

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

# Конечное значение затравочного заряда и связь отношения постоянных тонкой структуры физического и затравочного зарядов с нулевыми колебаниями электромагнитного поля в вакууме

В.И. Ритус

*Дуальность четырёхмерной электродинамики и двумерной теории скалярного безмассового поля приводит к функциональному совпадению спектров среднего числа фотонов, излучаемых точечным зарядом в  $3 + 1$ -пространстве, со спектрами среднего числа пар скалярных квантов, испускаемых точечным зеркалом в  $1 + 1$ -пространстве. Спектры различаются лишь множителем  $e^2/\hbar c$  (хевисайдовы единицы). Требование тождественного совпадения спектров приводит к уникальным значениям точечного заряда  $e_0 = \pm\sqrt{\hbar c}$  и его постоянной тонкой структуры  $\alpha_0 = 1/4\pi$ , обладающим всеми свойствами, указанными Гелл-Маном и Лоу для конечного затравочного заряда. Перенормировочный фактор Дайсона  $Z_3 \equiv \alpha/\alpha_0 = 4\pi\alpha$  конечен и лежит в диапазоне  $0 < Z_3 < 1$  в согласии с правилом сумм спектрального представления Челлена–Лемана для точной функции Грина фотона. Значение  $Z_3$  находится также в очень узком интервале  $\alpha_L < Z_3 \equiv \alpha/\alpha_0 = 4\pi\alpha < \alpha_B$  между значениями параметров  $\alpha_L = 0,0916$  и  $\alpha_B = 0,0923$ , определяющих сдвиги  $E_{L,B} = \alpha_{L,B}\hbar c/2r$  энергии нулевых флюктуаций электромагнитного поля в кубическом и сферическом резонаторах с ребром куба, равным диаметру сферы,  $L = 2r$ . В этом случае куб описывает сферу. Очень малое различие коэффициентов  $\alpha_{L,B}$  объясняется тем, что все многогранники, описывающие сферу, несмотря на различие их форм, обладают общим топологическим инвариантом — отношением поверхности к объёму  $S/V = 3/r$  — таким же, как у самой сферы. Ему пропорциональны и сдвиги энергии нулевых колебаний в таких резонаторах:  $E_{L,B} = \alpha_{L,B}\hbar c S/6V$ . С другой стороны, сдвиги  $E_{L,B} = \alpha_{L,B}\hbar c/2r$  энергии нулевых колебаний электромагнитного поля по существу совпадают с энергией среднеквадратичных флюктуаций средних по объёму электрического и магнитного полей в резонаторе, равной  $Z_3\hbar c/2r$  по порядку величины. Отсюда следует, что  $\alpha_{L,B} \approx Z_3$ , как и должно быть для коэффициентов  $\alpha_\gamma$  сдвигов  $E_\gamma = \alpha_\gamma\hbar c/2r$  в других резонаторах  $\gamma$ , описывающих сферу. Близость  $\alpha_L$  и  $\alpha_B$  к  $Z_3$ -фактору подтверждается спектральным представлением Челлена–Лемана и согласуется с асимптотическими условиями, связывающими амплитуды рождения фотона свободным и взаимодействующим векторными полями.*

**Ключевые слова:** непертурбативные методы, физический, затравочный, ренорминвариантный заряды, дуальность 4-мерной и 2-мерной теорий поля, спектральное представление функций Грина, правило сумм, нулевые флюктуации поля в вакууме, объёмные резонаторы, топологический инвариант, конформная инвариантность

PACS numbers: 02.40.-k, 03.70.+k, 05.40.-a, 11.10.Hi,  
11.10.Jj, 11.55.Hx, 12.20.-m, 41.60.-m

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2022.02.039167>

## Содержание

1. Введение (507).
2. Точные функции Грина как вакуумные средние взаимодействующих операторных полей (509).
3. Представление Челлена–Лемана и его связь с перенормированным пропагатором фотона (512).
4. Нулевые флюктуации электромагнитного поля в вакууме и объёмные резонаторы (514).

В.И. Ритус. Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,  
Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация  
E-mail: ritus@lpi.ru

Статья поступила 9 июня 2021 г., после доработки 25 октября 2021 г.

5. Представление сдвига плотности энергии в кубическом резонаторе дзета-функциями Римана и Эштейна (517).
  6. Содержательная близость значений  $\alpha_L$ ,  $\alpha_B$  и  $\alpha/\alpha_0 = 4\pi\alpha$ , полученных непертурбативными методами (519).
  7. Связь параметров  $\alpha_{B,L}$  с  $Z_3$ -фактором Дайсона — отношением квадратов физического и затравочного зарядов (519).
  8. Сдвиг нулевой энергии электромагнитного поля в резонаторе как измеримая физическая величина (522).
  9. Заключение (523).
- Список литературы (525).

## 1. Введение

Известно, что при очень больших энергиях заряда и импульсах, переданных им другим зарядам или полям,

величина заряда возрастает. Одновременно возрастает и величина заряда, определяющего амплитуду излучения на бесконечность мягких фотонов. Эти фотоны не изменяют испустившего их тока. Поэтому излучение и поглощение таких квантов описывается амплитудой сохранения вакуума

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} W(J) \right],$$

зависящей от заданного внешнего классического тока  $J(x)$ . Согласно Швингеру и его теории источников [1], эта амплитуда обеспечивает исчерпывающее описание многочастичного испускания и поглощения частиц, подчиняющихся статистике Бозе–Эйнштейна.

Удвоенная мнимая часть действия  $W$ , делённая на постоянную Планка  $\hbar$ , равна среднему числу  $\bar{N}$  частиц, испущенных источником за всё время. В свою очередь,  $\bar{N}$  представляет собой интеграл от спектра  $d\bar{n}_k$  среднего числа испущенных квантов

$$\bar{N} = \frac{2 \operatorname{Im} W}{\hbar} = \int d\bar{n}_k,$$

каждый из которых обладает импульсом  $\hbar\mathbf{k}$  и энергией  $\hbar\omega$ , определяемыми волновым вектором  $k^\alpha = (\mathbf{k}, k^0)$ , где  $k^0 = \omega/c$ . Такова непосредственная связь между очень важной квазиклассической величиной и наиболее важным объектом квантовой физики — квантами поля источника.

В цикле работ [2–9], начатых автором в сотрудничестве с А.И. Никишовым, было обнаружено функциональное совпадение спектров среднего числа фотонов (другой вариант — скалярных квантов), испущенных точечным электрическим (скалярным) зарядом в  $3 + 1$ -пространстве, со спектрами среднего числа пар скалярных (спинорных) безмассовых квантов, испущенных точечным зеркалом в  $1 + 1$ -пространстве. Будучи функциями двух переменных и функционалами общей траектории заряда и зеркала, спектры различаются только множителем  $e^2/\hbar c$  (хевисайдовы единицы), так как граничное условие на зеркале является чисто геометрическим и не содержит никаких параметров. Такое функциональное совпадение естественно назвать голограммической дуальностью [8].

Требование  $e^2/\hbar c = 1$  приводит к уникальным величинам точечного заряда  $e_0 = \pm\sqrt{\hbar c}$  и его постоянной тонкой структуры  $\alpha_0 = 1/4\pi$ . Очень важно то, что приведённые значения удовлетворяют общим свойствам, указанным Гелл-Маном и Лоу [10] для конечного затравочного заряда, а именно:

- 1)  $\alpha_0$  не зависит от постоянной тонкой структуры  $\alpha$ ;
- 2)  $\alpha_0 > \alpha$ ;
- 3) плотность распределения затравочного заряда описывается пространственной дельта-функцией, умноженной на  $e_0$ :  $e_0\delta(\mathbf{x})$ .

Требование  $e^2/\hbar c = 1$  следует из предложенного автором голограммического принципа квантования затравочного заряда [8], согласно которому кванты и пары, излучённые зарядом и зеркалом и распространяющиеся соответственно в четырёхмерном пространстве и на его внутренней двумерной поверхности, должны иметь тождественно совпадающие спектры. Дуальность обязана интегральной связи причинных функций Грина для  $3 + 1$ - и  $1 + 1$ -пространств и связям плотностей тока

(заряда) в  $3 + 1$ -пространстве со скалярными производными скалярного (спинорного) безмассовых полей в  $1 + 1$ -пространстве [8].

Связи, лежащие в основе дуальности, так же как и сами функции Грина, имеют чисто геометрическое происхождение. Величины, найденные для затравочного заряда,  $e_0 = \pm\sqrt{\hbar c}$  и соответствующее значение постоянной тонкой структуры  $\alpha_0 = 1/4\pi$  со свойствами, отмеченными Гелл-Маном и Лоу для конечного затравочного заряда, также имеют чисто геометрическое происхождение, что естественно, поскольку для вычисления спектров используются решения волновых уравнений для безмассовых полей с нулевыми граничными условиями и временнеподобные кривые для траекторий точечных заряда и зеркала.

Обнаруженная дуальность связывает волновые процессы в четырёхмерном и двумерном пространствах Минковского. Именно в таких пространствах чётной размерности распространение безмассовых волн подчиняется геометрическому принципу Гюйгенса [11]. Наконец, связанные дуальностью электродинамика в  $3 + 1$ -пространстве и теория безмассового скалярного поля в  $1 + 1$ -пространстве обладают конформной симметрией.

Дирак в своей лекции в университете Нового Южного Уэльса, касаясь постоянной тонкой структуры  $\alpha$  и отношения массы протона к массе электрона, заметил: "Вполне вероятно, что подобные постоянные составлены из простых величин типа  $4\pi$ " [12]. Можно было бы поразиться удивительной интуиции Дирака, если бы он имел в виду не  $\alpha$ , а величину  $\alpha_0$  — постоянной тонкой структуры затравочного заряда, которая согласно обсуждаемой дуальности в точности равна  $1/4\pi$ . Различие между этими двумя величинами обязано поляризации вакуума точечным электрическим зарядом и их отношение  $\alpha_0/\alpha = 10,90\dots$  есть диэлектрическая проницаемость вакуума. Обратное отношение  $\alpha/\alpha_0 = Z_3$  — важнейшая из трёх введённых Дайсоном [13] перенормировочных констант. Постоянная  $Z_3$  имеет также смысл вероятности, с которой возбуждение электромагнитного поля  $\mathbf{A}(x)$ , взаимодействующего в вакууме с динамическим током  $j_\mu(x)$ , распространяется как свободный фотон с нулевой массой. Такой смысл был придан величине  $Z_3$  Челленом [14] и аналогичной величине  $Z$  для скалярного поля — Леманом [15], получившими спектральные представления точных функций Грина для электромагнитного и скалярного полей. Этим представлениям посвящён раздел 3.

Ему предшествует раздел 2, в котором точные функции Грина рассматриваются как вакуумные средние взаимодействующих операторных полей. Точная причинная функция Грина возникает как вакуумное среднее хронологического произведения полей. При этом, следуя Швингеру [16, 17], используется радиационная (кулоновская) калибровка электромагнитного поля  $A_\mu(x)$ , удобная простой вероятностной интерпретацией его компонент и характеризующаяся трёх- и четырёхмерной попечностью поля излучения.

Центральным выражением этих двух разделов является спектральное представление причинной функции Грина

$$\mathcal{G}(x - x') = Z_3 D_F(x - x') + \int_{0^+}^{\infty} dm^2 \rho(m^2) \Delta_F(x - x', m)$$

и правило сумм

$$Z_3 + \int_{0^+}^{\infty} dm^2 \rho(m^2) = 1,$$

в котором  $Z_3$  имеет смысл вероятности образования реального фотона слабым внешним током  $J_\mu(x)$ , взаимодействующим с флуктуациями вакуумного поля  $A(x)$ , и распространения его пропагатором  $D_F(x - x')$  от места рождения до места поглощения током  $J_\mu(x')$ . В то же время,  $\rho(m^2) dm^2$  имеет смысл вероятности образования виртуального фотона с массой  $m^2$  тем же током  $J_\mu(x)$ , взаимодействующим с флуктуациями вакуумного тока  $j_\mu(x)$ , и распространения его пропагатором  $D_F(x - x')$  до поглощения током  $J_\mu(x')$ .

Положительный сдвиг энергии нулевых флуктуаций электромагнитного поля в сферическом и кубическом резонаторах был получен впервые в работах Бойера [18] и Лукоша [19], а также в работах [20–25]. Его конечность означает, что этот сдвиг наблюдаем (см. [26, 27]).

В разделе 4 подробно анализируется полученное Лукошем [19] аналитическое выражение сдвига энергии нулевых колебаний поля в кубическом резонаторе. Особое внимание уделяется высокочастотным расходимостям, присущим плотности и энергии нулевых колебаний поля, и их устранению из суммы тех собственных частот резонатора, которые определяют конечный сдвиг  $\Delta u$  плотности энергии в резонаторе. Расходимости устраняются введением в плотность энергии обрезающего высокие частоты формфактора и отбрасыванием растущих с частотой обрезания членов.

В разделе 5 сдвиг энергии нулевых колебаний в кубическом резонаторе представлен значениями аналитических дзета-функций Римана и Эпштейна. Такое представление избегает расходимостей, возникающих при непосредственном суммировании спектра энергии нулевых флуктуаций электромагнитного поля в вакууме.

Сравнение сдвигов  $E_B$  (Boyer) и  $E_L$  (Lukosz) энергии нулевых колебаний в сферическом и кубическом резонаторах показывает, что они практически совпадают, если ребро куба равно диаметру сферы:  $L = 2r$ . Возможная причина слабой зависимости сдвигов от формы резонатора изложена в разделе 6. В случае  $L = 2r$  куб описывает сферу. А у всех многогранников, описывающих сферу, несмотря на разнообразие их форм, отношение поверхности к объёму точно такое же, как у самой сферы:  $S/V = 3/r$ . Оно является топологическим инвариантом этих многогранников. С другой стороны, характерным масштабом сдвига энергии в резонаторах выбран  $\hbar c/2r$ , пропорциональный их топологическому инварианту.

В разделе 7 обсуждается связь коэффициентов  $\alpha_L$ ,  $\alpha_B$ , определяющих сдвиги энергии нулевых колебаний в кубическом и сферическом резонаторах, с  $Z_3$ -фактором. Коэффициенты  $\alpha_L$  и  $\alpha_B$  характеризуют взаимодействие тока на проводящей оболочке резонатора с флуктуациями электромагнитного поля в вакууме при образовании резонатора. В результате внутри него появляются стоячие электромагнитные волны, несущие энергию  $\alpha_L, \alpha_B \hbar c/2r$ .  $Z_3$ -фактор характеризует взаимодействие внешнего тока  $J_\mu(x)$  с теми же флуктуациями поля в вакууме, в результате которого образуются свободные реальные фотоны.

Близость  $\alpha_L$  и  $\alpha_B$  к  $Z_3$ -фактору подтверждается спектральным представлением Челлена–Лемана (3.1), (3.12) и согласуется с асимптотическими условиями (3.11), (8.2).

В разделе 8 обсуждается измеримость сдвига энергии нулевых флуктуаций электромагнитного поля в резонаторах. Сдвиг появляется в результате работы внешних сил при адиабатическом образовании резонатора вместе с токами на его проводящей оболочке, взаимодействующими с флуктуациями поля. Взаимодействие приводит к образованию в резонаторе реальных волн с энергией, определяемой работой внешних сил.

В заключении подробно обсуждаются резонаторы, оболочки которых описывают сферу и характеризуются топологическим инвариантом  $S/V = 3/r$ . Расчёт сдвига энергии нулевых колебаний поля ещё в одном таком резонаторе, например, цилиндрическом, мог бы внести полную ясность в зависимость сдвига от формы резонатора. Показано, что в резонаторах, описывающих сферу, избыток давления  $p$  и объём связанны адиабатой  $pV^{4/3} = \text{const } \hbar c$ , подобной адиабате чёрного излучения.

Показано, что функциональное совпадение спектров фотонов и пар полностью определяется дуальной голограмической связью (9.12) пропагаторов в четырёхмерном и двумерном пространствах и чисто геометрической связью (9.22) фурье-образа 2-вектора скорости заряда и зеркала с  $\beta$ -коэффициентом Боголюбова, определяющим спектр пар скалярных квантов. Поэтому голограмический принцип квантования затравочного заряда, приводящий к значению  $e_0^2/\hbar c = 1$ ,  $\alpha_0 = 1/4\pi$ , можно сформулировать как требование тождественного совпадения спектров фотонов и пар, или как требование совпадения полных средних чисел фотонов и пар, испущенных зарядом и зеркалом со всей их общей траекторией. В обоих случаях спектры будут совпадать по причине их функционального совпадения.

Показано, что полученное значение затравочного заряда, будучи конечным, удовлетворяет всем трём условиям Гелл-Мана и Лоу [10], а отношение квадратов физического и затравочного зарядов, равное  $Z_3$ -фактору Дайсона, лежит в очень узком интервале  $\alpha_L < Z_3 = \alpha/\alpha_0 = 4\pi\alpha < \alpha_B$  между чисто геометрическими константами  $\alpha_L$  и  $\alpha_B$ , определяющими конечные сдвиги энергии нулевых колебаний электромагнитного поля в кубическом и сферическом резонаторах. В работе показано, что поразительная близость коэффициентов  $\alpha_L, \alpha_B$  к конечному значению  $Z_3 = 4\pi\alpha$  не случайна, а является следствием фундаментальных равновременных перестановочных соотношений взаимодействующих операторных полей, в частности, следствием спектрального представления Челлена–Лемана для точной функции Грина фотона.

В статье используется метрика  $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ , естественная система единиц  $\hbar = c = 1$  и единицы Хевисайда для заряда.

## 2. Точные функции Грина как вакуумные средние взаимодействующих операторных полей

Будем придерживаться краткого изложения этой темы в работах Швингера [16, 17] и использованных там обозначений.

Рассмотрим простейшую (положительно-частотную) функцию Грина, связанную с векторным операторным полем  $A_\mu(x)$ , взаимодействующим с динамическим током  $j_\mu(x)$ . Она может быть выведена из вакуумного среднего неупорядоченного произведения операторов

поля

$$\langle A_\mu(x)A_\nu(x') \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \exp [ip(x-x')] dm^2 \times \\ \times \eta_+(p)\delta(p^2+m^2)A_{\mu\nu}(p), \quad (2.1)$$

где фактор  $\eta_+(p)\delta(p^2+m^2)$  приводит к спектральному ограничению состояниями с массой  $m \geq 0$  и положительной энергией. Спектральные составляющие вакуумного среднего (2.1) — это инвариантные положительно-частотные функции

$$A^{(+)}(x, m) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \exp(ipx)\eta_+(p)\delta(p^2+m^2) = \\ = \int \frac{d^3 p \exp(ipx)}{(2\pi)^3 2p^0}, \quad p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}, \quad (2.2)$$

собственные для оператора  $\partial_x^2$  с собственным значением  $m^2$ . Требование неотрицательной определённости матрицы  $A_{\mu\nu}(p)$  удовлетворяется радиационной калибровкой полей, приводящей к структуре

$$A_{\mu\nu}^R(p) = B(m^2) \left[ g_{\mu\nu} - \frac{(p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu)(np) + p_\mu p_\nu}{p^2 + (np)^2} \right], \quad (2.3)$$

которая вносит зависящую от калибровки асимметрию между пространством и временем. В той лоренцевой системе, в которой проводится квантование, единичный времениподобный вектор  $n_\mu$  направлен вдоль оси времени:  $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$ . В этой системе ненулевые компоненты матрицы в квадратных скобках таковы:

$$[\ ]_{\mu\nu} = \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2} \quad \text{для } \mu = i, \nu = j; \quad i, j = 1, 2, 3, \\ [\ ]_{\mu\nu} = -\frac{p^2}{\mathbf{p}^2} \quad \text{для } \mu = \nu = 0. \quad (2.4)$$

Полезно также представление

$$[\ ]_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^2 e_\mu(\lambda)e_\nu(\lambda) - \frac{p^2 n_\mu n_\nu}{p^2 + (np)^2}, \quad (2.5)$$

соответствующее полю излучения и кулоновскому полю. Здесь  $e_\mu(\lambda)$ ,  $\lambda = 1, 2$  — пространствуподобные единичные векторы поляризации, ортогональные друг другу и векторам  $p_\mu$  и  $n_\mu$ .

Вещественная неотрицательная функция  $B(m^2)$  подчиняется правилу сумм

$$\int_0^\infty dm^2 B(m^2) = 1, \quad (2.6)$$

которое является полным выражением всех фундаментальных равновременных коммутационных соотношений взаимодействующих операторных полей.

Полевые уравнения приводят к аналогичной структуре вакуумного среднего произведения операторов плотности тока  $\langle j_\mu(x)j_\nu(x') \rangle$  с неотрицательно определённой матрицей

$$j_{\mu\nu}(p) = m^2 B(m^2) (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) \quad (2.7)$$

вместо  $A_{\mu\nu}^R(p)$ . Важным следствием множителя  $m^2$  является то, что нулевая масса  $m = 0$  не содержится в спектре вакуумных флуктуаций плотности тока. Флуктуации вектора тока определяют  $B(m^2)$  для  $m > 0$ , но оставляют не вполне определённым возможный дельтафункциональный вклад при  $m = 0$ :

$$B(m^2) = B_0 \delta(m^2) + B_1(m^2). \quad (2.8)$$

Неотрицательная константа  $B_0$  фиксируется тогда правилом сумм

$$1 = B_0 + \int_0^\infty dm^2 B_1(m^2). \quad (2.9)$$

Таким образом, спектр вакуумных флуктуаций вектора  $A_\mu$  состоит из двух частей. Одна часть, соответствующая  $m > 0$ , непосредственно связана с флуктуациями плотности тока, в то время как другая часть, соответствующая  $m = 0$ , может быть ассоциирована с чистым полем излучения, поперечным как в трёх, так и в четырёхмерном смысле, и не имеющим сопровождающего тока.

Рассмотрим вакуумное среднее от  $T$ -произведения полей  $A_\mu(x)$ ,  $A_\nu(x')$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x-x', n) = i \langle TA_\mu(x)A_\nu(x') \rangle = \\ = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{p}\mathbf{x} - ip^0|t-t'|] dm^2 \times \\ \times \eta_+(p)\delta(p^2+m^2)A_{\mu\nu}^R(p). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Инвариантная функция (спектральная составляющая вакуумного среднего (2.10))

$$\begin{aligned} i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \exp[i\mathbf{p}\mathbf{x} - ip^0|t|] \eta_+(p)\delta(p^2+m^2) = \\ = i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}} \exp[i\mathbf{p}\mathbf{x} - i\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}|t|] = \\ = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(ipx)}{p^2 + m^2 - ie} \end{aligned} \quad (2.11)$$

хорошо известна. Это причинная функция Грина (фейнмановский пропагатор). Она была введена Штокельбергом [28–30] с обозначением  $\Delta^c(x)$ . Швингер и Фейнман обозначают её  $\Delta_+(x, m)$  [1, 31] и  $I_+(x, m)$  [32, 33], другие авторы [34, 35] —  $\Delta_F(x, m)$  или  $\Delta^f(x, m)$  [36, 8]. Из представлений (2.11) видно, что она чётна по  $x^\mu$  и удовлетворяет уравнению

$$(-\partial_x^2 + m^2)\Delta_+(x, m) = \delta_4(x). \quad (2.12)$$

При вычислении физических амплитуд в квантовой теории поля пропагатор  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  (2.10) всегда стоит между сохраняющимися токами, которые являются источниками электромагнитного поля. В частности, в действии  $W$ ,

$$W = \frac{1}{2c} \int d^4 x d^4 x' J^\mu(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}(x-x', n) J^\nu(x'), \quad (2.13)$$

определенном амплитуду  $\langle 0_+ | 0_- \rangle^J = \exp(iW/\hbar)$  сохранения вакуума внешним током  $J^\mu(x)$ , сохранение тока  $\partial_\mu J^\mu(x) = p_\mu J^\mu(p) = 0$  приводит к исчезновению из матрицы  $A_{\mu\nu}^R$  членов, зависящих от  $n^\mu$ . В результате propagator  $\mathcal{G}_{\mu\nu}(x, n)$  сводится к явно лоренц-инвариантному выражению

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\mu\nu}(x) &= g_{\mu\nu} \mathcal{G}(x) = g_{\mu\nu} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp(ipx) \mathcal{G}(p), \\ \mathcal{G}(p) &= \int_0^\infty dm^2 \frac{B(m^2)}{p^2 + m^2 - i\epsilon}.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Используя функцию  $B(m^2)$  (2.8), получаем для  $\mathcal{G}(x)$  спектральное представление Челлена–Лемана [14, 15] в импульсном

$$\mathcal{G}(p) = \frac{B_0}{p^2 - i\epsilon} + \int_0^\infty \frac{dm^2 B_1(m^2)}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (2.15)$$

и координатном

$$\mathcal{G}(x) = B_0 D_F(x) + \int_0^\infty dm^2 B_1(m^2) \Delta_F(x, m) \quad (2.16)$$

представлениях.

Швингер подчёркивает, что нужно чётко различать  $c$ -числовые калибровочные функции и операторные калибровочные функции, так как различные операторные калибровки не имеют одинаковой квантовой основы. В каждой координатной системе имеется уникальная операторная калибровка, характеризуемая трёхмерной по-перечностью (радиационная калибровка), для которой имеется стандартная операторная конструкция в векторном пространстве с положительный нормой, с вероятностной физической интерпретацией. Если теория формулируется с помощью вакуумных средних значений хронологических произведений операторов, т.е. функций Грина, то свобода формального калибровочного преобразования может быть восстановлена [37]. Функции Грина других калибровок имеют более сложную операторную реализацию и, вообще говоря, не будут обладать свойствами положительности радиационной калибровки.

Существует альтернатива представлению Челлена–Лемана [17]:

$$\mathcal{G}(p) = \left[ p^2 - i\epsilon + (p^2 - i\epsilon) \int_0^\infty \frac{dm^2 s(m^2)}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \right]^{-1}, \quad (2.17)$$

где функция  $s(m^2)$  вещественна и неотрицательна.

Если потребовать, чтобы  $m = 0$  появилось как изолированное значение массы в физическом спектре состояний, то необходимо, чтобы

$$s(0) = 0 \quad \text{и} \quad \int_\delta^\infty dm^2 \frac{s(m^2)}{m^2} < \infty \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.18)$$

Только в этом случае функция Грина будет иметь полюс при  $p^2 = 0$ ,

$$p^2 \sim 0: \quad \mathcal{G}(p) \sim \frac{B_0}{p^2 - i\epsilon}, \quad 0 < B_0 < 1. \quad (2.19)$$

При этих условиях возникает связь спектральной функции

$$B(m^2) = B_0 \delta(m^2) + B_1(m^2)$$

с функцией  $s(m^2)$ :

$$B_0 = \left[ 1 + \int_0^\infty \frac{dm^2}{m^2} s(m^2) \right]^{-1}, \quad (2.20)$$

$$B_1(m^2) = \frac{s(m^2)/m^2}{\left( 1 + \text{V.p.} \int_0^\infty \frac{dm'^2 s(m'^2)}{m'^2 - m^2} \right)^2 + (\pi s(m^2))^2}. \quad (2.21)$$

Физическая интерпретация функций  $B(m^2)$  и  $s(m^2)$  выводится из связи функции Грина с амплитудой сохранения вакуума в присутствии источников. Для достаточно слабых внешних токов  $J_\mu(x)$

$$\langle 0|0 \rangle^J = \exp \left[ \frac{1}{2} i \int d^4 x d^4 x' J^\mu(x) \mathcal{G}(x - x') J_\mu(x') \right] = (2.22)$$

$$= \exp \left[ \frac{1}{2} i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} J^\mu(p) \mathcal{G}(p) J_\mu(p) \right]. \quad (2.23)$$

Вероятность того, что вакуум останется вакуумом, несмотря на возмущение внешним током, равна

$$|\langle 0|0 \rangle^J|^2 = \exp \left[ - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} J^\mu(p)^* J_\mu(p) \text{Im } \mathcal{G}(p) \right], \quad (2.24)$$

где, согласно (2.14),

$$\text{Im } \mathcal{G}(p) = \pi \int_0^\infty dm^2 B(m^2) \delta(p^2 + m^2), \quad (2.25)$$

а интеграл в показателе есть удвоенная мнимая часть действия. После интегрирования по  $p^0$  она принимает компактный вид

$$2 \text{Im } W = \int \frac{d^3 p dm^2}{(2\pi)^3 2p^0} B(m^2) J^\mu(p)^* J_\mu(p), \quad (2.26)$$

где  $p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ ,  $\mathbf{p}$  и  $m$  — энергия, импульс и масса возбуждений, созданных в вакууме внешним током.

Вспомним теперь, что спектр возбуждений состоит из изолированного возбуждения с нулевой массой  $m = 0$  и непрерывного спектра состояний с массой  $m > 0$  (см. (2.8)). Тогда

$$\begin{aligned}2 \text{Im } W &= B_0 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p^0} J^\mu(p)^* J_\mu(p) + \\ &+ \int_0^\infty dm^2 B_1(m^2) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p^0} J^\mu(p)^* J_\mu(p),\end{aligned}\quad (2.27)$$

где свёртка токов

$$J^\mu(p)^* J_\mu(p) = |\mathbf{J}(p)|^2 - |J^0(p)|^2 \quad (2.28)$$

положительна как в первом члене, где вектор  $p^\mu$  изотропен,  $p^2 = 0$ , так и во втором, где он временнеподобен,  $-p^2 = m^2 > 0$ .

В самом деле, из условия сохранения тока

$$\mathbf{pJ} - p^0 J^0 = 0 \quad (2.29)$$

следует, что в первом случае  $J_3 = J^0$  в системе координат, где  $p_1 = p_2 = 0$ ,  $p_3 = p^0$ , и свёртка сводится к вкладу поперечных волновому вектору  $\mathbf{p}$  компонент тока:  $|J_1|^2 + |J_2|^2 > 0$ . Во втором случае из того же условия вытекает, что  $J^0 = 0$  в системе, где  $\mathbf{p} = 0$ ,  $p^0 = m$ , и свёртка сводится к вкладу трёх компонент тока:  $|\mathbf{J}|^2 > 0$ . Таким образом, возбуждения с нулевой массой поперечны не только в четырёхмерном, но и в трёхмерном смысле, и не имеют сопровождающего тока. Лоренцинвариантность свёртки токов и меры интегрирования на массовой поверхности  $-p^2 = m^2 \geq 0$  сохраняет инвариантность и положительную определённость интегралов, зависящих лишь от  $m^2$  и параметров, определяющих внешний ток. Ясно, что для тока, создающего возбуждения,  $2 \operatorname{Im} W > 0$  и вероятность сохранения вакуума меньше единицы.

Заметим, наконец, что после деления на постоянную Планка выражение  $2 \operatorname{Im} W / \hbar$  безразмерно и представляет собой среднее число реальных фотонов (первый член в (2.27)) и среднее число реальных  $e^+e^-$ -пар и фотонов (второй член), испущенных током за всё время.

Нетривиальным примером первого члена в  $2 \operatorname{Im} W$  (2.27) может служить формула Шотта [38] для излучения заряда при его движении по окружности в магнитном поле с частотой  $\omega_H = v/r$ . В этом случае интеграл

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p^0} J^\mu(p)^* J_\mu(p) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\hbar \omega_n} T = \\ &= 2\alpha_0 \omega_H \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \beta J'_n(2n\beta) - \frac{1-\beta^2}{\beta} \int_0^{n\beta} d(n\xi) J_{2n}(2n\xi) \right] T \end{aligned}$$

пропорционален времени  $T$  и после умножения на  $B_0$  становится ренорминвариантной величиной,  $B_0 \alpha_0 = \alpha$ , определяющей среднее число фотонов, испущенных за всё время.

Преобразуем теперь амплитуду (2.22) сохранения вакуума внешним током в функцию отклика вакуума на векторный потенциал, определённый внешним током,

$$A_\mu(p) = \mathcal{G}(p) J_\mu(p). \quad (2.30)$$

Обратим внимание на то, что благодаря сохранению тока такой потенциал четырёхмерно поперечен,  $p_\mu A^\mu(p) = 0$ . Используя альтернативное представление функции Грина (2.17), получаем амплитуду

$$\langle 0|0 \rangle^J = \exp \left[ \frac{1}{2} i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} A^\mu(p)^* \mathcal{G}(p)^{* -1} A_\mu(p) \right] \quad (2.31)$$

и вероятность

$$|\langle 0|0 \rangle^J|^2 = \exp \left[ - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} A^\mu(p)^* A_\mu(p) \operatorname{Im} \mathcal{G}(p)^{* -1} \right] \quad (2.32)$$

сохранения вакуума, несмотря на возмущение.

Так как

$$\operatorname{Im} \mathcal{G}(p)^{* -1} = -\pi p^2 \int_0^\infty dm^2 s(m^2) \delta(p^2 + m^2), \quad (2.33)$$

$$-p^2 A^\mu(p)^* A_\mu(p) = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu}(p)^* F_{\mu\nu}(p) = |\mathbf{E}(p)|^2 - |\mathbf{H}(p)|^2, \quad (2.34)$$

то

$$|\langle 0|0 \rangle^J|^2 = \exp \left[ - \int \frac{d^3 p \, dm^2}{(2\pi)^3 2p^0} s(m^2) \left( -\frac{1}{2} \right) F^{\mu\nu}(p)^* F_{\mu\nu}(p) \right], \quad (2.35)$$

где  $p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ . Отсюда видно, что  $s(m^2)$  оказывается мерой вероятности того, что внешнее поле образует в вакууме возбуждение, передавая ему энергию и импульс, лежащие на массовой поверхности  $m^2 = -p^2 > 0$ .

Обращает на себя внимание то, что в (2.35) нет вклада состояний с нулевой массой. Это связано с тем, что электромагнитное поле  $F_{\mu\nu}(x)$  пространственно отделено от своего источника — тока  $J_\mu(x)$  и само по себе не является источником реальных фотонов, хотя может состоять из них (плоская волна) или из виртуальных фотонов (кулоновское поле).

Плосковолновое поле произвольного спектрального состава описывается тензором

$$F_{\mu\nu}(x) = f_{\mu\nu} F(\xi), \quad \xi = k_x x^\alpha, \quad k_x^2 = 0, \quad (2.36)$$

где  $k_x$  — изотропный вектор,  $f_{\mu\nu}$  — постоянный антисимметричный тензор,  $F(\xi)$  — произвольная функция. Обладая нулевыми инвариантами,  $f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} = {}^* f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} = 0$ , и максвелловским по форме тензором энергии-импульса,

$$T_{\mu\nu} = k_\mu k_\nu F^2(\xi), \quad T_\mu^\mu = 0, \quad (2.37)$$

с нулевым следом, такое поле не поляризует вакуум, не взаимодействует с вакуумным током  $j_\mu(x)$  и не приводит к нелинейным вакуумным эффектам. Этот фундаментальный результат получен Швингером [39].

Плосковолновое поле является чисто геометрическим объектом, хотя и унаследовало негеометрическую размерность ( $\text{эрг см}^{-3}\text{!}^{1/2}$  от своего источника (и детектора) — плотности тока  $J_\mu(x) = (\rho \mathbf{v}/c, \rho)$ , имеющего размерность плотности заряда, т.е. ( $\text{эрг см}^{-5}\text{!}^{1/2}$ ).

### 3. Представление Челлена–Лемана и его связь с перенормированным пропагатором фотона

Вернёмся теперь к спектральному представлению Челлена–Лемана, чтобы связать его с перенормированным пропагатором фотона. Будем использовать вместо швингеровских  $B_0$  и  $B_1(m^2)$  более общепринятые обозначения  $Z_3$  и  $\rho(m^2)$ , восходящие к Дайсону, Челлену и Леману. Тогда в координатном и импульсном представлениях точная функция Грина

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x) &= Z_3 D_F(x) + \int_{0^+}^\infty dM^2 \rho(M^2) \Delta_F(x, M), \\ \mathcal{G}(k^2) &= \frac{Z_3}{k^2 - ie} + \int_{0^+}^\infty dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2 + k^2 - ie}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Авторы фундаментальной монографии по квантовой электродинамике Иво и Софья Бялыницкие-Бирюля так комментируют представление Челлена–Лемана [40].

"Разложение фотонного пропагатора на сумму пропагатора  $D_F$  свободного фотона и интеграла от пропагатора  $\Delta_F$  по  $M^2$  имеет наглядную физическую интерпретацию. Можно сказать, что в теории с взаимодействием

возмущения электромагнитного поля движутся в пространстве-времени от точки  $x_1$  к точке  $x_2$ ,  $x = x_1 - x_2$ , как комбинация распространения с нулевой массой, определяемого  $Z_3 D_F$ , и распространения с непрерывно распределённой массой, определяемого функцией  $\rho(M^2)$ . Перенормировочная константа  $Z_3$  определяет вес, с которым компонента, описывающая свободное распространение с нулевой массой, входит в суперпозицию. В теории без взаимного взаимодействия фотонов с зарядами в фотонном пропагаторе появляется только свободная компонента и константа  $Z_3 = 1$ .

Дополнительным аргументом в пользу точно такой интерпретации полученного представления для пропагатора является правило сумм

$$1 = Z_3 + \int_{0^+}^{\infty} dM^2 \rho(M^2), \quad (3.2)$$

из которого следует, что в согласии с фундаментальными свойствами квантовой теории величинам  $Z_3$  и  $\rho(M^2) dM^2$  можно приписать смысл вероятностей различных встречающихся типов распространения."

Используя правило сумм, запишем пропагатор  $\mathcal{G}(k^2)$  в виде

$$\mathcal{G}(k^2) = \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \left[ 1 - \int_{0^+}^{\infty} dM^2 \frac{\rho(M^2) M^2}{M^2 + k^2 - i\epsilon} \right]. \quad (3.3)$$

В то же время точный, *перенормированный* пропагатор фотона представляют обычно в виде [8, 10, 34, 35]

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_R(k^2) &= \frac{1}{k^2 - i\epsilon} d_R\left(\frac{k^2}{m^2}, \alpha\right), \\ d_R(x, \alpha) &= \frac{1}{1 + \alpha \pi_R(x, \alpha)}, \quad x = \frac{k^2}{m^2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

с нормировкой

$$d_R(0, \alpha) = 1, \quad \text{т.е. } \pi_R(0, \alpha) = 0 \quad \text{при } k^2 = 0. \quad (3.5)$$

Как показано Дайсоном [13, 41], произведение квадрата заряда на точную функцию Грина фотона является ренорминвариантной величиной, т.е.

$$\alpha \mathcal{G}(k^2, \alpha_0) = \alpha \mathcal{G}_R(k^2, \alpha), \quad (3.6)$$

где  $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$ ,  $\alpha_0 = e_0^2/4\pi\hbar c$  — постоянные тонкой структуры физического и затравочного зарядов. Правую часть последнего выражения обычно записывают в виде

$$\alpha \mathcal{G}_R(k^2, \alpha) = \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \alpha d_R\left(\frac{k^2}{m^2}, \alpha\right), \quad (3.7)$$

а безразмерную скалярную функцию  $\alpha d_R(k^2/m^2, \alpha)$  называют эффективным параметром взаимодействия, ренорминвариантным зарядом, "бегущей константой" взаимодействия и т.п.

Используя соотношение ренорминвариантности (3.6) и представления (3.3), (3.4) при  $k^2 = 0$ , а также правило сумм (3.2), получаем

$$e_0^2 Z_3 = e^2, \quad (3.8)$$

Используя снова (3.6), (3.3), (3.4), но при  $k^2 \rightarrow \infty$ , получаем

$$e_0^2 = e^2 d_R(\infty, \alpha). \quad (3.9)$$

Из четырёх величин,  $e^2$ ,  $e_0^2$ ,  $Z_3$  и  $d_R(\infty, \alpha)$ , входящих в формулы (3.8), (3.9), известно (экспериментально) только  $e^2$ , для которого  $\alpha = 1/137,036$ . В работах автора, подытоженных в [8, 9], обнаруженная дуальная связь четырёхмерной электродинамики с двумерной квантовой теорией безмассового скалярного поля позволила определить величину точечного затравочного заряда. Его постоянная тонкой структуры оказалось равной  $\alpha_0 = 1/4\pi$ . Ниже мы приведём дополнительные аргументы в пользу полученного чисто геометрического значения  $\alpha_0$ , основанные на конформной инвариантности четырёхмерной электродинамики и двумерной теории безмассового скалярного поля.

Ценность представления Челлена – Лемана заключается в том, что оно получено без использования теории возмущений. Как было доказано Дайсоном, расходимости, возникающие в квантовой электродинамике в каждом порядке теории возмущений, после их регуляризации образуют ряды трёх перенормировочных множителей, связывающих все неперенормированные физические величины с перенормированными. Члены ряда каждой перенормированной физической величины конечны, а регуляризованные члены ряда каждого перенормировочного множителя позволяют обращаться с ним как с постоянной величиной. В частности (и в особенности), фундаментальное значение имеет множитель, обозначенный Дайсоном  $Z_3$ , связывающий затравочный заряд  $e_0$  с физическим зарядом  $e$ , и соответствующие им постоянные тонкой структуры:

$$e^2 = Z_3 e_0^2, \quad \alpha = Z_3 \alpha_0.$$

В работах Челлена и Лемана константе  $Z_3$  был придан ещё один, вероятностный смысл. Ими было найдено правило сумм

$$Z_3 + \int_{0^+}^{\infty} dm^2 \rho(m^2) = 1$$

для величин  $Z_3$  и  $\rho(m^2) dm^2$  со смыслом вероятностей распространения фотона с нулевой и ненулевой массой.

Вывод правила сумм основывается только на предположениях о спектре собственных значений оператора энергии-импульса  $P_\mu$ , а именно,

- 1)  $-P^2 \equiv P_0^2 - \mathbf{P}^2 \geq 0, \quad P^0 \geq 0,$
- 2)  $P^0 |0\rangle = 0, \quad \mathbf{P}|0\rangle = 0.$

Вероятностный смысл постоянной  $Z_3$  заключается в том, что  $\sqrt{Z_3}$  определяет амплитуду рождения одиночичного состояния полем  $\mathbf{A}(x)$  из вакуума:

$$\begin{aligned} \langle p\lambda | \mathbf{A}(x) | 0 \rangle &= \sqrt{Z_3} \langle p\lambda | \mathbf{A}_{\text{in}}(x) | 0 \rangle = \\ &= \sqrt{Z_3} \langle p\lambda | \mathbf{A}_{\text{out}}(x) | 0 \rangle = \sqrt{Z_3} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2p^0}} \exp(ipx) \mathbf{e}(\lambda) \end{aligned} \quad (3.11)$$

(см. (2.5)). Так как поле  $\mathbf{A}$  рождает также и многочастичные состояния, то  $\sqrt{Z_3} < 1$ . При этом значение  $\sqrt{Z_3} = 0$

исключается, потому что многочастичные состояния определяются с помощью оператора свободного поля  $A_{in}(x)$ , образующего только одночастичные состояния при действии на вакуум.

Тирринг образно описывает вакуум как состояние, в котором нет "одетых" частиц, но есть "полуодетые" и "голые" частицы, которые не являются собственными состояниями оператора энергии-импульса  $P_\mu$ . Если выразить  $P_\mu$  через операторы рождения и поглощения "голых" частиц, то собственные состояния  $P_\mu$  будут суперпозициями различного числа "голых" частиц — "облаками виртуальных частиц" [36, § 14].

Реальный фотон является собственным состоянием  $P_\mu$  с нулевыми зарядом и массой, но, в отличие от вакуума, это состояние имеет ненулевые энергию, импульс и спин, равный единице. Таким образом, это возбуждённое состояние распространяется в вакууме со скоростью света. Как уже упоминалось, реальный фотон не взаимодействует с вакуумом и свободно распространяется между местами своего рождения и поглощения реальными внешними токами  $J_\mu(x)$  и  $J_\mu(x')$ .

Однако, как мы видели, распространение более сложного электромагнитного возбуждения поля  $A(x)$ , взаимодействующего с током  $j_\mu(x)$ , описывается точной функцией Грина

$$\mathcal{G}(x) = Z_3 D_F(x) + \int_{0^+}^{\infty} dm^2 \rho(m^2) \Delta_F(x, m), \quad (3.12)$$

состоящей из двух членов.

Рождение реального фотона обязано члену взаимодействия в лагранжиане, в котором к оператору тока  $j_\mu(x)$  вакуумных флюктуаций добавлен классический ток  $J_\mu(x)$ . Он прежде всего взаимодействует с вакуумными флюктуациями поля  $A^\mu(x)$ , которое является полем "неодетых" частиц. Если энергия источника  $J_\mu(x)$  достаточна для порождения некоторой "одетой" частицы из "неодетой", то образование током недостающей части "одежды" может рассматриваться как реальный процесс и вероятность испускания фотона источником будет такой же, как для свободных полей, однако эту вероятность нужно ещё умножить на вероятность найти "одетую" частицу среди состояний, которые образуют "неодетую" частицу.

#### 4. Нулевые флюктуации электромагнитного поля в вакууме и объёмные резонаторы

Рассмотрим две идеально проводящие плоскости, прижатые друг к другу. Если мы будем раздвигать их, создавая вакуумную щель между ними, то флюктуационные токи, текущие вдоль поверхности раздела, вынуждены будут разделиться пополам на параллельные токи, разделённые щелью. Но параллельные токи притягиваются и будут сопротивляться образованию щели, что согласуется с законом сохранения энергии и правилом Ленца.

Согласно термодинамическому уравнению

$$dE = T dS - p dV \quad (4.1)$$

при адиабатическом ( $dS = 0$ ) увеличении объёма щели работа внешних сил уйдёт на повышение внутренней энергии вакуума, т.е.  $dE = -p dV > 0$ . Это означает, что  $-p > 0$ , т.е. давление внутри щели отрицательное. Де Витт [42] по этому поводу замечает: "Максвелл был

бы очень рад этому результату. Он заставляет почти поверить в существование эфира!"

Рассмотрим теперь образование в вакууме объёмного кубического резонатора из шести идеально проводящих квадратных граней с ребром  $L$ . Предположим, что вначале эти грани находятся далеко друг от друга, попарно располагаясь на осях декартовой системы координат симметрично относительно её центра — центра резонатора после его сборки. Флюктуации электромагнитного поля в вакууме оказывают одинаковое давление на внутреннюю и наружную (относительно центра) стороны каждой грани, пока они далеки друг от друга. Но по мере сближения граней давление на них с внутренней стороны будет возрастать по сравнению с давлением снаружи из-за всё более многократных отражений флюктуирующего электромагнитного поля. В момент окончания сборки превышение давления и плотности энергии внутри резонатора над значениями снаружи станет постоянным и наибольшим.

Квантовые флюктуации электромагнитного поля индуцируют на проводящей поверхности каждой грани круговые токи, текущие либо по, либо против часовой стрелки, оказывающие, согласно Ленцу, максимальное сопротивление сближению граней резонатора. В самом деле (см. рисунок) на противоположных гранях резонатора и вблизи рёбер соседних граней эти токи текут в противоположных направлениях и их отталкивание друг от друга создаёт избыток давления и плотности энергии внутри резонатора.

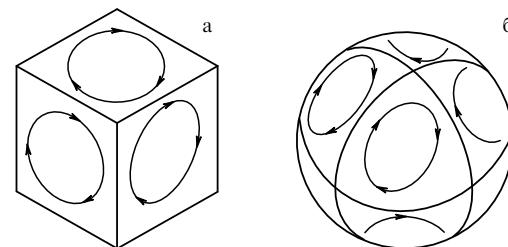
Обращаясь к термодинамическому уравнению (4.1), мы видим, что при адиабатическом уменьшении объёма резонатора работа внешних сил увеличивает внутреннюю энергию резонатора, так как давление внутри резонатора положительно,  $p > 0$ . Под  $p$  нужно понимать, конечно, разность давления внутри резонатора и давления в вакууме в отсутствие резонатора.

Ниже мы следуем замечательной работе В. Лукоша [19], получившего аналитическое выражение сдвига энергии нулевых флюктуаций электромагнитного поля в прямоугольной полости с проводящими стенками. Для нашей цели естественно ограничиться кубической полостью.

Уже в процессе сборки резонатор заставляет электромагнитное поле в вакууме удовлетворять граничному условию

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad \mathbf{H}_n = 0 \quad (4.2)$$

на его идеально проводящей поверхности. Индексы  $t$  и  $n$  указывают на тангенциальную и нормальную состав-



**Рисунок.** Круговые токи на гранях куба (а) и на сферических поверхностях октантов (б) можно считать составленными из более мелких подобных токов, текущих по или против часовой стрелки и, согласно Амперу, отталкивающихся друг от друга.

ляющие полей. Это приводит к тому, что энергия электромагнитного поля внутри резонатора становится выше той, которая была в том же объёме до введения резонатора с его проводящей оболочкой, т.е. в вакууме. Обе эти энергии бесконечны, но их разность, как мы увидим, конечна и положительна.

Энергия нулевых колебаний, просуммированная по собственным частотам

$$\omega_{n_1 n_2 n_3} = c k_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\pi c}{L} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \quad (4.3)$$

резонатора, после усреднения по времени (множитель  $1/2$ ) и учёта двукратного вырождения частот с отличными от нуля  $n_1 n_2 n_3$  (множитель 2) приводит к следующему выражению для плотности энергии:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{V} \sum_{n_1 n_2 n_3 \geq 0} \frac{1}{2} \hbar \omega_{n_1 n_2 n_3} = \\ &= \frac{\pi \hbar c}{VL} \sum_{n_1 n_2 n_3=0}^{\infty} [1 - (\delta_{n_1} \delta_{n_2} + \delta_{n_2} \delta_{n_3} + \delta_{n_3} \delta_{n_1})] \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь  $\sum^*$  означает, что частоты с одним из  $n_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , равным нулю, невырождены и должны быть умножены на  $1/2$ . С помощью символов Кронекера  $\delta_{n_i} \equiv \delta_{n_i 0}$  выражение в квадратных скобках обращается в нуль для мод, распространяющихся вдоль рёбер резонатора, так как они не удовлетворяют граничному условию (4.2) и не являются собственными модами резонатора.

Чтобы найти изменение плотности энергии вакуума, вызванное проводящей оболочкой резонатора, рассмотрим плотность энергии  $u'$  внутри очень большого кубического резонатора с ребром  $L' \gg L$ . Используя формулу (4.4) и заменяя в ней  $L$ ,  $V$  и  $n_i$  на штрихованные, получим сумму по  $n'_1, n'_2, n'_3$

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\pi \hbar c}{V' L'} \sum_{n'_1 n'_2 n'_3 \geq 0}^{\infty} [1 - (\delta_{n'_1} \delta_{n'_2} + \delta_{n'_2} \delta_{n'_3} + \delta_{n'_3} \delta_{n'_1})] \times \\ &\quad \times \sqrt{n'_1^2 + n'_2^2 + n'_3^2} = \end{aligned}$$

которая равна  $1/8$  части интеграла

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi \hbar c}{8VL} \iiint_{-\infty}^{\infty} dn_1 dn_2 dn_3 \left\{ 1 - [\delta(n_1) \delta(n_2) + \delta(n_2) \delta(n_3) + \right. \\ &\quad \left. + \delta(n_3) \delta(n_1)] \right\} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

распространённого по всему пространству непрерывных переменных  $n_i = (L/L')n'_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Они непрерывны, потому что их изменение  $\Delta n_i = (L/L')\Delta n'_i$  при изменении дискретных  $n'_i$  на единицу,  $\Delta n'_i = 1$ , стало как угодно малым при  $L/L' \ll 1$ . При этом символы Кронекера перешли в дельта-функции. Заметим также, что при переходе от одного к восьми октантам точки, лежащие на плоской границе двух соседних октантов, принадлежат этим окантам и их вклад делится пополам между этими окантами. Поэтому предписание "звёздочка" у знака  $\sum$  автоматически выполняется.

Чтобы работать с конечными величинами, введём обрезающий высокие частоты формфактор  $\exp(-\alpha k_{n_1 n_2 n_3})$ ,  $\alpha \rightarrow 0$ , как в сумму  $u$  (4.4), так и в интеграл  $u'$  (4.5). Па-

раметр  $\alpha$  имеет смысл длины волнны обрезания. Обозначим функцию с формфактором в новом выражении (4.4) для плотности  $u$  через

$$\begin{aligned} f(n_1, n_2, n_3) &= [1 - (\delta_{n_1} \delta_{n_2} + \delta_{n_2} \delta_{n_3} + \delta_{n_3} \delta_{n_1})] \times \\ &\quad \times \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \exp(-\alpha k_{n_1 n_2 n_3}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

и перейдём от суммы в одном (первом) октанте к сумме в восьми октантах:

$$\sum_{n_1 n_2 n_3=0}^{\infty} f(n_1, n_2, n_3) = \frac{1}{8} \sum_{n_1 n_2 n_3=-\infty}^{\infty} f(n_1, n_2, n_3). \quad (4.7)$$

С помощью формулы суммирования Пуассона сумма по дискретным переменным сводится к интегралу по непрерывным:

$$\begin{aligned} \sum_{n_1 n_2 n_3=-\infty}^{\infty} f(n_1, n_2, n_3) &= \int d^3 n f(\mathbf{n}) \sum_{m_1 m_2 m_3=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i \mathbf{mn}) = \\ &= \int d^3 n f(\mathbf{n}) \left[ 1 + \sum_{m_1 m_2 m_3=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i \mathbf{mn}) \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь  $\mathbf{mn}$  — скалярное произведение двух трёхмерных векторов, вектора  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$  с дискретными компонентами и вектора  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  — с непрерывными.

Первый член в этом выражении является членом суммы для вектора  $\mathbf{m} = 0$ . Он полностью совпадает с интегралом (4.5) для  $u'$  с введённым в него формфактором. Поэтому в разности  $u - u' = \Delta u$  этот член исчезает:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\pi \hbar c}{8V} \left( -\frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \times \\ &\quad \times \left[ \sum_{m_1 m_2 m_3=-\infty}^{\infty} \int d^3 n \exp(-\alpha k_{n_1 n_2 n_3} + 2\pi i \mathbf{mn}) - \right. \\ &\quad \left. - 3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int dn \exp(-\alpha k_n + 2\pi i mn) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Производная  $(-\partial/\partial \alpha)$  использована для упрощения подынтегральных функций у тройного  $I_3$  и однократного  $I_1$  интегралов в (4.9) — у них исчезли множители  $k_{n_1 n_2 n_3} = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2}/L$  и  $k_n = \sqrt{n^2}/L$ .

Тройной интеграл в сферической системе координат, где  $m$  и  $n$  — абсолютные значения векторов  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$ , после интегрирования по углам сводится к табличному (см. [43, 44])

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{2}{m} \int_0^{\infty} dn n \exp\left(-\frac{\alpha n}{L}\right) \sin(2\pi mn) = \\ &= \frac{1}{2\pi^3 L} \frac{\alpha}{((\alpha/2\pi L)^2 + m^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

После дифференцирования по  $\alpha$  и перехода к пределу  $\alpha \rightarrow 0$  получим

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( -\frac{\partial}{\partial \alpha} \right) I_3 &= -\frac{1}{2\pi^3 L (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^{1/2}}, \quad \mathbf{m}^2 \neq 0, \\ &= \frac{24\pi}{L} \left( \frac{L}{\alpha} \right)^4, \quad \mathbf{m}^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

конечный и сингулярный члены, входящие в  $\Delta u$  и  $u'$  соответственно. Однократный интеграл в (4.9) также сводится к табличному (см. [43, 44])

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int_0^\infty dn \exp\left(-\frac{\alpha n}{L}\right) \cos(2\pi m n) = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi^2 L \left[ (\alpha/2\pi L)^2 + m^2 \right]} \end{aligned}$$

и после дифференцирования по  $\alpha$  и перехода к пределу  $\alpha \rightarrow 0$  получим конечный и сингулярный члены

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( -\frac{\partial}{\partial \alpha} \right) I_1 &= -\frac{1}{2\pi^2 L m^2}, \quad m \neq 0, \\ &= \frac{2}{L} \left( \frac{L}{\alpha} \right)^2, \quad m = 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

входящие в  $\Delta u$  и  $u'$  соответственно.

В результате изменение плотности нулевой энергии внутри кубического резонатора равно

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\pi \hbar c}{8VL} \left[ -\frac{1}{2\pi^3} \sum_{m_1 m_2 m_3 = -\infty}^{\infty} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^{-2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right] = \\ &= \frac{\pi \hbar c}{16VL} \left[ 1 - \frac{1}{\pi^3} \sum_{m_1 m_2 m_3 = -\infty}^{\infty} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^{-2} \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Полезно привести расходящуюся при  $\alpha \rightarrow 0$  плотность  $u'$  энергии вакуума, исчезнувшую из конечного выражения для сдвига  $\Delta u$ :

$$u' = \frac{\pi \hbar c}{8VL} \left( 24\pi \left( \frac{L}{\alpha} \right)^4 - 6 \left( \frac{L}{\alpha} \right)^2 \right), \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (4.13)$$

Таким образом, сдвиг энергии нулевых колебаний электромагнитного поля кубическим резонатором представлен в виде [19]

$$\begin{aligned} E_L &= \alpha_L \frac{\hbar c}{L}, \\ \alpha_L &= \frac{\pi}{16} \left[ 1 - \frac{1}{\pi^3} \sum_{m_1 m_2 m_3}^{\infty} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^{-2} \right], \\ \alpha_L &= 0,0916574\dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

Это значение было подтверждено Мамаевым и Труновым [24] вычислением сдвига среднего значения  $T_{00}$ -компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля в вакууме.

Приведём аналогичное выражение сдвига нулевой энергии флуктуаций электромагнитного поля сферическим резонатором радиуса  $r$ , найденное впервые Бойером [18],

$$E_B = \alpha_B \frac{\hbar c}{2r}, \quad \alpha_B = 0,0923531. \quad (4.15)$$

Найденная Бойером постоянная  $\alpha_B = 0,09$ , оказавшаяся, вопреки ожиданиям Казимира [45], положительной, впоследствии была уточнена Дэвисом [20], Балианом и Дюплантье [21], Милтоном, Де Раадом и Швингером [22]. Приведённое в (4.15) численное значение получено в последней работе. Аналитическое выражение для  $\alpha_B$ , найденное в этой работе, не столь прозрачно, как для кубического резонатора.

Безразмерные постоянные  $\alpha_B$  и  $\alpha_L$  являются важнейшими пуанкаре-инвариантными характеристиками нулевых колебаний электромагнитного поля в вакууме, измеряемыми сферическим и кубическим резонаторами. Если  $L = 2r$  (куб описывает сферу), то  $E_B$  и  $E_L$  различаются только постоянными  $\alpha_B$  и  $\alpha_L$ .

В связи с приведёнными результатами возникают несколько вопросов.

1. Правильно ли величины  $\hbar c/2r$  и  $\hbar c/L$ , имеющие разомерность энергии, передают масштаб ожидаемых сдвигов нулевой энергии электромагнитного поля в сферическом и кубическом резонаторах? Мы приведём физические и геометрические аргументы в пользу приведённых масштабов для резонаторов, оболочки которых описывают сферу. Для кубического и сферического резонаторов это означает, что  $L = 2r$ .

2. Почему параметры  $\alpha_L$  и  $\alpha_B$ , не зависящие от размеров резонаторов, так слабо зависят от формы резонаторов — относительное различие  $\alpha_L$  и  $\alpha_B$  меньше 0,8 %?

3. Почему значения  $\alpha_L$  и  $\alpha_B$  более чем на порядок меньше тех значений, которые следуют для наименьших (основных) собственных частот кубического и сферического резонаторов? Каждой собственной частоте резонатора, оболочка которого описывает сферу, можно сопоставить безразмерное число  $k_{Nr}$ :

$$\omega_N = ck_N = (k_{Nr}) \frac{c}{r}, \quad \frac{1}{2} \hbar \omega_N = (k_{Nr}) \frac{\hbar c}{2r}.$$

Для сферического резонатора основной частоте соответствует число  $k_{min}r = 2,74$  ( $E_{110}$ -мода). Для кубического резонатора ( $L = 2r$ ) — число  $k_{min}r = 2,22$  ( $E_{110}$ -мода) (см. [46, § 90] или [47, 48]). Ясно, что физический смысл  $\alpha_B$  и  $\alpha_L$  совсем другой.

На основной и других собственных частотах резонаторы возбуждаются *внешним* источником, подводящим к ним электромагнитную энергию. Спектр колебаний возбуждённого резонатора отражает спектр частот источника, но при этом особенно выделены те частоты, которые близки к собственным частотам резонатора.

В нашем случае резонатор возбуждается за счёт появления избытка энергии вакуума в его полости при сборке резонатора — за счёт "сгребания" энергии и подчинения несущего её поля граничным условиям на идеально проводящей оболочке.

Заметим, что для цилиндрического резонатора с радиусом  $r$  и длиной образующей  $L = 2r$  основные частоты  $E$  и  $H$  мод очень близки:  $k_{min}r = 2,420$  для  $H_{111}$ -моды и  $k_{min}r = 2,405$  для  $E_{010}$ -моды, см. [47, 48]. Таким образом, все приводимые значения основных частот и их обезразмеренные значения  $k_{min}r$  для этих трёх резонаторов, описывающих сферу, одного порядка, растут при переходе от кубического резонатора к цилиндрическому и от цилиндрического к сферическому, и более чем на порядок превосходят значения параметров  $\alpha_L$  и  $\alpha_B$ . Ясно, что физический смысл параметров  $\alpha_L$  и  $\alpha_B$  совсем другой.

Для анализа  $\Delta u$  удобно вернуться к плотности  $u$  и представить её в виде

$$u = \frac{\pi\hbar c}{8VL} \left\{ 24\pi \left( \frac{L}{\alpha} \right)^4 - \frac{1}{2\pi^3} \sum_{m_1 m_2 m_3 = -\infty}^{\infty} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^{-2} - 3 \left[ 2 \left( \frac{L}{\alpha} \right)^2 - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^{-2} \right] \right\}. \quad (4.16)$$

В первой строке представлен вклад в плотность энергии *всех мод*, в том числе мод, распространяющихся вдоль рёбер резонатора, точнее, вдоль осей  $x, y, z$  декартовой системы. Этот вклад состоит из двух членов, приведённых в (4.10): основного вклада всех мод и частот, растущего как  $\omega^4$  с частотой обрезания  $\omega \sim c/\alpha \rightarrow \infty$ , и низкочастотного, конечного вклада всех мод с частотами от нуля до основной частоты  $\sim c/L$  резонатора. Эти частоты не являются собственными частотами резонатора и поэтому на этот конечный низкочастотный вклад понижается плотность внутри резонатора по сравнению с плотностью  $u'$  вне его. Но основной вклад, содержащий наравне с собственными модами несобственные, завышает истинную плотность внутри резонатора. Это завышение убирает вклад второй строки.

Вторая строка содержит вклад мод, распространяющихся вдоль осей  $x, y, z$  и не являющихся собственными модами объёмного резонатора. Он представляет собой вклад собственных мод трёх одинаковых одномерных резонаторов длины  $L$ , расположенных вдоль осей  $x, y, z$ . Вклад каждого из них состоит из двух членов (4.11): основного члена, растущего как  $\omega^2$ , обрезанного на частоте  $\sim c/\alpha \rightarrow \infty$ , а также конечного вклада мод с частотами от нуля до основной частоты  $\pi c/L$  одномерного резонатора. Этот вклад вычитается из основного, потому что низкие частоты не являются собственными модами одномерного резонатора длины  $L$ . Но так как они являются собственными частотами одномерного резонатора длины  $L' \rightarrow \infty$ , то низкочастотный конечный вклад одномерных мод уменьшает основной вклад второй строки. Таким образом, во второй строке (4.16) представлен вклад одномерных мод с частотами от основной  $\sim \pi c/L$  до частоты обрезания  $c/\alpha \rightarrow \infty$  и отрицательный вклад одномерных низкочастотных мод с  $\omega \lesssim \pi c/L$ . Так как одномерные моды не являются собственными модами объёмного резонатора, весь вклад второй строки вычитается из вклада первой строки. При этом расходящийся вклад одномерных мод с частотами от основной частоты  $\sim \pi c/L$  до частоты обрезания  $\sim c/\alpha \rightarrow \infty$  уменьшает основной, расходящийся вклад первой строки, а конечный вклад низкочастотных  $\omega \lesssim \pi c/L$  одномерных мод увеличивает плотность энергии объёмного резонатора.

Всё это демонстрируется в представлении (4.16) для плотности  $u = u' + \Delta u$ , где  $u'$  представлено формулой (4.13) с сильно расходящимся основным членом и уменьшающим его, слабее расходящимся членом.

Аналогично,  $\Delta u$  представлено в (4.12) положительным членом — суммой одномерных *низкочастотных* мод, сводящейся к удвоенному значению дзета-функции Римана  $\zeta(s)$  в точке  $s = 2$ , и отрицательным членом — тройной суммой всех *низкочастотных* мод, сводящейся к частному значению дзета-функции Эпштейна  $Z_p(s)$  при  $s = 1 + 1/p, p = 3$  [49, § 17.9].

## 5. Представление сдвига плотности энергии в кубическом резонаторе дзета-функциями Римана и Эпштейна

Этому, только что полученному в конце раздела 4, очень поучительному представлению  $\Delta u$ :

$$\Delta u = \frac{\pi\hbar c}{16VL} \left[ \frac{6}{\pi^2} \zeta(2) - \frac{1}{\pi^3} Z_3 \left( \frac{4}{3} \right) \right], \quad (5.1)$$

мы уделим специальное внимание. Оно возникло бы, если бы мы не вводили обрезающий формфактор в функцию  $f(n_1, n_2, n_3)$ , но по-прежнему пожелали бы использовать формулу суммирования Пуассона. Тогда для  $\Delta u$  вместо (4.9) мы получили бы выражение

$$\Delta u = \frac{\pi\hbar c}{8VL} \left[ \sum_{m_1 m_2 m_3 = -\infty}^{\infty} \int d^3 n \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \exp(2\pi i \mathbf{mn}) - 3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int dn \sqrt{n^2} \exp(2\pi i mn) \right], \quad (5.2)$$

которое согласно Пуассону тождественно равно разности тройной и трёх одномерных расходящихся сумм:

$$\Delta u = \frac{\pi\hbar c}{8VL} \left[ \sum_{m_1 m_2 m_3 = -\infty}^{\infty} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} - 3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sqrt{m^2} \right]. \quad (5.3)$$

Согласно Эпштейну расходящаяся сумма в пространстве  $p$  измерений

$$\sum_{n_1 n_2 \dots n_p = -\infty}^{\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^p n_i^2} = -\frac{1}{2\pi} \pi^{-(1/2)(1+p)} \Gamma\left(\frac{1}{2}(1+p)\right) \times \sum_{m_1 m_2 \dots m_p = -\infty}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^p m_i^2 \right)^{-(1/2)(1+p)} \quad (5.4)$$

равна отрицательной сходящейся сумме.

Для  $p = 1$  и  $p = 3$  имеем знакомые выражения (см. (4.12))

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{n^2} = -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^{-2}, \quad (5.5)$$

$$\sum_{n_1 n_2 n_3 = -\infty}^{\infty} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = -\frac{1}{2\pi^3} \sum_{m_1 m_2 m_3 = -\infty}^{\infty} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^{-2}.$$

Разность расходящихся сумм, тройной и трёх одномерных, заведомо положительна. Поэтому положительна и соответствующая разность сходящихся сумм, т.е.  $\Delta u > 0$  (см. (4.12)).

Обратим внимание на то, что первая строчка (5.5) есть не что иное, как связь между конечным значением дзета-функции Римана  $\zeta(s)$ ,

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1, \quad (5.6)$$

в точке  $s = 2$  с расходящейся суммой, наивно полученной из представления Дирихле (5.6) для точки  $s = -1$ , не принадлежащей области  $\operatorname{Re} s > 1$ . Физики называли бы

это значение нерегуляризованным. Обозначим его  $\tilde{\zeta}(-1)$ . Однако, согласно высшей математике, дзета-функция Римана, как аналитическая функция  $s$  с полюсом в точке  $s = 1$ , подчиняется функциональному уравнению [49, § 17.7],

$$\zeta(1-s) = \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s), \quad (5.7)$$

аналитически связывающему её значения в точках  $s$  со значениями в точках  $1-s$ . Поэтому утверждение первой строки (5.5) эквивалентно регуляризации суммы  $\tilde{\zeta}(-1)$  — устранению у неё расходимости и сведению её к конечному значению  $\zeta(-1)$ :

$$\tilde{\zeta}(-1) \rightarrow \zeta(-1) = -\frac{1}{2\pi^2} \zeta(2).$$

Дзета-функция Эпштейна определяется  $p$ -кратной суммой [49],

$$Z_p(s) = \sum_{m_1 m_2 \dots m_p = -\infty}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^p m_i^2 \right)^{-(1/2)ps}, \quad \operatorname{Re} s > 1. \quad (5.8)$$

Для  $p = 1$  она совпадает с удвоенной дзета-функцией Римана. Будучи целой функцией  $s$  с полюсом в точке  $s = 1$ ,  $Z_p(s)$  подчиняется функциональному уравнению

$$Z_p(1-s) = \frac{\pi^{(1/2)p(1-s)} \Gamma((1/2)ps)}{\pi^{(1/2)ps} \Gamma((1/2)p(1-s))} Z_p(s), \quad (5.9)$$

аналитически связывающему её значения в точках  $s$  и  $1-s$ .

В формуле (5.4) приведена связь расходящейся суммы, наивно полученной из представления (5.8) для значения  $s = -1/p$  вне области  $\operatorname{Re} s > 1$ , с конечным значением  $Z_p(-1/p)$ , определяемым функциональным уравнением (5.9). Обозначим эту расходящуюся сумму как  $\tilde{Z}_p(-1/p)$ . Тогда формулу (5.4) можно рассматривать как регуляризацию суммы  $\tilde{Z}_p(-1/p)$  — устранение у неё расходимости и сведение её к конечному значению  $Z_p(-1/p)$ , равному правой части (5.4) согласно функциональному уравнению (5.9).

Резюмируем сказанное выше. Ряд  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sqrt{m^2}$  в (5.3), представленный в виде  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} (\sqrt{m^2})^{-s}$ , расходится в точке  $s = -1$ , но удвоенная дзета-функция Римана, определённая этим рядом для  $s > 1$ , будучи аналитически продолженной в точку  $s = -1$ , имеет конечное значение, приведённое в (5.5).

Аналогично, ряд

$$\sum_{m_1 m_2 m_3 = -\infty}^{\infty} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$$

в (5.3), представленный в виде

$$\sum_{m_1 m_2 m_3 = -\infty}^{\infty} \left( \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \right)^{-3s},$$

расходится в точке  $s = -1/3$ , но дзета-функция Эпштейна  $Z_3(s)$ , определённая этим рядом для  $s > 1$  (см. (5.8)), будучи аналитически продолженной в точку  $s = -1/3$ , имеет конечное значение, приведённое в (5.5).

Таким образом, один и тот же конечный результат для  $\Delta u$ , приведённый в (4.12) и (5.1), можно получить двумя различными методами.

Введением в плотность  $u$  обрезающего высокие частоты формфактора и отбрасыванием расходящейся части, зависящей от длины волны обрезания  $\alpha \rightarrow 0$ . При этом утверждается (см., например, книгу [25]), что конечный результат не зависит от выбора обрезающей функции и её явное введение вообще излишне.

Косвенно это подтверждает другой метод устранения расходимостей из  $u$ , в котором члены линейно расходящегося ряда для  $u$  возводятся в отрицательную степень  $-ps$ , где  $s$  — параметр, а  $p$  — размерность пространства. В результате ряд становится сходящимся и определяет аналитическую функцию комплексного  $s$  в области  $\operatorname{Re} s > 1$ . Эта функция аналитически продолжима в окрестность значения  $s = -1/p$ , для которого исходный ряд расходился. Однако значение аналитически продолженной функции в точке  $s = -1/p$  конечно и является искомым результатом.

Бойер [26] связывает независимость от высокочастотного обрезания сил, действующих на проводящие тела, с векторным характером электромагнитного поля, ответственного за наблюдаемые явления. Подобного мнения придерживается, как мы увидим, и Лукош [27].

Де Витт [42], не соглашаясь с Бойером, показывает, что безмассовое скалярное поле в вакууме также приводило бы к наблюдаемым давлениям на ограничивающие его стенки, если принять, что на границе оно обращается в нуль, и если использовать конформно-инвариантное скалярное поле с нулевым следом тензора энергии-импульса.

Независимо от того, существует ли в Природе безмассовое скалярное поле или оно полезно лишь теоретикам для обнаружения симметрийных связей между наблюдаемыми физическими величинами, ясно, что конформная инвариантность квантовой теории безмассовых полей (со спином 1 и 0 в частности) таит в себе ещё не вполне понятую информацию, как и тесно связанная с ней аналитичность функций, описывающих эти наблюдаемые величины.

Вместе с тем утверждается (см. статью И.Т. Тодорова [50]), что в области, где импульсы всех частиц много больше их массы, квантовая теория поля становится конформной теорией поля при условии, что эффективный заряд с ростом импульсов стремится к конечному значению.

Автор настоящей статьи разделяет это мнение.

Бойер и Лукош рассматривают электромагнитное поле в полости резонатора с идеально проводящими стенками. Такое поле удовлетворяет уравнениям Максвелла с граничными условиями (4.2), которые требуют, чтобы поле было набором монохроматических волн с собственными частотами резонатора. Будучи решением уравнений Максвелла, такое поле конформно инвариантно.

Де Витт обращает внимание на то, что конечные эффекты давления на стенки резонатора появятся и в 4-мерной конформно инвариантной теории скалярного безмассового поля. В этой теории лагранжиан вместо квадрата массы содержит скалярную кривизну Риччи:  $m^2 \rightarrow \xi R$ ,  $\xi$  — безразмерный параметр, зависящий от размерности пространства-времени. В этом случае тензор энергии-импульса, полученный варьированием лаг-

ранжиана по метрике, даже в пределе нулевой кривизны содержит члены, зависящие от  $\xi$ , и его след в 4-мерной теории равен нулю только при  $\xi = 1/6$ .

Однако в этой и предыдущих работах автора используется дуальность 4-мерной электродинамики и 2-мерной теории безмассового скалярного поля, в которой  $\xi = 0$  и след тензора энергии-импульса равен нулю. Конформная инвариантность 2-мерной теории скалярного безмассового поля с нулевым граничным условием на мировой линии точечного зеркала хорошо известна (см. [51, § 4.4]). Конформная инвариантность 4-мерной электродинамики с током точечного заряда на той же мировой линии, что и зеркало, следует из дуальности этих двух теорий, по крайней мере в отношении полей излучения. Конформная инвариантность уравнений Максвелла доказана Г. Бейтманом в 1909 году (см. [40, § 9]).

## 6. Содержательная близость значений $\alpha_L$ , $\alpha_B$ и $\alpha/\alpha_0 = 4\pi\alpha$ , полученных непертурбативными методами

В статье [8] автор обратил внимание на то, что значение  $\alpha_0 = 1/4\pi$  постоянной тонкой структуры точечного затравочного заряда, полученное в работах [2–9] чисто геометрическим, непертурбативным методом, тесно связано с параметрами  $\alpha_B$  и  $\alpha_L$ , характеризующими сдвиги  $E_B$  и  $E_L$  энергии нулевых колебаний электромагнитного поля в сферическом и кубическом резонаторах. В самом деле, конечное значение  $\alpha_0 = 1/4\pi$  приводит к конечному значению перенормировочного фактора Дайсона  $Z_3 \equiv \alpha/\alpha_0 = 4\pi\alpha$ , который находится в узком интервале

$$\alpha_L < Z_3 \equiv \frac{\alpha}{\alpha_0} = 4\pi\alpha < \alpha_B \quad (6.1)$$

между значениями  $\alpha_L$  и  $\alpha_B$ , малыми по сравнению с 1:

$$\alpha_L = 0,0916574, \quad \alpha_B = 0,0923531. \quad (6.2)$$

Как уже упоминалось, значения  $\alpha_L$  и  $\alpha_B$  различаются меньше чем на 0,8 %, а значения  $\alpha_L$  и  $\alpha/\alpha_0$  — меньше чем на 0,05 %.

Так как все три величины,  $\alpha_L$ ,  $\alpha_B$  и  $\alpha/\alpha_0 \equiv Z_3 \ll 1$ , имеют непосредственное отношение к флуктуациям электромагнитного поля  $A(x)$  и тока  $j_\mu(x)$  в вакууме, то такую близость этих величин вряд ли можно считать случайной. Более того, эта близость лишь подтверждает, что конечное значение  $\alpha_0 = 1/4\pi$  правильно, как и тот непертурбативный метод, которым оно было получено. Заметим также, что параметры  $\alpha_L$  и  $\alpha_B$  также были найдены без какого-либо использования теории возмущений.

Поскольку  $Z_3 = e^2/e_0^2$  имеет физический смысл обратной диэлектрической проницаемости вакуума, то соотношение (6.1) придаёт параметрам  $\alpha_L$  и  $\alpha_B$  смысл приближённых значений обратной диэлектрической проницаемости, определяемых кубическим и сферическим резонаторами.

Переписывая формулу (6.1) через чисто геометрические величины

$$\alpha_0\alpha_L = \frac{1}{137,101}, \quad \alpha_0\alpha_B = \frac{1}{136,069}, \quad (6.3)$$

полученные непертурбативными и не связанными между собой методами, получаем ограничение на постоянную

тонкой структуры  $\alpha = 1/137,036$ :

$$\alpha_0\alpha_L < \alpha < \alpha_0\alpha_B. \quad (6.4)$$

Аналитическое выражение  $\alpha_0\alpha_L$ , которое численно отличается от экспериментального  $\alpha$  меньше чем на 0,05 %, таково:

$$\alpha_0\alpha_L = \frac{1}{4\pi} \frac{\pi}{16} \left[ 1 - \frac{1}{\pi^3} \sum_{m_1 m_2 m_3 = -\infty}^{\infty} (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^{-2} \right]. \quad (6.5)$$

Значение появившейся здесь суммы (дзета-функции Эпштейна) равно 16,53231596... [19]. Эта формула для  $\alpha_0\alpha_L$  невольно приводит к мысли, что Дирак не так уж неправ.

При выводе формулы (6.5) использовались дзета-функции Эпштейна для трёхмерного и одномерного пространств. Замечательные аналитические свойства функций Эпштейна позволяют свести расходящиеся ряды к имеющим физический смысл сходящимся рядам (см. функциональное уравнение (5.9) и его частный случай (5.7)).

В связи с приведёнными качественными и количественными связями величин  $\alpha_L$ ,  $\alpha_B$  и  $\alpha/\alpha_0$  возникают следующие вопросы:

1. Почему параметры  $\alpha_L$  и  $\alpha_B$  так слабо зависят от формы резонаторов?
2. Почему  $\alpha_L$  меньше  $\alpha_B$ ?
3. Почему  $Z_3 \equiv \alpha/\alpha_0 = 4\pi\alpha$  ближе к  $\alpha_L$ , чем к  $\alpha_B$ ?

Кубический и сферический резонаторы, несмотря на различие их форм, при  $L = 2r$  характеризуются одним и тем же топологическим инвариантом — отношением поверхности к объёму,

$$\frac{S}{V} = \frac{3}{r}. \quad (6.6)$$

Этим глобальным геометрическим инвариантом обладают все многогранники, описывающие сферу (см. [9]). Однако небольшое различие коэффициентов  $\alpha_L$  и  $\alpha_B$  всё же вызвано тем, что подчинение нулевых флуктуаций электромагнитного поля одним и тем же локальным граничным условиям на проводящих оболочках куба и сферы требует разной затраты энергии при образовании этих резонаторов.

В связи с этим параметр  $\alpha_L$  оказывается меньшим, чем  $\alpha_B$ , потому что выполнение граничных условий суперпозицией плоских волн с взаимно ортогональными векторами  $E$ ,  $H$  и  $[EH]$  на ортогональных смежных гранях куба требует меньшей энергии, чем их реализация на поверхности сферы.

К обсуждению этих вопросов мы ещё вернёмся в заключении.

## 7. Связь параметров $\alpha_{B,L}$ с $Z_3$ -фактором Дайсона — отношением квадратов физического и затравочного зарядов

В этом разделе мы постараемся качественно объяснить, почему изменение энергии нулевых колебаний электромагнитного поля внутри резонатора с идеально проводящими стенками пропорционально перенормированному множителю  $Z_3$ . Для этой цели используем изложенный выше формализм операторной теории поля для описания квантово-механических флуктуаций электромагнитного поля в вакууме. Поскольку средние значения операторов поля и тока в вакууме равны нулю,

можно ожидать, что средние вакуумные значения квадратов этих операторов отличны от нуля и могут быть характеристиками вакуумных флуктуаций. Действительно, можно показать, что квадратичные флуктуации поля  $\mathbf{A}(x)$  и тока  $j(x)$  в вакуумном состоянии не обращаются в нуль, а обращаются в бесконечность (см. [36, § 7]).

Для того чтобы избежать подобных расходимостей, рассмотрим не сам оператор  $\mathbf{A}(x)$ , а его среднее значение

$$\bar{\mathbf{A}} = L^{-3} \int_V d^3x \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (7.1)$$

в некотором пространственном объёме  $L^3$  и средний квадрат флуктуации  $i$ -й компоненты этого среднего значения  $\bar{A}_i$ :

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \bar{A}_i)^2 \rangle &= \langle (\bar{A}_i - \langle \bar{A}_i \rangle)^2 \rangle = \\ &= L^{-6} \int_V d^3x d^3x' \langle A_i(\mathbf{x}, t) A_i(\mathbf{x}', t) \rangle. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Обратим внимание на то, что поскольку  $\bar{A}_i$  есть среднее по объёму, то время  $t$  в произведении двух одних и тех же средних  $\bar{A}_i \bar{A}_i$  одно и то же, как и индекс  $i$ . Это непрерывный и дискретный параметры пространственного интеграла  $\bar{A}_i$ .

Используя теперь вакуумное среднее (2.1) и формулы (2.2), (2.3) при  $\mu = v = i, i = 1, 2, 3$ , получаем спектральное представление суммы вакуумных средних:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \langle A_i(\mathbf{x}, t) A_i(\mathbf{x}', t) \rangle &= \\ &= \hbar c \int_0^\infty dm^2 \int \frac{d^3p \exp[i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')]}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} 2B(m^2). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Здесь использовано то, что сумма

$$\sum_{i=1}^3 A_{ii}^R(p) = 2B(m^2) \quad (7.4)$$

не зависит от  $p$ . Оставшийся в (7.3) интеграл по пространству импульсов совпадает с реальной частью положительно-частотной функции Грина и с функцией  $(1/2)\mathcal{A}^1(z, m)$  (элементарной функцией Адамара) для  $z^2 > 0$ :

$$\int \frac{d^3p \exp(i\mathbf{p}\mathbf{z})}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} = \text{Re } \mathcal{A}^{(+)}(z, m) \Big|_{z^0=0} = \frac{1}{2} \mathcal{A}^1(z, m) \Big|_{z^0=0}. \quad (7.5)$$

Функция Адамара является мнимой частью причинной функции Грина (2.11) и при  $z^2 > 0$  выражается через функцию Макдональда, а при  $z^2 < 0$  — через функцию Неймана:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{A}^1(z, m) &= \frac{m K_1(m\sqrt{z^2})}{4\pi^2 \sqrt{z^2}}, \quad z^2 > 0, \\ &= \frac{m N_1(m\sqrt{-z^2})}{8\pi \sqrt{-z^2}}, \quad z^2 < 0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Оба представления при  $m = 0$  сводятся к функции

$$\frac{1}{2} D^1(z) = \frac{1}{4\pi^2 z^2}, \quad (7.7)$$

выделяющей из представлений (7.6) основную сингулярность вблизи светового конуса  $z^2 = 0$ :

$$\frac{1}{2} \mathcal{A}^1(z, m) = \frac{1}{4\pi^2 z^2} + \frac{m^2}{8\pi^2} \ln \frac{m\sqrt{|z^2|}}{2} + \dots, \quad m\sqrt{|z^2|} \ll 1.$$

Таким образом, согласно (7.2) и (7.3) сумма среднеквадратичных флуктуаций компонент среднего по объёму  $V = L^3$  поля  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  такова:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \langle (\Delta \bar{A}_i)^2 \rangle &= \hbar c \int_0^\infty dm^2 B(m^2) \times \\ &\times L^{-6} \int_V \frac{d^3x d^3x'}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2} \frac{m\sqrt{z^2}}{2\pi^2} K_1(m\sqrt{z^2}) = \\ &= \hbar c \left\{ B_0 \frac{L^{-6}}{2\pi^2} \int_V \frac{d^3x d^3x'}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2} + \int_{0^+}^\infty dm^2 B_1(m^2) \times \right. \\ &\times \left. L^{-6} \frac{m^2}{2\pi^2} \int_V d^3x d^3x' \frac{K_1(m\sqrt{z^2})}{m\sqrt{z^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Здесь  $\mathbf{z}^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2$ .

Нас будет интересовать, конечно, первый член в фигурных скобках, пропорциональный  $B_0$  и чисто геометрической величине, зависящей только от размеров и формы объёма усреднения и по порядку величины равной  $L^{-2}$ . Вместе с множителем  $\hbar c$ , но без суммирования по поляризациям поля  $\mathbf{A}$ , она приведена в формуле (2.99) книги Тирринга [36]. Эта величина, однако, демонстрирует нам, что в рассматриваемом объёме электромагнитное поле представляет собой свободное безмассовое поле стоячей волны. Что же касается  $B_0$ , то это, как уже упоминалось ранее, вероятность образования фотона полем  $\mathbf{A}(x)$  из вакуума и, как всякая вероятность, она заключена между нулём и единицей.

Тирринг в своей книге [36] делает важное замечание относительно *усреднения по конечному объёму* флуктуирующих вакуумных полей.

"Однако все величины, обсуждавшиеся выше, не следует принимать слишком серьёзно, так как все они — это пространственные интегралы локальных переменных при точно фиксированном времени. Мы видели, что они обладают бесконечными среднеквадратичными флуктуациями. Поэтому их нельзя называть наблюдаемыми, ведь любой процесс измерения занимает какое-то время, и следует рассматривать локальные переменные проинтегрированными по некоторому пространственно-временному объёму с нерезкими границами. Чтобы сделать вакуумные флуктуации малыми, надо размазать границы объёма по области, большей чем  $\hbar/mc$ ."

Это замечание, казалось бы, можно отнести и к его формуле (2.99),

$$\langle (\Delta \bar{\mathbf{A}})^2 \rangle = \hbar c L^{-6} \int_V dV dV' \frac{1}{2} D^1(x - x') \sim \hbar c L^{-2},$$

для среднего квадрата вакуумных флуктуаций среднего значения электрического потенциала в пространственном объёме  $\sim L^3$ . Однако приведённый средний квадрат флуктуаций конечен, не зависит от времени, хотя найден лишь при  $t - t' = 0$ . Такой результат обязан чётности  $D^1(z)$  по  $z^\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ .

Заметим, что в формуле Тирринга приведена среднеквадратичная флуктуация *свободного* поля  $\mathbf{A}(x)$ , не

взаимодействующего с вакуумным током  $j_\mu(x)$ . Кроме того, она не просуммирована по двум поляризациям поля  $\mathbf{A}$ . Учёт взаимодействия и двух поляризаций эквивалентен умножению формулы Тирринга на  $2B_0$  и совпадению её с первым членом в (7.8).

Если объём усреднения  $V$  выбран в виде куба с ребром  $L$ , то чисто геометрическая в пространстве Минковского безразмерная величина

$$\frac{L^{-4}}{2\pi^2} \int_V \frac{d^3x d^3x'}{z^2} \equiv L^{-4} \int_V d^3x d^3x' D^1(z),$$

где  $z^2 = \mathbf{z}^2 - z_0^2$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ,  $z^0 = c(t - t')$ , элементарно представляется тройным интегралом

$$\frac{1}{2\pi^3} \int \frac{d^3\kappa}{\kappa} \left( \frac{\sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \sin \kappa_3}{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3} \right)^2 \cos \left( \frac{2z^0 \kappa}{L} \right), \quad \kappa = |\kappa|,$$

по переменным  $\kappa_i = k_i L/2$ ,  $i = 1, 2, 3$ , где  $k_i$  — компоненты волнового вектора  $\mathbf{k}$  в фурье-представлении функции  $D^1(z)$ .

В формуле (7.8) эта величина, умноженная на  $L^{-2}$ , фигурирует при  $z^0 = 0$ , когда косинус обращается в 1. Интеграл

$$R = \int \frac{d^3\kappa}{\kappa} \left( \frac{\sin \kappa_1 \sin \kappa_2 \sin \kappa_3}{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3} \right)^2 = 17,70$$

(С.Л. Лебедев, частное сообщение), так что  $(1/2\pi^3)R = 0,2854$ . Но и при  $|z^0| < L/2$  косинус мало меняет интеграл, в котором эффективны  $\kappa_i \sim 1$ . Усреднение по  $z^0$  в диапазоне  $-L/2 < z^0 < L/2$  заменяет косинус его средним значением

$$L^{-1} \int_{-L/2}^{L/2} dz^0 \cos \left( \frac{2z^0 \kappa}{L} \right) = \frac{\sin \kappa}{\kappa}.$$

Поскольку среднеквадратичная флуктуация среднего значения поля  $\mathbf{A}$  в объёме  $V$  конечна, выражение относительно её наблюдаемости отпадает.

Причина конечности рассматриваемой величины в том, что она выражена через чётную относительно замены  $z \rightarrow -z$  функцию  $D^1(z)$ . Этим уникальным свойством обладает причинная функция Грина

$$D_+(z) = \bar{D}(z) + \frac{i}{2} D^1(z),$$

мнимой частью которой является  $(1/2)D^1(z)$ . Поэтому  $D_+(z)$  и  $D_+(z, m)$  зависят только от  $z^2$ . Другие сингулярные функции зависят ещё от знака времени  $z^0$ . Например, перестановочная функция Паули–Йордана [52]

$$A(z, m) = 2\varepsilon(z^0) \bar{A}(z, m) = \int \frac{d^3p \exp(i\mathbf{p}\mathbf{z})}{(2\pi)^3 p^0} \sin(p^0 z^0)$$

из-за нечётности относительно замены  $z^0 \rightarrow -z^0$  обращается в нуль при  $z^0 = 0$ . Тогда, как инвариантная функция  $z^2$ , она равна нулю и во всей пространству-подобной области  $z^2 > 0$ .

Если вместо флуктуаций поля  $\mathbf{A}(x)$  рассмотреть флуктуации электрического поля  $\mathbf{E}(x) = -\partial\mathbf{A}/c\partial t$ , то для его среднего по объёму  $V$  значения приближённо можно считать  $\bar{\mathbf{E}} \approx (\omega/c)\bar{\mathbf{A}}$ , где  $\omega$  — некоторая эффективная частота флуктуаций полей  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{E}$  внутри объёма  $V$ . Она близка к  $cL^{-1}$ , так что  $\bar{\mathbf{E}} \sim L^{-1}\bar{\mathbf{A}}$ . В результате для среднеквадратичной флуктуации среднего значения поля

$E$  в объёме  $V$  получим

$$\sum_{i=1}^3 \langle (\Delta \bar{E}_i)^2 \rangle = \hbar c Z_3 \frac{L^{-8}}{2\pi^2} \int_V \frac{d^3x d^3x'}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2} + \dots \quad (7.9)$$

Здесь и ниже мы переходим к обозначениям  $Z_3$  и  $\rho(m^2)$  вместо швингеровских  $B_0$  и  $B_1(m^2)$ .

Чисто геометрический множитель, зависящий от формы объёма, теперь порядка  $L^{-4}$ . Полученную величину, имеющую размерность эрг см<sup>-3</sup>, можно считать (умножив на 1/2) плотностью энергии флуктуирующего электрического поля в объёме  $V$ . Такой же, очевидно, будет и плотность энергии флуктуирующего магнитного поля в объёме  $V$ , ведь  $\mathbf{H}(x) = \text{rot } \mathbf{A}(x)$ . Прямое доказательство равенства этих плотностей см. в [46, § 90].

Суммируя обе плотности и умножая на объём, получим выражение

$$\hbar c Z_3 \frac{L^{-5}}{2\pi^2} \int_V \frac{d^3x d^3x'}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2} \sim Z_3 \frac{\hbar c}{L} \quad (7.10)$$

для оценки энергии флуктуирующего электромагнитного поля в объёме  $V = L^3$ . Сравнивая эту энергию со сдвигом нулевой энергии электромагнитного поля в сферическом и кубическом резонаторах,

$$E_{B,L} = \alpha_{B,L} \frac{\hbar c}{L}, \quad (7.11)$$

видим, что независимо от формы объёма усреднения и формы объёма резонатора, коэффициенты  $\alpha_{B,L}$  пропорциональны  $Z_3$ . Это означает, что поразительная близость безразмерных коэффициентов  $\alpha_{B,L}$  к конечному значению  $4\pi\alpha$ , полученному автором для константы  $Z_3 = \alpha/\alpha_0 = 4\pi\alpha$  [8, 9], не случайна, а является следствием фундаментальных равновременных и неравновременных коммутационных соотношений взаимодействующих операторных полей. В частности, следствием спектрального представления Челлена–Лемана для точной функции Грина фотона.

Вернёмся теперь к формуле (7.10), представляющей собой оценку энергии флуктуирующего электромагнитного поля в объёме  $V$ , и запишем её для куба, используя найденное С.Л. Лебедевым значение интеграла

$$\frac{L^{-4}}{2\pi^2} \int_{L^3} \frac{d^3x d^3x'}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2} = \frac{R}{2\pi^3} = 0,2854.$$

Тогда формула (7.10) становится более конкретной:

$$\hbar c Z_3 \frac{L^{-5}}{2\pi^2} \int_{L^3} \frac{d^3x d^3x'}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2} = Z_3 \times 0,2854 \frac{\hbar c}{L}. \quad (7.12)$$

Поскольку полученное автором конечное значение  $Z_3 \equiv 4\pi\alpha$  очень близко к  $\alpha_{B,L}$ , то оцениваемая энергия (7.12) внутри куба с "размытыми границами" в 3,5 раза меньше точной энергии (7.11),

$$E_{B,L} = \alpha_{B,L} \frac{\hbar c}{L},$$

внутри сферического и кубического резонаторов с идеально проводящими стенками. Именно граничные условия (4.2) на проводящих границах определили спектры собственных колебаний электромагнитного поля внутри резонаторов, их собственные частоты, вырожденные

моды и другие особенности. Подчинение вакуумных флуктуаций граничным условиям потребовало работы внешних сил при образовании резонатора, увеличившей, согласно закону сохранения энергии, энергию нулевых колебаний поля *внутри резонатора* по сравнению с той, которая была в этом объёме в его отсутствие.

Звметим, что приближённая оценка энергии поля в *сферическом резонаторе* отличается от оценки (7.12) для кубического резонатора заменой числа 0,2854 числом  $0,2962 = (3/4\pi)(6/\pi)^{1/3}$ . Тогда правая часть (7.12) изменится на

$$Z_3 \cdot 0,2962 \frac{\hbar c}{L} = Z_3 \cdot 0,3675 \frac{\hbar c}{2r}, \quad (7.13)$$

так как обезразмеривающая длина  $L$  определяется кубическим корнем объёма:  $L = V^{1/3}$ .

Таким образом, приближённые оценки (7.12), (7.13) примерно втрое ниже точных значений энергии. Подчеркнём, что, в отличие от точного расчёта сдвига энергии нулевых колебаний в резонаторах, его приближённая оценка в том же объёме с "размытыми границами" не сталкивается с расходимостями и не нуждается в их устранении.

## 8. Сдвиг нулевой энергии электромагнитного поля в резонаторе как измеримая физическая величина

По поводу расчёта энергии Казимира Де Витт [42] пишет, имея в виду слой вакуума между двумя идеально проводящими параллельными плоскостями:

"Используя термодинамический закон (4.1) для давления в вакууме Казимира, я требовал, чтобы проводники двигались медленно. Если бы я допустил наличие некоторого заметного ускорения, то проводники стали бы излучать фотоны и энтропия внутри слоя стала бы возрастать. Вначале может показаться удивительным, что, ускоряя нейтральный проводник, можно рождать фотоны, однако каждый сразу же вспомнит, что поверхностные слои реального проводника несут токи. Свободные электроны вблизи поверхности взаимодействуют с квантовыми флуктуациями электромагнитного поля так же, как они взаимодействуют с классическим полем, и образуют (микроскопические. — ВР) токи именно такой величины, которые гарантируют стандартные (макроскопические. — ВР) граничные условия. Поскольку граничных условий достаточно для того, чтобы определить все (макроскопические. — ВР) физические явления вне проводника, то вообще нет необходимости ссылаться на токи, как это делалось сейчас".

Действительно, классических граничных условий на идеально проводящей оболочке резонатора достаточно, чтобы объяснить все физические процессы распространения и отражения электромагнитных волн внутри резонатора. Однако существует большая разница между возбуждением собственных частот резонатора, погружённого в поле внешнего классического источника, спектр и мощность которого всегда ограничены, и возбуждением собственных частот резонатора, погружённого в вакуум с постоянно флюктуирующими квантовым электромагнитным полем, спектр энергии которого

$$\frac{\hbar\omega}{2} \frac{V4\pi\omega^2 d\omega}{(2\pi c)^3} 2 \quad (8.1)$$

радикально отличается от спектра классических источников. Такой спектр привёл бы к расходящейся как  $\omega^4$  энергии внутри объёма  $V$  резонатора, если бы именно она была наблюдаемой величиной.

В действительности, наблюдаемой величиной является *изменение* нулевой энергии электромагнитного поля в резонаторе, вызванное появлением и многократным отражением электромагнитных волн от проводящих стенок резонатора во время его образования, как это описано в начале раздела.

В результате в собранном резонаторе появляется избыток нулевой энергии и давления по сравнению с их значениями в том же объёме в отсутствие резонатора.

Эти энергию и давление несут вполне реальные наблюдаемые электромагнитные стоячие волны, удовлетворяющие известным граничным условиям (4.2) благодаря самосогласованному взаимодействию с микротоками — токами смещения на идеально проводящей поверхности. Если волна, падающая на поверхность, имеет ненулевую тангенциальную составляющую электрического поля, то согласно уравнению Максвелла  $\text{rot } \mathbf{H} = -\partial \mathbf{E} / \partial t$  появляется нормальное к поверхности магнитное поле. В свою очередь, это магнитное поле согласно другому уравнению Максвелла  $\text{rot } \mathbf{E}' = -\partial \mathbf{H} / \partial t$  создаёт на проводящей поверхности противоположное электрическое поле  $\mathbf{E}' = -\mathbf{E}$ , а  $\partial \mathbf{E}' / \partial t$  — поле  $\mathbf{H}' = -\mathbf{H}$ , и условие (4.2) восстанавливается.

Фигурирующие здесь поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  суть не что иное, как поля  $\sqrt{Z_3} \mathbf{E}_{\text{in}}$ ,  $\sqrt{Z_3} \mathbf{H}_{\text{in}}$ , попавшие внутрь резонатора и ставшие реальными полями в результате адиабатического обжатия флуктуаций электромагнитного поля в вакууме при образовании резонатора. Они получили энергию за счёт работы обжимающих сил против сил светового давления. Специалисты по волноводам и объёмным резонаторам процесс появления этих несущих энергию волн называют "сгребанием" (компрессией) вакуумных флуктуаций (см. [53, 54]). Они связаны с взаимодействующими операторными полями асимптотическими условиями

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \begin{cases} \sqrt{Z_3} \mathbf{A}_{\text{in}} & \text{при } t \rightarrow \mp\infty, \\ \text{out} & \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\langle 0 | \mathbf{A}(\mathbf{x}) | p\lambda \rangle = \sqrt{Z_3} \langle 0 | \mathbf{A}_{\text{in}} & \text{out} (\mathbf{x}) | p\lambda \rangle,$$

и однозначно определяются матричными элементами этих полей между вакуумным и однофотонным состояниями (см. [34, §§ 111, 112], [35, § 5.1.2]).

Таким образом, изменение нулевой энергии электромагнитных колебаний в резонаторе стало наблюдаемой физической величиной. Вот что пишет по этому поводу Лукош [27]:

"Работа, требуемая для изменения размеров или формы полости, может быть измерена. Благодаря закону сохранения энергии она равна изменению сдвига нулевой энергии. Поэтому изменение сдвига нулевой энергии является наблюдаемой и, следовательно, конечной величиной. Однако полость должна быть физически реализуемой, по крайней мере, в принципе. Предполагаемая совершенная проводимость границы для всех частот представляется приемлемой экстраполяцией из опыта, не находящейся в противоречии с фундаментальными законами физики".

## 9. Заключение

Вернёмся здесь к вопросу о том, почему безразмерные параметры  $\alpha_B$  и  $\alpha_L$ , а вместе с ними и сами сдвиги  $E_B$  и  $E_L$  энергии нулевых колебаний электромагнитного поля в сферическом и кубическом резонаторах, так близки — их относительное различие меньше 0,8 % (см. (4.15) и (4.14)).

Так как радиус  $r$  сферического резонатора и ребро  $L$  кубического связаны соотношением  $L = 2r$ , то куб описывает сферу. Вместе с тем можно показать [9], что для любого многогранника, описывающего сферу, отношение площади  $S$  его поверхности к его объёму  $V$  точно такое же, как для самой сферы:

$$\frac{S}{V} = \frac{3}{r}. \quad (9.1)$$

Более того, эта формула распространяется и на урезанные конус и цилиндр, описывающие сферу. Поверхности этих фигур состоят из кусков нулевой гауссовой кривизны. Они гомеоморфны поверхности описываемой сферы и характеризуются топологическим инвариантом (9.1). Резонаторы с топологическим инвариантом (9.1) будем обозначать буквой  $\gamma$ .

При переходе от трёхмерного пространства к  $d$ -мерному для отношения общёенных  $S$  и  $V$  правую часть (9.1) нужно заменить на  $d/r$ . В частности, куб в  $d$ -мерном пространстве имеет  $2d$  граней площадью  $L^{d-1}$  каждая, так что  $S/V = 2dL^{d-1}/L^d = 2d/L = d/r$ .

Очень интересно найти многогранник  $\Gamma$ , описывающий сферу, идеально проводящая поверхность которого сдвигает энергию электромагнитных вакуумных флуктуаций на величину

$$E_\Gamma = \alpha_\Gamma \frac{\hbar c}{2r} \quad (9.2)$$

с параметром  $\alpha_\Gamma$ , как раз равным  $4\pi\alpha$ , т.е.  $\alpha_0\alpha_\Gamma = \alpha$ . Симметрия такой поверхности свидетельствовала бы об определённой собственной симметрии нулевых электромагнитных осцилляций в вакууме.

Каждый многогранник, описывающий сферу, помимо общего топологического инварианта (9.1), обладает своим собственным топологическим инвариантом — набором чисел  $f$  граней,  $e$  рёбер,  $v$  вершин, удовлетворяющих правилу Эйлера  $f - e + v = 2$ . Этот инвариант в паре с (9.1) характеризует класс эквивалентных отображений многогранника на сферу и его называют гомотопическим (см. § 1.3 в [57]).

К сожалению, до сих пор не рассчитан сдвиг энергии нулевых колебаний электромагнитного поля цилиндрическим резонатором, проводящая поверхность которого описывает сферу (цилиндр радиуса  $r$  с длиной образующей  $L = 2r$ ). Цилиндрический резонатор подробно рассматривал в своих лекциях Фейнман [55]. Более того, в книге [56] он заметил, что постоянная тонкой структуры может быть связана с нулями функций Бесселя.

Действительно, собственные частоты цилиндрического резонатора с оболочкой, описывающей сферу, определяются формулами (см. [48]):

$$\begin{aligned} \omega_{mn}^E &= \frac{c}{r} \sqrt{v_{mn}^2 + \left(\frac{\pi p}{2}\right)^2}, \\ \omega_{mn}^H &= \frac{c}{r} \sqrt{\mu_{mn}^2 + \left(\frac{\pi p}{2}\right)^2} \end{aligned} \quad (9.3)$$

для  $E$ - и  $H$ -волн. Здесь  $m, n, p$  — целые числа, а  $v_{mn}$  и  $\mu_{mn}$  — нули функций Бесселя и их производных:

$$J_m(v_{mn}) = 0, \quad J'_m(\mu_{mn}) = 0. \quad (9.4)$$

Не исключено, что цилиндрический резонатор с оболочкой, описывающей сферу, может оказаться тем самым резонатором  $\Gamma$ , в котором сдвиг энергии нулевых колебаний электромагнитного поля определяется формулой (9.2) с параметром  $\alpha_\Gamma$ , как раз равным  $4\pi\alpha$ .

Так как для любого резонатора  $\gamma$ , оболочка которого описывает сферу, отношение  $S/V = 3/r$ , то сдвиг  $E_\gamma$  энергии нулевых колебаний можно представить как работу внешних сил против силы избыточного давления внутри резонатора на длине  $r$ :

$$E_\gamma = \alpha_\gamma \frac{\hbar c}{2r} = \alpha_\gamma \frac{\hbar c}{6} \frac{S_\gamma}{V_\gamma} = \frac{E_\gamma}{3V_\gamma} S_\gamma r = p_\gamma S_\gamma r, \quad (9.5)$$

где  $p_\gamma = E_\gamma/3V_\gamma$  — разность давления внутри и вне резонатора.

Поскольку сдвиги энергии  $E_\gamma$  и давления  $p_\gamma$  нулевых флюктуаций электромагнитного поля внутри резонатора  $\gamma$  выражаются формулами

$$E_\gamma = \alpha_\gamma \frac{\hbar c}{2r}, \quad p_\gamma = \frac{E_\gamma}{3V_\gamma}, \quad (9.6)$$

то давление и объём резонатора  $\gamma$  связаны соотношением

$$p_\gamma V_\gamma^{4/3} = \frac{1}{3} \alpha_\gamma \left( \frac{V_\gamma}{V_L} \right)^{1/3} \hbar c, \quad V_L = L^3 = 8r^3, \quad (9.7)$$

подобным адиабате чёрного излучения:

$$p V^{4/3} = \frac{1}{4} \left( \frac{45}{4\pi^2} \right)^{1/3} S^{4/3} \hbar c = \frac{\pi^2}{45} \left( \frac{\pi^2 N}{2\zeta(3)} \right)^{4/3} \hbar c, \quad (9.8)$$

характеризующейся постоянством энтропии  $S$  и среднего числа фотонов  $N$  (см. [58, § 63]).

Аналогичную структуру имеет и адиабата ультралигативистского ферми-газа (см. [58, § 61]).

Аналогия формулы (9.7) с адиабатой чёрного излучения позволяет утверждать, что безразмерная постоянная в правой части (9.7) есть энтропия (в степени  $4/3$ ) нулевых колебаний электромагнитного поля внутри резонатора  $\gamma$ . Однако здесь она зависит от формы полости резонатора и конечна при нулевой температуре. Заметим, что отношение объёмов  $V_\gamma/V_L$  есть геометрическая константа для резонатора  $\gamma$ , оболочка которого описывает сферу. Так для куба, цилиндра и сферы это отношение равно  $1, \pi/4$  и  $\pi/6$ .

Адиабата (9.7), связывающая давление нулевых колебаний электромагнитного поля внутри резонатора  $\gamma$  с его объёмом, позволяет интерпретировать энергию  $E_\gamma$  нулевых колебаний поля внутри резонатора как работу  $\alpha_\gamma \hbar c / 2R$  при его образовании плюс работу  $E$  при его адиабатическом ( $dS = 0$ ) обжатии, уменьшающем радиус описываемой сферы от значения  $R$  до значения  $r$  при сохранении формы резонатора:

$$\begin{aligned} E &= \int_R^r dE = \int_R^r (T dS - p dV) = - \int_R^r p dV = \\ &= - \frac{1}{3} \alpha_\gamma \left( \frac{V_\gamma}{V_L} \right)^{1/3} \hbar c \int_R^r V_\gamma^{-4/3} dV_\gamma = \alpha_\gamma \frac{\hbar c}{2r} - \alpha_\gamma \frac{\hbar c}{2R}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Именно об этой работе *E* говорится в замечании Лукоша, приведённом выше.

В работах [2–8] была установлена дуальная связь между излучением фотонов *точечным* электрическим зарядом, ускоренным в  $3+1$ -пространстве, и рождением пар скалярных квантов ускоренным *точечным* зеркалом в  $1+1$ -пространстве.

Принципиальной основой дуальности служит связь между причинными функциями в  $d$ - и  $d-2$ -мерных пространствах Минковского:

$$\Delta_d^f(x, \mu) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mu^2}^{\infty} dm^2 \Delta_{d-2}^f(x, m), \quad d \geq 4. \quad (9.10)$$

Причинная функция подчиняется уравнению

$$(-\partial_x^2 + \mu^2) \Delta_d^f(x, \mu) = \delta_d(x) \quad (9.11)$$

и зависит только от инварианта  $x^2$ , что делает её чисто геометрическим объектом. В нашем случае  $d=4$  и функция  $\Delta_4^f(x, \mu)$  в левой части (9.10) описывает распространение частицы с массой  $\mu$ , принимающей одно любое, например, как угодно малое или даже нулевое значение. В правой части функция  $\Delta_2^f(x, m)$  описывает распространение "частицы" с массой  $m$ , принимающей все возможные значения в интервале  $\mu \leq m < \infty$ . Такой "частицей" оказывается пара из двух разлетающихся в противоположные стороны безмассовых частиц, удвоенные частоты которых совпадают с  $k_{\pm} = k^0 \pm k^1$  компонентами импульса фотона:  $2\omega = k_+$ ,  $2\omega' = k_-$ . Безмассность частиц, образующих массивную пару в  $1+1$ -пространстве, — принципиальная чисто геометрическая черта обсуждаемой дуальности.

Рассмотрим голографическую дуальную связь (9.10) причинных функций Грина для четырёхмерного и двумерного пространств:

$$\Delta_4^f(z, \mu) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mu^2}^{\infty} dm^2 \Delta_2^f(z, m), \quad (9.12)$$

$$\Delta_2^f(z, m) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \exp [im(z^1 \sinh \theta - |z^0| \cosh \theta)]. \quad (9.13)$$

Обе входящие в эту связь функции Грина являются инвариантными чисто геометрическими объектами. Они выражены через переменные  $z^\alpha$  с размерностью длины и параметры  $\mu, m$  с размерностью обратной длины. Параметр  $\mu$  будем считать как угодно малым.

Для времениподобной траектории заряда и зеркала

$$x^\alpha(\tau) = (x^1(\tau), x^0(\tau)), \quad \tau \text{ — собственное время}, \quad (9.14)$$

двумерный вектор  $z^\alpha = x^\alpha(\tau) - x^\alpha(\tau')$  времениподобен и лежит в  $(x, t)$ -плоскости четырёхмерного пространства Минковского, как и сама траектория  $x^\alpha(\tau)$ .

Если для такой траектории в формулах (9.12), (9.13) использовать времениподобный вектор  $z^\alpha$ , то  $\text{Im } \Delta_4^f(z, \mu)$  можно заменить выражениями

$$\begin{aligned} \text{Im } \Delta_4^f(z, \mu) &= \text{Re} \int d\omega_k \exp(i k_\alpha z^\alpha) = \\ &= \text{Re} \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{dm^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} \exp(ikz), \end{aligned} \quad (9.15)$$

в которых использованы переменные

$$k^0 = \omega + \omega' = m \cosh \theta, \quad k^1 = \omega - \omega' = m \sinh \theta, \quad (9.16)$$

характеризующие состояние фотона, излучённого зеркалом, и состояние пары скалярных квантов, излучённых зеркалом.

Приведём также инвариантные меры числа состояний фотона

$$d\omega_k = \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k^0} = \frac{dk_+ dk_-}{(4\pi)^2} \frac{d\varphi}{2\pi} \quad (9.17)$$

и числа состояний пары:

$$\frac{dk_+ dk_-}{(4\pi)^2} = \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} = \frac{dm^2 d\theta}{(4\pi)^2}. \quad (9.18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_+ &= k^0 + k^1 = 2\omega = me^\theta, \\ k_- &= k^0 - k^1 = 2\omega' = me^{-\theta}. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Заметим, что благодаря азимутальной симметрии угол  $\varphi$  является циклической переменной, от которой подынтегральные функции не зависят.

Умножим теперь выражение (9.15) на инвариантное произведение  $\dot{x}^\alpha(\tau) \dot{x}_\alpha(\tau')$  двумерных скоростей и проинтегрируем его по  $\tau, \tau'$ :

$$\begin{aligned} \iint d\tau d\tau' \dot{x}^\alpha(\tau) \dot{x}_\alpha(\tau') \text{Im } \Delta_4^f(z, \mu) &= \\ &= \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{dm^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{4\pi} |u^\alpha(k)|^2 = \\ &= \int \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} |\beta_{\omega'\omega}^B|^2 = \bar{N}^B. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Здесь чисто геометрический 2-вектор

$$u_\alpha(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \dot{x}_\alpha(\tau) \exp(-ikx(\tau)). \quad (9.21)$$

Квадрат модуля этого вектора совпадает с квадратом модуля  $\beta$ -коэффициента Боголюбова,

$$|u_\alpha(k)|^2 = |\beta_{\omega'\omega}^B|^2, \quad (9.22)$$

определенного спектральной плотностью пар скалярных квантов (кратко — бозе-пар), излучаемых зеркалом в  $1+1$ -пространстве (см. формулы (3.19), (3.21) в [8]). Заметим, что коэффициент Боголюбова  $\beta_{\omega'\omega}^B$  определяется скалярным произведением решений  $\phi_{\text{in}\omega}$  и  $\phi_{\text{out}\omega}$  волнового уравнения для безмассового скалярного поля (см. (2.9) в [8]), имеет размерность длины и является чисто геометрической величиной, зависящей от частот и параметров траектории, имеющих размерности степеней длины и времени. Это не удивительно, так как квантовая теория безмассового скалярного поля не содержит постоянной Планка.

Поскольку число состояний (9.19) бозонной пары тоже является геометрическим инвариантом, то определяемое последним интегралом в (9.20) полное среднее число  $\bar{N}^B$  бозе-пар, испущенных зеркалом со всей траектории за всё время, является безразмерным геометрическим инвариантным функционалом траектории зеркала. В то же время левая часть равенства (9.20) связана с пропагатором фотона в  $3+1$ -пространстве:

$$\text{Im} \iint d\tau d\tau' \dot{x}^\alpha(\tau) \dot{x}_\alpha(\tau') \Delta_4^f(z, \mu) = \int d\omega_k |u_\alpha(k)|^2, \quad (9.23)$$

и возникает желание сравнить её с полным средним числом  $\bar{N}^{(1)}$  фотонов, испущенных зарядом, движущимся по той же траектории, что и зеркало:

$$\bar{N}^{(1)} = \frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} W^{(1)} = \frac{1}{\hbar c} \int d\omega_k |j_z(k)|^2, \quad (9.24)$$

см. (3.2) в [8]. В нашем случае заряд обладает очень большим переданным импульсом (ускорением) и поэтому его можно считать точечным, неэкранированным. В этом состоянии его величина  $e_0$  больше величины  $e$  при малых переданных импульсах. Испускаемые им на бесконечность мягкие фотоны не влияют на траекторию заряда, которую можно считать заданной. Их распространение описывается пропагатором  $A_4^f(z, \mu)$ , а их полное среднее число  $\bar{N}^{(1)}$  и спектр — формулой (9.24), где  $j_z(k)$  — фурье-образ плотности тока заряда. Для совпадающих в  $(x, t)$ -плоскости траекторий  $x^z(\tau)$  заряда и зеркала фурье-образы 2-векторов плотности тока и скорости пропорциональны:  $j_z(k) = e_0 u_z(k)$ .

Тогда голограмический принцип квантования затравочного (точечного) заряда, сформулированный как требование совпадения полных средних чисел фотонов и бозе-пар, испущенных зарядом и зеркалом,  $\bar{N}^{(1)} = \bar{N}^B$ ,

$$\begin{aligned} \bar{N}^{(1)} &= \frac{e_0^2}{\hbar c} \int d\omega_k |u_z(k)|^2, \\ \bar{N}^B &= \int \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} |\beta_{\omega'\omega}|^2, \end{aligned} \quad (9.25)$$

будет приводить к квантованию затравочного заряда:  $e_0^2 = \hbar c$ , а совпадение спектров будет следствием этого значения и дуальной голограмической связи (9.12) пропагаторов в четырёхмерном и двумерном пространствах вместе с нетривиальной связью (9.22) коэффициента Боголюбова с 2-вектором  $u_z$ , см. также (3.19) в [8].

Итак, при одной и той же траектории заряда и зеркала спектры фотонов и пар совпадают, если в связи с точечностью источников заряд считать затравочным с постоянной тонкой структурой  $\alpha_0 = 1/4\pi$ . Таким образом, обнаруженная дуальность может рассматриваться как голограмический принцип квантования затравочного заряда. Результат  $\alpha_0 = 1/4\pi$  удовлетворяет всем трём условиям, полученным Гелл-Маном и Лоу [10] для конечного затравочного заряда (см. с. 5). Более того, именно благодаря значению  $\alpha_0 = 1/4\pi$  отношение  $\alpha/\alpha_0 = 4\pi\alpha$  постоянных тонкой структуры физического и затравочного зарядов, имеющее физический смысл  $Z_3$ -фактора Дайсона (или обратной диэлектрической проницаемости вакуума), лежит между двумя геометрическими постоянными:  $\alpha_L < Z_3 \equiv \alpha/\alpha_0 = 4\pi\alpha < \alpha_B$ , которые определяют сдвиги  $E_{L,B} = \alpha_{L,B} \hbar c / 2r$  энергии нулевых колебаний электромагнитного поля в кубическом и сферическом резонаторах. В этой работе показано, что независимо от формы объёма резонатора коэффициенты  $\alpha_{L,B}$  пропорциональны  $Z_3$ . Это означает, что поразительная близость коэффициентов  $\alpha_{L,B}$  к конечному значению  $4\pi\alpha$ , полученному автором для константы  $Z_3 \equiv \alpha/\alpha_0 = 4\pi\alpha$ , не случайна, а является следствием фундаментальных равновременных коммутационных соотношений взаимодействующих операторных полей. В частности, следствием спектрального представления Челлена — Лемана для точной функции Грина фотона.

В самом деле, спектральное распределение энергии нулевых колебаний электромагнитного поля в вакууме

хорошо установлено. Оно определяется средней энергией  $(1/2)\hbar\omega$  нулевых колебаний с частотой  $\omega$  (Планк), умноженной на число квантовых состояний фотонов в объёме  $V$  с частотами в интервале между  $\omega$  и  $\omega + d\omega$  (Рэлей и Джинс):

$$\frac{1}{2} \hbar\omega \frac{V4\pi\omega^2 d\omega}{(2\pi c)^3} 2.$$

Введя обрезающий высокие частоты формфактор, проинтегрируем по частотам спектральное распределение нулевых колебаний в резонаторе с проводящими стенками и объёмом  $V$ . Условие (4.2) на проводящей границе оставляет только те частоты, которые являются собственными частотами резонатора и имеют соответствующую кратность. Устремляя частоту обрезания к бесконечности и опуская расходящиеся с частотой обрезания члены, относящиеся к энергии нулевых колебаний поля в объёме  $V$  вакуума, получаем конечный сдвиг (7.11) энергии нулевых колебаний в резонаторе. Для кубического и сферического резонаторов постоянные  $\alpha_{L,B}$  с точностью, лучшей 0,8 %, совпадают с отношением  $\alpha/\alpha_0$  постоянных тонкой структуры физического и затравочного зарядов. Это означает, что отношение  $\alpha/\alpha_0 \equiv Z_3$  пропорционально наблюдаемому сдвигу энергии нулевых колебаний электромагнитного поля, по крайней мере в кубическом и сферическом резонаторах.

Правильность этого принципиального результата подтверждается методом оценки энергии среднеквадратичных флуктуаций электромагнитного поля, усреднённого по объёму с "размытыми границами", спектральным представлением точных функций Грина с его "правилом сумм", а также асимптотическими условиями (3.11), (8.2) для in- и out-полей.

Автор благодарен М.А. Васильеву, Б.Л. Воронову, С.Л. Лебедеву, А.И. Никишову, А.Е. Шабаду и ушедшем от нас Л.В. Келдышу и М.А. Соловьёву за ценные замечания, сделанные ими при обсуждении этой работы и статей [8, 9]. За постоянную конструктивную квалифицированную помощь автор благодарен А.Н. Грибкову и Е.В. Захаровой.

## Список литературы

1. Schwinger J *Particles, Sources, and Fields* (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publ. Co., 1970); Пер. на русск. яз.: Швингер Ю *Частицы, источники, поля* Т. 1 (М.: Мир, 1973)
2. Никишов А И, Ритус В И ЖЭТФ **108** 1121 (1995); Nikishov A I, Ritus V I *J. Exp. Theor. Phys.* **81** 615 (1995)
3. Ритус В И ЖЭТФ **110** 526 (1996); Ritus V I *J. Exp. Theor. Phys.* **83** 282 (1996)
4. Ритус В И ЖЭТФ **114** 46 (1998); Ritus V I *J. Exp. Theor. Phys.* **87** 25 (1998); Ритус В И ЖЭТФ **115** 384 (1999) Поправка; Ritus V I *J. Exp. Theor. Phys.* **88** 207 (1998) Erratum
5. Ритус В И ЖЭТФ **116** 1523 (1999); Ritus V I *J. Exp. Theor. Phys.* **89** 821 (1999)
6. Ritus V I ЖЭТФ **124** 14 (2003); *J. Exp. Theor. Phys.* **97** 10 (2003)
7. Ritus V I ЖЭТФ **129** 664 (2006); *J. Exp. Theor. Phys.* **102** 582 (2006)
8. Ритус В И УФН **183** 591 (2013); Ritus V I *Phys. Usp.* **56** 565 (2013)
9. Ritus V I *J. Russ. Laser Res.* **36** 101 (2015)
10. Gell-Mann M, Low F E *Phys. Rev.* **95** 1300 (1954)
11. Courant R, Hilbert D *Methoden der mathematischen Physik* Bd. 2 (Berlin: J. Springer, 1937); Пер. на русск. яз.: Курант Р, Гильберт Д *Методы математической физики* Т. 2 (М.-Л.: ГИТТЛ, 1945); Пер. на англ. яз.: Courant R, Hilbert D *Methods in Mathematical Physics* Vol. 2 (New York: Interscience, 1962)
12. Dirac P A M *Directions in Physics: Lectures Delivered During a Visit to Australia and New Zealand August/September 1975* (Eds H Hora, J R Shepanski) (New York: Wiley, 1978)
13. Dyson F J *Phys. Rev.* **75** 1736 (1949)
14. Källén G *Helv. Phys. Acta* **25** 417 (1952)
15. Lehmann H *Nuovo Cimento* **11** 342 (1954)

16. Schwinger J *Phys. Rev.* **125** 397 (1962)
17. Schwinger J *Phys. Rev.* **128** 2425 (1962)
18. Boyer T H *Phys. Rev.* **174** 1764 (1968)
19. Lukosz W *Physica* **56** 109 (1971)
20. Davies B J. *Math. Phys.* **13** 1324 (1972)
21. Balian R, Duplantier B *Ann. Physics* **112** 165 (1978)
22. Milton K A, DeRaad L L (Jr.), Schwinger J *Ann. Physics* **115** 388 (1978)
23. Schwinger J, DeRaad L L (Jr.), Milton K A *Ann. Physics* **115** 1 (1978)
24. Mamaev С Г, Трунов Н Н *ТМФ* **38** 345 (1979); Mamaev S G, Trunov N N *Theor. Math. Phys.* **38** 228 (1979); Мостепаненко В М, Трунов Н Н *УФН* **156** 385 (1988); Mostepanenko V M, Trunov N N *Sov. Phys. Usp.* **31** 965 (1988)
25. Гриб А А, Mamaev С Г, Мостепаненко В М *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях* (М.: Энергоатомиздат, 1988); Пер. на англ. яз.: Grib A A, Mamaev S G, Mostepanenko V M *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields* (St. Petersburg: Friedmann Laboratory Publ., 1994)
26. Boyer T H *Phys. Rev.* **185** 2039 (1969)
27. Lukosz W *Z. Phys.* **262** 327 (1973)
28. Stueckelberg E C G *Helv. Phys. Acta* **14** 51 (1941)
29. Stueckelberg E C G *Helv. Phys. Acta* **17** 43 (1944)
30. Rivier D, Stueckelberg E C G *Phys. Rev.* **74** 218 (1948)
31. Schwinger J *Phys. Rev.* **75** 651 (1949)
32. Feynman R P *Phys. Rev.* **76** 749 (1949)
33. Feynman R P *Phys. Rev.* **76** 769 (1949)
34. Bjorken J D, Drell S D *Relativistic Quantum Fields* (New York: McGraw-Hill, 1965); Пер. на русск. яз.: Бёркен Дж Д, Дрелл С Д *Релятивистская квантовая теория Т. 2 Релятивистские квантовые поля* (М.: Наука, 1978)
35. Itzykson C, Zuber J-B *Quantum Field Theory* (New York : McGraw-Hill International Book Co., 1980); Пер. на русск. яз.: Ициксон К, Зюбер Ж-Б *Квантовая теория поля* (М.: Мир, 1984)
36. Thirring W E *Principles of Quantum Electrodynamics* (New York: Academic Press, 1958); Пер. на русск. яз.: Тирринг В Е *Принципы квантовой электродинамики* (М.: Высшая школа, 1964)
37. Schwinger J *Phys. Rev.* **115** 721 (1959)
38. Landau L D, Lifshitz E M *Teoriya polya* (М.: Наука, 1988); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 1994)
39. Schwinger J *Phys. Rev.* **82** 664 (1951)
40. Bialynicki-Birula I, Bialynicka-Birula Z *Quantum Electrodynamics* (Oxford: Pergamon Press, 1975)
41. Dyson F J *Phys. Rev.* **75** 486 (1949)
42. DeWitt B S *Phys. Rep.* **19** 295 (1975)
43. Dwight H B *Tables of Integrals and Other Mathematical Data* (New York: Macmillan, 1961); Пер. на русск. яз.: Двайт Г Б *Таблицы интегралов и другие математические формулы* (М.: Наука, 1977)
44. Прудников А П, Брычков Ю А, Маричев О И *Интегралы и ряды: Элементарные функции* (М.: Наука, 1981); Пер. на англ. яз.: Prudnikov A P, Brychkov Yu A, Marichev O I *Integrals and Series Vol. 1 Elementary Functions* (New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1986)
45. Casimir H B G *Physica* **19** 846 (1953)
46. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)
47. Никольский В В, Никольская Т И *Электродинамика и распространение радиоволн* (М.: Наука, 1989)
48. Семенов А А *Теория электромагнитных волн* (М.: Изд-во МГУ, 1962)
49. Bateman H *Higher Transcendental Functions* Vol. 2 (Director A Erdélyi) (New York: McGraw-Hill, 1954); Бейтмен Г, Эрдэйи А *Высшие трансцендентные функции Т. 2* (М.: Наука, 1967)
50. Тодоров И Т "Конформная инвариантность", в кн. *Физическая энциклопедия* (Гл. ред. А М Прохоров) Т. 2 (М.: Советская энциклопедия, 1990) с. 453
51. Birrell N D, Davies P C W *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982); Пер. на русск. яз.: Биррелл Н, Дэвис П *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени* (М.: Мир, 1984)
52. Jordan P, Pauli W (Jr.) *Z. Phys.* **47** 151 (1928)
53. Ривлин Л А *УФН* **161** (3) 143 (1991); Rivlin L A *Sov. Phys. Usp.* **34** 259 (1991)
54. Ривлин Л А *УФН* **167** 309 (1997); Rivlin L A *Phys. Usp.* **40** 291 (1997)
55. Feynman R P, Leighton R B, Sands M *The Feynman Lectures on Physics* Vol. 2 (Reading, MA: Addison-Wesley Pub. Co., 1964); Пер. на русск. яз.: Фейнман Р, Лайтон Р, Сэндс М *Фейнмановские лекции по физике* Вып. 6 (М.: Мир, 1966)
56. Feynman R P *The Theory of Fundamental Processes* (New York: W.A. Benjamin, 1961); Пер. на русск. яз.: Фейнман Р П *Теория фундаментальных процессов* (М.: Наука, 1978)
57. Nash C, Sen S *Topology and Geometry for Physicists* (London: Academic Press, 1983)
58. Landau L D, Lifshitz E M *Статистическая физика Ч. 1* (М.: Наука, 1976); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics* Vol. 1 (Oxford: Pergamon Press, 1980)

### Finite value of the bare charge and the relation of the fine structure constant ratio for physical and bare charges to zero-point oscillations of the electromagnetic field in the vacuum

**V.I. Ritus.** Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prospekt 53, 119991 Moscow, Russian Federation  
E-mail: ritus@lpi.ru

The duality of four-dimensional electrodynamics and the theory of a two-dimensional massless scalar field leads to a functional coincidence of the spectra of the mean number of photons emitted by a point-like electric charge in  $3+1$  dimensions and the spectra of the mean number of scalar quanta pairs emitted by a point mirror in  $1+1$  dimensions. The spectra differ only by the factor  $e^2/\hbar c$  (in Heaviside units). The requirement that the spectra be identical determines unique values of the point-like charge  $e_0 = \pm\sqrt{\hbar c}$  and its fine structure constant  $\alpha_0 = 1/4\pi$ , which have all the properties required by Gell-Mann and Low for a finite bare charge. The Dyson renormalization constant  $Z_3 \equiv \alpha/\alpha_0 = 4\pi\alpha$  is finite and lies in the range  $0 < Z_3 < 1$ , in agreement with the Källén-Lehmann spectral representation sum rule for the exact Green's function of the photon. The value of  $Z_3$  also lies in a very narrow interval  $\alpha_L < Z_3 \equiv \alpha/\alpha_0 = 4\pi\alpha < \alpha_B$  between the values  $\alpha_L = 0.0916$  and  $\alpha_B = 0.0923$  of the parameters defining the shifts  $E_{L,B} = \alpha_{L,B}\hbar c/2r$  of the energy of zero-point fluctuations of the electromagnetic field in cubic and spherical resonators with the cube edge length equal to the sphere diameter,  $L = 2r$ . In this case, the cube is circumscribed about the sphere. That the difference between the coefficients  $\alpha_{L,B}$  is very small can be explained by the general property of all polyhedra circumscribed about a sphere: despite the difference between their shapes, they share a topological invariant, the surface-to-volume ratio  $S/V = 3/r$ , the same as for the sphere itself. Shifts of the energy of zero-point oscillations in such resonators are also proportional to this invariant:  $E_{L,B} = \alpha_{L,B}\hbar cS/6V$ . On the other hand, the shifts  $E_{L,B} = \alpha_{L,B}\hbar c/2r$  of the energy of zero-point oscillations of the electromagnetic field essentially coincide with the energy of the mean squared fluctuations of the volume-averaged electric and magnetic fields in resonators, equal to  $Z_3\hbar c/2r$  in order of magnitude. It hence follows that  $\alpha_{L,B} \approx Z_3$ , as it should for the coefficients  $\alpha_\gamma$  of the shifts  $E_\gamma = \alpha_\gamma\hbar c/2r$  in other resonators  $\gamma$  circumscribed about a sphere. The closeness of  $\alpha_L$  and  $\alpha_B$  to the  $Z_3$  factor is confirmed by the Källén-Lehmann spectral representation and agrees with asymptotic conditions relating the photon creation amplitudes for free and interacting vector fields.

**Keywords:** nonperturbative methods, physical charge, bare charge, renorminvariant charge, duality of 4-dimensional and 2-dimensional field theories, spectral representation of Green's functions, sum rule, zero-point fluctuations of a field in a vacuum, cavity resonator, topological invariant, conformal invariance

PACS numbers: 02.40.-k, 03.70.+k, 05.40.-a, 11.10.Hi, 11.10.Jj, 11.55.Hx, 12.20.-m, 41.60.-m

Bibliography — 58 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **192** (5) 507–526 (2022)  
DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2022.02.039167>

Received 9 June 2021, revised 25 October 2021

*Physics – Uspekhi* **65** (5) (2022)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2022.02.039167>