

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Излучение Вавилова – Черенкова
и радиационные потери энергии

В.М. Гришин

Обсуждаются радиационные потери энергии релятивистского заряда в средах с поглощением и рассеянием фотонов. Дано решение задачи Тамма в среде с поглощением. Приведены выражения для радиационных потерь с учётом многократного рассеяния излучающего заряда.

Ключевые слова: излучение Вавилова – Черенкова, радиационные потери энергии

PACS numbers: 29.40.Ка, 41.60.Вq

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.02.038922>

Содержание

1. Введение (689).
 2. Теорема Умова – Пойнтинга и радиационные потери энергии релятивистского заряда (689).
 3. Радиационные потери энергии равномерно движущегося заряда (690).
 4. Задача Тамма в поглощающей среде (692).
 5. Радиационные потери энергии многократно рассеянного заряда (693).
 6. Обсуждение (694).
- Список литературы (695).

1. Введение

Излучение Вавилова – Черенкова (ИВЧ) [1] является одним из самых ярких эффектов электродинамики сплошных сред. Его теоретическая интерпретация в терминах излучения света равномерно движущегося заряда со скоростью, превышающей скорость света в среде, была дана И.Е. Таммом и И.М. Франком [2]. Спектр средней энергии излучения с единицы траектории заряда, $d^2\bar{A}/\hbar d\omega dx$, например электрона, даётся широко известной формулой Тамма – Франка:

$$\frac{d^2\bar{A}}{\hbar d\omega dx} = \hbar\omega \frac{d^2\bar{N}}{\hbar d\omega dx} = \frac{\alpha\omega}{c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right), \quad (1)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta n} < 1.$$

Здесь \bar{A} и \bar{N} представляют излучённую энергию и число фотонов, причём в узком интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$

справедливо соотношение $d\bar{A} = \hbar\omega d\bar{N}$. Скорость заряда в единицах скорости света $\beta = v/c$, а среда характеризуется показателем преломления n . Излучение направлено вперёд по движению заряда под фиксированным углом θ относительно направления скорости частицы. Излучённая энергия и число фотонов распределены согласно обобщённому и обычному распределениям Пуассона соответственно, а в (1) входят их средние в этом смысле значения. Равномерность движения подразумевается на участке траектории, много больше длины излучения, формально в [2] бесконечном. Заметим, что условие постоянства скорости приближённо, поскольку для релятивистского заряда с лоренц-фактором $\gamma \gg 1$ относительное изменение скорости примерно в γ^2 раз меньше относительного изменения энергии и потерей скорости можно пренебречь. Формула (1) справедлива в прозрачной среде, когда излучение наблюдается вдали от траектории заряда. В реальных средах, однако, присутствуют поглощение и рассеяние фотонов, поэтому с методической точки зрения представляет интерес рассмотреть обобщение формулы (1) для этих случаев, включая и влияние многократного рассеяния заряда.

В настоящей статье на основе теоремы Умова – Пойнтинга будет сформулировано обобщение ИВЧ для случая поглощающих и рассеивающих сред в терминах радиационных потерь энергии. Будет рассмотрено несколько методически интересных вариантов траектории движения заряда, включая движение с многократным рассеянием.

2. Теорема Умова – Пойнтинга
и радиационные потери энергии
релятивистского заряда

Теорема Умова – Пойнтинга [3] позволяет прояснить, что может подразумеваться под аналогом ИВЧ в поглощающих средах. Обычно она формулируется как баланс изменения энергии электромагнитного поля за счёт привнесённой работы внешних токов за вычетом потока энергии поля через поверхность рассматриваемого

В.М. Гришин. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: grishinvm@lebedev.ru

Статья поступила 28 октября 2020 г.,
после доработки 18 января 2021 г.

объёма. Теорема Умова – Пойнтинга определяется соотношением, в котором для наших целей работа внешних токов вынесена в левую часть, а энергия поля — в правую (используется система единиц Гаусса, $\alpha = e^2/(\hbar c) \simeq 1/137$):

$$-\mathbf{j}^e \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\} + \text{div } \mathbf{S}, \quad (2)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{D} — соответственно электрические поле и индукция, \mathbf{H} и \mathbf{B} — магнитные поле и индукция. Плотность тока, внешнего к среде, для простоты точечного, заряда e $\mathbf{j}^e = ev\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$ (\mathbf{r} — пространственное положение заряда в момент времени t , δ — дельта-функция Дирака). Вектор Умова – Пойнтинга даётся соотношением

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (3)$$

Выражение (2) определяет потери энергии стороннего заряда в единице объёма среды за единицу времени. Эти потери распределяются на изменение энергии электромагнитного поля в единичном объёме, окружающем заряд, и поток энергии электромагнитного поля через поверхность этого объёма. Именно расчёт потока вектора Умова – Пойнтинга через цилиндрическую поверхность, окружающую равномерно движущийся заряд, привёл авторов [2] к соотношению (1).

Если среда является поглощающей, то необходимо рассматривать не поток вектора Умова – Пойнтинга, а непосредственно потери энергии внешнего заряда, т.е. левую часть соотношения (2). Эти потери представляют собой работу заряда против электрического поля, создаваемого им и средой в точке нахождения заряда (метод Ландау [4]). Чтобы выделить в этих потерях часть, отвечающую ИВЧ в прозрачной среде, перейдём с помощью преобразования Фурье к пространству частот и волновых векторов \mathbf{k} ; например, для электрического поля имеем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \int \frac{d\mathbf{k} d\omega}{(2\pi)^4} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad (4)$$

причём обратное преобразование даётся интегралами по бесконечно большому в единицах длины волны излучения пространственному объёму и интервалу времени, много большему обратной частоты излучения (формально пределы могут полагаться бесконечными). Среда предполагается изотропной, однородной и нерелятивистской в той мере, в какой допускается существование магнетизма.

Разбив $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ на параллельную и перпендикулярную волновому вектору компоненты, определяем средние радиационные потери энергии, т.е. потери на образование фотонов в среде, как работу против компоненты электрического поля, перпендикулярной волновому вектору,

$$\mathbf{E}_\perp(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{k} = 0.$$

Такое определение отвечает представлению о фотоне в среде как возбуждению среды, волновой вектор которого и электрическое поле перпендикулярны. Средние радиационные потери энергии во всём пространстве ненулевых плотностей тока и за всё время их существования даются следующим выражением:

$$\bar{A}_\perp = -\frac{2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\omega \int_{K_3} d\mathbf{k} \text{Re}(\mathbf{j}^*(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{E}_\perp(\mathbf{k}, \omega)). \quad (5)$$

Действительная часть подынтегрального выражения и комплексно-сопряжённая плотность тока частицы возникли от вклада интегрирования по отрицательным частотам. Выражая электрическое поле с помощью уравнений Максвелла и уравнения непрерывности через плотность тока внешнего заряда, получаем

$$\mathbf{E}_\perp = 4\pi i \mu \frac{\omega}{c^2} \frac{k^2 \mathbf{j} - (\mathbf{k} \mathbf{j}) \mathbf{k}}{k^2(k^2 - \epsilon \mu \omega^2/c^2)}. \quad (6)$$

Здесь μ и ϵ — соответственно магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, зависящие от частоты и в общем случае от волнового вектора. Такой выбор функций отклика является наиболее распространённым, но не единственным [5], однако для наших целей его будет вполне достаточно. Подставляя (6) в (5), выражаем радиационные потери через плотность тока и функции отклика среды:

$$\bar{A}_\perp = -\frac{2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\omega \int_{K_3} d\mathbf{k} \times \\ \times \text{Re} \left[4\pi i \mu \frac{\omega}{c^2} \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k})(\mathbf{j} \mathbf{j}^*) - (\mathbf{k} \mathbf{j})(\mathbf{k} \mathbf{j}^*)}{k^2(k^2 - \epsilon \mu \omega^2/c^2)} \right]. \quad (7)$$

Для точечного внешнего заряда e , движущегося по траектории $\mathbf{r}(t)$ со скоростью $\mathbf{v}(t)$, плотность тока выражается как $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = ev(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)]$. Её фурье-компонента имеет вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = e \int_{-\infty}^\infty dt \mathbf{v}(t) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)), \quad (8)$$

где интегрирование проводится по временной области ненулевой скорости. Последнее выражение позволяет перейти к интенсивности средних радиационных потерь, а также к частотно-угловому спектру среднего числа фотонов, испущенных движущимся зарядом в единицу времени [6]:

$$\frac{d^3 \bar{N}_\perp(t)}{\hbar d\omega dt d\Omega} = \frac{1}{\hbar \omega} \frac{d^3 \bar{A}_\perp(t)}{\hbar d\omega dt d\Omega} = \frac{\alpha}{2\pi^3 \hbar c} \times \\ \times \text{Im} \left\{ \int_0^\infty \frac{\mu(\omega) dk}{k^2 - \epsilon(\omega)\mu(\omega)\omega^2/c^2} \times \right. \\ \times \int_{-\infty}^\infty d\tau (k^2 \mathbf{v}(t+\tau)\mathbf{v}(t) - \omega^2) \times \\ \left. \times \exp[i\omega\tau - i\mathbf{k}(\mathbf{r}(t+\tau) - \mathbf{r}(t))] \right\}, \quad (9)$$

где Ω — телесный угол, причём полярный угол излучения θ отсчитывается от направления скорости $\mathbf{v}(t)$, т.е. $d\mathbf{k} = k^2 dk d\Omega = 2\pi k^2 dk d\cos\theta$. Выражение (9), полученное методом классической электродинамики, не учитывает квантовых эффектов отдачи. Зависимость скорости от времени понадобится ниже при рассмотрении излучения с конечной траектории и многократно рассеянного заряда.

3. Радиационные потери энергии равномерно движущегося заряда

В случае равномерного движения со скоростью \mathbf{v} ($\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t$) интеграл по τ в выражении (9) приводит к

следующему результату:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau (k^2 v^2 - \omega^2) \exp [i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\tau] = 2\pi k^2 v^2 \sin^2 \theta \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega).$$

Тогда частотно-угловой спектр в единицу времени среднего числа фотонов, испущенных зарядом, примет вид

$$\frac{d^3 \bar{N}_{\perp}(t)}{\hbar d\omega dt d\Omega} = \frac{\alpha}{2\pi^3 \hbar c} \operatorname{Im} \left[\int_0^{\infty} \frac{\mu(\omega) 2\pi k^2 v^2 \sin^2 \theta \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) dk}{k^2 - \epsilon(\omega) \mu(\omega) \omega^2 / c^2} \right],$$

причём, чтобы получить в дальнейшем угловую зависимость, дельта-функцию можно использовать для интегрирования по модулю волнового вектора:

$$k = \frac{\omega}{v \cos \theta}, \quad \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) \rightarrow \frac{1}{v \cos \theta},$$

$$d\Omega = 2\pi d \cos \theta = \pi \frac{d \cos^2 \theta}{\cos \theta}.$$

Окончательно имеем ($dx = v dt$)

$$\frac{d^3 \bar{N}_{\perp}}{\hbar d\omega dx d \cos^2 \theta} = \frac{\alpha}{\hbar c} \operatorname{Im} \left[\frac{\mu \tan^2 \theta}{\pi(1 - \epsilon \mu \beta^2 \cos^2 \theta)} \right].$$

Для раскрытия мнимой части введём комплексную переменную $\xi = \epsilon \mu = \xi_1 + i\xi_2$, где $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$, $\mu = \mu_1 + i\mu_2$. Тогда

$$\frac{d^3 \bar{N}_{\perp}}{\hbar d\omega dx d \cos^2 \theta} = \frac{\alpha}{\hbar c} \left[\mu_1 \sin^2 \theta + \frac{\mu_2 \tan^2 \theta}{\xi_2 \beta^2} (1 - \xi_1 \beta^2 \cos^2 \theta) \right] \times \frac{\Gamma_{\xi}}{\pi[(\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_{\xi})^2 + \Gamma_{\xi}^2]}, \quad (10)$$

$$\cos^2 \theta_{\xi} = \frac{\xi_1}{\beta^2 |\xi|^2}, \quad \Gamma_{\xi} = \frac{\xi_2}{\beta^2 |\xi|^2},$$

где $\xi_1 = \epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2$, $\xi_2 = \epsilon_1 \mu_2 + \epsilon_2 \mu_1$, $|\xi|^2 = (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) \times (\mu_1^2 + \mu_2^2)$.

В немагнитной среде ($\mu = 1$) соотношение (10) сводится к

$$\frac{d^3 \bar{N}_{\perp}}{\hbar d\omega dx d \cos^2 \theta} = \frac{\alpha}{\pi \hbar c} \frac{(1 - \cos^2 \theta) \Gamma}{(\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_0)^2 + \Gamma^2}, \quad (11)$$

где

$$\cos^2 \theta_0 = \frac{\epsilon_1}{\beta^2 |\epsilon|^2}, \quad \Gamma = \frac{\epsilon_2}{\beta^2 |\epsilon|^2}. \quad (12)$$

Выражение (11) было получено У. Фано в [7] в несколько другой форме на основе квантово-механического подхода. Видно, что радиационные потери энергии равномерно движущегося заряда в среде испытывают лоренцево угловое уширение, пропорциональное мнимой части диэлектрической проницаемости. Рисунок 1 иллюстрирует это уширение в среде фреона C_6F_{14} для двух значений энергии излучения: $\hbar\omega = 6,8$ эВ (штриховая кривая) и $\hbar\omega = 7,7$ эВ (сплошная кривая), причём предполагается, что $v \sim c$ [6]. Это уширение, являясь пропорциональным отношению длины волны излучения к длине поглощения, чрезвычайно мало в видимой и ультрафиолетовой областях спектра и обычно не видно на фоне хроматической aberrации из-за частотной дисперсии испускаемого света, которая особенно выражена в ультрафиолетовой области.

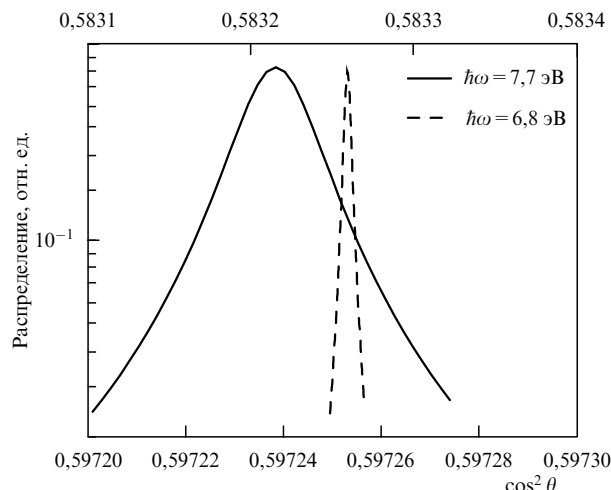


Рис. 1. Угловое распределение радиационных потерь энергии релятивистского заряда, $\gamma \gg 1$, во фреоне C_6F_{14} для значений энергии излучения $\hbar\omega = 6,8$ эВ (штриховая кривая) и $\hbar\omega = 7,7$ эВ (сплошная кривая, верхняя ось абсцисс). Кривые нормированы на одинаковое максимальное значение.

Интегрирование (11) по угловой переменной, $\cos^2 \theta$, даёт выражение для спектра среднего числа фотонов, испущенных равномерно движущимся зарядом с единицы пути:

$$\frac{d^2 \bar{N}_{\perp}}{\hbar d\omega dx} = \frac{\alpha}{\pi \hbar c} \left[\left(1 - \frac{\epsilon_1}{\beta^2 |\epsilon|^2} \right) \arg(1 - \beta^2 \epsilon^*) + \frac{\epsilon_2}{\beta^2 |\epsilon|^2} \ln \left(\frac{1}{|1 - \beta^2 \epsilon|} \right) \right]. \quad (13)$$

Выражение (13) впервые было получено Э. Ферми в [8], который полагал его тесно связанным с ИВЧ. Отметим, что (13) показывает медленное логарифмическое возрастание в зависимости от лоренц-фактора релятивистского заряда, сменяющееся в области $\gamma \sim 10^3$ плато (плато Ферми), которое отражает отмеченный Э. Ферми эффект плотности [9]. Рисунок 2 иллюстрирует этот эффект, показывая относительное релятивистское возрастание ионизационных потерь энергии заряда в газовой смеси 93 % Ar+7 % CH_4 толщиной 6 см при нормальных давлении и температуре. Кривая — результат расчёта по модели фотопоглощения [10], кружки — экспериментальные данные [11], полученные с помощью дрейфовой пропорциональной многопроволочной камеры. Таким образом, релятивистское возрастание ионизационных потерь заряженной частицы целиком определяется поглощением черенковских фотонов вблизи её траектории, что даёт растущий с увеличением лоренц-фактора вклад в общие потери. Заметим, что модель фотопоглощения, несмотря на то что она не учитывает пространственную дисперсию диэлектрической проницаемости, существенную вблизи полос поглощения (см., например, [4, § 106]), достаточно хорошо описывает результаты эксперимента. Причина состоит в точности используемых в модели сечений фотопоглощения на внешних оболочках атома с энергией менее 100 эВ, которые вносят основной вклад в ионизационные потери энергии. Поэтому интегрально, в терминах средних потерь энергии, модель согласуется с экспериментальными данными.

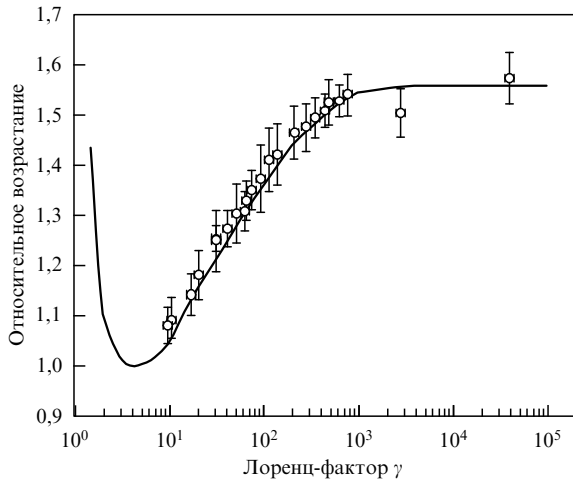


Рис. 2. Относительное релятивистское возрастание ионизационных потерь энергии заряда в газовой смеси 93 % Ar + 7 % CH₄ толщиной 6 см при нормальных давлении и температуре. Кривая — расчёт по модели фотопоглощения [10], кружки — экспериментальные данные [11], полученные с помощью дрейфовой многопроволочной пропорциональной камеры.

В среде со случайными неоднородностями, например в аэрогельных черенковских детекторах [12], электрические поле и индукцию, усреднённые по объёму, который включает в себя много неоднородностей, можно связать эффективной диэлектрической проницаемостью. Являясь комплексной величиной, она приводит к картине радиационных потерь равномерно движущегося заряда, эквивалентной поглощающей среде. Предполагается, что в объёме размером порядка длины волны излучения содержится много неоднородностей. Физически это понятно, поскольку и поглощающая, и рассеивающая среды приводят к убыванию потока фотонов в направлении их основного испускания ИВЧ, разрушая свойственную этому эффекту когерентность. Аэрогельные черенковские детекторы по сравнению с детекторами на основе однородной среды показывают более ярко выраженную угловую абберацию ИВЧ (которое усреднено по объёму, включающему в себя много неоднородностей) и более растянутый порог его возникновения.

В пределе прозрачной среды, когда $\Gamma \rightarrow 0$, вещественную диэлектрическую проницаемость можно выразить через квадрат показателя преломления, $\epsilon \rightarrow \epsilon_1 = n^2(\omega)$. Поскольку лоренцева линия углового распределения в (11) стремится в этом случае к дельта-функции, приходим к частотно-угловому спектру ИВЧ:

$$\frac{d^3 \bar{N}_c}{\hbar d\omega dx d \cos^2 \theta} = \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \delta\left(\cos^2 \theta - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right). \quad (14)$$

Это выражение явно фиксирует угол излучения ИВЧ, а последующее интегрирование по углу (причём естественной угловой переменной для ИВЧ является $\cos^2 \theta$) даёт соотношение (1).

Рассмотрим прозрачную среду, в которой магнитная проницаемость не равна единице, но $\epsilon_2 \rightarrow 0$ и $\mu_2 \rightarrow 0$. В такой среде квадрат показателя преломления выражается через диэлектрическую и магнитную проницаемости, $n^2 = \epsilon_1 \mu_1$, а частотно-угловой спектр испущенных с еди-

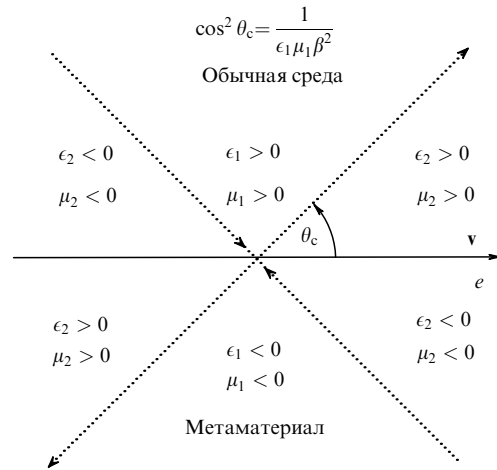


Рис. 3. Варианты излучения или поглощения черенковских фотонов в обычных материалах и метаматериалах.

ницы пути черенковских фотонов выражается как

$$\frac{d^3 \bar{N}_c}{\hbar d\omega dx d \cos^2 \theta} = \text{sign}(\Gamma_\xi) \frac{\alpha \mu_1}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \times \delta\left(\cos^2 \theta - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right). \quad (15)$$

Здесь можно рассмотреть интересный случай, когда $\epsilon_1 \mu_1 > 0$, но обе проницаемости меньше нуля, $\epsilon_1 < 0$ и $\mu_1 < 0$ (левые среды или метаматериалы [13, 14]). Тогда излучение следует групповой скорости $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$, которая противонаправлена волновому вектору \mathbf{k} , при этом излучение испускается назад в диапазоне углов $(\pi/2, \pi)$. Учёт знака $\text{sign}(\Gamma_\xi) \mu_1$ позволяет рассматривать не только испускание, но и поглощение черенковских фотонов. Рисунок 3 показывает варианты излучения или поглощения черенковских фотонов в обычных средах и метаматериалах.

4. Задача Тамма в поглощающей среде

Рассмотрим равномерное движение заряда со скоростью \mathbf{v} на конечном промежутке траектории (задача Тамма [15]). Фурье-компонента плотности тока в этом случае имеет вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = 2e\mathbf{v} \frac{\sin[(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)\tau/2]}{\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega}, \quad (16)$$

где τ — полное время движения заряда (рис. 4). Повторяя вычисления, приведённые в разделах 2, 3 (см. также [6]), получаем для частотно-углового спектра средней интенсивности излучения следующее выражение:

$$\frac{d^3 \bar{A}_\perp(t)}{\hbar d\omega dt d \cos \theta} = \frac{\alpha}{\pi} \beta^2 \omega \sin^2 \theta \times \text{Re} \left\{ \sqrt{\epsilon} \exp[-i\omega\tau(1 - \beta\sqrt{\epsilon} \cos \theta)] \times \frac{\sin[\omega\tau(1 - \beta\sqrt{\epsilon} \cos \theta)]}{1 - \beta\sqrt{\epsilon} \cos \theta} \right\}. \quad (17)$$

Выражение (17) является полным решением задачи Тамма в поглощающей среде. Его интегрирование по

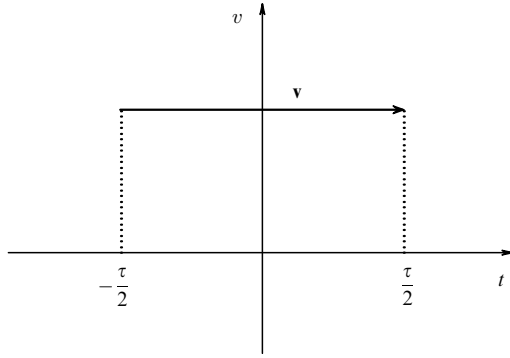


Рис. 4. Равномерное движение на конечном промежутке траектории (задача Тамма).

времени в пределах $(-\tau/2, \tau/2)$ приводит к частотно-угловому спектру средней излучённой энергии с промежутка траектории длиной $v\tau$:

$$\frac{d^2 A_{\perp}}{\hbar d\omega d \cos \theta} = \frac{2\alpha}{\pi} \beta^2 \sin^2 \theta \times \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sqrt{\epsilon} \sin^2 [(\omega\tau/2)(1 - \beta\sqrt{\epsilon} \cos \theta)]}{(1 - \beta\sqrt{\epsilon} \cos \theta)^2} \right\}. \quad (18)$$

Интегрирование (18) по углу испускания фотонов в пределе $\omega\tau \gg 1$ приводит к двум вкладам в общий спектр радиационных потерь энергии. Первый — это выражение (13), помноженное на $v\tau$, что отражает радиационные потери с участка равномерного движения заряда. Второй вклад относится к радиационным потерям энергии при мгновенном (за время, много меньше обратной величины характерной частоты излучения) ускорении и замедлении на концах траектории (тормозное излучение). Эти вклады соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dA_{\perp}}{\hbar d\omega} &= \frac{\alpha}{\pi\beta} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\ln \frac{1 + \beta\sqrt{\epsilon}}{1 - \beta\sqrt{\epsilon}} - 2\beta\sqrt{\epsilon} \right) \right] = \\ &= [\epsilon \rightarrow \epsilon_1 = n^2(\omega)] = \\ &= \frac{\alpha}{\pi\beta n^2(\omega)} \left(\ln \frac{1 + \beta n(\omega)}{|1 - \beta n(\omega)|} - 2\beta n(\omega) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Выражение (19) для прозрачной среды, полученное И.Е. Таммом в [15], в вакууме переходит в известное выражение:

$$\frac{dA_{\perp}}{\hbar d\omega} = \frac{\alpha}{2\pi} \beta^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 \theta d\theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2} = \frac{\alpha}{\pi\beta} \left(\ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2\beta \right), \quad (20)$$

приведённое в [3].

5. Радиационные потери энергии многократно рассеянного заряда

В ряде экспериментов, использующих жидкие черенковские детекторы, необходимо оценивать точность восстановления вершин редких, например нейтринных, событий по анализу амплитуд световых сигналов ИВЧ релятивистских электронов в фотоэлектронных умножителях (ФЭУ) или светодиодах, распределённых вокруг жидкого (водяного) радиатора. Многократное рассеяние

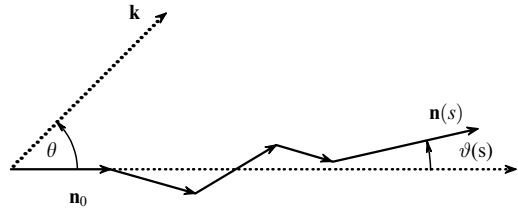


Рис. 5. Обозначения при рассмотрении многократного рассеяния.

электронов в жидких радиаторах ИВЧ влияет на точность восстановления кинематики событий [16]. Рассмотрение радиационных потерь многократно рассеянного заряда позволяет аналитически оценить изменение частотно-углового спектра испущенных фотонов [17]. Влияние многократного рассеяния на излучение релятивистского, $\gamma \gg 1$, заряда в среде обычно рассматривается для малых углов излучения, порядка $1/\gamma$, в рентгеновской области частот (см., например, обзоры [18, 19] и приведённые там ссылки).

Здесь остановимся на задаче в оптической области, когда угол излучения в плотной среде $\theta \sim 1$ при малых по сравнению с единицей углах многократного рассеяния. Рассмотрим заряд e , который движется по произвольной, но близкой к прямой траектории $\mathbf{r}(t)$ в однородной изотропной немагнитной поглощающей среде с комплексной диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$. Для простоты ограничимся случаем только частотной дисперсии $\epsilon(\omega)$ в оптическом диапазоне. Рассмотрим частотно-угловой спектр интенсивности испущенных фотонов, усреднённый по всем возможным траекториям, которые в данный момент времени параллельны единичному вектору \mathbf{n}_0 (рис. 5). Тогда усреднённое по траекториям соотношение (9) даёт

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^3 \bar{N}_{\perp}}{\hbar d\omega dt d\Omega} \right\rangle &= \frac{\alpha}{2\pi^3 \hbar c} \operatorname{Im} \left(\int_0^{\infty} \frac{\langle I(\mathbf{k}, \omega) \rangle dk}{k^2 - \epsilon(\omega)\omega^2/c^2} \right), \quad (21) \\ \langle I(\mathbf{k}, \omega) \rangle &= \frac{2}{v} \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} ds \exp \left(i \frac{\omega}{v} s \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{4\pi} d\mathbf{n} f(s, \mathbf{k}, \mathbf{n}) (k^2 v^2 \mathbf{n} \mathbf{n}_0 - \omega^2) \right]. \end{aligned}$$

Предполагается, что усреднение по предшествующим данному моменту времени и последующим траекториям одинаково, что позволяет ограничиться интегрированием по положительным значениям длины траектории, $s > 0$. Здесь

$$f(s, \mathbf{k}, \mathbf{n}) = \int_{R_3} d\mathbf{r} f(s, \mathbf{r}, \mathbf{n}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})$$

представляет собой фурье-компоненту функции распределения плотности вероятности $f(s, \mathbf{r}, \mathbf{n})$, где \mathbf{n} — единичный вектор направления траектории для её длины s , а единичный вектор \mathbf{n}_0 отвечает моменту времени t при $s = 0$. Она удовлетворяет [20] следующему кинетическому уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(s, \mathbf{k}, \mathbf{n})}{\partial s} + i\mathbf{k}\mathbf{n}f(s, \mathbf{k}, \mathbf{n}) &= \\ &= N \int_{4\pi} [f(s, \mathbf{k}, \mathbf{n}') - f(s, \mathbf{k}, \mathbf{n})] \sigma(|\mathbf{n}' - \mathbf{n}|) d\mathbf{n}', \end{aligned}$$

с начальным условием

$$f(0, \mathbf{k}, \mathbf{n}) = \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0).$$

Здесь σ — упругое сечение, ответственное за многократное рассеяние, N — число атомов в единице объёма. Предполагается, что угол многократного рассеяния ϑ много меньше угла излучения θ , что позволяет упрощённо положить $\mathbf{kn} \simeq \mathbf{kn}_0$. Теперь функцию распределения можно разложить в ряд по полиномам Лежандра $P_l(\cos \vartheta)$ ($\cos \vartheta = \mathbf{nn}_0$):

$$f(s, \mathbf{k}, \mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(s, \mathbf{k}) P_l(\cos \vartheta). \quad (22)$$

Коэффициенты разложения $f_l(s, \mathbf{k})$ удовлетворяют следующему уравнению:

$$\frac{\partial f_l(s, \mathbf{k})}{\partial s} + (\sigma_l + ik \cos \theta) f_l(s, \mathbf{k}) = 0,$$

где сечения σ_l имеют вид

$$\sigma_l = 2\pi N \int_0^\pi \sigma(\chi) (1 - P_l(\cos \chi)) \sin \chi d\chi.$$

Нормированная функция распределения выражается следующей суммой:

$$f(s, \mathbf{k}, \mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \vartheta) \exp[-(\sigma_l + ik \cos \theta)s].$$

Вследствие ортогональности полиномов Лежандра только первые два члена этой суммы дадут вклад в $\langle I(\mathbf{k}, \omega) \rangle$. Интегрирование (22) по s и выделение действительной части приводит с учётом $k \cos \theta = \mathbf{kn}_0$ к соотношению

$$\langle I(\mathbf{k}, \omega) \rangle = -\frac{2\pi\omega^2}{v} \delta\left(k \cos \theta - \frac{\omega}{v}\right) + \frac{2k^2 v \sigma_1}{(k \cos \theta - \omega/v)^2 + \sigma_1^2}.$$

Здесь первый член в правой части отвечает вкладу прямой в среднем траектории и он связан с ИВЧ. Второй член показывает среднее влияние многократного рассеяния на угловое распределение излучения. Для упрощения вычислений в (21) рассмотрим случай почти прозрачной среды, тогда вклад от многократного рассеяния сводится к (вводим вместо k комплексную переменную z)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^3 \bar{N}_{\perp \text{msc}}}{\hbar d\omega dt d \cos^2 \theta} \right\rangle &= \frac{\alpha}{\hbar c} \frac{v \sigma_1}{\pi^2 \cos^3 \theta} \text{Im} \left\{ \oint_C g(z) dz \right\}, \\ g(z) &= \frac{1}{2} \frac{z^2}{z^2 - a^2} \left[\frac{1}{(z-b)(z-b^*)} + \frac{1}{(z+b)(z+b^*)} \right], \\ a^2 &= \epsilon \frac{\omega^2}{c^2}, \quad b = \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{\omega}{v} + i\sigma_1 \right). \end{aligned}$$

Здесь интегрирование по z можно проводить по всей вещественной оси, замыкая контур в верхней полуплоскости полуокружностью с бесконечно большим радиусом. Интеграл вдоль полуокружности бесконечно мал, а вклад сингулярностей в пределе почти прозрачной среды ограничен полюсом первого порядка в точке a . В

результате приходим ($dx = v dt$) к

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^3 \bar{N}_{\perp \text{msc}}}{\hbar d\omega dx d \cos^2 \theta} \right\rangle &= \frac{\alpha}{\hbar c} \frac{\beta(n^2 \cos^2 \theta + \beta^{-2} + \epsilon^2)}{2n \cos \theta} \times \\ &\times \frac{\Gamma_{\text{msc}}}{\pi[(\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_{\text{msc}})^2 + \Gamma_{\text{msc}}^2]}, \\ \cos^2 \theta_{\text{msc}} &= \frac{1 - \beta^2 \epsilon^2}{\beta^2 n^2}, \quad \Gamma_{\text{msc}} = \frac{2\epsilon}{\beta n^2}, \quad \epsilon = \frac{c\sigma_1}{\omega}. \end{aligned}$$

Вычисление для прямой в среднем траектории проводится сразу и даёт

$$\left\langle \frac{d^3 \bar{N}_{\perp \text{cr}}}{\hbar d\omega dx d \cos^2 \theta} \right\rangle = -\frac{\alpha}{\hbar c} \frac{1}{n^2 \beta^2} \delta\left(\cos^2 \theta - \frac{1}{n^2 \beta^2}\right).$$

В случае пренебрежимо малого многократного рассеяния, $\epsilon \rightarrow 0$, частотно-угловое распределение среднего числа фотонов с единицы длины траектории сводится к ИВЧ:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^3 \bar{N}_{\perp}}{\hbar d\omega dx d \cos^2 \theta} \right\rangle &= \left\langle \frac{d^3 \bar{N}_{\perp \text{msc}}}{\hbar d\omega dx d \cos^2 \theta} \right\rangle + \\ &+ \left\langle \frac{d^3 \bar{N}_{\perp \text{cr}}}{\hbar d\omega dx d \cos^2 \theta} \right\rangle = \\ &= \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{n^2 \beta^2}\right) \delta\left(\cos^2 \theta - \frac{1}{n^2 \beta^2}\right). \quad (23) \end{aligned}$$

Величина транспортного сечения σ_1 для малых углов многократного рассеяния $\vartheta \ll 1$ определяется его среднеквадратичным углом. Тогда относительное уширение углового распределения можно оценить из $\Gamma_{\text{msc}}/\cos \theta_{\text{msc}} \sim 2\epsilon/n \lesssim 0,1$. Эта величина для типичных жидких или твёрдых радиаторов много больше величины эффекта поглощения, но не превышает нескольких миллирадиан в воде для электронов с энергией 1–10 МэВ.

6. Обсуждение

Приведённые выше примеры показывают, что радиационные потери релятивистского заряда в поглощающих и рассеивающих средах могут служить обобщением его излучения, наблюдаемого вдали от заряда в окнах прозрачности. Радиационные потери энергии равномерно движущегося заряда позволяют получить выражение для частотно-углового спектра среднего числа фотонов, испущенных зарядом с единицы пути, которое в пределе прозрачной среды даёт аналогичный спектр для ИВЧ. Поглощение и/или рассеяние фотонов приводят к лоренцеву уширению углового распределения, причём естественной угловой переменной выступает $\cos^2 \theta$, а относительное уширение определяется отношением длины волны излучения к длине волны поглощения (рассеяния).

Порог возникновения ИВЧ в поглощающих средах в зависимости от энергии заряда испытывает расплывание, которое экспериментально наблюдается как релятивистское возрастание ионизационных потерь заряженной частицы. Это возрастание обусловлено ионизацией, связанной с фотопоглощением вблизи траектории заряда испущенных им фотонов в области энергий атомных оболочек выше первого потенциала ионизации.

Аналогично многократное рассеяние приводит к лоренцеву уширению углового спектра ИВЧ даже в прозрачной среде, хотя, строго говоря, это уширение определяется тормозным излучением при мгновенном изменении направления скорости вследствие упругого рассеяния заряда на ядрах среды. В рамках данной статьи мы ограничились рассмотрением радиационных потерь для движения заряда по почти прямой траектории, попутно получив выражения для тормозного излучения при мгновенном изменении скорости — на концах траектории в задаче Тамма или при упругом рассеянии на ядрах среды в случае многократного рассеяния.

Излучение релятивистского заряда в среде интересно представить в терминах длины когерентности. Для прозрачной среды, согласно обзорам [21, 22], она введена как

$$L(\omega, \theta) = \frac{\pi v}{\omega} \frac{1}{1 - \beta n \cos \theta}. \quad (24)$$

Её обобщением в поглощающей среде является комплексная величина

$$Z(\omega, \theta) = \frac{\pi v}{\omega} \frac{1}{1 - \beta \sqrt{\epsilon} \cos \theta}, \quad (25)$$

которую обычно определяют как комплексную зону формирования излучения. Её действительная часть в прозрачной среде сводится к длине когерентности. Заметим, что в прозрачной среде при условии ИВЧ длина когерентности (24) становится бесконечной, тогда как действительная часть (25) остаётся конечной величиной, по порядку величины отвечая длине поглощения (рассеяния) черенковских фотонов. Длина когерентности ИВЧ получает естественный физический смысл в реальных средах при учёте поглощения, рассеяния и/или многократного рассеяния. В последнем случае она определяется транспортной длиной упругого рассеяния на ядрах среды, $\sim \sigma_1^{-1}$.

Рассмотрение радиационных потерь согласно выражению (9) не ограничивается указанными случаями. За рамками настоящей работы остаются интересные с практической точки зрения дипольные, ондуляторные и магнитотормозные радиационные потери в поглощаю-

щей среде, а также ИВЧ в поглощающих средах с пространственной дисперсией. Они будут рассмотрены в других работах.

Автор благодарен Б.М. Болотовскому и И.М. Дрёмину за конструктивное обсуждение ряда вопросов, затронутых в настоящей статье.

Список литературы

1. Черенков П А *ДАН СССР* **2** 451 (1934); Cerenkov P *C.R. Acad. Sci.* **14** 101 (1937); Черенков П А *УФН* **93** 385 (1967)
2. Тамм И Е, Франк И М *ДАН СССР* **14** 107 (1937); Frank I, Tamm I *C.R. Acad. Sci.* **14** 109 (1937); Тамм И Е, Франк И М *УФН* **93** 388 (1967)
3. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1982); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1987)
4. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)
5. Kirzhnits D A, in *The Dielectric Function of Condensed Systems* (Modern Problems in Condensed Matter Sciences, Vol. 24, Eds L V Keldysh, D A Kirzhnits, A A Maradudin) (Amsterdam: North-Holland, 1989) p. 41
6. Grichine V M, Sadilov S S *Phys. Lett. B* **559** 26 (2003)
7. Fano U *Annu. Rev. Nucl. Sci.* **13** 1 (1963)
8. Fermi E *Phys. Rev.* **57** 485 (1940)
9. Fermi E *Phys. Rev.* **56** 1242 (1939)
10. Apostolakis J et al. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **453** 597 (2000)
11. Lehraus I et al. *Nucl. Instrum. Meth.* **153** 347 (1978)
12. Nappi E *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **61** 270 (1998)
13. Веселаго В Г *УФН* **92** 517 (1967); Veselago V G *Sov. Phys. Usp.* **10** 509 (1968)
14. Smith D R et al. *Phys. Rev. Lett.* **84** 4184 (2000)
15. Tamm I E *J. Phys. USSR* **1** 439 (1939)
16. Bowler M G, Lay M D *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **378** 468 (1996)
17. Grichine V M *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **563** 364 (2006)
18. Базылев В А, Жеваго Н К *УФН* **137** 605 (1982); Bazylev V A, Zhevago N K *Sov. Phys. Usp.* **25** 565 (1982)
19. Ахиезер А И, Шульга Н Ф *УФН* **151** 385 (1987); Akhiezer A I, Shul'ga N F *Sov. Phys. Usp.* **30** 197 (1987)
20. Lewis H W *Phys. Rev.* **78** 526 (1950)
21. Болотовский Б М *Труды ФИАН* **140** 95 (1982)
22. Болотовский Б М *УФН* **179** 405 (2009); Bolotovskii B M *Phys. Usp.* **52** 379 (2009)

Vavilov–Cherenkov radiation and radiation energy loss

V.M. Grishin

Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences,
Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation
E-mail: grishinv@lebedev.ru

The radiative energy loss of a relativistic charge in media with photon absorption and scattering is discussed. The solution to the Tamm problem in a medium with absorption is given. Expressions for the radiation loss are given with the inclusion of multiple scattering of the radiating charge.

Keywords: Vavilov–Cherenkov radiation, radiative energy loss

PACS numbers: 29.40.Ka, 41.60.Bq

Bibliography — 22 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **192** (6) 689–695 (2022)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.02.038922>

Received 28 October 2020, revised 18 January 2021

Physics – Uspekhi **65** (6) (2022)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2021.02.038922>