

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

# Ламинарные затопленные струи несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса

А.М. Гайфуллин, В.В. Жвик

*Рассмотрены основополагающие теоретические работы по ламинарным осесимметричным затопленным струям. Исследованы задачи, связанные со струями с расходом через начальное сечение, с закрученными струями. Обнаружены и исправлены некоторые ошибочные результаты теории ламинарных струй.*

**Ключевые слова:** затопленная струя, ламинарная струя, закрученная струя, инварианты, поток импульса

PACS number: 47.15.Uv

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2022.12.039301>

## Содержание

1. Введение (1214).
2. Осесимметричная незакрученная струя (1214).
  - 2.1. Решение для струй в приближении уравнений пограничного слоя.
  - 2.2. Решения для струй в рамках уравнений Навье – Стокса.
  - 2.3. Соответствие решений.
  - 2.4. Струя Бромана и Руденко.
3. Осесимметричная струя с расходом через начальное сечение (1218).
  - 3.1. Решения Румера, Гольдштика – Яворского и Лойцянского.
  - 3.2. Связь дальней асимптотики с профилем скорости в выходном сечении струи.
4. Осесимметричная закрученная струя (1220).
  - 4.1. Струя Лойцянского.
  - 4.2. Струя Лонга.
  - 4.3. О реализации закрученных струй. Скрытые инварианты.
5. Заключение (1225).
- Список литературы (1225).

## 1. Введение

Созданию теории ламинарных струй несжимаемой жидкости посвящено достаточно много работ. Среди исследователей, внесших основополагающий вклад в создание этой теории, следует назвать Г. Шлихтинга, Л.Д. Ландау, Н.А. Слезкина, В.И. Ячеева, М.А. Гольдштика, Н.И. Яворского, Л.Г. Лойцянского, Ю.Б. Румера, Г. Сквайра и многих других.

Можно выделить две цели данного исследования. Первая — собрать вместе основополагающие работы

по теории ламинарных осесимметричных струй. Вторая цель, наверное, более важна, чем первая. Дело вот в чём: несмотря на то что в создании теории струй принимали участие многие известные гидродинамики, эта область гидродинамики, как, возможно, никакая другая, изобилует ошибочными утверждениями, многие из которых по прошествии лет воспринимаются научным сообществом как истинные утверждения. Ситуация усугубляется тем, что ошибки по данной тематике присутствуют и в известных монографиях, и в широко цитируемых статьях. Обнаружение таких ошибочных результатов и замена их на верные утверждения — главная цель данной работы.

## 2. Осесимметричная незакрученная струя

### 2.1. Решение для струи

#### в приближении уравнений пограничного слоя

Как известно, стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости подчиняется уравнениям Навье – Стокса

$$(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \nu\Delta\mathbf{u}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор скорости жидкости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости. Вместе с тем аналитические решения для струй были получены первоначально в приближении пограничного слоя для больших чисел Рейнольдса  $Re$ , а затем уже построены аналоги этих решений в рамках уравнений Навье – Стокса. В 1933 г. Г. Шлихтингом в знаменитом журнале *ZAMM (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik)* была опубликована короткая статья — всего четыре страницы, в которой приводится решение для осесимметричной струи и заложены основы решения для плоской струи [1] (см. также [2]). Окончательное решение для плоской струи получено У. Бикли [3].

Для осесимметричного случая рассматривается струя, вытекающая из круглого отверстия в пространство, затопленное той же жидкостью. Исследуется тонкая струя.

А.М. Гайфуллин<sup>(а)</sup>, В.В. Жвик<sup>(б)</sup>

Центральный аэрогидродинамический институт  
им. профессора Н.Е. Жуковского,  
ул. Жуковского 1, 140180 Жуковский, Московская область,  
Российская Федерация

E-mail: <sup>(а)</sup> gaifullin@tsagi.ru, <sup>(б)</sup> vladzhvick@yandex.ru

Статья поступила 10 июля 2022 г.,  
после доработки 28 ноября 2022 г.

Продольная компонента скорости в ней намного больше поперечной, а вот продольные градиенты компонент скорости намного меньше поперечных. Решение строится в приближении пограничного слоя, когда считается, что течение в тонком слое можно описать только главным приближением уравнений (1) при разложении по большим числам Рейнольдса. В рамках этого главного приближения в членах, зависящих от вязкости в продольной составляющей уравнения движения, отбрасывается член со второй производной вдоль продольного направления; от поперечной составляющей уравнения движения для незакрученной осесимметричной струи остаётся только равенство нулю поперечного градиента давления. Продольное изменение давления определяется изменением давления вне пограничного слоя [4]. Так как струя тонкая, вне её градиент давления в главном приближении равен нулю. Тогда давление в струе постоянно, а сами уравнения пограничного слоя имеют вид

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial(u_x r)}{\partial x} + \frac{\partial(u_r r)}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

с граничными условиями

$$u_r = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial r} = 0 \quad (r = 0), \quad u_x \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty). \quad (4)$$

Здесь  $x, r$  — цилиндрическая система координат,  $u_x, u_r$  — компоненты скорости в данной системе, ось  $x$  направлена вдоль оси струи, точка  $x = 0$  совпадает с точкой начала струи. Уравнение (2) с учётом (3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial(u_x^2 r)}{\partial x} + \frac{\partial(u_x u_r r)}{\partial r} = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right),$$

откуда следует сохранение потока импульса в направлении оси  $x$  в любом поперечном сечении этой струи

$$J = 2\pi\rho \int_0^\infty u_x^2 r dr = \text{const}. \quad (5)$$

Если принять, что струя вытекает из точки, то из-за одинаковой размерности  $\sqrt{J/\rho}$  и кинематического коэффициента вязкости, а также из-за отсутствия характерного линейного размера решение задачи можно искать в автомодельном виде. Показатель автомодельности определяется из условия сохранения потока импульса (5)

$$u_x = \frac{\nu}{x} \frac{F'}{\eta}, \quad u_r = \frac{\nu}{x} \left( F' - \frac{F}{\eta} \right), \quad \eta = \frac{r}{x}.$$

Функция  $F(\eta)$  связана с функцией тока  $\psi$  соотношением  $F = \psi/\nu x$ ,  $(\quad)' \equiv \partial/\partial\eta$ , где

$$u_x = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Из (2) следует

$$-\left(\frac{FF'}{\eta}\right)' = \left(F'' - \frac{F'}{\eta}\right)'. \quad (6)$$

С учётом граничных условий (4) и выражения для потока импульса (5) решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned} F &= \frac{\xi^2}{1 + \xi^2/4}, \quad u_x = \frac{3}{8\pi} \frac{K}{\nu x} \frac{1}{(1 + \xi^2/4)^2}, \\ u_r &= \frac{1}{4x} \sqrt{\frac{3K}{\pi}} \frac{\xi - \xi^3/4}{(1 + \xi^2/4)^2}, \\ \xi &= \sqrt{\frac{3K}{16\pi}} \frac{1}{\nu} \eta = \sqrt{\frac{3K}{16\pi}} \frac{r}{\nu x}, \quad K = \frac{J}{\rho}. \end{aligned} \quad (7)$$

Массовый расход в единицу времени через сечение струи

$$Q(x) = 2\pi\rho \int_0^\infty u_x r dr = 8\pi\rho\nu x. \quad (8)$$

У струй может быть разный поток импульса, от которого, как видно из (7), зависят все характеристики струи, кроме расхода.

Ширина струи растёт линейно с увеличением  $x$ . Соответственно расход (8) через сечение струи линейно возрастает по мере удаления от начального сечения. Это означает, что струя подсасывает окружающую её жидкость. Из-за данного факта решение (7), (8) не может быть реализовано в ограниченной области, когда её размер сравним с поперечным размером струи, например, когда струя распространяется в узких каналах.

В начальном сечении, несмотря на то что продольная скорость становится бесконечной, расход равен нулю. Таким образом, осесимметричная струя Шлихтинга характеризуется только потоком импульса (5) при нулевом начальном расходе.

Интересно отметить, что при малых  $\xi$  радиальная скорость положительна. Это происходит из-за того, что приосевая часть струи тормозится с ростом  $x$ . Начиная с некоторого  $\xi$  ( $\xi = 2$ ) радиальная скорость становится отрицательной. Струя, подсасывая, разгоняет жидкость в направлении оси  $x$ .

## 2.2. Решения для струй в рамках уравнений Навье–Стокса. Струя Ландау

На следующий год после публикации статьи [1] вышла статья Н.А. Слезкина [5] (см. также [6]), в которой были получены результаты по незакрученным осесимметричным течениям, а именно построены конические осесимметричные решения уравнений Навье–Стокса. В этой статье исследуются полные уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в сферических координатах  $R, \theta, \varphi$ . Компоненты скорости  $u_R, u_\theta$ . Третья компонента скорости равна нулю. В сферической системе координат функция тока вводится следующим образом:

$$u_R = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial\psi}{\partial R}. \quad (9)$$

Ищется решение уравнений Навье–Стокса для случая, когда функция тока представляется в виде

$$\psi = R f_S(\tau), \quad (10)$$

где  $\tau = \cos \theta$ .

Если подставить (10) в уравнения Навье–Стокса и стандартным путём избавиться от давления, то функция  $f_S(\tau)$  подчиняется уравнению

$$f_S f_S''' + 3f_S' f_S'' - \nu [f_S^{IV} (1 - \tau^2) - 4f_S''' \tau] = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) эквивалентно следующему:

$$\left[ \frac{f_S^2}{2} - v(1 - \tau^2) f_S' - 2v\tau f_S \right]''' = 0,$$

или, что то же самое, уравнению Риккати [7]

$$\frac{f_S^2}{2} - v(1 - \tau^2) f_S' - 2v\tau f_S = C_0 + C_1\tau + C_2\tau^2. \quad (12)$$

Понадобилось ещё девять лет для того, чтобы частный случай уравнения (12) "превратился" в уравнение для описания затопленной осесимметричной незакрученной струи несжимаемой жидкости в рамках уравнений Навье–Стокса. Такую струю в сферических координатах рассмотрел Л.Д. Ландау [8] (см. также [4]). Струя подчиняется условию, что через любую замкнутую поверхность вокруг начала координат протекает одинаковый поток полного импульса, который источник струи сообщает окружающей жидкости. Это условие определяет закон убывания скоростей. Подобно (9), (10), скорости представляются в виде

$$u_R = \frac{1}{R} F(\theta), \quad u_\theta = \frac{1}{R} f_L(\theta). \quad (13)$$

Стационарные уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости (1) в декартовой системе координат можно переписать в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_i} = 0, \quad \Pi_{ij} = \rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Аналогично можно выписать компоненты тензора плотности потока импульса в сферической системе координат. Из условия осесимметричности и незакрученности струи компоненты тензора плотности потока импульса  $\Pi_{R\varphi}$  и  $\Pi_{\theta\varphi}$  равны нулю. Далее из всего многообразия решений Ландау выбирает одно, как отмечено в работах [9, 10], "физически правильное". Он полагает, что и компоненты тензоров  $\Pi_{\varphi\varphi} = p - 2\mu(u_R + u_\theta \cot \theta)/R$  и  $\Pi_{\theta\theta} = p + \rho u_\theta^2 - 2\mu(u_R + \partial u_\theta / \partial \theta)/R$  также равны нулю, и, как следствие, равна нулю компонента  $\Pi_{R\theta}$ , так как в данном случае

$$\sin^2 \theta \Pi_{R\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin^2 \theta (\Pi_{\varphi\varphi} - \Pi_{\theta\theta})].$$

Такой выбор позволяет выполнить граничные условия на оси струи:  $u_\theta = 0$ ,  $u_R$  — ограничено, или, иными словами, поле скоростей в этом случае будет регулярно всюду, кроме точки — источника струи. Ненулевой остаётся только компонента тензора  $\Pi_{RR}$ . Имеем

$$\frac{1}{\rho} (\Pi_{\theta\theta} - \Pi_{\varphi\varphi}) = \frac{1}{R^2} \left( f_L^2 + 2v f_L \cot \theta - 2v \frac{\partial f_L}{\partial \theta} \right).$$

Откуда

$$f_L^2 + 2v f_L \cot \theta - 2v \frac{\partial f_L}{\partial \theta} = 0. \quad (14)$$

Сравнивая (13) с (9), (10) и (12) с (14), получаем, что функция  $f_S = -f_L \sin \theta$  в данном случае по-прежнему удовлетворяет уравнению (12) с константами  $C_0 = C_1 = C_2 = 0$ . Позже В.И. Яцеев доказал, что только при равенстве всех констант нулю решение (12) регулярно

всюду, кроме точки истечения струи [9]. Уравнение (14) первого порядка, его решение

$$f_L = -\frac{2v \sin \theta}{A - \cos \theta} = -\frac{2v \sqrt{1 - \tau^2}}{A - \tau} \quad (15)$$

зависит только от одной константы  $A$ . Естественно, от данной константы будут зависеть и другие характеристики струи. При этом

$$F = 2v \left[ \frac{A^2 - 1}{(A - \tau)^2} - 1 \right]. \quad (16)$$

Из приведённых выше соотношений следует, что поле скоростей будет регулярным при всех углах  $\theta$ , только если  $A > 1$  (рассматриваются струи, вытекающие в направлении полуоси  $\theta = 0$ ).

Изменение давления квадратично по коэффициенту вязкости и имеет особенность при приближении к источнику струи

$$p = p_\infty + \frac{4\rho v^2}{R^2} \frac{A\tau - 1}{(A - \tau)^2}. \quad (17)$$

Поток импульса струи

$$K = 16\pi v^2 A \left[ 1 + \frac{4}{3(A^2 - 1)} - \frac{A}{2} \ln \frac{A+1}{A-1} \right]. \quad (18)$$

В 1951 г. Г. Сквайр [11] получил уравнение, совпадающее с (12), провёл его анализ, а затем получил решение, совпадающее с [8]. Но в своей работе он, к сожалению, не ссылается на Слезкина, Ландау и Яцеева. На фоне полученного решения для поля скоростей в [11] также рассмотрена эволюция теплового источника, помещённого в точку истечения струи.

### 2.3. Соответствие решений

Теперь определим условие, при котором решение (13), (15), (16) уравнений Навье–Стокса в главном приближении совпадает с решением (7) уравнений пограничного слоя. Естественно, условие выполнится, если струя будет достаточно тонкой, т.е. приосевая область, где продольная скорость порядка максимальной скорости на оси, будет иметь радиальный размер намного меньше продольного. Согласно (7), это произойдёт, если  $\sqrt{K} \gg v$ , или характерное число  $Re = \sqrt{K}/v \gg 1$ . Из (18) следует: последнее возможно только, если  $A$  близко к 1. Поведение линий тока, их изменение при стремлении  $A$  к 1 можно найти в известной монографии [12]. Представим  $A = 1 + \delta$ , где  $\delta \ll 1$ . Тогда

$$K = 16\pi v^2 \left( \frac{2}{3} \delta^{-1} + \frac{1}{2} \ln \delta + O(1) \right),$$

или в главном приближении (пренебрегаем  $\ln \delta$  по сравнению с  $\delta^{-1}$ )

$$\delta = \frac{32\pi}{3} \frac{v^2}{K}. \quad (19)$$

Компоненты скорости (7) в цилиндрической системе координат связаны с компонентами (13) в сферических координатах соотношениями  $u_x = u_R \cos \theta - u_\theta \sin \theta$ ,

$u_r = u_R \sin \theta + u_\theta \cos \theta$ . При этом в сечении  $x = \text{const}$  имеем  $x = R \cos \theta$ ,  $r = R \sin \theta$ . Тогда в цилиндрической системе координат решение уравнений Навье–Стокса запишется в виде

$$u_x = \frac{2v \cos \theta}{x} \left[ \frac{(A^2 - 1) \cos \theta}{(A - \cos \theta)^2} + \frac{1 - A \cos \theta}{A - \cos \theta} \right], \quad (20)$$

$$u_r = \frac{v \sin(2\theta)}{x} \frac{A \cos \theta - 1}{(A - \cos \theta)^2}. \quad (21)$$

Подставляя  $A = 1 + \delta$ ,  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$  в последнее соотношение и учитывая (19), получаем в главном приближении ( $\delta \rightarrow 0$ ,  $\theta \rightarrow 0$ ) соотношения для  $u_x$ ,  $u_r$ , совпадающие с их значениями в формуле (7).

Казалось бы, совпадение в главном приближении компонент скоростей в основной части струи обеспечивает совпадение и других величин, но на самом деле это не так. На парадокс с расходом указано в работах [13–15]. Расход через сечение, вычисленный для струи Шлихтинга, определяется формулой (8). Если посчитать расход через сферу, окружающую струю Ландау, то естественно получится нулевой расход. Но если посчитать расход через сечение  $x = \text{const}$ , то получится, что он бесконечен

$$Q(x) = 4\pi\rho v \left[ \frac{\sqrt{r^2 + x^2}}{A} - \frac{A^2 - 1}{A^2} \frac{x^2}{A\sqrt{r^2 + x^2} - x} \right]_{r=0}^{r=\infty}. \quad (22)$$

Дело тут в том, что в струе Шлихтинга расход рассчитывается только через узкую часть струи, в которой справедливы уравнения пограничного слоя, и игнорируется внешняя часть струи, описываемая уравнениями Эйлера. Для того чтобы получить течение во внешней части струи, обратимся к формуле (7). При  $\xi \rightarrow \infty$  радиальная компонента скорости

$$u_r \rightarrow -\sqrt{\frac{3K}{\pi}} \frac{1}{x\xi} = -\frac{4v}{r}.$$

Согласно методу сращиваемых асимптотических разложений [16], течение во внешней области вызвано источниками, расположенными на оси  $r = 0$ . Их интенсивность определяется из условия  $u_r = -4v/r = q/2\pi r$ , откуда  $q = -8\pi v$ . Таким образом, имеется луч  $0 \leq x < \infty$ ,  $r = 0$ , на каждом элементе  $dx$  которого расположен трёхмерный источник интенсивности  $q dx$ . Такой луч источников порождает осевую и радиальную компоненты скорости

$$u_x(x, r) = - \int_0^\infty \frac{x_1 - x}{4\pi[(x_1 - x)^2 + r^2]^{3/2}} q dx_1 = \frac{2v}{\sqrt{x^2 + r^2}}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} u_r(x, r) &= \int_0^\infty \frac{r}{4\pi[(x_1 - x)^2 + r^2]^{3/2}} q dx_1 = \\ &= -\frac{2v}{r} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Вычисляя по формуле (23) расход, получаем

$$Q(x) = 4\pi\rho v \sqrt{r^2 + x^2} \Big|_{r=0}^{r=\infty}. \quad (25)$$

Сравнивая (25) с (22), а также (23) с (20) и (24) с (21), получаем, что, во-первых, и струя Шлихтинга в правильном понимании даёт бесконечный расход, а во-вторых, совпадение характеристик в струе Ландау с внешним течением в струе Шлихтинга происходит, если положить  $A = 1$  [15]. Несмотря на то что продольная компонента скорости во внешней невязкой области намного меньше, чем во внутренней области, соответствующей пограничному слою, именно внешняя область обеспечивает бесконечный расход.

#### 2.4. Струя Бромана и Руденко

В 2010 г. в журнале *УФН* была опубликована статья Г.И. Бромана и О.В. Руденко [10], в которой, во-первых, был приведён краткий обзор создания теории ламинарных незакрученных затопленных струй, во-вторых, впервые озвучена проблема отсутствия предельного перехода к невязкой жидкости в решении Ландау, и, в-третьих, получено другое решение уравнений (12) при  $C_0 = C_2 = D^2/2$ ,  $C_1 = -D^2$ , обобщающее решение Ландау [8]:

$$f = f_S = -v(1 - \tau) \left[ 1 + \gamma \frac{(1 + \tau)^\gamma + G}{(1 + \tau)^\gamma - G} \right],$$

где  $D$  и  $G$  — некоторые константы,

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{D^2}{v^2}}.$$

Таким образом, всё определяется отношением  $D/v$ , т.е. величиной  $\gamma$ . При  $D \ll v$  имеем  $\gamma \approx 1$  и

$$f = 2v \frac{1 - \tau^2}{G - 1 - \tau},$$

что при  $G = A + 1$  соответствует решению Ландау (15). Для этого решения в [10] предложено ещё одно, кроме затопленной струи, интересное приложение: "Тот факт, что струя Ландау сообщает среде количество движения, но не вносит массу, позволяет использовать её для описания потоков, вызванных звуком".

В случае  $v \rightarrow 0$ ,  $\gamma \rightarrow \infty$  получается другое предельное решение, из которого следует, что в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{D}{x\sqrt{1 + \eta^2}}, \quad u_r = -\frac{D(\sqrt{1 + \eta^2} - 1)}{x\eta\sqrt{1 + \eta^2}}, \\ p &= p_\infty - \frac{D^2\rho(\sqrt{1 + \eta^2} - 1)}{x^2\eta^2\sqrt{1 + \eta^2}}, \quad \eta = \frac{r}{x}. \end{aligned} \quad (26)$$

Решение (26) авторы работы [10] интерпретируют как решение для струи в идеальной жидкости. Это решение удовлетворяет уравнениям Эйлера и условиям равенства нулю радиальной компоненты скорости и ограниченности осевой компоненты скорости на оси струи, а также затухания скоростей при  $\eta \rightarrow \infty$ . Именно выполнением указанных условий обусловлен выбор констант  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  в начале данного раздела.

Из уравнения для линий тока

$$\frac{dr}{u_r} = \frac{dx}{u_x}$$

следует их форма

$$r = r_0 \sqrt{1 + \frac{2}{r_0} x}, \quad (27)$$

где  $r_0$  определяет радиальную координату линии тока в сечении  $x = 0$ .

Поле скоростей можно рассматривать либо во всей области течения, либо в области, ограниченной какой-либо линией тока (27). Так как жидкость невязкая, любую линию тока можно превратить в твёрдую поверхность. В последнем случае линии тока соответствуют в зависимости от знака  $D$  течению в сужающихся или расширяющихся каналах.

Поле скоростей (26) невязхренное с потенциалом

$$\varphi = -D \ln |x + \sqrt{x^2 + r^2}|.$$

Следовательно, поля скоростей и давления (26) удовлетворяют не только уравнениям Эйлера, но и уравнениям Навье–Стокса.

### 3. Осесимметричная струя с расходом через начальное сечение

#### 3.1. Решения Румера, Гольдштика – Яворского и Лойцянского

Как было показано в предыдущем разделе, возможно построение решений для струй, вытекающих с бесконечной скоростью из точечного источника импульса. Реально, конечно, таких источников не существует, и струи вытекают из отверстий с конечным диаметром и с конечной скоростью, т.е. имеется расход жидкости через начальное сечение струи. Примером такой задачи может служить струя, вытекающая в затопленное пространство из цилиндрической трубы. Здесь существенно, что поток импульса сохраняется и для задачи о распространении струи с ненулевым расходом через начальное сечение. Ещё одним инвариантом является расход жидкости через любую замкнутую поверхность, окружающую источник.

Впервые попытка получить решение уравнений Навье–Стокса для дальнего поля осесимметричной струи с начальным расходом была предпринята Ю.Б. Румером [17]. Неавтономное решение для такого случая искалось в сферической системе координат в виде разложения по целым степеням  $1/R$  как малая добавка к решению Ландау (13), (15)–(17)

$$u_R = \frac{F(\tau)}{R} + \frac{F_2(\tau)}{R^2} + O\left(\frac{1}{R^3}\right), \quad u_\theta = \frac{f_L(\tau)}{R} + O\left(\frac{1}{R^3}\right), \quad (28)$$

$$p = p_\infty + \frac{4\rho v^2}{R^2} \frac{A\tau - 1}{(A - \tau)^2} + \frac{\rho g_2(\tau)}{R^3} + O\left(\frac{1}{R^4}\right).$$

Тогда решение (28) обеспечивает расход через сферу радиуса  $R$

$$Q = \rho \int_0^\pi u_R R^2 2\pi \sin \theta d\theta = 2\pi \rho \int_{-1}^1 F_2 d\tau,$$

который равен расходу жидкости через начальное сечение струи.

Подставляя (28) в уравнения Навье–Стокса (1), получаем, что для искомых функций справедлива система уравнений

$$-\sqrt{1 - \tau^2} f_L F_2' - 3FF_2 = 3g_2 + v[(1 - \tau^2)F_2'' - 2\tau F_2'], \quad (29)$$

$$g_2' = 2vF_2'.$$

Решение второго уравнения системы (29) запишем в виде

$$g_2 = 2v \left( F_2 - \frac{1}{6} C_1 \right),$$

где  $C_1$  — некоторая константа. Осталось решить только первое уравнение системы (29), которое принимает вид ( $L$  — дифференциальный оператор)

$$LF_2 = (1 - \tau^2)F_2'' - 2\left(\tau + \frac{1 - \tau^2}{A - \tau}\right)F_2' + 6\frac{A^2 - 1}{(A - \tau)^2}F_2 = C_1. \quad (30)$$

Умножая уравнение (30) на  $(A - \tau)^2$  и интегрируя по  $\tau$  от  $-1$  до  $1$ , получаем:

$$C_1 = \frac{9}{2\pi\rho} \frac{A^2 - 1}{3A^2 + 1} Q.$$

Таким образом, если через выходное сечение трубы имеется ненулевой расход  $Q \neq 0$ , то и  $C_1 \neq 0$ .

В [17] приводится одно из решений однородного уравнения (30), которое не имеет особенностей в диапазоне  $-1 \leq \tau \leq 1$

$$h(\tau) = 1 - \frac{3(A^2 - 1)}{(A - \tau)^2} + \frac{2(A^2 - 1)^2}{A(A - \tau)^3}. \quad (31)$$

Второе независимое решение однородного уравнения

$$q(\tau) = \frac{1}{(1 - \tau^2)(A - \tau)^2 h^2} \quad (32)$$

имеет особенность на оси струи и поэтому должно быть отброшено.

В [17] также выписано частное решение неоднородного уравнения

$$H(\tau) = C_1 h(\tau) \int_{-1}^\tau \frac{\int_1^\xi (A - \eta)^2 h(\eta) d\eta}{(1 - \xi^2)(A - \xi)^2 h^2(\xi)} d\xi.$$

Общее решение уравнения (29)

$$F_2(\tau) = H(\tau) + C_2 h(\tau).$$

В [17] всё время подчёркивалось, что ищется регулярное решение уравнений Навье–Стокса, но почему-то не было замечено, что функция  $H(\tau)$  имеет логарифмическую особенность при  $\tau = -1$ , т.е. на отрицательной оси струи. Такая особенность в решении, а соответственно и некорректность разложения (28), была отмечена в работах [15, 18]. В тех же работах была указана и причина, по которой решение оказалось некорректным, — в разложении для скоростей при больших  $R$  должен присутствовать логарифмический член. В связи с этим странно выглядит работа [19], где ищется третье приближение регулярного разложения по целым степеням  $1/R$ , т.е. следующий член разложения Румера [17].

Из [15, 18] выпишем соотношения с точностью до  $o(R^{-2})$  в компонентах скоростей и  $o(R^{-3})$  в давлении

$$\begin{aligned} u_R &= \frac{F(\tau)}{R} - v \left[ u'(\tau) \ln \frac{R}{a} + w(\tau) \right] \frac{1}{R^2}, \\ u_\theta &= \frac{1}{R} f_L(\theta) - v \frac{u(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{1}{R^2}, \\ p &= p_\infty + \frac{4\rho v^2}{R^2} \frac{A\tau - 1}{(A-\tau)^2} + v^2 \left[ q(\tau) \ln \frac{R}{a} + g(\tau) \right] \frac{1}{R^3}, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $a$  — диаметр отверстия, из которого вытекает струя. Разложение (33) отличается от (28) ещё и тем, что в разложении для  $u_\theta$  появился член, пропорциональный  $R^{-2}$ . После подстановки разложения (33) в уравнение Навье — Стокса имеем

$$\begin{aligned} u'(\tau) &= Bh(\tau), \quad u(\tau) = B(1-\tau^2) \frac{1-A\tau}{A(A-\tau)^2}, \\ Lw &= C + B \left[ \frac{6(A^2-1)^2}{(A-\tau)^4} - \frac{8A(A^2-1)}{(A-\tau)^3} + \frac{3(A^2-1)}{(A-\tau)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{6A^2-2}{A(A-\tau)} + 6 \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь  $L$  — дифференциальный оператор, определённый в (30),  $h(\tau)$  определяется соотношением (31). Две константы  $B$  и  $C$  находятся из условия равенства расхода жидкости через сферу радиуса  $R$  расходу  $Q$  из источника струи и условия регулярности решения

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{2\pi\rho v}{3(A^2-1)} \left\{ C \left( A^2 + \frac{1}{3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + B \left[ 9A^2 - 5 + 4A(A^2-1) \ln \frac{A+1}{A-1} \right] \right\}, \\ C &\left[ -4A^2 + \frac{20}{3} + 2 \frac{(A^2-1)^2}{A} \ln \frac{A+1}{A-1} \right] + B \left[ -44A^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{196}{3} - \frac{8}{A^2} + \frac{(A^2-1)(22A^2-18)}{A} \ln \frac{A+1}{A-1} \right] = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Уравнение (34) имеет решение, зависящее от одной константы  $c_0$ ,

$$w(\tau) = c_0 h(\tau) + h_1(\tau), \quad (36)$$

где  $h_1(\tau)$  — известная функция, громоздкое выражение которой в квадратурном виде можно найти в [15, 18]; второе решение однородного уравнения (34), соответствующее (32), из-за особенности опять отброшено.

Свободная константа  $c_0$  в решении (36) не зависит от расхода, так как расход уже зафиксирован выбором констант  $B$  и  $C$ . Предпринимались попытки отыскать закон сохранения, с помощью которого эта константа может быть определена, т.е. связана с какой-либо характеристикой источника струи. М.А. Гольдштик и Н.И. Яворский [15, 18, 20] связывали константу  $c_0$  с потоком боковой компоненты момента импульса через поверхность, состоящую из полусфер радиусов  $R$  и  $R_0$  и кольца на плоскости  $y = 0$  между окружностями  $R$  и  $R_0$ . Недостаток такого подхода состоит в том, что значения

компонент скорости и давления известны только в дальней области. Поэтому данный инвариант не даёт связи характеристик дальнего поля струи с характеристиками источника, как это мы наблюдаем для интегралов расхода и потока импульса. Тот же недостаток имеется и в предположении, сделанном в работе [21], что появление в решении члена  $c_0 h(\tau)$  связано со вторым членом разложения решения Ландау в ряд по обратным степеням расстояния до начала координат, которое смещено относительно источника импульса.

При больших числах  $Re$ , как было показано в разделе 2, характеристики струи подчиняются уравнениям пограничного слоя. Решение для дальнего поля струи, бьющей из неточечного источника, получено Л.Г. Лойцяным [22] (см. также [23, 24]) в цилиндрической системе координат в виде ряда по обратным степеням координаты  $x$

$$\begin{aligned} \psi &= v \frac{\xi^2}{1+\xi^2/4} x - v\beta \frac{(\xi^2/4)(1-\xi^2/4)}{(1+\xi^2/4)^2} + \dots, \\ u_x &= 2\alpha^2 \frac{1}{(1+\xi^2/4)^2} \frac{1}{x} - \frac{\beta\alpha^2}{2} \frac{1-(3/4)\xi^2}{(1+\xi^2/4)^3} \frac{1}{x^2} + \dots, \\ u_r &= \alpha\sqrt{v} \frac{\xi - \xi^3/4}{(1+\xi^2/4)^2} \frac{1}{x} - \frac{\beta\alpha\sqrt{v}}{2} \frac{\xi - 3\xi^3/4}{(1+\xi^2/4)^3} \frac{1}{x^2} + \dots \end{aligned} \quad (37)$$

В этих формулах  $\xi$  и  $K$  такие же, как в (7),  $\alpha = (1/4)\sqrt{3K/\pi v}$ . Из сравнения (37) с (7) становится очевидным, что константа  $\beta$  должна отвечать за неточность источника.

### 3.2. Связь дальней асимптотики с профилем скорости в выходном сечении струи

Зададим два вопроса: какая характеристика профиля скорости в источнике струи отвечает за величину константы  $\beta$  и как связаны между собой решения, полученные в работах [18] и [22]?

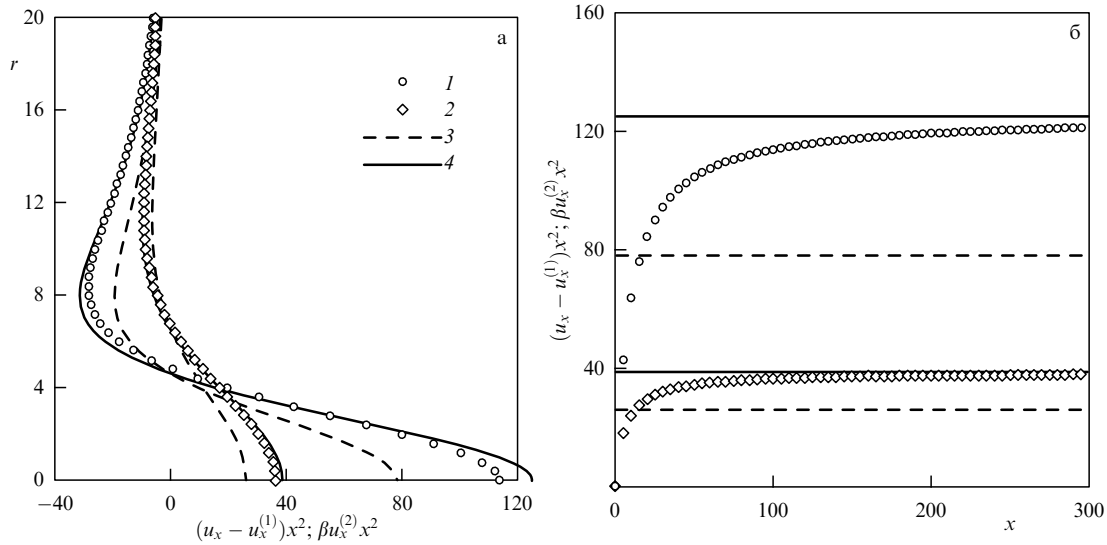
Лойцянский рассчитал массовый расход в единицу времени через сечение струи и получил формулу, уточняющую (8),

$$Q(x) = 2\pi\rho \int_0^\infty u_x r dr = 2\pi\rho v(4x + \beta). \quad (38)$$

Вопреки предыдущему мнению [22] о невозможности связать константу  $\beta$  с начальным расходом из источника струи, в [23] из равенства (38) делается неправильный вывод: "...члены, заключающие  $\beta$ , дают поправку на конечность начального расхода струи. Пользуясь этой формулой и полагая в ней  $x = 0$ , получим в принятом приближении  $Q_0$  — расход в начальном сечении..." Таким образом, было положено  $Q_0 = Q(0)$ . Последнее было бы так, если бы решение (37) можно было продолжить вплоть до выходного сечения.

Ответ на вопрос об определении  $\beta$  был решён в работах [25, 26]. Оказывается, что в рамках уравнений пограничного слоя существует ещё один закон сохранения для осесимметричной незакрученной затопленной струи, впервые достаточно сложным образом полученный в [27]. Дадим его простой вывод. Следствием (2), (3) является уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_x^2 r) + \frac{\partial}{\partial r}(u_x u_r r - v r \frac{\partial u_x}{\partial r}) = 0.$$



**Рис. 1.** Сравнение отклонений численного  $u_x$  и асимптотического  $u_x^{(1)} + \beta u_x^{(2)}$  (37) решений от решения  $u_x^{(1)}$  (7) при  $x = 100$  (а), при  $r = 0$  (б): 1 — численное решение для параболического начального профиля скорости; 2 — численное решение для линейного начального профиля скорости; 3 — решение (37), (38); 4 — решение (37), (39).

Умножим последнее равенство на  $\psi - vx$  и приведём к дивергентному виду

$$\frac{\partial}{\partial x} [u_x^2 r (\psi - vx)] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( u_x u_r - vr \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) (\psi - vx) + v \frac{u_x^2 r^2}{2} \right] = 0.$$

Откуда следует сохранение величины

$$E = \int_0^\infty u_x^2 (\psi - vx) r dr = \text{const} \quad (39)$$

в любом поперечном сечении струи.

При  $x = 0$  инвариант  $E = \int_0^{r_{\text{out}}} u_x^2(0, r) \psi(0, r) r dr$ , где  $r_{\text{out}}$  — радиус выходного отверстия струи. Условимся, что, как и в формуле (37), функция тока  $\psi = 0$  при  $r = 0$ . Теперь рассмотрим произвольное сечение  $x$  дальнего поля струи. На главном члене разложения (37) интеграл  $E$  равен нулю. С учётом двух членов  $E = 2v^2 \alpha^2 \beta / 3$ . Из равенства этих двух значений инварианта определяется константа  $\beta$ .

В [25, 26] также проведены численные исследования для начального профиля  $u_x(0, r) = 1 - r^n$ ,  $0 \leq r \leq 1$  при  $n = 1$  и  $n = 2$ . Сравнение отклонения численного и асимптотического решения (37) от главного члена (37) представлено на рис. 1.

Для ответа на второй вопрос о связи решений, полученных в работах [18] и [22], необходимо, как это делалось и ранее в решении (33)–(36), перейти к предельному переходу  $A = 1 + \delta$ , где  $\delta$  определяется соотношением (19). В этом случае из (35) в главном приближении получим

$$B = \frac{9\delta}{8\pi\rho} Q, \quad C = -\frac{45\delta}{8\pi\rho} Q.$$

Кроме того, сравнение главного приближения решения для  $w(\tau)$  (34), (36) со вторым членом в разложении (37) указывает на их соответствие, и, как следствие, на связь констант  $c_0$  и  $\beta$

$$c_0 = \frac{v}{2} \beta.$$

Последнее выражение замыкает задачу о струе с расходом через начальное сечение только при больших числах  $Re$ . Проблема определения константы  $c_0$  в остальных случаях пока ещё не решена.

#### 4. Осесимметричная закрученная струя

Если к осесимметричной струе добавить азимутальную скорость, то получится закрученная струя. И тут возникает много вопросов. Какие интегральные величины будут сохраняться для закрученной струи? Какова асимптотика течения на бесконечном удалении, как в направлении развития струи, так и по радиусу? Возможно, многое зависит от способа создания струи, но струя бьёт из точки и вопросы о её создании остаются за рамками решения.

Исторически первое решение для закрученной струи было получено Лойцянским в рамках уравнений пограничного слоя в той же статье, в которой использовалось второе приближение для незакрученной осесимметричной струи [22] (см. также [23]). Задача рассматривается в цилиндрической системе координат, только добавляется ещё одна компонента скорости — азимутальная  $u_\varphi$ . Давление теперь уже не будет постоянной величиной, его изменение будет определяться азимутальной скоростью. Поперечный градиент давления будет уравниваться центробежной силой, и, хотя вне струи давление в главном приближении при больших числах Рейнольдса постоянно, из-за появления поперечного градиента давления возникает и продольный его градиент. В уравнениях для осевой и азимутальной компонент скорости отбрасываются члены со второй производной в продольном направлении  $\partial^2 u_x / \partial x^2$  и  $\partial^2 u_\varphi / \partial x^2$ :

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho u_\varphi^2}{r},$$

$$u_x \frac{\partial u_\varphi}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_r u_\varphi}{r} = v \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\varphi r)}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial(u_x r)}{\partial x} + \frac{\partial(u_r r)}{\partial r} = 0. \quad (40)$$

Из первого и последнего уравнений системы (40) следует

$$\frac{\partial}{\partial x} [r(p + \rho u_x^2)] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \rho \left( u_x u_r - v \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \right] = 0.$$

Здесь  $p$  — давление за вычетом давления в бесконечно удалённой точке. Интегрируя последнее уравнение поперёк струи, получим

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty r(p + \rho u_x^2) dr + \left[ r \rho \left( u_x u_r - v \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \right]_{r=0}^{r=\infty} = 0.$$

На оси струи  $u_r = 0$ ,  $\partial u_x / \partial r = 0$ . В предположении, что при  $r \rightarrow \infty$  компонента скорости  $u_x$  убывает не медленнее чем  $r^{-1}$ , получаем, что второе слагаемое равно нулю. Тогда в любом поперечном сечении  $x = \text{const}$  сохраняется поток полного импульса

$$J = 2\pi \int_0^\infty (p + \rho u_x^2) r dr = \text{const}. \quad (41)$$

Из третьего и последнего уравнений системы (40) можно получить

$$\frac{\partial}{\partial x} (r^2 u_x u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 u_r u_\varphi - v \left[ r \frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi) - 2 r u_\varphi \right] \right\} = 0.$$

Интегрирование поперёк струи приводит к соотношению

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty r^2 u_x u_\varphi dr + \left\{ r^2 u_r u_\varphi - v \left[ r \frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi) - 2 r u_\varphi \right] \right\}_{r=0}^{r=\infty} = 0. \quad (42)$$

Теперь возможны две ситуации. Первая, которая и соответствует струе Лойцянского [22], представляет собой случай, когда компоненты скорости достаточно быстро убывают с ростом координаты  $r$ . Тогда второе слагаемое обращается в нуль, что указывает на появление ещё одного инварианта для закрученной струи — потока момента количества движения

$$L = 2\pi \rho \int_0^\infty r^2 u_x u_\varphi dr = \text{const}. \quad (43)$$

Если же все компоненты скорости при  $r \rightarrow \infty$  ведут себя как  $r^{-1}$ , умноженное на константу, разную для разных компонент, то в этом случае вместо (43) при  $r \rightarrow \infty$  будем иметь другой инвариант, равный азимутальной скорости, умноженной на  $r$ , т.е. циркуляции азимутальной скорости, делённой на  $2\pi$ ,

$$\Gamma = u_\varphi r = \text{const}. \quad (44)$$

Течение осесимметричное, поэтому величина  $\Gamma$  не зависит от угла  $\varphi$ . Кроме того, вихревое течение в струе при больших числах Рейнольдса сконцентрировано в области, соответствующей пограничному слою. Согласно теореме Гельмгольца о сохранении потока завихренности (циркуляции азимутальной скорости) сквозь любое поперечное сечение такого вихревого течения, величина  $\Gamma$  не зависит и от  $x$ . Асимптотика остальных величин будет вполне определённой. Из второго уравнения системы

(40) при  $r \rightarrow \infty$  следует

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\Gamma^2}{2r^2}.$$

Тогда, для того чтобы поток полного импульса был конечным, необходимо, чтобы при  $r \rightarrow \infty$  подинтегральное выражение в формуле (41) обращалось в нуль

$$u_x = \sqrt{-\frac{p}{\rho}} = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}r}. \quad (45)$$

Осевая компонента скорости на большом удалении от оси в  $\sqrt{2}$  раз меньше азимутальной компоненты.

Радиальная компонента скорости определяется из первого уравнения системы (40). При  $r \rightarrow \infty$

$$u_r = -\frac{v}{r}. \quad (46)$$

#### 4.1. Струя Лойцянского

Остановимся сначала более подробно на первой ситуации, т.е. на струе Лойцянского, которая характеризуется двумя инвариантами  $J$  (41) и  $L$  (43). Отношение  $L/J$  имеет размерность длины, следовательно, решение задачи об определении характеристик струи будет неавтомоделным. В [22] построено решение на больших расстояниях от источника струи. Подход [22] позволяет описать одновременно и закрутку потока, и наличие расхода через начальное сечение. Здесь важным является то, что в главном приближении на больших расстояниях от источника струи решение задачи совпадает с решением для незакрученной струи Ландау.

Решение задачи подчиняется уравнениям (40). Для компонент скорости  $u_x$ ,  $u_r$  по-прежнему справедливы граничные условия (4). Азимутальная скорость на оси струи должна обращаться в нуль, а при  $r \rightarrow \infty$  должна затухать быстрее чем  $r^{-1}$  и обеспечивать интеграл (43).

Так же как и для незакрученной струи (37), решение для закрученной струи представляется в виде ряда по обратным степеням координаты  $x$ . Подстановка этого разложения в систему (40) и граничные условия приводит к решению, которое в компонентах  $u_x$  и  $u_r$  совпадает с решением (37)

$$\begin{aligned} u_x &= 2\alpha^2 \frac{1}{(1 + \xi^2/4)^2} \frac{1}{x} - \frac{\beta\alpha^2}{2} \frac{1 - (3/4)\xi^2}{(1 + \xi^2/4)^3} \frac{1}{x^2} + \dots, \\ u_r &= \alpha\sqrt{v} \frac{\xi - \xi^3/4}{(1 + \xi^2/4)^2} \frac{1}{x} - \frac{\beta\alpha\sqrt{v}}{2} \frac{\xi - 3\xi^3/4}{(1 + \xi^2/4)^3} \frac{1}{x^2} + \dots, \end{aligned} \quad (47)$$

$$u_\varphi = \gamma \frac{\xi}{(1 + \xi^2/4)^2} \frac{1}{x^2} + \dots,$$

$$p = -\frac{2}{3} \rho \gamma^2 \frac{1}{(1 + \xi^2/4)^3} \frac{1}{x^4} + \dots$$

Здесь  $\gamma = 3\alpha L / 16\pi\rho v^{3/2}$ .

По сравнению с (37) в решении (47) появилось выражение для азимутальной компоненты скорости, которая убывает пропорционально  $x^{-2}$ . Азимутальная компонента скорости затухает по  $x$  быстрее, чем осевая. Поэтому с ростом  $x$  отношение этих скоростей уменьшается.

Остаётся только проверить асимптотическое поведение компонент скорости при  $r \rightarrow \infty$ . Радиальная компо-

нента затухает пропорционально  $r^{-1}$ , а азимутальная как  $r^{-3}$ , что обеспечивает необходимое затухание второго слагаемого в выражении (42). Циркуляция азимутальной компоненты скорости по контуру бесконечного радиуса вокруг струи нулевая.

Решение задачи для закрученной струи с сохранением потока момента количества движения в рамках уравнений Навье–Стокса получено М.С. Цуккером [28]. В указанной работе скорости и давление в сферической системе координат представляются в виде рядов по обратным степеням  $R$

$$u_R = -v \left[ \frac{f_1'(\tau)}{R} + \frac{f_2'(\tau)}{R^2} + \dots \right], \quad u_\theta = -v \left[ \frac{f_1}{R\sqrt{1-\tau^2}} + \dots \right],$$

$$u_\varphi = v \left[ \frac{g_1(\tau)}{R} + \frac{g_2(\tau)}{R^2} + \dots \right],$$

$$\frac{p-p_0}{\rho} = v^2 \left[ \frac{h_1(\tau)}{R} + \frac{h_2(\tau)}{R^2} + \dots \right].$$

Из уравнений и граничных условий Цуккер получил, что окружная скорость в этом приближении не меняет решения, соответствующего струе Ландау,

$$h_1 = 0, \quad g_1 = 0, \quad f_1 = \frac{2(1-\tau^2)}{A-\tau}, \quad h_2 = -\frac{4(1-A\tau)}{(A-\tau)^2}.$$

Для главного приближения окружной скорости справедливо выражение

$$u_\varphi = v \frac{\gamma_1(A+1)}{2R^2} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{(A-\tau)^2}, \quad (48)$$

где  $\gamma_1$  — константа, отвечающая за закрутку потока.

Стандартный переход  $A = 1 + \delta$ ,  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$  ( $\delta \rightarrow 0$ ,  $\theta \rightarrow 0$ ) с учётом (19) решения (48) к решению (47) уравнения пограничного слоя определяет связь между константами  $\gamma_1$  и  $\gamma$

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{2}\delta^{3/2}}{v} \gamma.$$

#### 4.2. Струя Лонга

Перейдём теперь ко второй ситуации — к случаю закрученной осесимметричной струи с сохранением инвариантов (41) и (44). Впервые такая струя в рамках уравнений пограничного слоя была рассмотрена Р.Р. Лонгом [29] в 1961 г., хотя все определяющие уравнения были выписаны им же за три года до этого [30].

Так как циркуляция (44) по размерности совпадает с  $\sqrt{J/\rho}$  и с кинематическим коэффициентом вязкости, кроме того, в данной задаче отсутствуют характерные размеры, то будем искать автомодельное решение задачи — величины представляются следующим образом:

$$\psi = vx f(y), \quad u_x = \frac{\Gamma}{r\sqrt{2}} f', \quad u_r = -\frac{v}{r} f + \frac{\Gamma}{x\sqrt{2}} f', \quad (49)$$

$$u_\varphi = \frac{\Gamma}{r} \lambda(y), \quad \frac{p}{\rho} = -\frac{\Gamma^4}{v^2 x^2} s(y), \quad y = \frac{r\Gamma}{vx\sqrt{2}}, \quad ( )' \equiv \frac{d}{dy}.$$

Вводятся также две безразмерные величины:  $\varepsilon = v/\Gamma$  — аналог обратного числа Рейнольдса, который предполагается малой величиной, чтобы были справедливы уравнения пограничного слоя, и  $M = J/\rho\Gamma^2$  — аналог

обратного числа квадрата закрутки потока. Решение должно зависеть от этих двух безразмерных величин. Подставляя (49) в уравнения пограничного слоя (40), получаем систему уравнений

$$f''y - f'(1-f) - 4y^3 s = 0,$$

$$\lambda^2 + 2y^3 s' = 0, \quad (50)$$

$$\lambda''y - \lambda'(1-f) = 0.$$

Граничные условия на оси струи ( $y = 0$ ):  $f = 0$ ,  $\lambda = 0$ . Граничные условия при  $y \rightarrow \infty$  следуют из (44)–(46):  $f \rightarrow 1 + y$ ,  $\lambda \rightarrow 1$ ,  $s \rightarrow 0$ . В [29] система (50) решалась численно. Оказалось, что решение в такой постановке существует только при  $M > 3,65$ . В зависимости от параметров задачи, осевая скорость может быть как положительной, так и отрицательной (возвратные течения).

Дальнейшее развитие данная тема получила в работах [31–33]. В [31] отвергается возможность создания такой струи исходя из странного утверждения, что "начальный поток момента количества движения струи-источника равен нулю". В [32] решение в закрученной струе ищется с помощью уравнений Навье–Стокса в сферических координатах. При этом обсуждаются граничные условия на оси струи не только при  $x > 0$ , но и при  $x < 0$ . На отрицательной полуоси должна быть задана всё та же циркуляция, а следовательно, азимутальная компонента скорости будет бесконечной. Такое граничное условие следует и из теоремы Гельмгольца и нулевого размера струи в точке её зарождения. Таким образом, вихревая нить с конечной циркуляцией должна следовать вдоль всей отрицательной полуоси, а в точке  $x = 0$  возникает струя за счёт внесения в поток импульса. Для устранения особенности в потоке импульса течения на полуоси  $x < 0$ , на ней бесконечной является и осевая компонента скорости. В [33] строится асимптотическое решение при больших числах Рейнольдса и при малой закрутке струи. В терминах работы [30] это случай больших  $M$ .

#### 4.3. О реализации закрученных струй.

##### Скрытые инварианты

Так как существуют два принципиально различных решения для закрученных струй, естественно встаёт вопрос, а какое же решение будет реализовываться на практике. Такой же вопрос ставится в работах [14, 15, 32]. Остановимся на указанных работах подробнее, так как не все высказывания данных работ следует считать корректными. В [15] закрученные струи делятся на слабо и сильно закрученные (видимо, вслед за [31, 34]): «...Её решение характеризовало "слабую" закрученную струю, у которой вращательная скорость убывала гораздо быстрее, чем осевая или радиальная. Это не очень соответствовало опытным данным... которые для достаточно сильных струй демонстрировали в приосевой зоне сложные возвратные течения, тогда как теория их не давала. Причина кроется в существовании скрытого инварианта... не замеченного предшествующими исследователями. Этот инвариант, о котором пойдёт речь, делает задачу автомодельной...». Конечно, инвариант (мы к нему ещё вернёмся) тут ни при чём, точно так же как ни при чём и возвратные течения. Если при малой закрутке струя была струей Лойцянского, то увеличение закрутки не изменит её тип. Асимптотика [22] является асимптоти-

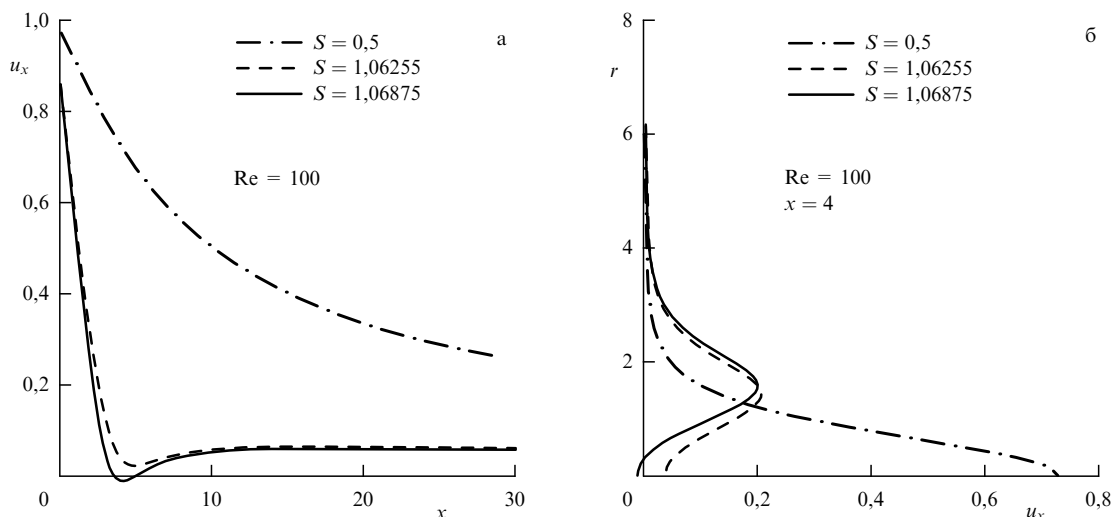


Рис. 2. Расчётное распределение осевой скорости на оси струи (а) и в сечении  $x = 4$  (б) при  $Re = 100$ ,  $S = 0.5$ ; 1,0625; 1,06875. Линейные размеры обезразмерены на радиус трубы, а скорости — на максимальную осевую скорость в трубе.

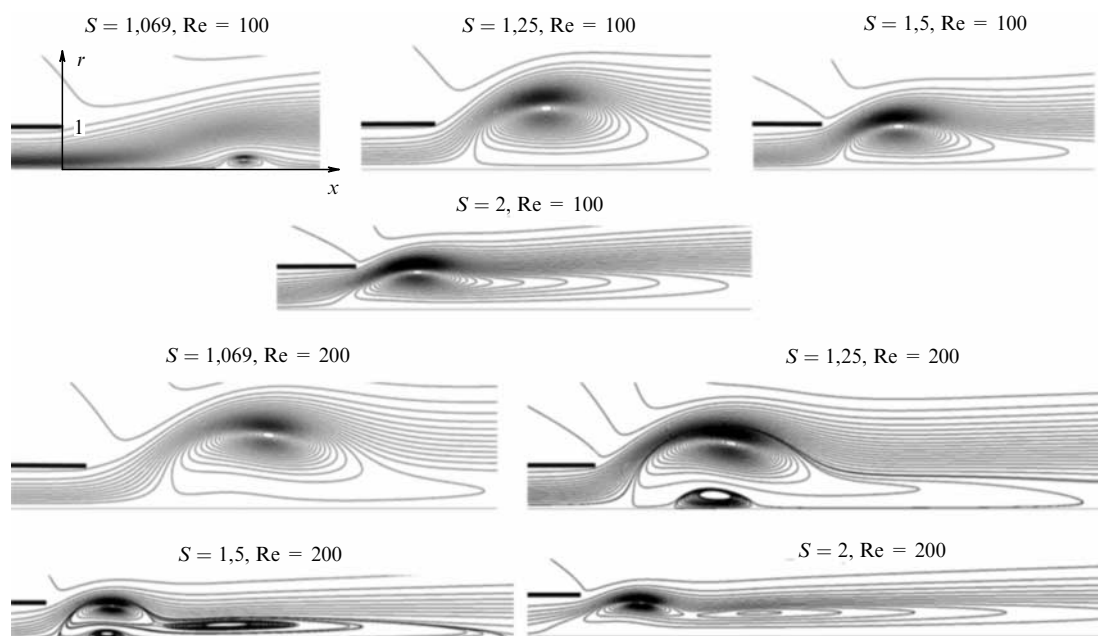


Рис. 3. Зависимость размера и формы рециркуляционной области от числа Рейнольдса  $Re$  и закрутки  $S$ ; чёрный отрезок изображает стенку трубы.

кой дальнего поля, и наличие приосевых возвратных течений только отодвигает диапазон, где она работает на большие  $x$ . Доказательством данного факта могут служить численные расчёты [35, 36]. В [36] показано, что с изменением закрутки потока реализуются различные режимы течения. Первый режим характеризуется тем, что осевая компонента скорости в любом сечении  $x = \text{const}$  принимает максимальное значение на оси струи и монотонно уменьшается с ростом  $x$  (рис. 2). С увеличением закрутки реализуется второй режим, при котором поведение максимальной осевой скорости перестаёт быть монотонным с ростом  $x$ , но при этом осевая скорость положительна (см. рис. 2). И, наконец, при ещё больших значениях закрутки возникают возвратные течения в окрестности оси (рис. 3). Во всех описанных режимах и в случае слабой, и в случае сильной закрутки

струи в дальнем поле подчиняются асимптотическому решению [22].

Теперь вернёмся к скрытому инварианту, определённого в работах [14, 15, 20, 32]. В качестве инвариантов для струйных течений обычно принимаются величины потоков импульса, момента количества движения и другие величины, не меняющиеся при протекании через замкнутую поверхность вокруг начала координат или через сечение  $x = \text{const}$ . Не совсем обычный инвариант течения [14, 15, 20, 32] Гольдштик назвал скрытым инвариантом.

Поток  $j$ -й составляющей импульса в декартовой системе координат через замкнутую поверхность  $S$

$$J_j = \iint_S (\Pi_{xj} n_x + \Pi_{yj} n_y + \Pi_{zj} n_z) dS,$$

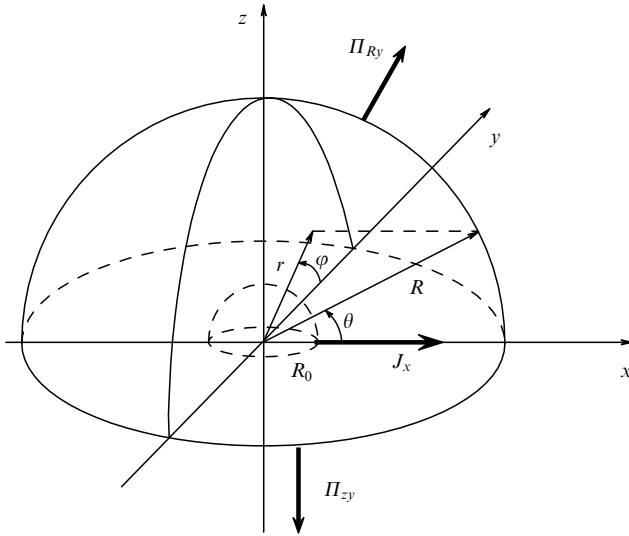


Рис. 4. Поверхность интегрирования при построении скрытого инварианта.

где  $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S$ .

Аналогично в сферической системе координат можно выписать потоки импульса в направлении продольной координаты  $x$  и одной из поперечных координат  $y$  через сферу радиуса  $R$ :

$$J_x = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\Pi_{RR} \cos \theta - \Pi_{R\theta} \sin \theta) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$J_y = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\Pi_{RR} \sin \theta \cos \varphi + \Pi_{R\theta} \cos \theta \cos \varphi - \Pi_{R\varphi} \sin \varphi) \times \\ \times R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Для осесимметричной струи после интегрирования по  $\varphi$  получаем

$$J_x = 2\pi \int_0^\pi (\Pi_{RR} \cos \theta - \Pi_{R\theta} \sin \theta) R^2 \sin \theta d\theta,$$

$$J_y = 0.$$

Интеграл  $J_y$  вычисляется в [14, 32] не по всей сфере, а по полусфере с "дном" (рис. 4) — обозначим его через  $J_y^*$ . Этот интеграл универсален и должен сохраняться для любой осесимметричной закрученной струи при любом  $R$ . Ошибочно полагая, что интеграл по "дну" равен нулю вследствие осевой симметрии течения, Гольдштик полу-чает

$$J_y^* = R^2 \int_0^\pi \Pi_{R\varphi} \sin \theta d\theta. \quad (51)$$

Напомним:

$$\Pi_{R\varphi} = \rho u_R u_\varphi - \mu \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial R} - \frac{u_\varphi}{R} \right). \quad (52)$$

Тогда возникает парадоксальная ситуация. Из-за сохранения инварианта (51) с учетом (52) необходимо, чтобы при больших  $R$  компоненты скорости были обратно пропорциональны радиусу  $u_R \sim R^{-1}$ ,  $u_\varphi \sim R^{-1}$ ,

что соответствует закрученной струе Лонга. Отсюда в [14] и делается вывод, что при заданных инвариантах  $J_x$  и  $J_y^*$  решение можно искать в автомодельном виде. При этом компоненты скорости должны затухать обратно пропорционально радиусу.

Ошибка работ [14, 32] исправлена в [36], где показано, что поток  $y$ -компоненты импульса через "дно" полусферы не равен нулю. Чтобы его учесть, в этой работе вычислен поток  $J_y$  между двумя полусферами радиуса  $R_0$  и  $R$  с "дном", при этом  $R > R_0$ . Поток через внутреннюю полусферу равен потоку через внешнюю полусферу и кольцевой участок "дна" между ними. Правильным универсальным инвариантом является выражение

$$J_y^{**} = R^2 \int_0^\pi \Pi_{R\varphi} \sin \theta d\theta + \\ + \int_{R_0}^R \int_0^\pi R (\Pi_{R\varphi} \sin \theta + \Pi_{\varphi\theta} \cos \theta) d\theta dR, \quad (53)$$

$$\Pi_{\varphi\theta} = \rho u_\varphi u_\theta - \frac{\mu}{R} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \cot \theta \right).$$

Рассмотрим теперь возможные дальнейшие асимптотики для закрученных струй. Как было показано выше, из уравнения неразрывности и сохранения потока полного импульса (41) и в струе Лойцянского и в струе Лонга следует, что если решения для них переписать в сферических координатах, то две компоненты скорости будут обратно пропорциональны радиусу

$$u_R = \frac{\alpha(\theta)}{R} + \dots, \quad u_\theta = \frac{\beta(\theta)}{R} + \dots \quad (54)$$

Окружную скорость представим в виде

$$u_\varphi = \frac{\chi(\theta)}{R^k} + \dots, \quad (55)$$

где  $k$  может принимать значения 1 (струя Лонга) или 2 (струя Лойцянского).

Подставим (54) и (55) в (53), выбрав диапазон изменения по  $R$ , когда эти асимптотики справедливы. При  $k = 1$

$$\frac{J_y^{**}}{\rho} = \int_0^\pi f(\theta) \sin \theta d\theta + \ln \frac{R}{R_0} \int_0^\pi (f(\theta) \sin \theta + g(\theta) \cos \theta) d\theta,$$

где  $f(\theta) = \alpha\chi + (k+1)v\chi$ ,  $g(\theta) = \beta\chi - v(\chi' - \chi \cot \theta)$ . Интеграл (53) сохраняется, если

$$\int_0^\pi (f \sin \theta + g \cos \theta) d\theta = 0.$$

При  $k = 2$

$$\frac{J_y^{**}}{\rho} = -\frac{1}{R} \int_0^\pi g(\theta) \cos \theta d\theta + \\ + \frac{1}{R_0} \int_0^\pi (f(\theta) \sin \theta + g(\theta) \cos \theta) d\theta.$$

Интеграл (53) сохраняется, если

$$\int_0^\pi g \cos \theta d\theta = 0.$$

Таким образом, инвариант (53) не определяет показатель степени затухания окружной скорости.

Второй вопрос, на который теперь уже есть правильный ответ в [15]: а может ли источник автомодельной струи Лонга быть точечным? Ответ [15] следующий: "Следует отметить, что вихревая нить принципиально отличается от точечного или сферического источника тем, что  $u_\varphi = \infty$  на полуоси  $\theta = \pi$ ... Тем самым источник автомодельной закрученной струи не может быть точечным".

Создать струю Лойцянского не сложно. В [35, 36] такие закрученные струи, бьющие из трубы конечной протяжённости, создавались с помощью вращения внутренней поверхности трубы. Вместо вращающейся поверхности можно было использовать любой завихритель другого типа. А вот создать струю Лонга затруднительно, если вообще возможно. Один из способов создания закрученной струи, близкой к струе Лонга, предложен в работе [36]. Но там струя создавалась численно и в качестве граничного условия для набегающего течения использовался нужный профиль окружной скорости, способ создания которого не раскрывается.

В чём же сложности создания автомодельной струи Лонга? Во-первых, такая струя должна выдуваться в вихревую нить. В этом и только в этом случае источник автомодельной струи может быть точечным. В идеале вихревая нить должна идти из минус бесконечности, однако каким-то образом не подвергаться диффузии. Создать вихревую нить возможно, например, за прямоугольным крылом большого удлинения или за винтом с определёнными лопастями. В первом случае вихревое образование, близкое к вихревой нити, сходит с концевой области за винтом. В обоих случаях можно создать окружную скорость, близкую к скорости от точечного вихря. Во-вторых, в точке  $x = 0$  в поток привносится полный импульс  $J_x$ , который, согласно [32, 33], при  $x < 0$  должен иметь нулевое значение. Но в приведённых выше примерах осевая скорость определяется не из условия нулевого потока импульса, а из условия сохранения интеграла Бернулли, что даёт совсем другое значение. Таким образом, вопрос о возможности реализации струи Лонга остаётся открытым.

## 5. Заключение

Теории ламинарных струй скоро исполняется 90 лет. За это время были найдены решения многих задач, поражающие своей красотой. Вместе с тем некоторые задачи так и остались нерешёнными. Нет достаточно хороших теорий, описывающих струи, вытекающие из точечного отверстия перпендикулярно или параллельно бесконечной плоскости. Мало известно о механике взаимодействия струй. Остался нерешённым вопрос о возможности создания закрученной струи с сохраняющейся циркуляцией по её внешнему контуру.

Авторы настоящей статьи попытались критически взглянуть на работы по теории струй, выделить среди них и выдающиеся работы, и работы с ошибочными утверждениями. Что касается последних, то материал, представленный в статье, должен коренным образом изменить взгляд на закрученные струи и на струи с расходом через начальное сечение. Исправлено выражение для скрытого инварианта, из которого ранее следо-

вало, что закрученная струя при бесконечном удалении от источника должна выходить на струю с заданной циркуляцией. Такой факт противоречил физической интуиции, подсказывавшей, что на бесконечности закрученная струя должна в главном приближении выходить на струю Ландау, а следовательно, азимутальная скорость должна затухать быстрее, чем продольная. Правильное вычисление этого инварианта указывает на математическую возможность существования как струи Лойцянского, так и струи Лонга. Для струй с расходом через начальное сечение представлена корректная процедура получения связи дальней асимптотики с профилем скорости в начальном сечении в рамках уравнений пограничного слоя.

Авторы благодарят Е.А. Кузнецова за полезные обсуждения отдельных вопросов.

## Список литературы

- Schlichting H Z. *angew. Math. Mech.* **13** 260 (1933)
- Schlichting H *Grenzschicht – Theorie* (Karlsruhe: Verlag G. Braun, 1965); Пер. на русск. яз.: Шлихтинг Г *Теория пограничного слоя* (М.: Наука, 1969)
- Bickley W G *Philos. Mag.* **7** 23 727 (1937)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)
- Слезкин Н А *Ученые записки МГУ* (2) 89 (1934)
- Слезкин Н А *Динамика вязкой несжимаемой жидкости* (М.: Гостехтеориздат, 1955)
- Kamke E *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen* (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 18) (Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1959); Пер. на русск. яз.: Камке Э *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* (М.: Наука, 1976)
- Ландау Л Д *ДАН СССР* **43** 299 (1944)
- Яцеев В И *ЖЭТФ* **20** 1031 (1950)
- Броман Г И, Руденко О В *УФН* **180** 97 (2010); Broman G I, Rudenko O V *Phys. Usp.* **53** 91 (2010)
- Squire H B *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **4** 321 (1951)
- Batchelor G K *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge: Univ. Press, 1970); Пер. на русск. яз.: Бэтчелор Дж *Введение в динамику жидкости* (М.: Мир, 1973)
- Гольдштик М А, Силантьев Б А *Прикладная механика и техническая физика* (5) 149 (1965); Gol'dshtik M A, Silant'ev B A *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **6** (5) 105 (1965)
- Гольдштик М А *Вихревые потоки* (Новосибирск: Наука, 1981)
- Гольдштик М А, Штерн В Н, Яворский Н И *Вязкие течения с парадоксальными свойствами* (Новосибирск: Наука, 1989)
- Van Dyke M *Perturbation Methods in Fluid Mechanics* (New York: Academic Press, 1964); Пер. на русск. яз.: Ван-Дайк М *Методы возмущений в механике жидкости* (М.: Мир, 1967)
- Румер Ю Б *Прикл. мат. мех.* **16** 255 (1952)
- Гольдштик М А, Яворский Н И *Прикл. мат. мех.* **50** 573 (1986)
- Маликов З М, Стасенко А Л *Труды МФТИ* **5** (2) 59 (2013)
- Goldshtik M A *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22** 441 (1990)
- Яворский Н И, в сб. *XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, Республика Башкортостан, Россия, 19–24 августа 2019 г. Аннотации докладов* (Уфа: РИЦ БашГУ, 2019) с. 92
- Лойцянский Л Г *Прикл. мат. мех.* **17** 3 (1953)
- Лойцянский Л Г *Механика жидкости и газа* (М.: Наука, 1978); Пер. на англ. яз.: Loitsyanskiy L G *Mechanics of Liquids and Gases* (New York: Begell House, 1995)
- Лойцянский Л Г *Ламинарный пограничный слой* (М.: Физматлит, 1962)
- Гайфуллин А М, Жвик В В *Докл. РАН. Физика, технические науки* **495** 50 (2020); Gaifullin A M, Zhvick V V *Dokl. Phys.* **65** 387 (2020)

26. Гайфуллин А М, Жвик В В *Журн. вычисл. мат. и мат. физ.* **61** 1646 (2021); Gaifullin A M, Zhvick V V *Comput. Math. Math. Phys.* **61** 1630 (2021)
27. Naz R *Applicable Anal.* **91** 1045 (2012)
28. Цуккер М С *Прикл. мат. мех.* **19** 500 (1955)
29. Long R R *J. Fluid Mech.* **11** 611 (1961)
30. Long R R *J. Meteorology* **15** 108 (1958)
31. Вулис Л А, Кашкаров В П *Теория струй вязкой жидкости* (М.: Наука, 1965)
32. Гольдштик М А *Механика жидкости и газа* (1) 26 (1979); Gol'dshtik M A *Fluid Dyn.* **14** 19 (1979)
33. Зубцов А В *Механика жидкости и газа* (4) 45 (1984); Zubtsov A V *Fluid Dyn.* **19** 550 (1984)
34. Устименко Б П *Изв. АН Каз. ССР. Сер. Энергетическая* (11) 111 (1956)
35. Гайфуллин А М, Жвик В В *Механика жидкости и газа* (3) 48 (2019); Gaifullin A M, Zhvick V V *Fluid Dyn.* **54** 339 (2019)
36. Жвик В В *Прикладная механика и техническая физика* (2) 92 (2020); Zhvick V V *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **61** 235 (2020)

### Laminar submerged jets of incompressible fluid at large Reynolds numbers

A.M. Gaifullin<sup>(a)</sup>, V.V. Zhvick<sup>(b)</sup>

Central Aerohydrodynamic Institute,  
ul. Zhukovskogo 1, 140180 Zhukovsky, Moscow region, Russian Federation  
E-mail: <sup>(a)</sup> gaifullin@tsagi.ru, <sup>(b)</sup> vladzhvick@yandex.ru

Fundamental theoretical studies on laminar axisymmetric submerged jets are considered. The problems associated with jets with a discharge through the initial cross section and with swirling jets are investigated. Some erroneous results of the theory of laminar jets have been discovered and corrected.

**Keywords:** submerged jet, laminar jet, swirling jet, invariants, momentum flux

PACS number: 47.15.Uv

Bibliography — 36 references

Received 10 July 2022, revised 28 November 2022

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **193** (11) 1214–1226 (2023)

*Physics – Uspekhi* **66** (11) (2023)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2022.12.039301>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2022.12.039301>