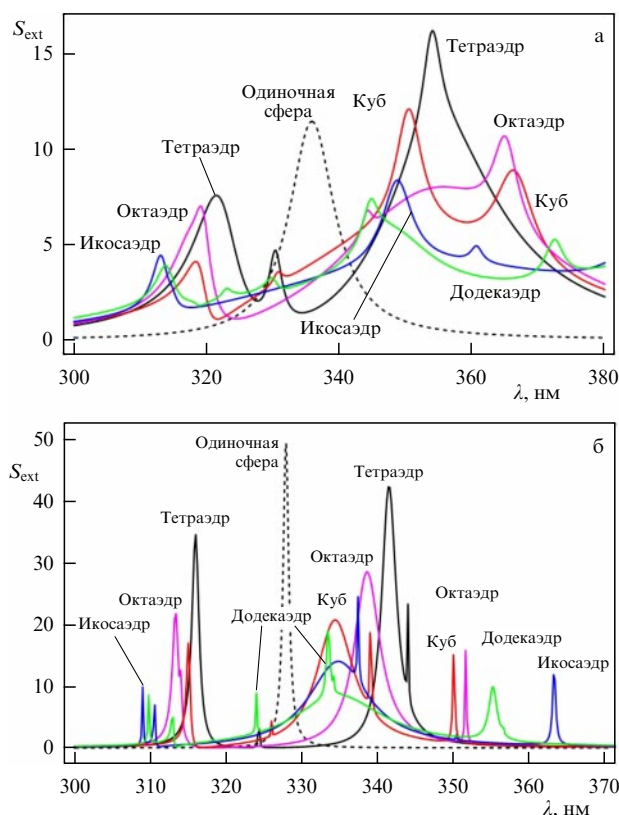


Рис. 7. Сравнение спектров экстинкции платоновых кластеров: (а) Ag, $L_0 = 50$ нм, $R_0 = 20$ нм; (б) $L_0 = 25$ нм, $R_0 = 10$ нм (потери в металле уменьшены в 20 раз по сравнению с таковыми в реальном Ag) [110].

ДНК-оригами [101–109]. Эта технология является весьма перспективной, так как позволяет позиционировать наночастицы в наноструктуре с большей точностью, чем современная электронная или оптическая литография. Создание сложных трёхмерных наноструктур из наночастиц с помощью ДНК-связей возможно на основе канонического спаривания оснований ДНК по Уотсону–Крику [101]. Такой подход открывает беспрецедентно широкие возможности контроля над трёхмерными макромолекулярными структурами на больших масштабах. С помощью этой технологии уже реализованы наноструктуры из наночастиц в виде массивов [102, 103], спиралей [104], тетраэдров [105], цепочек [106, 107] или наноколечек [108]. Недавно была продемонстрирована возможность передачи информации с малыми по-

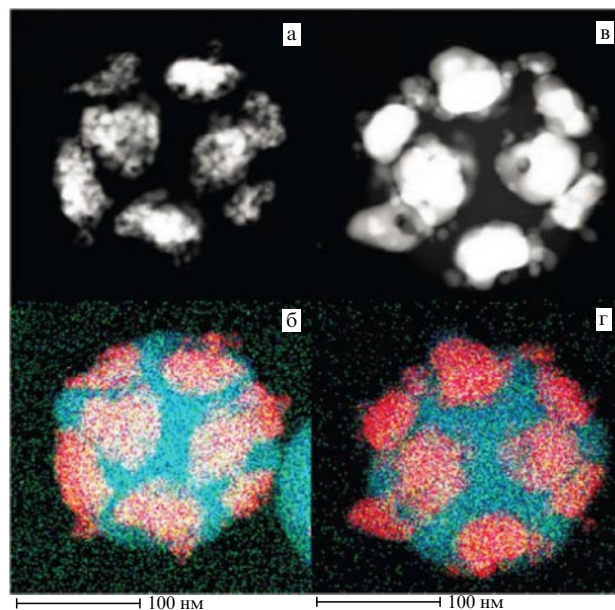


Рис. 8. Синтезированные додекаподы. Изображение, полученное с помощью растрового электронного микроскопа (РЭМ), додекаподов до (а) и после (в) конденсации затравочных ядер. Рисунок б и г показывают соответственно элементный состав додекапода: зелёный цвет — SiO_2 , красный — Au [111].

териями по плазмонному волноводу, созданному с помощью технологии ДНК-оригами [109].

В [110] исследованы резонансные оптические свойства платоновых кластеров, которые могут быть синтезированы с помощью технологии ДНК-оригами, в зависимости от их топологии и размеров (рис. 6). Для описания оптических свойств таких кластеров в [110] использовалась модель, в которой отдельные наночастицы характеризуются изотропными поляризуемостями и индуцированными дипольными моментами, а взаимодействие между наночастицами описывается запаздывающей функцией Грина. На рисунке 7 показаны спектры экстинкции различных платоновых кластеров при одинаковых длине ребра L_0 и радиусе R_0 серебряных частиц, но при разных топологиях.

Сравнение рис. 7а и б показывает, что число наблюдаемых мод платоновых кластеров эффективно увеличивается при уменьшении радиационных и джоулевых потерь. Таким образом, рис. 7 может служить ориентиром для понимания оптических свойств метаатомов в форме платоновых кластеров и интерпретации экспериментальных данных.

В [111] синтезирован плазмонный нанорезонатор в форме додекапода, состоящего из кварцевого ядра и 20 золотых напёршков — "ножек" (рис. 8), и экспериментально показано, что величина индуцированного в нём магнитного дипольного момента составляет около 14 % от индуцированного электрического дипольного момента, т.е. продемонстрирован оптический магнетизм.

4. Моды в диэлектрических нанорезонаторах

Главным достоинством рассмотренных в разделе 3 плазмонных нанорезонаторов является то, что собственные колебания могут существовать при сколь угодно малых размерах нанорезонаторов. Однако ценность

этого факта существенно снижается вследствие того, что джоулевы потери в плазмонных резонаторах довольно велики и фактически добротности плазмонных нанорезонаторов ограничены величинами порядка 10–100.

Недавно начались исследования альтернативного подхода к управлению светом на наномасштабе, основанного на диэлектрических нанорезонаторах, т.е. на наноструктурах из диэлектрических материалов с высоким или умеренным показателем преломления, таких как Si, Ge, GaAs, TiO₂, Cu₂O и т.д., и очень малыми внутренними (джоулевыми) потерями. Хотя большинство диэлектрических нанорезонаторов имеет размеры более 100 нм в одном или нескольких измерениях, в большинстве публикаций они называются наносферами, наностержнями, нанодисками и т.д. в соответствии с их формой. Мы также будем их называть нанорезонаторами, так как их размеры существенно меньше длины волны в свободном пространстве.

История диэлектрических резонаторов началась с работы [47] 1939 г., заложившей основы теории таких резонаторов. Важное развитие этому направлению дал ван Блэйдел [74], который разработал теорию резонаторов с большой диэлектрической проницаемостью и отметил важность их осевой симметрии для получения высокой добротности. Диэлектрические резонаторы получили дальнейшее развитие в СВЧ-технике [75, 112, 113]. В настоящее время благодаря развитию нанотехнологий стало возможным и развитие диэлектрических резонаторов оптического диапазона [7, 16, 114, 115].

4.1. Сферические диэлектрические нанорезонаторы

4.1.1. Обычные моды. Как и сферические плазмонные резонаторы, сферические диэлектрические резонаторы полностью описываются теорией Ми, т.е. коэффициентами рассеяния (33), (34). На рисунке 9 показана зависимость абсолютной величины коэффициентов Ми q_4 (33) от диэлектрической проницаемости и размера ka немагнитной сферы, расположенной в вакууме. Чёрный цвет соответствует коэффициенту Ми, равному единице, т.е. резонансу, а белый цвет — коэффициенту Ми, равному нулю (отсутствие рассеяния) [1].

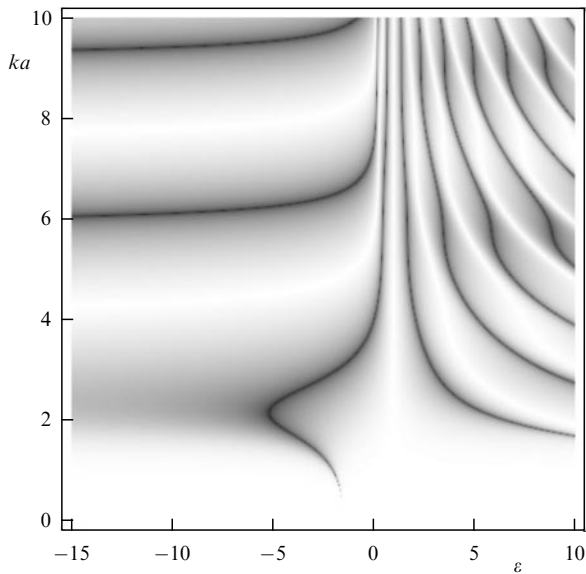


Рис. 9. Зависимость абсолютной величины коэффициентов Ми $|q_4|$ (33) от диэлектрической проницаемости и размера ka немагнитной сферы, расположенной в вакууме. Чёрный цвет соответствует коэффициенту Ми, равному единице, т.е. резонансу, а белый цвет — коэффициенту Ми, равному нулю (отсутствие рассеяния) [1].

рисунка видно, что для сфер субволновых размеров резонанс возможен только при больших диэлектрических проницаемостях, когда длина волны в диэлектрике становится существенно меньше размеров нанорезонатора.

Полюсы коэффициентов рассеяния Ми при положительных диэлектрических проницаемостях полностью определяют частоты собственных колебаний квазинормальных мод диэлектрических сфер. В случае больших диэлектрических проницаемостей, $\varepsilon \rightarrow \infty$, резонансные свойства диэлектрической сферы детально исследованы в [74, 116, 117]. В случае ТМ-мод подход [117] приводит к следующим асимптотическим выражениям для собственных частот и добротностей трёх низших мод:

$$\begin{aligned} k_n^{\text{TM}} a &= \frac{X_n^{\text{TM}}}{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 - \frac{1}{n\varepsilon} + \dots \right), \quad Q_1^{\text{TM}} = \frac{\varepsilon^{5/2}}{2(X_1^{\text{TM}})^3}, \\ Q_2^{\text{TM}} &= \frac{18\varepsilon^{7/2}}{(X_2^{\text{TM}})^5}, \quad Q_3^{\text{TM}} = \frac{2025\varepsilon^{9/2}}{2(X_3^{\text{TM}})^7}, \\ J_{n+1/2}(X_n^{\text{TM}}) &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Для ТЕ-мод подход [117] приводит к выражениям

$$\begin{aligned} k_n^{\text{TE}} a &= \frac{X_n^{\text{TE}}}{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)\varepsilon} + \dots \right), \\ Q_n^{\text{TE}} &= \frac{\Gamma^2(n+1/2)(4\varepsilon)^{n+1/2}}{4\pi(X_n^{\text{TE}})^{2n-1}}, \quad J_{n-1/2}(X_n^{\text{TE}}) = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Сравнивая добротности ТМ- и ТЕ-мод, можно увидеть, что добротности ТМ-мод существенно больше. Последнее связано с тем, что, как показано в [74], в резонаторах с большой диэлектрической проницаемостью ТМ-моды являются изолированными, т.е. в пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$ магнитное поле находится строго внутри резонатора, а электрическое поле равняется нулю. ТЕ-моды, напротив, не являются изолированными, и даже в пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$ их магнитное поле отлично от нуля за пределами сферы, вследствие чего неизоллированные ТЕ-моды излучают сильнее и поэтому имеют меньшие добротности. Это обстоятельство имеет общий характер.

4.1.2. Идеальные неизлучающие моды. Для сферического немагнитного нанорезонатора радиусом R в вакууме выражение для магнитного поля идеальных неизлучающих ТМ-мод имеет вид [40]:

$$\begin{aligned} H_\phi^{(n)} &= j_n(z_0) j_n(k_0 \sqrt{\varepsilon} r) P_n^1(\cos \theta), \quad r < R, \\ H_\phi^{(n)} &= j_n(z_1) j_n(k_0 r) P_n^1(\cos \theta), \quad r > R, \\ z_0 &= k_0 R, \quad z_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon} R, \end{aligned} \quad (48)$$

который следует из прямого решения уравнения Максвелла.

Заметим, что в случае сферы условие существования идеальных неизлучающих мод (48)

$$\varepsilon j_n(z_1) [z_0 j_n(z_0)]' = j_n^{(1)}(z_0) [z_1 j_n(z_1)]' \quad (49)$$

совпадает с обращением в нуль числителя коэффициента рассеяния Ми. Дисперсионное уравнение (49) имеет помимо комплексных корней действительные корни, которые и соответствуют идеальным неизлучающим модам. На рисунке 10 показаны зависимости $\text{Re}(H_\phi(r, \theta = \pi/2))$ от радиуса идеальной неизлучающей

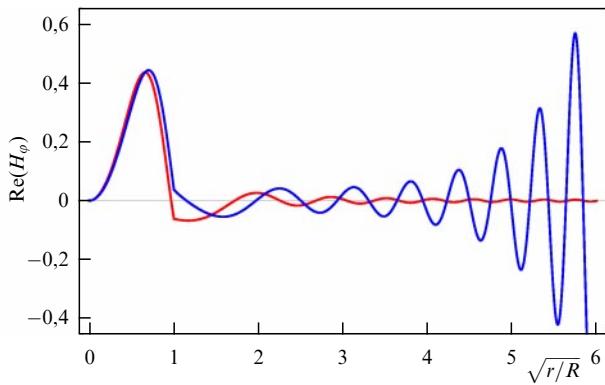


Рис. 10. Зависимость $\text{Re}(H_\phi(r, \theta = \pi/2))$ от радиуса обычной TM_{101} -моды (синяя кривая, $k_0 R = 1,35715 - 0,160978i$) и идеальной неизлучающей РТМ_{101} -моды (красная кривая $k_0 R = 1,51893$) в сфере радиусом R с $\varepsilon = 10$ [40].

ТМ-моды и обычной ТМ-моды с радиационными потерями в сфере с $\varepsilon = 10$. Из рисунка видно, что поле обычной (квазинормальной) моды экспоненциально возрастает на бесконечности, тогда как поле идеальной неизлучающей моды убывает и не имеет радиационных потерь (!). В [40] также показано, что потери в диэлектрике практически не влияют на свойства идеальных мод.

4.1.3. Анапольные распределения токов. В работах [32–36] также исследован случай обращения в нуль отдельных коэффициентов рассеяния M_i , но главное внимание уделено демонстрации того, как разложение по декартовым мультиполям с учётом тороидальных моментов согласуется с разложением по векторным сферическим гармоникам, т.е. приводит к нулевому полю вне сфер и соответственно к нулевому излучению. В указанных работах распределение полей внутри сферы, которое приводит к компенсации декартова электрического дипольного момента декартовым тороидальным электрическим моментом, называется анапольной модой, что не вполне корректно, так как моды, по определению, являются решениями уравнения Максвелла в случае отсутствия токов. С нашей точки зрения более корректно говорить об анапольных распределениях токов.

4.1.4. Возбуждение мод сферических нанорезонаторов. Для осознания практической важности обычных и идеальных мод надо также рассмотреть, как они могут проявиться в практических условиях, т.е. найти условия их возбуждения. Здесь можно выделить два направления исследований. В первом рассматриваются условия возбуждения нескольких резонансных мод одновременно и возникающие при этом интерференционные явления в дальней зоне. Так, в [118] впервые было замечено, что при $2\pi\sqrt{\varepsilon}R/\lambda_0 > 2,7$ диаграмма направленности излучения, рассеянного диэлектрической сферой радиусом R , переходит от рэлеевского ненаправленного рассеяния к рассеянию вперёд. В [118] такой эффект объяснён интерференцией наведённых в сфере электрических и магнитных дипольных моментов.

В работах [9–11] результаты [118] обобщены для случая возбуждения кремниевых сферических нанорезонаторов излучением дипольного источника, а также по-

казано, что в них могут одновременно возбуждаться и электрические, и магнитные дипольные моменты, в результате интерференции излучений которых даже отдельная наночастица может приводить к направленному излучению благодаря полному подавлению излучения назад (элемент Гюйгенса) [9, 11, 119]. В Si-наночастице радиусом 65 нм такой эффект достигается, так как в некоторой области частот ($\lambda = 570$ нм) можно обеспечить одинаковые по амплитуде и фазе индуцированные в частице электрический и магнитный дипольные моменты. В данном случае излучение системы диполь + наносфера будет направлено от диполя в сторону расположения наночастицы. При $\lambda = 490$ нм индуцированные в той же частице электрический и магнитный дипольные моменты будут одинаковы по амплитуде, но их фазы будут сдвинуты на 1,3 рад, что приведёт к изменению направления излучения рассматриваемой системы на противоположное. Важность вклада индуцированных магнитных диполей в рассеяние света привело даже к появлению термина "магнитный свет" [120].

Другим направлением исследований проявления оптических резонансов в наночастицах является, наоборот, обнаружение только одной резонансной моды, обычной или идеальной неизлучающей, что представляет собой более сложную задачу, так как в этом случае нужны специально приготовленные световые пучки, поскольку возбуждение сферы обычной плоской волной всегда приводит к маскировке тонких эффектов, связанных с возбуждением отдельных заданных мод, сильными эффектами от возбуждения континуума обычных квазинормальных мод.

В [39] найдено точное аналитическое решение задачи о возбуждении диэлектрической сферы осесимметричным пучком Бесселя:

$$\begin{aligned} H_\phi &= H_0 J_1(k_0 \rho \sin \beta) \exp(ik_0 z \cos \beta) \quad (\text{ТМ-поляризация}), \\ E_\phi &= E_0 J_1(k_0 \rho \sin \beta) \exp(ik_0 z \cos \beta) \quad (\text{ТЕ-поляризация}), \end{aligned} \quad (50)$$

где ρ и z — цилиндрические координаты, β — конический угол пучка. Такой пучок обладает сложной пространственной структурой (рис. 11), которая позволяет эффективно управлять его взаимодействием с осесимметричными частицами.

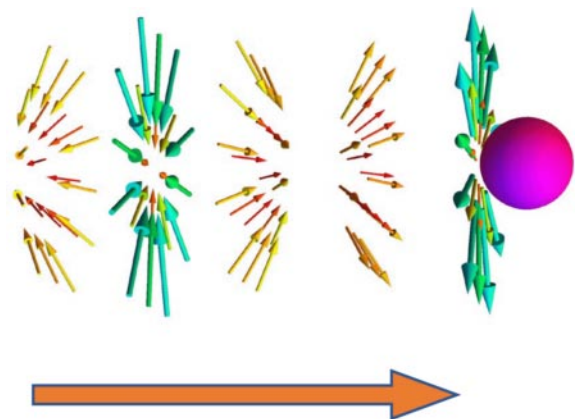


Рис. 11. Структура электрического поля в осесимметричном пучке Бесселя.

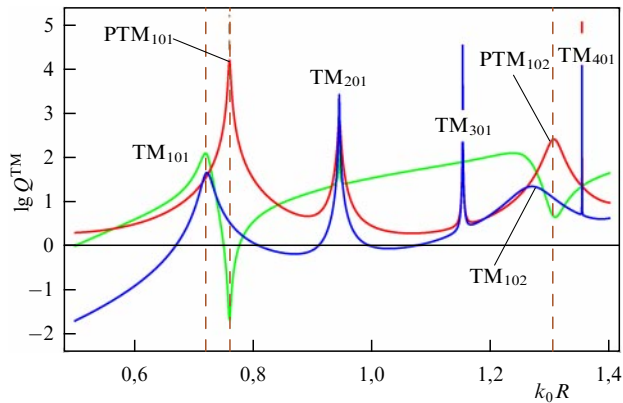


Рис. 12. Зависимость обобщённой добротности Q (красная кривая (см. (3))), рассеянной мощности (зелёная кривая) и запасённой энергии (синяя кривая) от размерного параметра наносферы k_0R (осесимметричный пучок Бесселя, ТМ-поляризация, $\varepsilon = 36$, $\beta = \pi/4$) [39].

Выражение для рассеянного сферой магнитного поля в сферических координатах (r, θ, φ) имеет вид [39]

$$H_\varphi^R(r, \theta) = iH_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n q_n \frac{2n+1}{n(n+1)} h_n^{(1)}(k_0 r) P_n^1(\theta) P_n^1(\beta), \quad (51)$$

где q_n — коэффициенты Ми (33).

Решение (51) описывает возбуждение сферы (точно) и других осесимметричных наночастиц (качественно) осесимметричными пучками, имеющими только ТМ- или ТЕ-поляризацию. Это решение снимает ограничения, накладываемые решением Ми 1908 г., в котором ТМ- и ТЕ-моды нельзя разделить. Важной особенностью решения (51) является также то, что оно нетривиальным образом зависит от конического угла β , настройкой которого можно управлять возбуждением или подавлением тех или иных мод.

На рисунке 12, показывающем зависимость обобщённой добротности (2) от размерного параметра наносферы для ТМ-колебаний, хорошо видны сверхвысокодобротные ($Q > 10^4$) идеальные моды (РТМ₁₀₁) с очень малым рассеянием, величина которого ограничена лишь присутствием континуума обычных мод. Положения

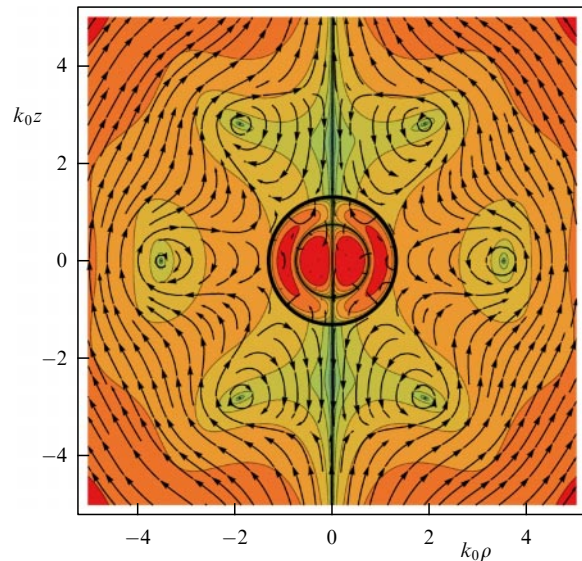


Рис. 13. Практически неизлучающее 32-польное распределение магнитного поля при возбуждении сферы суперпозицией четырёх пучков Бесселя ($k_0R = 1,31$, $\varepsilon = 36$) [39].

указанных мод точно соответствуют решениям дисперсионного уравнения (49).

Зависимость найденного решения от параметров пучка Бесселя позволяет найти условия, при которых возбуждается как любая наперед заданная обычная мода, так и любая идеальная мода с неограниченной радиационной добротностью.

На рисунке 13 показано соответствующее распределение магнитного поля при облучении сферы суперпозицией четырёх пучков Бесселя со специально подобранными параметрами, в результате чего излучение мод низшего порядка полностью подавляется и остаётся чрезвычайно слабое 32-польное (триаконтадипольное) излучение. Обратите внимание, что внутри сферы распределение поля соответствует чистой РТМ₁₀₂-моду.

Недавно в [15] была сделана попытка экспериментально исследовать отдельно ТМ- и ТЕ-резонансы в Si-наносферах с помощью радиально и азимутально поляризованных пучков. На рисунке 14 показаны резуль-

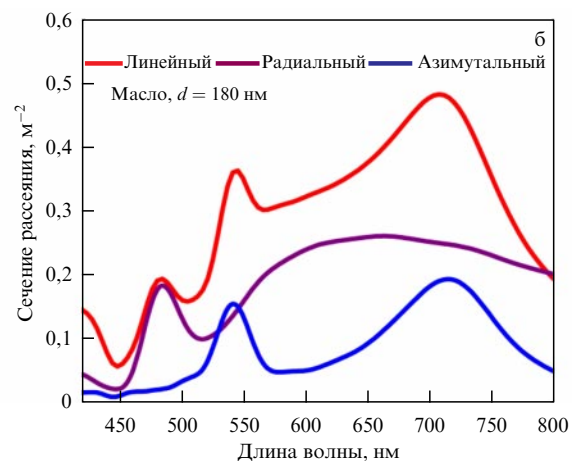
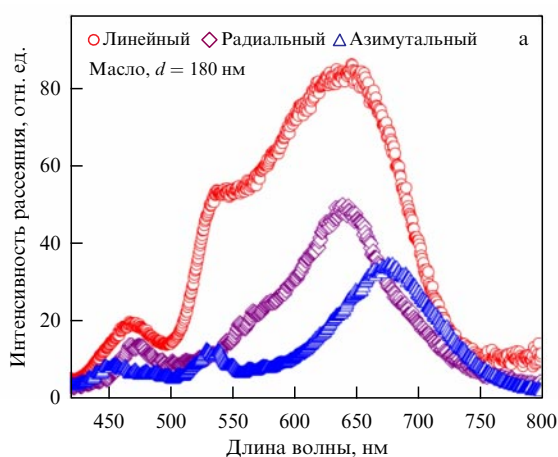


Рис. 14. Селективное возбуждение мультипольных резонансов с помощью радиально и азимутально поляризованных пучков. Экспериментальный (а) и теоретический (б) спектры одиночных Si-наносфер диаметром 180 нм в иммерсионном масле с $n = 1,48$ [15].

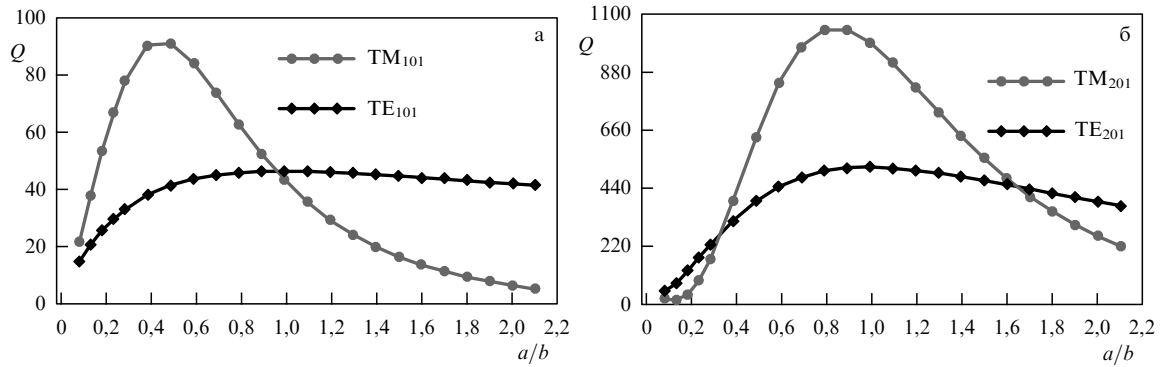


Рис. 15. Зависимости добротностей низших мод для сфероидов с $\epsilon = 38$ от отношения полуосей [61].

таты такого эксперимента и соответствующего компьютерного моделирования. Как видно из рисунка, при радиальной поляризации пучка возбуждаются в основном электрические моды (как ED, так и EQ), а при азимутальном возбуждаются в основном магнитные моды (как MD, так и MQ). Обратите внимание, что при радиальном возбуждении вблизи $\lambda = 450$ нм имеется минимум рассеяния, который, возможно, соответствует идеальной неизлучающей моде.

4.2. Сфероидальные нанорезонаторы

4.2.1. Обычные моды. Обычные моды сфероидальных нанорезонаторов в принципе можно найти на основе аналитического решения задачи о рассеянии плоской волны на диэлектрическом сфероиде [121, 122]. Однако нам не удалось найти такого решения в литературе.

Случай малых отклонений от сферической формы рассмотрен в [123], где малые отклонения от сферической формы описывались выражением

$$\frac{r}{R} = 1 + \mu F(\theta, \varphi) \quad (52)$$

с малым параметром μ , а изменение добротности моды, связанное с этим возмущением, искалось в виде ряда

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \mu C_1 + \mu^2 C_2 + \dots, \quad (53)$$

где $Q_0 \gg 1$ — добротность моды невозмущенной сферы.

Основной и важнейший результат работы [123] заключается в следующем: показано, что для любой высокодобротной моды сферы ($Q_0 \rightarrow \infty$) $C_1 = O(1/Q_0) \rightarrow 0$, $C_2 \geq 0$, т.е. любое малое искажение формы высокодобротного сферического резонатора приводит к уменьшению добротности его мод. Этот результат вполне согласуется с интуитивным представлением о сфере как об идеальном объекте, минимизирующем рассеяние волн на его поверхности. В случае не очень больших добротностей коэффициент C_1 становится отличным от нуля и максимальная добротность может реализовываться для частиц с формой, немного отличающейся от сферической.

В [61] собственные частоты и добротности мод сфероидального резонатора получены численно в результате решения двух поверхностных интегральных уравнений Мюллера, дискретизированных с использованием метода Нистрёма. В [61] найден детерминант для поиска частот собственных мод и с его помощью вычислены резонансные частоты и добротности собственных мод

диэлектрического сфероида с полуосями a (вдоль оси симметрии) и b (перпендикулярно оси), имеющего объём, равный объёму сферы радиусом R , и поверхность, описываемую уравнением

$$\left(\frac{\rho}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 = 1, \quad a = Rt^{2/3}, \quad b = Rt^{-1/3}, \quad (54)$$

где $t = a/b$. При $t < 1$ имеем сплюснутый сфероид, при $t > 1$ — вытянутый.

На рисунке 15 показаны зависимости добротностей низших мод для сфероидов с $\epsilon = 38$ от отношения полуосей. Из рисунка 15 можно сделать чрезвычайно важные и весьма нетривиальные выводы:

- ТМ-моды имеют существенно более высокие добротности, чем ТЕ-моды, благодаря тому что они являются изолированными (confined) модами (см. (26) и (28));
- добротности низших ТМ-мод (TM_{101} и TM_{201}) максимальны не для сфер, а для сплюснутых сфероидов. Моды более высоких порядков имеют максимальные добротности для сфер в соответствии с результатами [123];
- добротности всех ТЕ-мод максимальны для сфер, а не для сплюснутых или вытянутых сфероидов, что также согласуется с результатами [123];
- резонансы TM_{101} -моды (электрическая дипольная) и TE_{101} -моды (магнитная дипольная) имеют хорошее перекрытие для сплюснутых сфероидов ($a/b < 1$). Последнее обстоятельство использовано в [124] для максимизации рассеяния вперёд сплюснутым диэлектрическим сфероидом.

Более детальное исследование соотношения действительных и мнимых частей резонансных частот проведено в [125] с помощью моделирования в системе COMSOL Multiphysics [78]. Из рисунка 16, показывающего, как изменяются действительные и мнимые части резонансной частоты кремниевого сфероида в зависимости от аспектного отношения a/b сфероидов, видно, что траектории собственных частот в комплексной плоскости при изменении формы сфероида достаточно сложные, особенно в случае высших мод. Тем не менее высокодобротные моды без нулей в радиальном направлении (TM_{301} , TM_{401} , TM_{501} , TM_{601} , TM_{701}) опять имеют близкую к нулю мнимую часть частоты и, следовательно, максимальную добротность в случае сферической наночастицы. Менее добротная TM_{101} -мода имеет максимальную добротность для сплюснутых сфероидов, что вполне согласуется с результатами [61] (см. рис. 16). В [125]

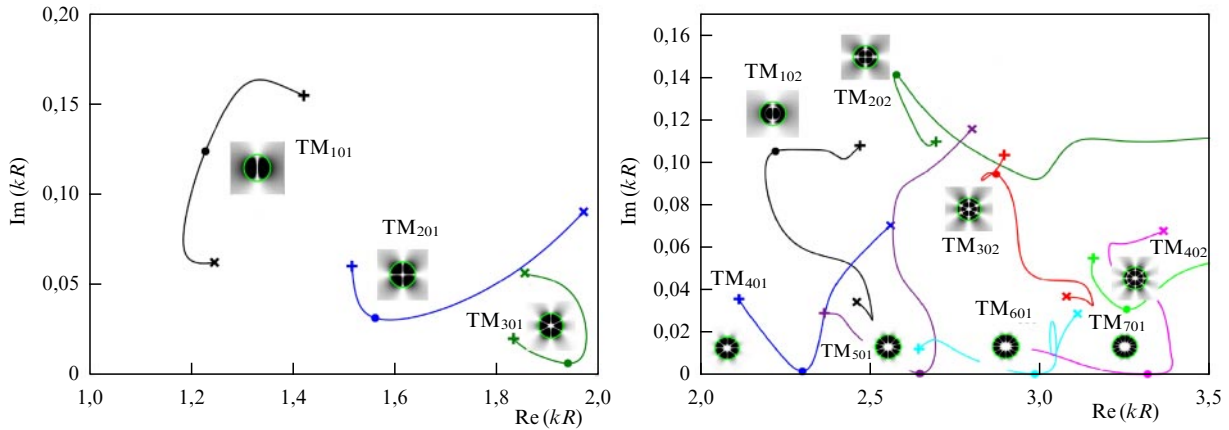


Рис. 16. Зависимость действительной и мнимой частей резонансных частот осесимметричных TM_{lm} -мод от формы кремниевого сфероид с $\varepsilon = 12$. Косые кресты на кривой соответствуют сплюснутому сфероиду ($a/b = 0,4$), прямые кресты — вытянутому сфероиду ($a/b = 1,6$), кружки — сфере ($a/b = 1$). На вставках показаны распределения полей H_φ в модах, индексы в обозначениях мод представляют орбитальные и радиальные квантовые числа моды. R — радиус сферы объёмом, равным объёму сфероид. (Адаптированный рисунок из [125].)

также получены аналогичные результаты для ТЕ-мод в сфероидах.

4.2.2. Идеальные неизлучающие моды. Идеальные неизлучающие моды не являются особенностью сферической геометрии и определённо существуют для осесимметричных тел произвольной формы. В [40] посредством разложения решений уравнений (14), (15) по радиальным, $S_{nl}(c, \xi)$, и угловым, $PS_{nl}(c, \eta)$, сфероидальным волновым функциям [122] строго показано, что такие моды существуют для произвольных сфероидов, и найдены их собственные функции и частоты.

Дисперсионное уравнение, описывающее идеальные неизлучающие моды для вытянутых сфероидов с диэлектрической проницаемостью ε , имеет вид [40]:

$$\begin{aligned} \text{Det } M &= 0, \\ M_{np} &= \Pi_{np}(c_1, c_0) (\varepsilon SD_{p1}(c_0, \xi_0) S_{nl}(c_1, \xi_0) - \\ &\quad - S_{p1}(c_0, \xi_0) SD_{nl}(c_1, \xi_0)), \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{n,p}(c_1, c_0) &= \int_{-1}^1 d\eta PS_{nl}(c_1, \eta) PS_{p1}(c_0, \eta), \\ SD_{nl}(c, \xi_0) &= \frac{\partial(\xi_0^2 - 1)^{1/2} S_{p1}(c, \xi_0)}{\partial \xi_0}, \\ \xi_0 &= \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}, \quad c_0 = \frac{k_0 R \sqrt{t^2 - 1}}{t^{1/3}}, \quad c_1 = \frac{k_0 R \sqrt{\varepsilon} \sqrt{t^2 - 1}}{t^{1/3}}. \end{aligned} \quad (56)$$

В (56) $k_0 = \omega/c$, R — радиус сферы, задающей фиксированный объём сфероид. Дисперсионное уравнение (55) справедливо также и для сплюснутого сфероид после соответствующего аналитического продолжения.

Подчёркнём ещё раз, что поля идеальных неизлучающих мод, найденные в [40], не равны нулю вне сфероидального резонатора, т.е. это не "ананольные распределения токов", поле которых равно нулю вне резонатора. Важно также, что поля идеальных неизлучающих мод существуют для любой формы сфероид!

Найденные идеальные неизлучающие моды сфероидов также не являются абстрактными решениями, они

имеют большое значение для нахождения условий, при которых мощность рассеяния становится минимальной или даже нулевой. Чтобы продемонстрировать практическую важность идеальных неизлучающих мод, в [40] были рассчитаны характеристики рассеяния осесимметричного пучка Бесселя

$$H_\varphi \sim J_1(k_0 \rho \sin \beta) \cos(k_0 z \cos \beta) \quad (57)$$

сфероидальными резонаторами различной формы.

На рисунке 17 представлена зависимость рассеянной мощности, запасённой в сфероиде энергии и добротности от размерного параметра наносфероидов при $a/b = 0,7$. Из рисунка видно, что при таком возбуждении все минимумы рассеяния и максимумы добротности ($Q > 10^5$) обусловлены идеальными неизлучающими модами. Положения этих мод точно соответствуют решениям дисперсионного уравнения (55). Конечность добротности идеальных мод (в теории бесконечных) связана с тем, что имеется континуум обычных квазинормальных мод, приводящих к малому, но конечному излучению, кото-

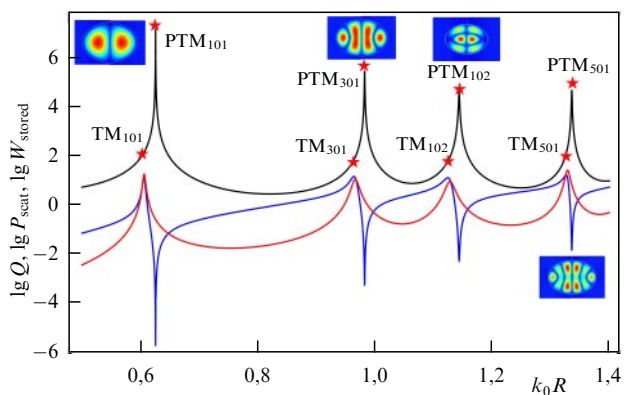


Рис. 17. Зависимость рассеянной мощности (синяя кривая), запасённой энергии (красная кривая (3)) и добротности (чёрная кривая) от размерного параметра наночастиц. ТМ-симметричное возбуждение (57) с $\beta = \pi/4$, $\varepsilon = 50$, $a/b = 0,7$. Все максимумы добротности соответствуют идеальным неизлучающим модам! Звёзды показывают значения добротностей обычных мод (TM_{101} , TM_{301} , TM_{501}) и идеальных неизлучающих мод (PTM_{101} , PTM_{301} , PTM_{501}) [40].

Таблица. Характеристики некоторых высокодобротных мод цилиндрических нанорезонаторов и значения индекса P (см. (28)), который определяет их добротности в зависимости от показателя преломления [75]

Мода	Структура поля внутри резонатора	Структура дальнего поля	Ориентация мультиполя	Индекс P
TE _{01δ}	$H_z = J_0(hr) \cos \beta z$ $E_z = 0$	Магнитный диполь	оси	1,27
HE _{11δ}	$E_z = J_1(hr) \cos \beta z \exp(i\varphi)$ $H_z = 0$	Магнитный диполь	⊥ оси	1,30
HE _{21δ}	$E_z = J_2(hr) \cos \beta z \exp(i2\varphi)$ $H_z = 0$	Магнитный квадруполь	⊥ оси	2,49
EH _{11δ}	$H_z = J_1(hr) \cos \beta z \exp(i\varphi)$ $E_z = 0$	Электрический диполь	⊥ оси	2,71
TE _{011+δ}	$H_z = J_0(hr) \sin \beta z$ $E_z = 0$	Магнитный квадруполь	оси	2,38

рое может быть неограниченно уменьшено оптимальной настройкой пучка. В любом случае мощности рассеяния идеальными неизлучающими модами (РТМ₁₀₁ и РТМ₃₀₁) на 4–5 порядков меньше мощности рассеяния обычными модами (ТМ₁₀₁ и ТМ₃₀₁). Соответственно добротности идеальных неизлучающих мод на 4–5 порядков больше добротностей обычных мод.

Существование идеальных неизлучающих ТЕ-мод в сферах также теоретически продемонстрировано в [40].

4.3. Диэлектрические нанорезонаторы более сложных форм

4.3.1. Обычные моды цилиндров конечной высоты. Выше были рассмотрены относительно простые формы резонаторов, которые допускают детальное теоретическое описание и, следовательно, хорошее понимание физики процессов в таких нанорезонаторах. Однако с технологической точки зрения такие резонаторы трудно реализуемы, особенно в оптических интегральных схемах. Поэтому в последнее время особое внимание было уделено изучению цилиндрических диэлектрических нанорезонаторов, т.е. резонаторов с внешним размером, меньшим длины волны в воздухе.

Для круговых цилиндрических резонаторов конечной высоты проведено много теоретических и экспериментальных исследований, поэтому их характеристики, в целом, хорошо известны. В частности, в таблице [75] приведены характеристики некоторых высокодобротных мод цилиндрических нанорезонаторов и значения индекса P (см. (28)), который определяет их добротности в зависимости от показателя преломления. В той же работе [75] можно найти поправки, связанные с формой конкретного цилиндра.

Например, для моды EH_{11δ} (электрический диполь, перпендикулярный оси) индекс $P = 2,71$, что при $\varepsilon = 80$ даёт значение добротности $Q = 1,4 \times 10^5$ (!).

Аналогичное исследование проведено в [126], где также найдены аппроксимационные формулы для частот и добротностей нескольких главных мод диэлектрических цилиндрических нанорезонаторов. В частности, для ТМ_{01δ}-моды (электрический диполь вдоль оси) приближённое выражение для добротности имеет вид

$$Q_{\text{TM}_{01\delta}} = 0,008721\varepsilon^{0,888413} \exp(0,0397475\varepsilon_r) \times \\ \times \left\{ 1 - \left(0,3 - 0,2 \frac{a}{h} \right) \frac{38 - \varepsilon}{28} \right\} \times$$

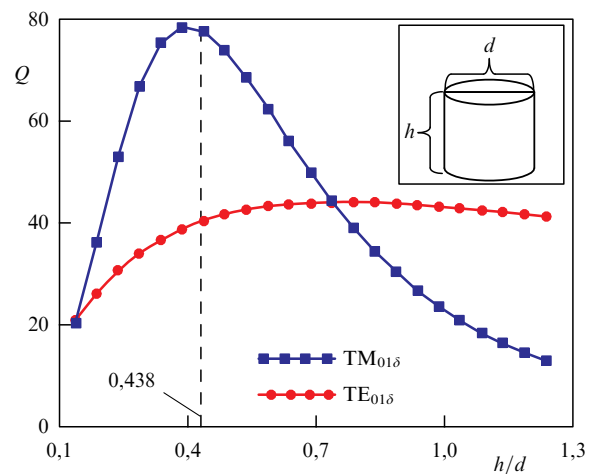


Рис. 18. Добротности низших ТЕ_{01δ}- и ТМ_{01δ}-мод в цилиндрическом резонаторе с $\varepsilon = 38$ в зависимости от аспектного отношения h/d [61, 127].

$$\times \left\{ 9,498196 \frac{a}{h} + 2058,33 \left(\frac{a}{h} \right)^{4,322261} \exp \left(-3,50099 \frac{a}{h} \right) \right\}. \quad (58)$$

На рисунке 18 показаны значения добротности низших ТЕ_{01δ}- и ТМ_{01δ}-мод в цилиндрическом резонаторе с $\varepsilon = 38$ [61, 127].

4.3.2. Суперрезонансные моды в цилиндрах. В последнее время большое внимание было уделено теоретическому и экспериментальному исследованию сверхвысокоточных мод в цилиндрических нанорезонаторах [21, 25, 30, 37, 38, 128]. Ввиду большой добротности эти, в общем, обычные, моды даже получили название "суперрезонансные (supercavity) моды" или "квазисвязанные состояния в континууме" (quasi BIC states (BIC — bound state in continuum)). Эти моды возникают при оптимальных формах цилиндра, при которых в мультипольном разложении собственной моды (18) исчезает низшая сферическая гармоника.

В [69] изучены моды в более сложном цилиндре конечной высоты с правильным треугольником в основании. Ввиду наличия острых углов трудно ожидать в общем случае наличия высокодобротных мод в таком резонаторе. Однако при некоторых параметрах существуют моды (авторы также называют их "суперрезонансными"), которые не чувствуют острых углов, а их

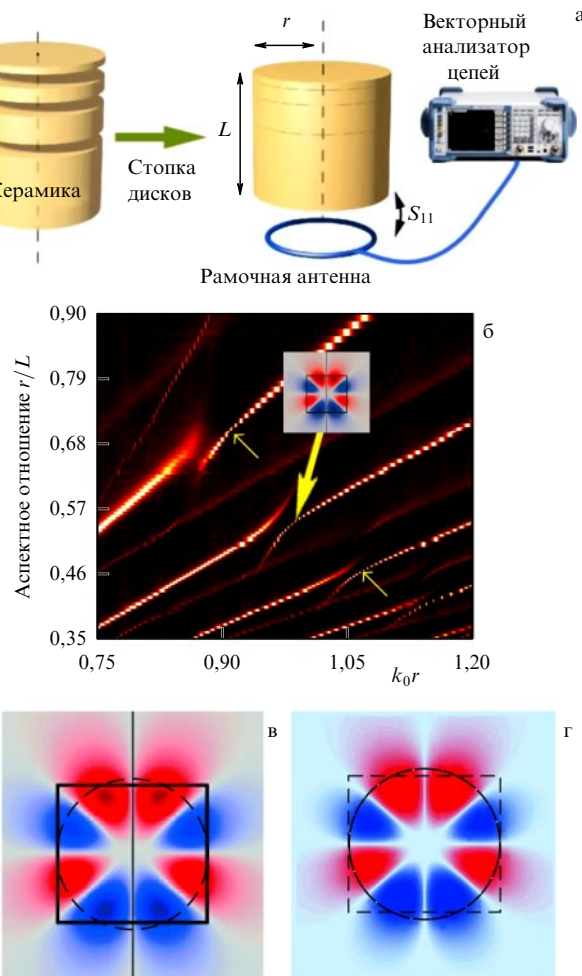


Рис. 19. Экспериментальное наблюдение суперрезонансных состояний в субволновых цилиндрических резонаторах. (а) Экспериментальная установка для измерения рассеяния в радиочастотном диапазоне. Резонатор состоит из нескольких керамических дисков разной высоты, уложенных в один цилиндр радиусом $r = 15,7$ мм с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 44,8$ и тангенсом угла потерь керамики около $\tan \delta = 10^{-4}$. TE-моды резонатора возбуждаются рамочной антенной, подключённой к векторному анализатору цепей. (б) Зависимость измеренного коэффициента рассеяния $1 - |S_{11}|$ от размерного параметра k_0r и аспектного отношения r/L . Стрелками показаны положения суперрезонансных мод и пространственная структура одной из них (адаптированный рисунок из [38]). Сравнение структур (в) суперрезонансной моды в цилиндре ($\epsilon = 44,8$, $Q = 180000$) и (г) TE_{401} -моды в сфере ($\epsilon = 44,8$, $Q = 214000$).

добротности приближаются к добротностям более гладких резонаторов, таких как сферы или сфероиды, с тем же объёмом (см. раздел 4.2).

В [38] проведено экспериментальное наблюдение суперрезонансных мод в субволновых керамических резонаторах в радиочастотном диапазоне. На рисунке 19 приведены схема эксперимента и результаты измерения коэффициента рассеяния.

Математический анализ измеренных коэффициентов рассеяния показал, что точной настройкой формы резонатора можно добиться существенного возрастания добротности, вплоть до значений $Q_{\text{super}} = 1,25 \times 10^4$ для моды в керамике (тангенс угла потерь около 10^{-4}). Прямое моделирование методом конечных элементов показывает, что радиационная добротность моды цилиндра составляет величину около $Q_{\text{super}} = 180000$, приближаю-

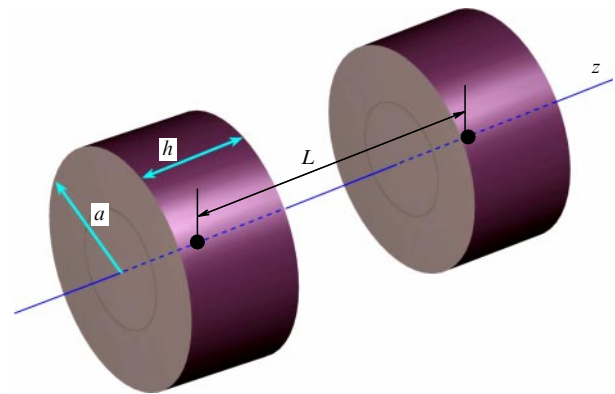


Рис. 20. Геометрия задачи о суперрезонансных модах в системе из двух коаксиальных кремниевых цилиндров.

щуюся к добротности моды TE_{401} в сфере с такой же проницаемостью и таким же объёмом, $Q_{\text{sph}} = 213945$, $k_0r = 1,04$.

Как видно из рис. 19в, структура суперрезонансной моды близка к структуре поля в сферическом резонаторе, а рёбра цилиндра находятся в области малого поля, что и объясняет отсутствие рассеяния на них и высокую добротность этих мод. Суперрезонансные моды имеют добротность, меньшую, чем добротность аналогичных по структуре мод в сфере из такого же материала и такого же объёма, что находится в полном соответствии с результатами работы [123] (см. раздел 4.2.1).

Система, аналогичная показанной на рис. 19а, была также исследована в [129] на предмет достижения в ней режима сверхрассеяния (superscattering) [130–132], а не максимальной добротности. Оптимизируя соотношения между сферическим мультипольным содержанием возбуждаемой моды, авторы [129] показали, что оптимизированные структуры в пределе дипольного рассеяния имеют сечение рассеяния, превышающее предельное значение для сферы в четыре раза.

Суперрезонансные моды в системе из двух коаксиальных кремниевых цилиндров (рис. 20) детально проанализированы в [133] с помощью моделирования в системе COMSOL Multiphysics [78].

Физика данной задачи гораздо богаче физики в случае одного цилиндра ввиду появления дополнительного параметра L — расстояния между центрами цилиндров. На рисунке 21 показана эволюция резонансных частот осесимметричных TE-мод в комплексной плоскости в зависимости от расстояния L . Из рисунка 21 снова видно, что минимальная мнимая часть частоты возникает при $L = 1,75h$ на кривой, соответствующей антисимметричной гибридизации. Причём добротность $Q = 5500$, а структура поля близка к структуре TE_{602} -моды в сфере. Ещё одна высокодобротная мода возникает при $L = 1,08h$ на кривой, соответствующей симметричной гибридизации. Структура этой моды близка к структуре TE_{502} -моды в сфере, а добротность меньше, чем в случае антисимметричной гибридизации при $L = 1,75h$.

Интересный подход к созданию оптических нанорезонаторов предложен в [23], где показано, что полость в сферическом или цилиндрическом резонаторе может существенно снизить долю низших сферических гармоник, так как они локализованы ближе к центру резонатора и

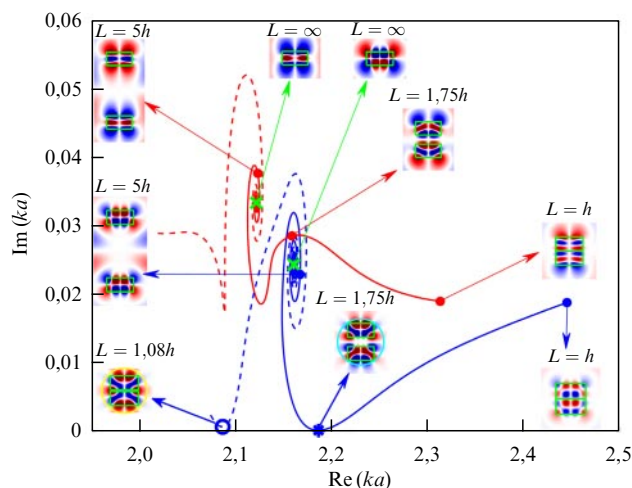


Рис. 21. Эволюция резонансных частот осесимметричных ТЕ-мод в комплексной плоскости в зависимости от расстояния между центрами цилиндров L . Положения резонансных частот изолированного цилиндра ($L = \infty$) показаны зелёными косыми крестами. Траектории антисимметричных и симметричных мод, выходящих из точки $L = \infty$, изображены сплошной и штриховой кривыми; $a = 0,5$ мкм, $a/h = 0,96$. На вставках показаны распределение E_φ и соответствующее расстояние L между цилиндрами [133].

полость выступает в качестве фильтра низших гармоник. Важно, что особенно сильно уменьшается вклад электрических мультиполей. Этот интересный результат подтверждён экспериментально на кремниевых нанокольцах (см. также рис. 1).

В целом, можно сказать, что суперрезонансные моды в круговых цилиндрах — это частный случай хорошо изученных квазинормальных мод [75, 126]. Суперрезонансные моды близки по структуре и добротности к модам резонаторов сферической формы с таким же объёмом и такой же диэлектрической проницаемостью, которые имеют максимально возможные добротности [123, 134].

4.3.3. Идеальные моды в цилиндрическом нанорезонаторе.

В цилиндрическом резонаторе при любых аспектных соотношениях (а не только при исключительных, как в случае суперрезонансных мод) помимо обычных мод существуют идеальные неизлучающие моды [40].

В [135] спектры рассеяния в системе на основе диэлектрического цилиндра из кремния исследованы экспе-

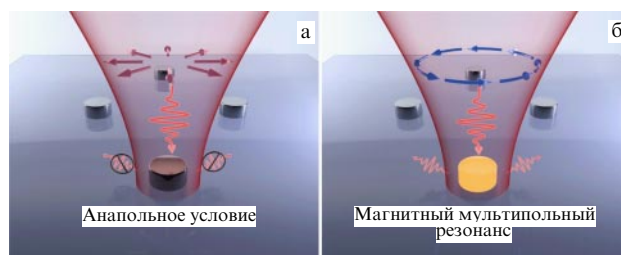


Рис. 22. Возбуждение Si-диска сильно сфокусированным радиальным (а) и азимутальным (б) пучками [135].

риментально с использованием сильно сфокусированных осесимметричных пучков Бесселя с радиальной и азимутальной поляризациями (рис. 22). В той же работе [135] благодаря использованию таких поляризаций удалось продемонстрировать практически полное подавление рассеяния от Si-нанодиска. На рисунке 23 показан спектр рассеянной мощности при разных поляризациях.

Как видно из рис. 23, при радиальной поляризации и $\lambda = 720$ нм рассеянная мощность практически исчезает! Другой интересной особенностью данной геометрии является то, что тот же образец при облучении пучком с азимутальной поляризацией сильно излучает магнитно-квадрупольную сферическую гармонику.

Исчезновение рассеяния при $\lambda = 720$ нм авторы [135] называют "ананольным условием", но связь этого условия с собственными колебаниями резонатора не обсуждается, хотя "ананольное условие" может соответствовать как слабому излучению высокодобротных "суперрезонансных" мод, так и возбуждению идеальных неизлучающих мод [40], рассмотренных выше.

Вопрос о существовании идеальных неизлучающих мод в цилиндрах некругового сечения пока остаётся открытым.

5. Моды в нанорезонаторах из метаматериалов

История метаматериалов начинается с опубликованной в 1967 г. в журнале *Успехи физических наук* (УФН) работы В.Г. Веселаго [136], в которой было показано, что, в отличие от металлов, вещество (тогда гипотетическое) с одновременно отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями допускает распространение волн с отрицательным показателем преломления

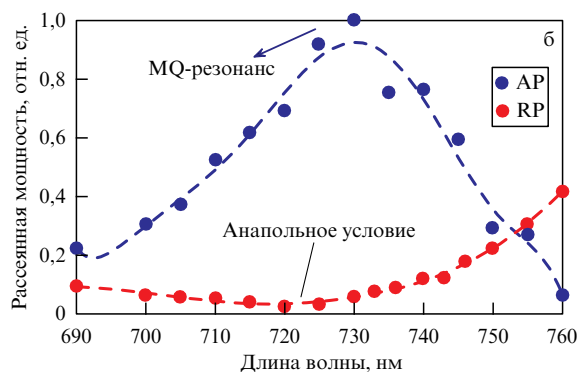
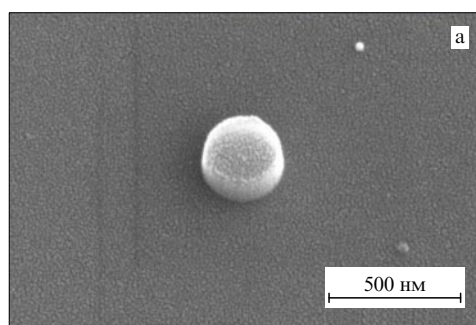


Рис. 23. (а) СЭМ-изображение Si-нанорезонатора ($r = 150$ нм, $h = 160$ нм) на SiO_2 -подложке. (б) Спектр рассеянной мощности при разных поляризациях возбуждающего пучка [135].

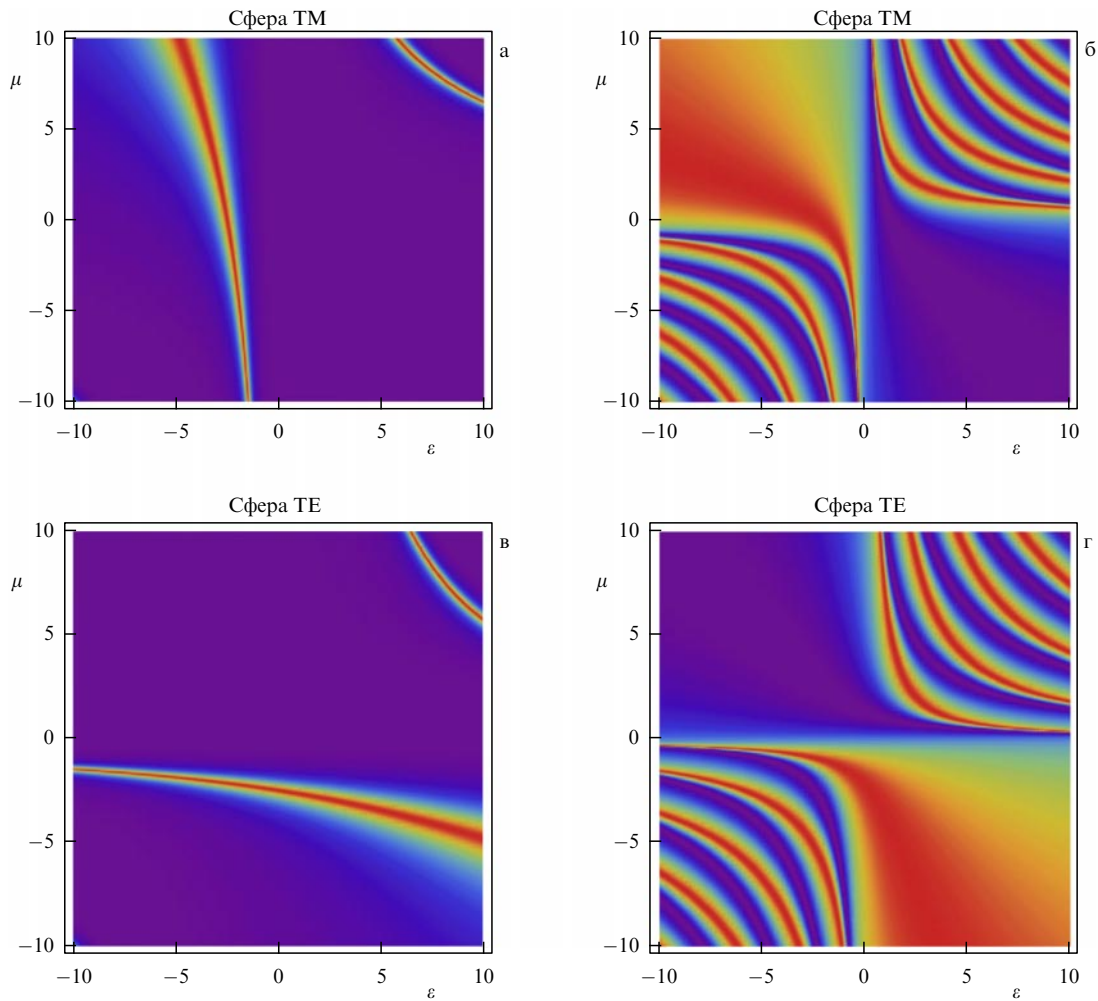


Рис. 24. Амплитуды коэффициентов рассеяния M_i в зависимости от диэлектрической и магнитной проницаемостей $|q_i|$ (ТМ-моды) при размерном параметре (а) $ka = 0,5$, (б) $ka = 1,5$ и $|p_i|$ (ТЕ-моды) при $ka = 0,5$ (в), $ka = 1,5$ (г). На всех рисунках правый верхний квадрант соответствует обычным диэлектрикам, а нижний левый квадрант — сфере с отрицательным показателем преломления [1, 142].

$n = -\sqrt{\epsilon\mu}$, т.е. с противоположно направленными фазовыми и групповыми скоростями волн.

Бурное развитие этого направления началось с работ [137, 138], где метаматериалы с отрицательным показателем преломления были реализованы в СВЧ-диапазоне частот. Впоследствии метаматериалы были реализованы в ИК-диапазоне и видимом диапазоне (более подробно см., например, в [139–141]). Такие материалы сейчас называются материалами с отрицательным показателем преломления (Negative Index Materials — NIM) или дважды отрицательными (double negative — DNG) метаматериалами. Затем метаматериалами стали называть все вещества с необычными свойствами, например киральные метаматериалы, гиперболические метаматериалы или метаматериалы с диэлектрической проницаемостью вблизи нуля (ENZ — Epsilon Near Zero или ZIM — Zero-Index Metamaterials).

5.1. Моды в сфере с отрицательным показателем преломления

В [1, 142] теория Ми непосредственно применена для описания оптических свойств нанорезонаторов из метаматериала с отрицательным показателем преломления. На рисунке 24 показаны амплитуды коэффициентов

рассеяния Ми (33) и (34) в зависимости от диэлектрической и магнитной проницаемостей.

Из рисунка 24 видно, что резонансные свойства сферы с отрицательным показателем преломления только частично похожи на свойства обычной диэлектрической сферы. В сфере с отрицательным показателем преломления кроме обычных объёмных мод присутствуют левосторонние (Left Handed — LH) моды, локализованные на поверхности. Такая сложная структура коэффициентов Ми приводит к совершенно иной, по сравнению с таковой для обычной сферы, структуре мод и их добротностей.

На рисунке 25 показаны зависимости ТЕ-коэффициентов Ми p_n от размерного параметра сферы ka . Из рисунка хорошо видно в высшей степени anomalous поведение ТЕ-резонансов в сфере из DNG-метаматериала: при увеличении мультипольности моды для достижения резонанса требуется уменьшение размерного параметра сферы ka ! Более того, количество таких резонансов конечно! Уменьшение размерного параметра, при котором существуют моды высоких мультипольностей, приводит к тому, что они становятся поверхностными модами, т.е. максимум поля приходится на поверхность сферы!

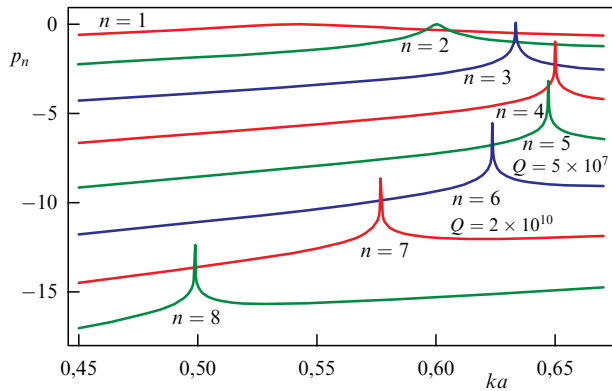


Рис. 25. Зависимость ТЕ-коэффициентов рассеяния Ми p_n от размерного параметра сферы ka ($\epsilon = -15$, $\mu = -1$, $-\sqrt{\epsilon\mu} \approx -4$) [1].

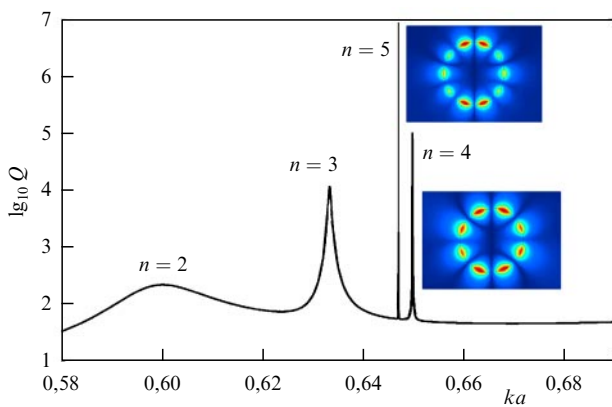


Рис. 26. Зависимость обобщённой добротности сферы с $\epsilon = -15$, $\mu = -1$ от размерного параметра ka . Добротности ТЕ-мод: $Q_2 = 107$, $Q_3 = 4125$, $Q_4 = 327769$, $Q_5 = 5,32372 \times 10^7$. Моды с $n = 6, 7, 8$, представленные на рис. 25, здесь не видны из-за недостаточного разрешения графики. На вставках показаны распределения электрического поля ТЕ-мод в сечении сферы [142–144].

На рисунке 26 показана зависимость обобщённой добротности сферы из DNG-метаматериала от размерного параметра ka . Как видно, действительно, сферы с отрицательным показателем преломления имеют огромные добротности, что связано с поверхностным характером ЛН-мод. Другой их важнейшей особенностью является то, что такие огромные добротности возникают для сфер субволновых размеров даже при относительно небольших абсолютных величинах показателя преломления. Обе эти особенности радикально отличают моды в DNG-резонаторах от мод в обычных диэлектрических резонаторах.

5.2. Моды в киральной сфере

Непосредственно связаны с DNG-метаматериалами и киральные метаматериалы, в которых поляризация зависит как от электрического, так и от магнитного полей. Материальные уравнения таких сред могут быть выражены в виде [145, 146]:

$$\mathbf{D} = \epsilon \left(\mathbf{E} + \chi \nabla \times \frac{\mathbf{E}}{k_0} \right), \quad \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{H} + \chi \nabla \times \frac{\mathbf{H}}{k_0} \right), \quad (59)$$

где χ — безразмерный параметр киральности. В биизотропных киральных метаматериалах, где ϵ , μ и χ —



Рис. 27. Возможная реализация киральной сферы: (а) золотая наносфера, покрытая оболочкой из сахара; (б) радиальные спирали, образующие сферу; (в) эффективное описание наночастицы.

скалярные величины, волновые векторы (k_L, k_R) и показатели преломления (n_L, n_R) для лево- и правополяризованных волн имеют разные значения:

$$k_L = k_0 \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{1 - \chi\sqrt{\epsilon\mu}} = k_0 n_L, \quad k_R = k_0 \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{1 + \chi\sqrt{\epsilon\mu}} = k_0 n_R. \quad (60)$$

Из выражений (60) видно, что при достаточно большой величине $\chi\sqrt{\epsilon\mu}$ один из показателей преломления (n_R или n_L) обязательно станет отрицательным. В [147] предложено использовать этот факт для реализации сред с отрицательным показателем преломления. Киральные среды могут быть реализованы рядом способов [148–152]. На рисунке 27 показаны возможные реализации кирального сферического нанорезонатора.

В [153, 154] в рамках квазистатического приближения показано, что в киральных сферах вместо дипольного плазмонного резонанса, $\epsilon(\omega) + 2 = 0$, возникает кирально-плазмонный дипольный резонанс, условием возникновения которого является

$$(\epsilon + 2)(\mu + 2) = 4\epsilon\mu\chi^2. \quad (61)$$

Полная электродинамическая теория резонансов в киральных сферических наночастицах произвольных размеров построена в [155–157], где найдены выражения для аналогов коэффициентов Ми. Эти выражения гораздо сложнее, так как в киральных сферах уже нельзя разделить моды на ТЕ и ТМ. Однако можно ввести более сложные моды, названные в [156] модами типов А и В. На рисунке 28 показаны зависимости коэффициента рассеяния T_4^A мод А-типа, который при $\chi = 0$ переходит в коэффициент Ми для рассеяния ТМ-мод q_4 , от диэлектрической и магнитной проницаемостей для различных значений размерного параметра $k_0 a$ и киральности χ . Из рисунка 28 видно, что структура мод киральной сферы существенно сложнее, чем в случае DNG-сферы, так как здесь дополнительно возникает кирально-плазмонный резонанс (61), проявляющийся в разрыве дисперсионной кривой поверхностных DNG-мод.

Дисперсионное уравнение, определяющее частоты собственных мод киральной сферы, имеет вид [155, 156]

$$A_n = W_n(L)V_n(R) + W_n(R)V_n(L) = 0,$$

$$W_n(J) = \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2} \psi_n(k_J a) \zeta_n^{(1)'}(k_0 a) - \psi_n'(k_J a) \zeta_n^{(1)}(k_0 a), \quad (62)$$

$$V_n(J) = \psi_n(k_J a) \zeta_n^{(1)'}(k_0 a) - \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2} \psi_n'(k_J a) \zeta_n^{(1)}(k_0 a),$$

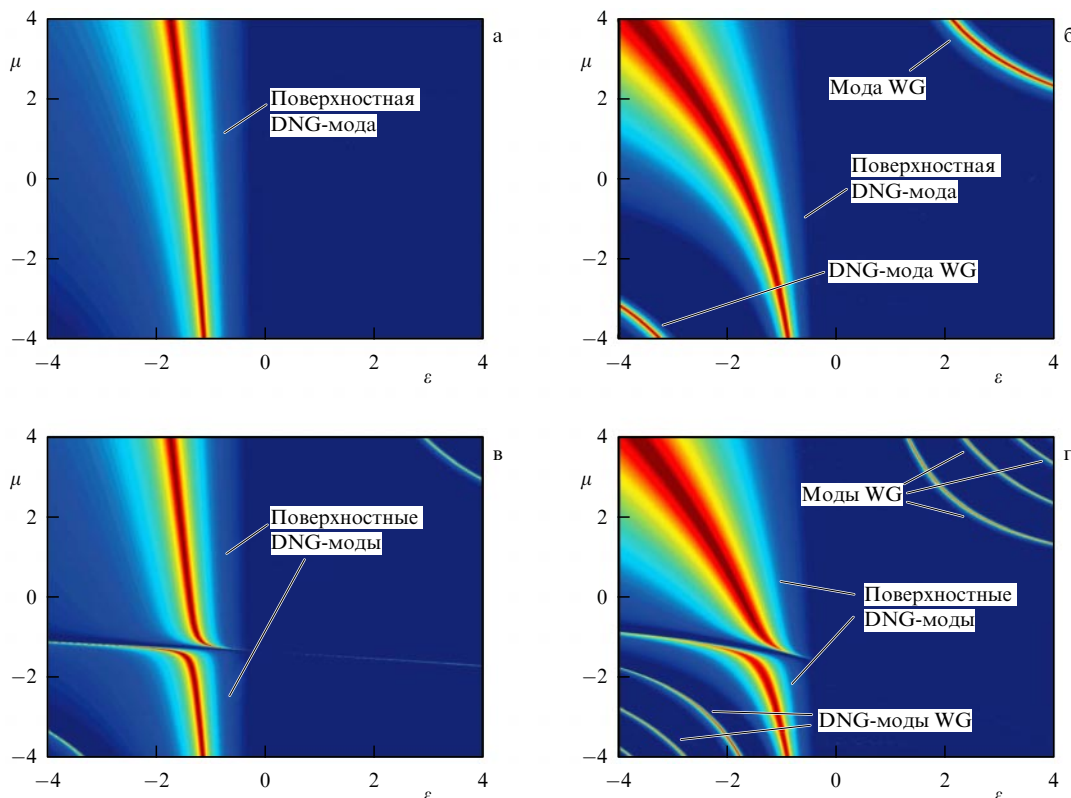


Рис. 28. Зависимость абсолютных значений коэффициента рассеяния А-мод T_4^A киральной сферической частицы от диэлектрической (ε) и магнитной (μ) проницаемостей для различных значений параметров: (а) $\chi = 0$, $k_0 a = 1,5$; (б) $\chi = 0$, $k_0 a = 2,5$; (в) $\chi = 0,1$, $k_0 a = 1,5$; (г) $\chi = 0,1$, $k_0 a = 2,5$. Наносфера расположена в вакууме [156].

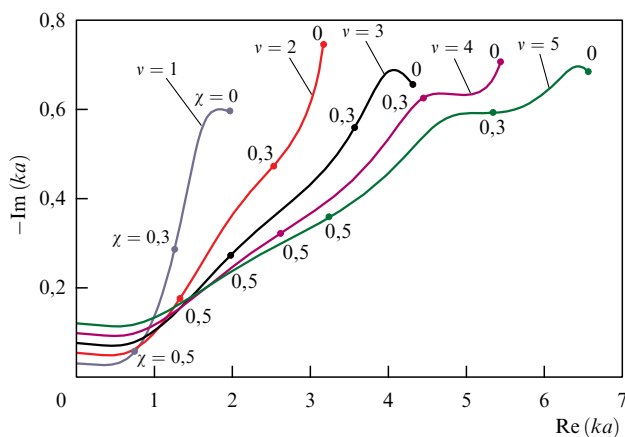


Рис. 29. Проекция зависимости собственных частот киральной сферы с $\varepsilon = 2 + 0,04i$ от χ , $\text{Re}(ka)$, $\text{Im}(ka)$ на плоскость ($\text{Re}(ka)$, $\text{Im}(ka)$) для орбитального квантового числа $n = 1$. Кривые разного цвета соответствуют разным радиальным квантовым числам $v = 1-5$. Числа возле точек указывают параметр киральности χ в данной точке (третья координата) [157].

где $\psi_n(z) = z j_n(z)$, $\zeta_n^{(1)}(z) = z h_n^{(1)}(z)$ — функции Рикатти – Бесселя, штрих обозначает производную, индекс J принимает значения L, R (см. (60)). Важно, что, как и в обычной диэлектрической сфере, выражение для детерминанта Δ_n не зависит от азимутального квантового числа m . Проекция зависимости собственных частот киральной сферы с $\varepsilon = 2 + 0,04i$ от χ , $\text{Re}(ka)$, $\text{Im}(ka)$ на плоскость ($\text{Re}(ka)$, $\text{Im}(ka)$) для орбитального квантового числа $n = 1$ показана на рис. 29. Видно, что увеличение кираль-

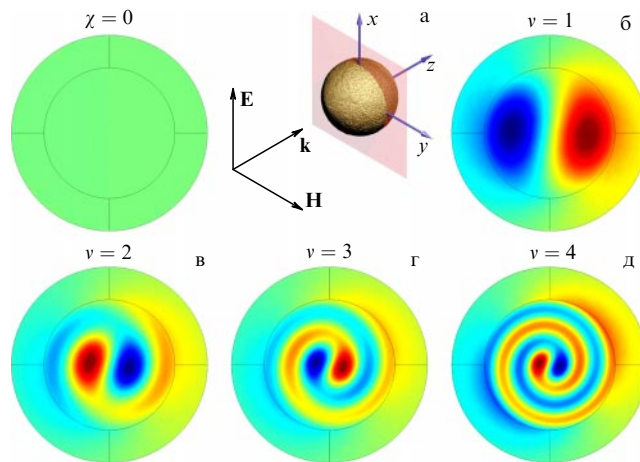


Рис. 30. Геометрия задачи о рассеянии плоской волны с $\lambda = 570$ нм киральной сферой ($\varepsilon = 2 + 0,04i$, $a = 70$ нм) и распределение z -компоненты электрического поля E_z в плоскости $z = 0$ (затенённая плоскость на вставке в верхней части рисунка, показывающей геометрию задачи) для разных значений безразмерного параметра киральности, соответствующих значениям радиального квантового числа $v = 1$ ($\chi \approx 0,5$), $v = 2$ ($\chi \approx 0,6$), $v = 3$ ($\chi \approx 0,65$), $v = 4$ ($\chi \approx 0,67$) собственных мод с $n = 1$, $m = 1$. Для сравнения представлен также случай $\chi = 0$.

ности (движение по кривым сверху вниз) приводит к существенному увеличению добротности собственных колебаний. Последнее в основном связано с тем, что волновое число одной из поляризаций в киральной среде может неограниченно увеличиваться (полнос в (60)), поэтому длина таких волн в сфере существенно меньше,

чем в вакууме, что и приводит к эффективному увеличению размера сферы и добротности мод, существующих в ней.

На рисунке 30 показано распределение z -компоненты электрического поля в плоскости $z = 0$ (затенённая плоскость на вставке) для разных значений безразмерного параметра киральности, соответствующего значениям радиального квантового числа $\nu = 1, 2, 3, 4$ при возбуждении сферы плоской волной.

Другие режимы собственных колебаний для киральной сферы рассмотрены в [156–158]. Детально изучены также собственные колебания в кластере из киральных сфер [159] и в киральной сфере с несимметричной оболочкой [160].

5.3. Моды в сфере из гиперболического метаматериала

В [161] рассмотрены моды в сферическом нанорезонаторе из гиперболического метаматериала (ГММ), т.е. из анизотропного материала, в котором диагональные элементы тензора диэлектрической проницаемости имеют разные знаки [162] (рис. 31а).

Как известно [162], ключевой особенностью ГММ является возможность существования распространяющихся волн с неограниченным радиальным волновым числом (рис. 31б), что приводит к возможности существования резонансных мод в сферах как угодно малых размеров (в приближении однородной среды, конечно) (рис. 31в, г). При уменьшении внешнего радиуса резонатора R добротности мод увеличиваются неограниченно, по закону $Q_{\text{rad}} \propto R^{-(2n+1)}$, где n — порядок мультиполь-

ного момента моды. Хотя, по словам авторов [161], найденные ими высокодобротные моды можно отнести к модам шепчущей галереи, по-видимому, это не так. Как видно из рис. 31в, г, найденные в [161] моды сосредоточены в центре резонатора. С математической точки зрения последнее связано с тем, что радиальные распределения полей внутри сферического ГММ-резонатора описываются не функциями Бесселя полуцелого порядка, а функциями Бесселя с мнимым порядком [163]

$$J_{l+1/2}(\sqrt{\epsilon} k_0 r) \Rightarrow J_{g(l)+1/2}(\sqrt{\epsilon_0} k_0 r), \quad (63)$$

где мнимый порядок определяется выражением

$$g(l) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{l(l+1)\epsilon_\theta}{\epsilon_r}}. \quad (64)$$

Функции Бесселя с мнимым порядком не стремятся к нулю в начале координат, что и приводит к концентрации полей в центре сферы.

В целом, свойства резонаторов из ГММ похожи на аналогичные свойства нанорезонаторов из DNG-метаматериалов и киральных метаматериалов: моды во всех случаях могут существовать при сколь угодно малых внешних размерах резонаторов. С физической точки зрения указанные резонаторы принципиально различны: в нанорезонаторах из гиперболических и киральных метаматериалов моды объёмные, в то время как в DNG-нанорезонаторах сверхвысокоточные моды имеют поверхностный характер.

6. Примеры возможного использования оптических нанорезонаторов

Хотя оптические нанорезонаторы обладают очень интересными фундаментальными свойствами, их широкое практическое применение ещё впереди. Тем не менее уже сейчас экспериментально продемонстрированы принципы работы целого ряда оптических наноустройств на основе резонансных свойств наночастиц.

1. Прежде всего следует отметить попытки применения оптических нанорезонаторов для создания источников когерентного излучения — нанолазеров и спазеров — на основе как плазмонных нанорезонаторов [2, 4], так и диэлектрических нанорезонаторов [22, 25, 26, 164]. Также существуют предложения использовать для нанолазеров ГММ-нанорезонаторы [165].

2. Оптические нанорезонаторы могут эффективно использоваться для управления спонтанным излучением элементарных квантовых излучателей [143, 144, 166–172] и построения на этой основе ярких искусственных флюорофоров [91] и квантовых фотонных цепей [173] (где был использован одномерный (1D) фотонно-кристаллический нанорезонатор).

3. Важным направлением применения оптических нанорезонаторов является повышение эффективности работы солнечных батарей, причём для этого используются не только плазмонные, но и диэлектрические нанорезонаторы [174–178].

4. Высокая чувствительность собственных колебаний в оптических нанорезонаторах к показателю преломления окружающей среды позволяет создавать на их основе высокочувствительные биосенсоры [110, 179–185].

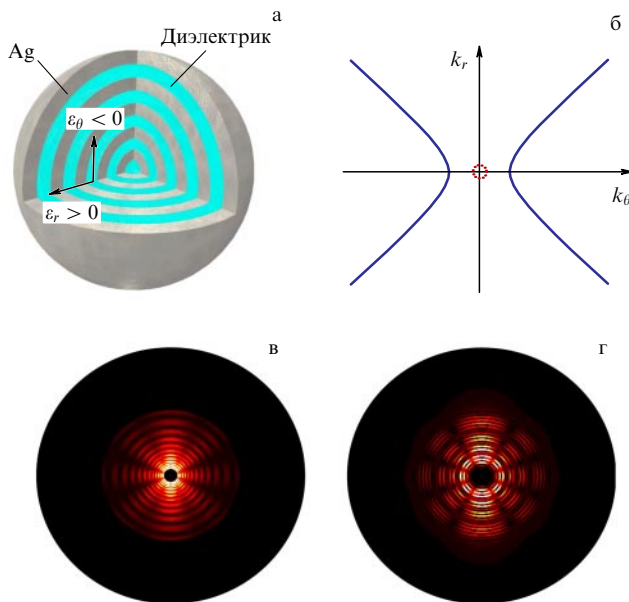


Рис. 31. (а) Схема гиперболического резонатора, состоящего из чередующихся металлических и диэлектрических слоёв. (б) Изочастотный контур ГММ в импульсном пространстве, рассчитанный в приближении эффективной среды с $\lambda = 1000$ нм. Малый пунктирный кружок в центре представляет изочастотный контур в вакууме на той же длине волны. Распределение поля в резонансной моде с орбитальным числом $n = 4$ в однородном гиперболическом резонаторе (в) и многослойной структуре (г). В случае рис. в ГММ-резонатор имеет внутренний радиус 20 нм, внешний радиус 200 нм и резонансную длину волны $\lambda = 992$ нм, а в случае рис. г ГММ-резонатор состоит из 20 функциональных слоёв, толщиной 10 нм каждый, и имеет резонансную длину волны $\lambda = 977$ нм [161].

5. Высокая концентрация поля в высокодобротных модах оптических нанорезонаторов и правильный выбор поляризации накачки позволяют существенно увеличить эффективность генерации (на два порядка по сравнению с таковой в лучших микрорезонаторах [186, 187]) второй [21, 28, 188, 189] и третьей [27, 190–192] гармоник и усилить другие нелинейные эффекты [17, 21, 27].

6. Электромагнитные резонансы в диэлектрических нанорезонаторах могут использоваться для реализации оптического магнетизма ($\mu \neq 1$) [120, 193, 194].

7. Заключение

В настоящем обзоре представлено современное состояние быстро развивающейся области оптики — оптики трёхмерных нанорезонаторов, т.е. резонаторов, имеющих субволновые размеры по всем измерениям. Основное внимание было уделено фундаментальным аспектам описания оптических свойств таких нанорезонаторов. Бурное развитие данного направления усилиями различных научных групп привело к открытию ряда новых эффектов и появлению связанных с ними новых ярких терминов, которые часто не были точно определены, что затрудняет дальнейшее развитие этого направления, и мы попытались связать новые термины между собой и с общепринятыми определениями.

В обзоре в основном рассмотрены высокосимметричные нанорезонаторы без учёта внутренних потерь, имеющие сверхвысокие добротности на резонансных частотах. Однако целый класс нанорезонаторов — несимметричные нанорезонаторы — остался за рамками обзора. От таких резонаторов трудно ожидать сверхвысоких добротностей в обычном смысле этого термина, однако в них могут быть реализованы интересные нестационарные распределения полей, которые могут послужить основой преобразования информации на одном кристалле и других приложений. В несимметричных нанорезонаторах также могут существовать режимы супер-рассеяния (superscattering).

Принципиально важное влияние на свойства нанорезонаторов оказывают материалы, из которых они изготовлены, поэтому в обзоре представлены как плазмонные, так и диэлектрические нанорезонаторы. Также рассмотрены нанорезонаторы из гипотетических метаматериалов. Хотя подобные метаматериалы ещё не реализованы на наномасштабах (см., впрочем, [195]), экстремальные свойства резонаторов, сделанных из них, делают поиски таких метаматериалов чрезвычайно актуальными.

В обзоре более или менее подробно рассмотрены моды собственных колебаний, но способы их эффективного возбуждения только намечены. Сейчас в основном оптические нанорезонаторы возбуждаются внешним (дальним) полем, поэтому чрезвычайно важными являются исследования, направленные на создание конфигураций дальних полей, эффективно взаимодействующих с полями собственных колебаний. Особенно интересными для возбуждения симметричных нанорезонаторов являются пучки Бесселя с определённой (радиальной или азимутальной) поляризацией. Например, только использование азимутально поляризованного пучка вместо линейно поляризованного позволяет увеличить эффективность генерации второй гармоники на два порядка [28]. Ещё более важным с практической точки зрения

является возбуждение собственных колебаний в нанорезонаторах с помощью ближних полей для построения фотонных наночипов. В качестве источников ближних полей естественно рассматривать элементарные квантовые излучатели (молекулы красителей или квантовые точки). Такие исследования только начинаются, причём в основном теоретические, так как эксперименты очень сложны.

Мы твёрдо верим, что в данной области будут сделаны плодотворные достижения и большие прорывы, и надеемся, что настоящий обзор даст дополнительный импульс исследованиям в этом направлении.

Благодарность. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 20-12-50136.

Список литературы

1. Климов В В *Наноплазмоника* 2-е испр. изд. (М.: Физматлит, 2010); Klimov V V *Nanoplasmonics* (Singapore: Pan Sanford Publ., 2014)
2. Noginov M A et al. *Nature* **460** 1110 (2009)
3. Ge D et al. *Nat. Commun.* **11** 3414 (2020)
4. Kwon S-H et al. *Nano Lett.* **10** 3679 (2010)
5. Celebrano M et al. *Nat. Nanotechnol.* **10** 412 (2015)
6. Biagioni P, Huang J-S, Hecht B *Rep. Prog. Phys.* **75** 024402 (2012)
7. Yang Z-J et al. *Phys. Rep.* **701** 1 (2017)
8. Paniagua-Domínguez R et al. *J. Appl. Phys.* **126** 150401 (2019)
9. Краснок А Е и др. *Письма в ЖЭТФ* **94** 635 (2011); Krasnok A E et al. *JETP Lett.* **94** 593 (2011)
10. Krasnok A E et al. *Opt. Express* **20** 20599 (2012)
11. Краснок А Е и др. *УФН* **183** 561 (2013); Krasnok A E et al. *Phys. Usp.* **56** 539 (2013)
12. Rocco D et al. *J. Opt. Soc. Am. B* **34** 1918 (2017)
13. Sinev I et al. *ACS Photon.* **7** 680 (2020)
14. Luk'yanchuk B S et al. *ACS Photon.* **2** 993 (2015)
15. Manna U et al. *J. Appl. Phys.* **127** 033101 (2020)
16. Baranov D G et al. *Optica* **4** 814 (2017)
17. Kivshar Yu *Natl. Sci. Rev.* **5** 144 (2018)
18. Koshelev K et al. *Nanophotonics* **8** 725 (2019)
19. Yang Y, Bozhevolnyi S I *Nanotechnology* **30** 204001 (2019)
20. "Physicists Trap Light in Nanoresonators for Record Time". ITMO News, 17.01.2020, <https://physics.itmo.ru/en/news/physicists-trap-light-nanoresonators-record-time>
21. Koshelev K et al. *Science* **367** 288 (2020)
22. Tiguntseva E et al. *ACS Nano* **14** 8149 (2020)
23. Zenin V A et al. *ACS Photon.* **7** 1067 (2020)
24. Melik-Gaykazyan E et al. *Nano Lett.* **21** 1765 (2021)
25. Mylnikov V et al. *ACS Nano* **14** 7338 (2020)
26. Hwang M-S et al. *Nanophotonics* **10** 3599 (2021)
27. Sadrieva Z et al. *Phys. Rev. B* **100** 115303 (2019)
28. Bogdanov A A et al. *Adv. Photon.* **1** 016001 (2019)
29. Carletti L et al. *Phys. Rev. Res.* **1** 023016 (2019)
30. Carletti L et al. *Phys. Rev. Lett.* **121** 33903 (2018)
31. Parker J A et al. *Phys. Rev. Lett.* **124** 097402 (2020)
32. Luk'yanchuk B et al. *Phys. Rev. A* **95** 063820 (2017)
33. Miroshnichenko A E et al. *Nat. Commun.* **6** 8069 (2015)
34. Luk'yanchuk B et al. *Philos. Trans. R. Soc. A* **375** 20160069 (2017)
35. Baryshnikova K V et al. *Adv. Opt. Mater.* **7** 1801350 (2019)
36. Wei L et al. *Optica* **3** 799 (2016)
37. Rybin M V et al. *Phys. Rev. Lett.* **119** 243901 (2017)
38. Odit M et al. *Adv. Mater.* **33** 2003804 (2021)
39. Klimov V *Opt. Lett.* **45** 4300 (2020)
40. Klimov V *Photonics* **9** 1005 (2022)
41. Klimov V V, Guzatov D V *Photonics* **10** 248 (2023)
42. Schwefel H G L et al., in *Optical Microcavities* (Advanced Series in Applied Physics, Vol. 5, Ed. K Vahala) (Singapore: World Scientific, 2004) p. 415, https://doi.org/10.1142/9789812565730_0009
43. Jackson J D *Classical Electrodynamics* (New York: Wiley, 1975)

44. Courant R, Hilbert D *Methoden der mathematischen Physik* (Berlin: Springer, 1924); Пер. на англ. яз.: *Methods of Mathematical Physics* Vol. 1 (Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, 1989); Пер. на русск. яз.: Курант Р, Гильберт Д *Методы математической физики* Т. 1 (М.: ИЛ, ГТТИ, 1933)
45. de Broglie L *Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques* (Paris: Gauthier-Villars, 1941); Пер. на русск. яз.: де Бройль Л *Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах* (М.: ГИИЛ, 1948)
46. Вайнштейн Л А *Открытые резонаторы и открытые волноводы* (М.: Советское радио, 1966); Пер. на англ. яз.: Weinstein L A *Open Resonators and Open Waveguides* (Boulder, CO: Golem Press, 1969)
47. Richtmyer R D *J. Appl. Phys.* **10** 391 (1939)
48. Affolter P, Eliasson B *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **21** 573 (1973)
49. Christopoulos T et al. *Opt. Express* **27** 14505 (2019)
50. Wu T, Gurioli M, Lalanne P *ACS Photon.* **8** 1522 (2021)
51. Bohren C F, Huffman D R *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* (New York: Wiley, 1983)
52. Kristensen P T, Van Vlack C, Hughes S *AIP Conf. Proc.* **1398** 100 (2011)
53. Kristensen P T, Hughes S *ACS Photon.* **1** 2 (2014)
54. Sauvan C et al. *Phys. Rev. Lett.* **110** 237401 (2013)
55. Lalanne P et al. *Laser Photon. Rev.* **12** 1700113 (2018)
56. Muljarov E A, Langbein W *Phys. Rev. B* **94** 235438 (2016)
57. Coccioli R et al. *IEE Proc. Optoelectron.* **145** 391 (1998)
58. Doost M B, Langbein W, Muljarov E A *Phys. Rev. A* **87** 043827 (2013)
59. Sauvan C *Opt. Express* **29** 8268 (2021)
60. Дмитриев В И, Захаров Е В *Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике* (М.: МАКС Пресс, 2008)
61. Bulgin V S et al. *IET Microwaves Antennas Propag.* **9** 1186 (2015)
62. Sukharevsky I O et al. *Opt. Eng.* **58** (1) 016115 (2019)
63. Давидович М В *Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Сер. Физика* **8** (1) 3 (2008) <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2008-8-1-3-14>
64. Войтович Н Н, Капенелбаум Б З, Сивов А Н *УФН* **118** 709 (1976); Voitevich N N, Katsenelenbaum B Z, Sivov A N *Sov. Phys. Usp.* **19** 337 (1976)
65. Войтович Н Н, Капенелбаум Б З, Сивов А Н *Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции* (М.: Наука, 1977)
66. Климов В В, Дюкля М, Летохов В С *Квантовая электроника* **31** 569 (2001); Klimov V V, Ducloy M, Letokhov V S *Quantum Electron.* **31** 569 (2001)
67. von Neumann J, Wigner E P *Phys. Z.* **30** 465 (1929)
68. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **33** 1531 (1957); Zel'dovich Ia B *Sov. Phys. JETP* **6** 1184 (1958)
69. Gladyshev S, Frizyuk K, Bogdanov A *Phys. Rev. B* **102** 075103 (2020)
70. Wu T et al. *Phys. Rev. A* **101** 011803 (2020)
71. Lord Rayleigh F R S *Philos. Mag.* **5** **44** 28 (1897)
72. Stevenson A F J. *Appl. Phys.* **24** 1134 (1953)
73. Stevenson A F J. *Appl. Phys.* **24** 1143 (1953)
74. van Bladel J *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **23** 199 (1975)
75. Mongia R K, Bhartia P *Int. J. Microwave Millimeter-Wave Comput.-Aided Eng.* **4** 230 (1994)
76. Brillouin L J. *Phys. Radium* **3** 373 (1932) <https://doi.org/10.1051/jphysrad:0193200309037300>
77. Muljarov E A, Langbein W, Zimmermann R *Europhys. Lett.* **92** 50010 (2010)
78. COMSOL, <https://www.comsol.ru/>
79. Electromagnetic Systems Modeling. CST Studio Suite. Dassault Systèmes, <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/cst-studio-suite/electromagnetic-systems/>
80. Bai Q et al. *Opt. Express* **21** 27371 (2013)
81. Yan W, Faggiani R, Lalanne P *Phys. Rev. B* **97** 205422 (2018)
82. Mie G *Ann. Physik* **25** 377 (1908) по новой нумерации Vol. 330
83. Luk'yanchuk B S et al. *J. Opt. A* **9** S294 (2007)
84. Tribelsky M I, Luk'yanchuk B S *Phys. Rev. Lett.* **97** 263902 (2006)
85. Трибельский М И, Мирошниченко А Е *УФН* **192** 45 (2022); Tribelsky M I, Miroshnichenko A E *Phys. Usp.* **65** 40 (2022)
86. Bashevoy M V, Fedotov V A, Zheludev N I *Opt. Express* **13** 8372 (2005)
87. Noh H et al. *Phys. Rev. Lett.* **108** 186805 (2012)
88. Proskurin A, Bogdanov A, Baranov D *Laser Photon. Rev.* **15** 2000430 (2021)
89. Smythe W R *Static and Dynamic Electricity* 3rd ed. (New York: McGraw-Hill, 1968); Пер. на русск. яз.: Смайт В *Электростатика и электродинамика* (М.: ИЛ, 1954)
90. Guzatov D V, Klimov V V, Pikhota M *Laser Phys.* **20** 85 (2010)
91. Guzatov D V, Klimov V V *Chem. Phys. Lett.* **412** 341 (2005)
92. Hobson E W *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Cambridge: The Univ. Press, 1931)
93. Faggiani R et al. *ACS Photon.* **4** 897 (2017)
94. Mårssell E et al. *Nano Lett.* **15** 6601 (2015)
95. Klimov V V, Guzatov D V *Phys. Rev. B* **75** 024303 (2007)
96. Климов В В *УФН* **178** 875 (2008); Klimov V V *Phys. Usp.* **51** 839 (2008)
97. Klimov V V, Guzatov D V *Appl. Phys. A* **89** 305 (2007)
98. Nordlander P et al. *Nano Lett.* **4** 899 (2004)
99. Prodan E, Nordlander P *J. Chem. Phys.* **120** 5444 (2004)
100. Guzatov D V, Klimov V V *New J. Phys.* **13** 053034 (2011)
101. Watson J D et al. *Molecular Biology of the Gene* 7th ed. (Boston: Pearson, 2014)
102. Pal S et al. *Angew. Chem.* **122** 2760 (2010); *Angew. Chem. Int. Ed.* **49** 2700 (2010)
103. Zheng J et al. *Nano Lett.* **6** 1502 (2006)
104. Kuzyk A et al. *Nature* **483** 311 (2012)
105. Mastroianni A J, Claridge S A, Alivisatos A P *J. Am. Chem. Soc.* **131** 8455 (2009)
106. Klein W P et al. *Nano Lett.* **13** 3850 (2013)
107. Ding B et al. *J. Am. Chem. Soc.* **132** 3248 (2010)
108. Roller E-M et al. *Nano Lett.* **15** 1368 (2015)
109. Roller E-M et al. *Nat. Phys.* **13** 761 (2017)
110. Климов В В, Шаронов Г В *Квантовая электроника* **50** 237 (2020); Klimov V V, Sharonov G V *Quantum Electron.* **50** 237 (2020)
111. Many V et al. *Nanophotonics* **8** 549 (2019)
112. Ильченко М Е и др. *Диэлектрические резонаторы* (Под ред. М Е Ильченко) (М.: Радио и связь, 1989)
113. Luk K M, Leung K W (Eds) *Dielectric Resonator Antennas* (Antennas Series) 1st ed. (Baldock: Research Studies Press Ltd, 2002)
114. Vahala K *Nature* **424** 839 (2003)
115. Kuznetsov A I et al. *Science* **354** aag2472 (2016)
116. Sager O, Tisi F *Proc. IEEE* **56** 1593 (1968)
117. Gastine M, Courtois L, Dormann J L *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **15** 694 (1967)
118. Martin R J, Tatam R P *J. Mod. Opt.* **41** 1445 (1994)
119. Filonov D S et al. *Appl. Phys. Lett.* **100** 201113 (2012)
120. Kuznetsov A I et al. *Sci. Rep.* **2** 492 (2012)
121. Voshchinnikov N V, Farafonov V G *Astrophys. Space Sci.* **204** 19 (1993)
122. Комаров И В, Пономарев Л И, Славянов С Ю *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции* (М.: Наука, 1976)
123. Lai H M et al. *J. Opt. Soc. Am. B* **8** 1962 (1991)
124. Luk'yanchuk B S et al. *ACS Photon.* **2** 993 (2015)
125. Bulgakov E, Pichugin K, Sadreev A *Phys. Rev. A* **104** 053507 (2021); arXiv:2107.13719
126. Kishk A, Glisson A W, Junker G P *PIER* **33** 97 (2001) <http://dx.doi.org/10.2528/PIER00122803>
127. Bulgin V S et al. "Axially symmetric modeling of dielectric pillbox resonators", in *2012 14th Intern. Conf. on Transparent Optical Networks, ICTON* (Piscataway, NJ: IEEE, 2012) <https://doi.org/10.1109/ICTON.2012.6253729>
128. Рыбин М В, Лимонов М Ф *УФН* **189** 881 (2019); Rybin M V, Limonov M F *Phys. Usp.* **62** 823 (2019)
129. Krasikov S et al. *Phys. Rev. Appl.* **15** 024052 (2021)
130. Ruan Z, Fan S *Phys. Rev. Lett.* **105** 013901 (2010)
131. Qian C et al. *Phys. Rev. Lett.* **122** 063901 (2019)
132. Qian C et al. *ACS Photon.* **5** 1506 (2018)
133. Bulgakov E, Pichugin K, Sadreev A *Photonics* **8** 49 (2021)
134. Климов В В *УФН* **189** 1131 (2019); Klimov V V *Phys. Usp.* **62** 1058 (2019)
135. Lu Y et al. *Opto-Electron Adv.* **5** 210014 (2022)

136. Веселаго В Г *УФН* **92** 517 (1967); Veselago V G *Sov. Phys. Usp.* **10** 509 (1968)
137. Shelby R A, Smith D R, Schultz S *Science* **292** 77 (2001)
138. Shelby R A et al. *Appl. Phys. Lett.* **78** 489 (2001)
139. Ремнев М А, Климов В В *УФН* **188** 169 (2018); Remnev M A, Klimov V V *Phys. Usp.* **61** 157 (2018)
140. Веселаго В Г *УФН* **181** 1201 (2011); Veselago V G *Phys. Usp.* **54** 1161 (2011)
141. Кильдишев А В, Шалаев В М *УФН* **181** 59 (2011); Kildishev A V, Shalaev V M *Phys. Usp.* **54** 53 (2011)
142. Klimov V V *Opt. Commun.* **211** 183 (2002)
143. Климов В В *УФН* **191** 1044 (2021); Klimov V V *Phys. Usp.* **64** 990 (2021)
144. Klimov V, arXiv:2102.12690
145. Бокуть Б В, Сердюков А Н, Федоров Ф И *Кристаллография* **15** 1002 (1970); Bokut' B V, Serdyukov A N, Fedorov F I *Sov. Phys. Crystallogr.* **15** 871 (1971)
146. Lindell I V et al. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media* (Boston: Artech House, 1994)
147. Pendry J B *Science* **306** 1353 (2004)
148. Zhang S et al. *Phys. Rev. Lett.* **102** 023901 (2009)
149. Dong J et al. *Opt. Express* **17** 14172 (2009)
150. "Chiral metamaterials", US 8271241, B2, September 18, 2012
151. "Chiral metamaterials", US 8,271,241 B2. Google Patents, <http://www.google.ch/patents/US8271241>
152. Wongkasem N, Akyurtlu A, Marx K *PIER* **63** 295 (2006)
153. Klimov V V, Guzatov D V, Ducloy M *Europhys. Lett.* **97** 47004 (2012)
154. Климов В В, Гузатов Д В *УФН* **182** 1130 (2012); Klimov V V, Guzatov D V *Phys. Usp.* **55** 1054 (2012)
155. Bohren C F *Chem. Phys. Lett.* **29** 458 (1974)
156. Guzatov D V, Klimov V V *New J. Phys.* **14** 123009 (2012)
157. Klimov V V et al. *Opt. Express* **22** 18564 (2014)
158. Klimov V, Guzatov D, in *Singular and Chiral Nanoplasmonics* (Eds N Zheludev, S Boriskina) (Singapore: Pan Stanford Publ., 2014) p. 121
159. Guzatov D V, Klimov V V *Квантовая электроника* **45** 250 (2015); Klimov V V, Guzatov D V *Quantum Electron.* **45** 250 (2015)
160. Guzatov D V et al. *Opt. Express* **25** 6036 (2017)
161. Wu C et al. *Phys. Rev. X* **4** 021015 (2014)
162. Давидович М В *УФН* **189** 1249 (2019); Davidovich M V *Phys. Usp.* **62** 1173 (2019)
163. Roth J, Dignam M J *J. Opt. Soc. Am.* **63** 308 (1973)
164. Toterongora J S et al. *Nat. Commun.* **8** 15535 (2017)
165. Wan M et al. *Appl. Phys. Lett.* **110** 031103 (2017)
166. Schwartz J J, Stavrakis S, Quake S R *Nat. Nanotechnol.* **5** 127 (2010)
167. Staude I et al. *ACS Photon.* **2** 172 (2015)
168. Krasnok A E et al. *Laser Photon. Rev.* **9** 385 (2015)
169. Ee H-S et al. *Nano Lett.* **15** 1759 (2015)
170. Singh M et al. *Nanoscale* **7** 1424 (2015)
171. Caldarola M et al. *Nat. Commun.* **6** 7915 (2015)
172. Szenes A et al. *Sci. Rep.* **7** 13845 (2017)
173. Elshaari A W et al. *Nat. Photon.* **14** 285 (2020)
174. Brongersma M L, Cui Y, Fan S *Nat. Mater.* **13** 451 (2014)
175. Kim S J et al. *Nat. Commun.* **6** 7591 (2015)
176. Sousa-Castillo A et al. *Nano Energy* **37** 118 (2017)
177. Lee K-T et al. *Sci. Rep.* **7** 10640 (2017)
178. Vismara R et al. *Opt. Express* **27** A967 (2019)
179. García-Guirado J et al. *Nano Lett.* **20** 585 (2020)
180. Yavas O et al. *Nano Lett.* **17** 4421 (2017)
181. Bontempi N et al. *Nanoscale* **9** 4972 (2017)
182. Yang Y et al. *Nat. Commun.* **16** 5753 (2014)
183. Tittl A et al. *Science* **360** 1105 (2018)
184. Rodionov S A, Remnev M A, Klimov V V *Sens. Bio-Sens. Res.* **22** 100263 (2019)
185. Klimov V V et al. *J. Phys. D* **50** 285101 (2017)
186. Mariani S et al. *Opt. Lett.* **39** 3062 (2014)
187. Kuo P S, Bravo-Abad J, Solomon G S *Nat. Commun.* **5** 3109 (2014)
188. Gigli C et al. *Front. Phys.* **7** 221 (2019)
189. Li G-C et al. *Nat. Commun.* **12** 4326 (2021)
190. Shcherbakov M R et al. *Nano Lett.* **14** 6488 (2014)
191. Grinblat G et al. *Nano Lett.* **16** 4635 (2016)
192. Grinblat G et al. *ACS Nano* **11** 953 (2017)
193. Evlyukhin A B et al. *Nano Lett.* **12** 3749 (2012)
194. Staude I et al. *ACS Nano* **7** 7824 (2013)
195. Tonkaev P et al. *Appl. Phys. Lett.* **118** 091104 (2021)

Optical nanoresonators

V.V. Klimov

Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,
Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation
E-mail: klimov256@gmail.com

The review presents an analysis and generalization of classical and most modern approaches to the description and development of the principles of operation of open optical nanoresonators, that is, resonators, all sizes of which are smaller than the resonant wavelength of radiation in a vacuum. Particular attention is paid to the physics of such phenomena as bound states in a continuum, anapole states, supercavity modes, and perfect nonradiating modes with extremely high quality factors and localizations of electromagnetic fields. An analysis of the optical properties of natural oscillations in nanoresonators made of metamaterials is also presented in the review. The effects considered in this review, besides being of fundamental import, can also find applications in the development of optical nanoantennas, nanolasers, biosensors, photovoltaic devices, and nonlinear nanophotonics.

Keywords: nanoresonators, quasi-normal modes, perfect nonradiating modes, supercavity modes, anapole states, bound states in a continuum, Platonic solids, quality factor, nanoantennas, nanolasers, metamaterials, Mie resonances, plasmon resonances, biosensors

PACS numbers: 03.50.De, **32.50.+d**, 32.70.Jz, **42.25.-p**, 42.50.Pq, **42.79.-e**, **78.67.-n**, 78.67.Pt

Bibliography — 195 references

Received 10 August 2021, revised 17 January 2022

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **193** (3) 279–304 (2023)

Physics – Uspekhi **66** (3) (2023)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2022.02.039153>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2022.02.039153>