

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Волны Герстнера и их обобщения в гидродинамике и геофизике

А.А. Абрашкин, Е.Н. Пелиновский

В связи с 220-летием со времени появления статьи Герстнера, где было приведено точное решение уравнений гидродинамики, дан обзор точных решений для волн на воде, каждое из которых является некоторым обобщением волн Герстнера. В качестве дополнительных факторов выступают геометрия бассейна, вращение жидкости, непостоянное давление на свободной поверхности, стратификация, смываемость жидкости и фоновые течения. Волны на вращающейся Земле изучаются в приближении f -плоскости, а в приэкваториальной области — также и в приближении β -плоскости. Течения описываются в лагранжевых переменных. Для всех волн в отсутствие фоновых потоков траекториями жидких частиц являются окружности, как в волне Герстнера (отсюда их общее название — герстнероподобные).

Ключевые слова: волны Герстнера, лагранжевы координаты, завихренность, инварианты Коши, птолемеевские течения, вращающаяся жидкость, приближение f -плоскости, захваченные волны в приэкваториальной области

PACS number: 47.35.Bb

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.05.038980>

Содержание

1. Введение (491).
2. Классическая гидродинамика (493).
 - 2.1. Уравнения гидродинамики в переменных Лагранжа.
 - 2.2. Волна Герстнера.
 - 2.3. Краевые волны вдоль наклонного берега.
 - 2.4. Волны Гуйона.
 - 2.5. Эпциклоидальные волны на поверхности вращающейся полости.
 - 2.6. Обобщённые волны Герстнера при переменном давлении на свободной поверхности.
3. Точные решения для волн с учётом вращения Земли (499).
 - 3.1. Волны Герстнера во вращающейся жидкости.
 - 3.2. Волны в приэкваториальной области.
4. Волны в стратифицированной жидкости (503).
 - 4.1. Непрерывная стратификация.
 - 4.2. Волны в слоях с разрывами плотности.
5. Заключение (504).

Список литературы (505).

К 220-летию получения первого точного решения в нелинейной теории волн

1. Введение

Рождение науки о нелинейных волнах традиционно связывают с первыми экспериментами Скотта Рассела,

А.А. Абрашкин^(1, 2, a), Е.Н. Пелиновский^(1, 2, 3, b)

(1) Национальный исследовательский университет

"Высшая школа экономики", Нижегородский филиал,
ул. Большая Печерская 25/12, 603155 Нижний Новгород,
Российская Федерация

(2) Федеральный исследовательский центр

"Институт прикладной физики РАН",
ул. Ульянова 46, 603950 Нижний Новгород, Российской Федерации

(3) Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. Алексеева,

ул. Минина 24, 603950 Нижний Новгород, Российской Федерации
E-mail: ^(a)aabrashkin@hse.ru, ^(b)pelinovsky@hydro.appl.sci-nnov.ru

Статья поступила 1 февраля 2021 г., после доработки 9 апреля 2021 г.

который в 1830–1840-х годах впервые наблюдал солитоны, бегущие по поверхности мелководного канала [1]. В 1895 году Кортеевег и де Вриз математически описали это явление на основе уравнения, впоследствии названного их именами [2]. Но вне поля зрения для многих исследователей осталось (и до сих пор остаётся) исторически первое, опубликованное Францем Йозефом Герстнером в 1802 г., аналитическое представление для нелинейной волны, описывающее стационарную волну на глубокой воде с профилем в виде трохоиды [3, 4]. В силу ряда обстоятельств, и о них пойдёт речь ниже, на долю волны Герстнера не выпало и "тысячной" доли того внимания, которое было уделено солитонам Кортеевега – де Вриза. Но факт остаётся фактом: вначале была волна Герстнера (рис. 1).

Уравнение Кортеевега – де Вриза выводится в приближении малой нелинейности и дисперсии из полных уравнений гидродинамики. Его солитонное решение — классический пример нелинейной волны, в которой эффекты нелинейности и дисперсии уравновешивают друг друга. С другой стороны, волна Герстнера есть точное решение полных уравнений гидродинамики, и она до сих пор служит единственным примером их интегрирования для гравитационных волн на глубокой воде. Таким образом, трудно отрицать, что с математической точки зрения волна Герстнера выступает более значимым достижением аналитической теории нелинейных волн на воде, чем солитоны на мелкой воде.

Большую известность и существенно большее внимание, чем волна Герстнера, как известно, привлекла слабонелинейная волна Стокса [7]. Это обстоятельство, на первый взгляд, выглядит ещё более удивительным, поскольку решение Стокса записывается в виде ряда по малому параметру крутизны волны. Такое представление для периодической поверхности волны оказалось более практически важным, чем точное решение. Причина тому — проблема реализации волны Герстнера. В отличие от волны Стокса, волна Герстнера является вихревой и не может возникнуть в природе под дей-



Рис. 1. Пражский инженер и механик Франц Йозеф Герстнер (1756–1832).

Краткая биографическая справка. Имя Франца Йозефа Герстнера было хорошо известно в Чехии и Австрии. Он являлся профессором и директором Политехнического училища в Праге, начальником строительства всей водной системы. Практически ни одно инженерное предприятие на чешской земле не обходилось без его участия или совета [5]. Директор Высшей технической школы в Цюрихе Ганс Штрауб (1895–1964) включил Ф.Й. Герстнера в список имён "великих исследователей и инженеров" [6], причём не только как учёного, предложившего строительство железной дороги, но и как создателя трохоидальной теории волн. Любопытно добавить, что его сын (также очень известный инженер) — Франц Антон Герстнер — был строителем первой железной дороги в России.

ствием потенциальных сил (теорема Лагранжа). Для реализации волны Герстнера необходимо либо действие внешних непотенциальных сил, либо особые начальные условия. Так, Г. Ламб предположил, что волна Герстнера может родиться из сдвигового потока, обладающего той же, что и волна, завихренностью [4]. При этом поступательное движение жидких частиц в потоке должно трансформироваться во вращение по окружности (в волне Герстнера отсутствует дрейфовое течение). Специфичность такого сценария явно не способствовала популяризации герстнеровского решения и его широкому применению для практических расчётов. Тем не менее А.Н. Крылов на основе формул Герстнера построил теорию качки кораблей на волнении [8], "нашедшую большое приложение в судостроении" [9]. Дюбрейль-Жакотэн показала, что волны Герстнера могут существовать в жидкости с произвольной стратификацией [10].

Открытие механизма модуляционной неустойчивости для потенциальных волн на воде [11], казалось бы, окончательно превратило теорию Герстнера в гидродинамический артефакт — красивое точное решение, не реализуемое в природе, но неожиданно примерно с того же времени стали появляться примеры его новых приложений. Поллард модифицировал герстнеровское решение для волн во вращающейся жидкости в приближении f -плоскости [12]. Ийа [13], Молло-Кристенсен [14, 15] и в более полном виде Константин [16] применили решение Герстнера для описания краевых волн, распро-

страняющихся вдоль наклонного берега (в работах [13–16] показано, что результаты для однородной жидкости удаётся обобщить для случая стратификации и вращения жидкости). Кроме того, Молло-Кристенсен дал описание валов герстнеровских волн (облаков трохоидальной формы) в стратифицированной атмосфере [17], а авторы [18, 19] нашли цилиндрический аналог волн Герстнера — эпиклоидальные волны, бегущие вдоль свободной поверхности полости в однородно вращающейся жидкости.

Все перечисленные достижения в значительной степени повысили статус решения Герстнера, но вопрос его физической реализации всё ещё оставался открытым. Эту застарелую проблему, однако, смогли разрешить Монисмит и др. [20], которым удалось создать волну Герстнера в лабораторных условиях. Принцип эксперимента состоял в следующем. В волне Герстнера жидкие частицы движутся по окружности, и поэтому в ней отсутствует дрейфовое течение, что отличает её от волны Стокса, распространение которой сопровождается переносом частиц (стоксовым дрейфом), направленным в сторону движения волны. Таким образом, при генерации волны Герстнера создавалось течение, направленное против неё. Отсутствие дрейфа жидких частиц при отдельной реализации свидетельствовало в пользу наблюдения в эксперименте волны Герстнера. Необходимо подчеркнуть особую тщательность, с которой авторы [20] формулировали свои выводы. Для их дополнительной проверки они обратились к аналогичным экспериментам, проводившимся в других лабораториях, и показали, что волны Герстнера наблюдались ранее ещё в трёх лотках [21–23].

Все указанные результаты получены в ограниченных каналах с искусственно (механически) генерируемыми волнами. Но, как отмечают авторы [20], аналогичные наблюдения (т.е. отсутствие дрейфа жидких частиц) фиксировались и для волн в открытом океане [24]. Тем самым существование волн Герстнера было подтверждено и натурными наблюдениями. Правда, при крутизне, превышающей $1/3$, волны Герстнера неустойчивы к трёхмерным возмущениям [25], но о них теперь стало возможным говорить как о реальных физических колебаниях. В свою очередь Вебер указал, что при учёте вязкости и поверхностных плёнок в волне Герстнера возникает дрейфовое течение [26]. Волновые колебания такого рода, по мнению Вебера, вполне могли с давних пор наблюдаваться экспериментаторами (без осознания этого факта и привязки к волнам Герстнера) в лабораторных бассейнах.

В последнее десятилетие герстнеровская тематика обрела "второе дыхание", хотя трудно сказать, связано ли это с экспериментальной работой [20], вдохновившей теоретиков. Появилось множество статей, обобщающих решение Герстнера для случая непостоянства давления на свободной поверхности вследствие действия ветра, учёта вращения Земли и стратификации (перечень таких работ приведён в таблице в разделе 2). В ряде этих публикаций появился термин "герстнероподобная волна" (от английских словосочетаний *Gerstner-like*, *Gerstner-type*), отражающий связь полученных решений с классической волной Герстнера, которая в каком-то из приближений является их частным случаем.

Цель настоящей статьи — дать по возможности наиболее полный обзор работ, посвящённых волне

Герстнера, её модификациям и разнообразным обобщениям. Не так давно в России и на Западе вышли монографии, посвящённые лагранжеву описанию движений жидкости [27, 28], но данная тема в них практически не затрагивается. В этом отношении настоящая статья представляется крайне важной и актуальной. Вместе с тем кажется уместным привлечь дополнительное внимание к лагранжевой гидродинамике, методами которой пользуется весьма узкий круг физиков. Наконец, и, может быть, это самое главное, имеет смысл однажды составить полный набор известных точных решений для данной проблемы, тем более что в 2022 г. исполняется 220 лет со дня опубликования статьи Герстнера.

2. Классическая гидродинамика

В названии настоящей статьи обычная (классическая) гидродинамика и геофизическая гидродинамика выделены как разные составляющие единой механики жидкости в целях упорядочивания материалов статьи и удобства изложения. Геофизическая гидродинамика изучает такие движения сплошной среды, "для которых существенную роль играют *вращение* всей системы как целого и *стратификация* среды" (В.М. Каменкович, А.С. Монин, предисловие к книге [29]). Раздел 2 посвящён обычной гидродинамике, в разделах 3 и 4 рассматриваются соответственно волны на вращающейся Земле и в стратифицированной жидкости.

2.1. Уравнения гидродинамики в переменных Лагранжа

Традиционно движение идеальной жидкости изучают на основе следующей системы уравнений [4]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{F},$$

где ρ — плотность жидкости, \mathbf{v} — её скорость, p — давление, \mathbf{F} — внешняя сила, действующая на единицу массы. Первое из уравнений называется уравнением непрерывности, а второе — уравнением Эйлера. Все введённые величины являются в общем случае функциями трёх пространственных координат и времени. При таком описании, называемом эйлеровым, наблюдатель следит за полем скорости в определённой точке.

Но существует и другой способ описания жидкости, называемый лагранжевым, в котором прослеживается движение фиксированных "жидких частиц" начиная с некоторого момента времени. Координаты отдельной такой частицы X, Y, Z считаются зависящими от трёх пространственных переменных, a, b, c , и времени t :

$$X = X(a, b, c, t), \quad Y = Y(a, b, c, t), \quad Z = Z(a, b, c, t). \quad (1)$$

Эти пространственные переменные можно выбрать совпадающими с начальными координатами жидких частиц X_0, Y_0, Z_0 в момент $t = 0$, т.е. положить

$$a = X_0, \quad b = Y_0, \quad c = Z_0. \quad (2)$$

Однако удобно считать, что каждая из величин a, b, c является некоторой функцией от координат начального положения жидкой частицы и они выступают в качестве меток для отдельной жидкой частицы. Будем, следуя общепринятой традиции, называть их лагранжевыми координатами.

Соотнесение переменных a, b, c с именем Лагранжа идёт от Дирихле (1860 г.), но оно, строго говоря, несёт в себе элемент неточности [27, 30]. Дело в том, что метки жидкой частицы, как полагал Лагранж, должны удовлетворять условию (2). Между тем Эйлер, кстати, опередивший Лагранжа в формулировке способа описания движения жидкости, названного потом лагранжевым, придавал координатам a, b, c более общий (принятый сегодня) смысл, называя их материальными переменными (material variables). Сложившееся деление методов описания движения жидкости, так же как и переменных, на эйлеровы и лагранжевы имеет, таким образом, исторический подтекст, но, как нам представляется, Дирихле, выбирая название для переменных a, b, c , поступил очень мудро.

Уравнение непрерывности в переменных Лагранжа компактно записывается с помощью матрицы Якоби:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} X_a & X_b & X_c \\ Y_a & Y_b & Y_c \\ Z_a & Z_b & Z_c \end{pmatrix}, \quad (3)$$

элементами которой служат производные текущих координат частиц по лагранжевым переменным. Матрица \hat{R} описывает изменение бесконечно малого элемента жидкости $d\mathbf{R}\{dX, dY, dZ\}$, соответствующего приращению лагранжевых координат $d\mathbf{a}\{da, db, dc\}$:

$$d\mathbf{R} = \hat{R} d\mathbf{a}. \quad (4)$$

Уравнение непрерывности при таком подходе имеет вид [27, 28]

$$\rho \det \hat{R} = \rho_0 \det \hat{R}_0, \quad \rho_0 = \rho|_{t=0}, \quad \hat{R}_0 = \hat{R}|_{t=0}, \quad (5)$$

здесь $\rho(a, b, c, t)$ — плотность. Для несжимаемой жидкости детерминант матрицы \hat{R} не зависит от времени. При выполнении соотношений (2) матрица \hat{R}_0 является единичной.

Чтобы получить уравнения движения в форме Лагранжа, перепишем уравнение Эйлера следующим образом:

$$\mathbf{R}_{tt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F}, \quad (6)$$

здесь $\mathbf{R} = \mathbf{R}\{X, Y, Z\}$. Уравнение (6) является выражением второго закона Ньютона для отдельной частицы. Чтобы исключить из его правой части дифференцирование по неизвестным функциям X, Y, Z , умножим (6) скалярно соответственно на векторы $\mathbf{R}_a, \mathbf{R}_b$ и \mathbf{R}_c . Тогда получим

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{tt} \mathbf{R}_a &= -\frac{1}{\rho} p_a + \mathbf{F} \mathbf{R}_a, \\ \mathbf{R}_{tt} \mathbf{R}_b &= -\frac{1}{\rho} p_b + \mathbf{F} \mathbf{R}_b, \\ \mathbf{R}_{tt} \mathbf{R}_c &= -\frac{1}{\rho} p_c + \mathbf{F} \mathbf{R}_c. \end{aligned} \quad (7)$$

С помощью матрицы Якоби эти уравнения записываются следующим образом [31]:

$$\hat{R}^T (\mathbf{R}_{tt} - \mathbf{F}) = -\frac{1}{\rho} \nabla_a p. \quad (8)$$

Верхний индекс Т означает операцию транспонирования, а в правой части использовано обозначение градиента по лагранжевым переменным $\mathbf{a}\{a, b, c\}$.

2.2. Волна Герстнера

Рассмотрим плоские движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле тяжести Земли. Пусть ось X направлена горизонтально вправо, а ось Y — вертикально вверх и пусть a будет горизонтальной лагранжевой координатой, а b — вертикальной (слою жидкости соответствует полуплоскость $b \leq 0$). Жидкость полагаем бесконечно глубокой. Уравнения гидродинамики в форме Лагранжа (5), (7) тогда можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(a, b)} = \frac{\partial D_0}{\partial t} = 0, \quad (9)$$

$$X_{tt} X_a + Y_{tt} Y_a + g Y_a = -\frac{1}{\rho} p_a, \quad (10)$$

$$X_{tt} X_b + Y_{tt} Y_b + g Y_b = -\frac{1}{\rho} p_b, \quad (11)$$

здесь учтено, что ускорение свободного падения \mathbf{g} направлено в сторону отрицательных Y и сила выражается как $\mathbf{F} = -\mathbf{g}$. Жидкость считаем однородной. Исключая давление с помощью перекрестного дифференцирования уравнений (10), (11), получим условие сохранения завихренности Ω вдоль траектории:

$$\frac{\partial}{\partial t} (X_{ta} X_b + Y_{ta} Y_b - X_{tb} X_a - Y_{tb} Y_a) = \frac{\partial(\Omega D_0)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0, \quad (12)$$

где

$$\Omega = D_0^{-1} \left[\frac{\partial(X_t, X)}{\partial(a, b)} + \frac{\partial(Y_t, Y)}{\partial(a, b)} \right].$$

Для описания волны на поверхности жидкости следует найти решение уравнений (9), (12), а также удовлетворить условию постоянства давления на свободной поверхности:

$$p|_{b=0} = p_0 = \text{const}, \quad (13)$$

и условию затухания вертикальных колебаний скорости в глубине: $Y_t|_{b \rightarrow -\infty} = 0$.

Герстнер указал точное решение этой задачи [3, 32]:

$$X = a - A \exp(kb) \sin(ka - \omega t), \quad (14)$$

$$Y = b + A \exp(kb) \cos(ka - \omega t), \quad b \leq 0,$$

здесь A — амплитуда волны, k — волновое число, ω — частота волны. Как и в линейных потенциальных волнах, волновое число и частота связаны соотношением

$$\omega^2 = gk, \quad (15)$$

которое является следствием условия (13). В каждый момент свободная поверхность волны представляет собой трохоиду — кривую, вычерчиваемую некоторой точкой круга радиусом A , катящегося без скольжения по горизонтальной прямой $Y = -A$. Оставаясь неизменной,

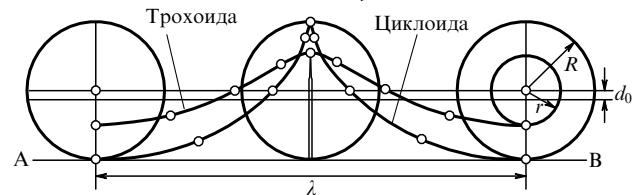


Рис. 2. Циклоида ($R = k^{-1} = (2\pi)^{-1}\lambda$) и трохоида ($r < R$). Средний уровень циклоиды располагается ниже среднего уровня трохоиды на величину $d_0 = \pi(R^2 - r^2)\lambda^{-1}$. Применительно к волне Герстнера (14) это означает, что чем больше амплитуда A , тем ниже равновесный уровень жидкости [32].

трохоида движется со скоростью $U = \omega k^{-1}$ вправо, ввиду чего волны Герстнера называют также трохоидальными. Физический смысл имеют только решения с $A \leq k^{-1}$, в противном случае профиль самопересекается. Если $A = k^{-1}$, то гребни на профиле становятся острыми (угол заострения равен нулю), такую предельную трохоиду называют циклоидой (рис. 2).

В 1860-х годах решение (14) переоткрыли сразу три автора: Фруд [33], Рэнкин [34] и Рич [35]. В течение более полувека классический результат Герстнера оставался незамеченным. И это обстоятельство характеризует Герстнера как выдающегося учёного, опередившего своё время.

Координаты траекторий отдельной частицы удовлетворяют соотношению (см. (14)):

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = A^2 \exp(2kb),$$

из которого следует, что в неподвижной системе отсчёта каждая частица движется по окружности радиусом $A \exp(kb)$ (в волнах Герстнера нет дрейфа частиц). Начальное положение жидких частиц в решении Герстнера не совпадает с лагранжевыми координатами, а именно:

$$X_0 = a - A \exp(kb) \sin(ka), \quad Y_0 = b + A \exp(kb) \cos(ka).$$

Можно, разумеется, принять X_0 , Y_0 за новые лагранжевые переменные, но тогда выражения для X и Y уже нельзя представить в явном виде как функции X_0 и Y_0 .

Завихренность волн Герстнера выражается как

$$\Omega_* = \frac{2k^3 A^2 U \exp(2kb)}{1 - k^2 A^2 \exp(2kb)}. \quad (16)$$

Для её вычисления следует воспользоваться выражениями (12), (14). В случае малой крутизны волны, когда $\varepsilon = kA \ll 1$, завихренность представляется выражением

$$\Omega_* = 2kU \exp(2kb)\varepsilon^2 [1 + \exp(2kb)\varepsilon^2] + O(\varepsilon^6). \quad (17)$$

Из (17) видно, что в линейном приближении волна Герстнера является незавихренной и совпадает с линейной волной Стокса. В квадратичном приближении завихренность волны Герстнера равна $2kU \exp(2kb)\varepsilon^2$. Она равна по модулю и противоположна по знаку завихренности дрейфа Стокса, индуцируемого потенциальной волной Стокса. Как показано в статье [36], в квадратичном приближении справедлива формула:

волна Стокса = волна Герстнера + дрейф Стокса.

Волна Стокса является потенциальной, и её завихренность тождественно равна нулю во всех порядках теории возмущений. Волна Герстнера, как следует из формулы (17), приобретает дополнительную завихренность в каждом из чётных приближений. Вместе с тем профили обеих волн совпадают при приближениях теории возмущений вплоть до кубического [37] (см. также [9]). Только в четвёртом порядке теории возмущений наблюдается различие между формами профилей волн.

По известному решению (14) определяется с использованием уравнений (10), (11) давление [30]:

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -gb - \frac{\omega^2 A^2}{2} [1 - \exp(2kb)]. \quad (18)$$

Давление в жидкости зависит только от координаты b . Как показал А.С. Монин [38], единственным видом установившихся волн, в которых давление зависит только от вертикальной лагранжевой координаты, являются трохоидальные волны Герстнера. Замечательно, что и для стратифицированной жидкости с плотностью $\rho(b)$ решение (14) остаётся в силе [8]. Это связано с тем, что как плотность, так и давление зависят лишь от одной координаты b , а значит, являются функцией друг друга. Для баротропной жидкости условие сохранения завихренности (12) — такое же, как и для однородной жидкости.

На западе книга Ламба [4] в течение длительного времени оставалась единственным источником, в котором приводилась теория волн Герстнера. Обсуждение свойств волн, в отличие от такового в советском учебнике [32], было там достаточно кратким. Это предопределило появление уже в наше время статей [39, 40] и главы в монографии [41], посвящённых непосредственно волне Герстнера. Оригинальным моментом работ [39–41] является доказательство (разными способами), что преобразование (14) является диффеоморфизмом, отображающим плоскость материальных (лагранжевых) макетов на область течения.

2.3. Краевые волны вдоль наклонного берега

Краевыми волнами называют волны, распространяющиеся вдоль берега. Краевые волны на границе с сушей достигают максимальной амплитуды, которая быстро убывает при удалении от берега. Вся энергия этих волн сосредоточена в узкой прибрежной зоне и фактически не передаётся в открытый океан, так что, как говорят, происходит "захват" волновой энергии, ввиду чего краевые волны называют также захваченными. Начало их изучению, как и в случае обычных поверхностных волн, положил Стокс [42]. К настоящему времени это уже отдельный раздел теории волн на воде (см., например, [43, 44]), но единственное известное точное решение в нелинейной теории волн тем не менее опять связано с подходом Герстнера [13–16]. Изложим его на основе статьи [16].

Пусть вода находится над наклонным дном, образующим угол α с горизонталью ($0 < \alpha < \pi/2$). Будем рассматривать краевые волны, которые распространяются вдоль берега. Выберем ось X параллельной направлению берега, ось Y — вдоль наклонного дна, а ось Z — перпендикулярной к нему (рис. 3). Урез воды удовлетворяет условиям: $-\infty < X < \infty$, $Y = b_0$, $Z = 0$, b_0 — постоянная величина ($b_0 \leq 0$). На единицу массы жидкости в такой системе координат будет действовать

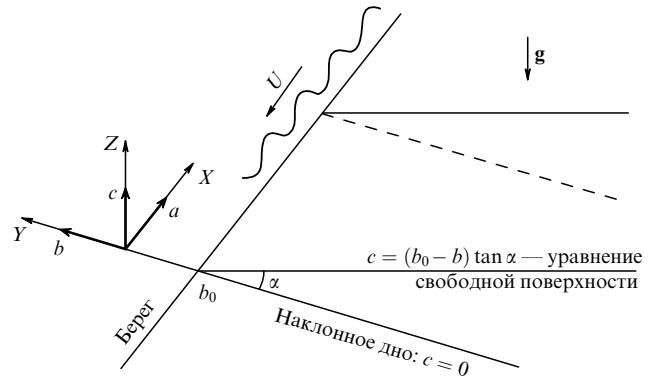


Рис. 3. Геометрия задачи.

сила

$$\mathbf{f} = (0, -g \sin \alpha, -g \cos \alpha). \quad (19)$$

При отсутствии волн жидкость будет заключена между плоскостью дна ($Z = 0$) и плоскостью $Z = (b_0 - Y) \tan \alpha$. Выберем её совпадающей с массивом лагранжевых координат, причём переменные a , b , c будем отсчитывать соответственно вдоль осей X , Y , Z . Уравнение свободной поверхности в лагранжевой системе имеет вид

$$c = (b_0 - b) \tan \alpha, \quad b \leq b_0. \quad (20)$$

Геометрия задачи наводит на мысль рассмотреть движение, в котором жидкие частицы движутся в плоскостях, параллельных дну. В этом случае Z -составляющая скорости отсутствует и условие непротекания по оси Z выполняется автоматически. По аналогии с выражениями (14) запишем представление такого двумерного течения следующим образом [16]:

$$\begin{aligned} X &= a - \frac{1}{k} \exp[k(b - c)] \sin(ka + \sqrt{gk \sin \alpha} t), \\ Y &= b - c + \frac{1}{k} \exp[k(b - c)] \cos(ka + \sqrt{gk \sin \alpha} t), \\ Z &= c + c \tan \alpha + \frac{\tan \alpha}{2k} \exp(2kb_0) \{1 - \exp[-2kc(1 + \cot \alpha)]\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Первые два уравнения системы (21) схожи с формулами Герстнера, только роли координаты b и ускорения свободного падения в них играют $b - c$ и $g \sin \alpha$. Частота волны равна $\sqrt{gk \sin \alpha}$ (естественно, такая же частота и у краевой волны Стокса). Знак + в аргументах тригонометрических функций означает, что волна бежит в сторону отрицательных X (её скорость $U = \sqrt{g \sin \alpha / k}$) (см. рис. 3). Профиль волны на берегу ($Z = c = 0$) соответствует трохоиде без заострений ($b_0 < 0$) или циклоиде с направленными вверх остриями ($b_0 = 0$).

Соотношение для Z в (21) обеспечивает выполнение условия постоянства давления на свободной поверхности. Подставляя условие (20) в уравнения (21), получим параметрическое представление для свободной поверхности. Из него легко увидеть, что при удалении от берега ($b \rightarrow -\infty$) амплитуда волны экспоненциально убывает, т.е. волна является захваченной. Завихренность волны имеет только Z -составляющую, а её величина получается

из формулы (16) заменой $A \rightarrow k^{-1} \exp(-kc)$ и добавлением минуса после знака равенства (волна бежит влево).

Неустойчивость трёхмерных краевых волн (21) исследована Ионеску-Крузе [45] с помощью метода коротковолновых возмущений Лебланка [25]. Доказано, что волны с крутизной выше $(7/18) \sin \alpha$ неустойчивы.

2.4. Волны Гуйона

Волны Герстнера — вихревые. Но они имеют весьма частный вид завихренности (16). Если рассматривать выражение (16) в слабонелинейном пределе как разложение по малому параметру крутизны волны, то в нём будут присутствовать члены только с чётными степенями ε (см. соотношение (17)). Причём множителями при степенях параметра являются вполне определённые функции координаты b . Но при лагранжевом описании стационарного течения изолинии функции тока и координаты b совпадают и завихренность может произвольно зависеть от этой переменной. Таким образом, естественным обобщением волн Герстнера является периодическая волна с более общим распределением завихренности:

$$\Omega_*(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \Omega_{*n}(b). \quad (22)$$

Впервые вопрос об описании периодической волны с общим распределением завихренности изучала Дюбреиль-Жакотэн [46], но в более полной форме это сделал Гуйон [47] (см. также [9]). Оба исследователя использовали эйлеровы координаты: в формуле (22) переменную b следует заменить функцией тока. Гуйон в явном виде нашёл пропорциональную параметру крутизны поправку к скорости распространения линейной волны, в связи с чем представляется уместным называть стационарные волны с завихренностью (22) волнами Гуйона.

В работе [48], где учитывалось наличие не только Ω_{*1} , но и Ω_{*2} , для волн Гуйона найдена квадратичная поправка к скорости распространения волны. Для вычислений использовались лагранжевые переменные. Позднее результат Гуйона был обобщён для пространственного случая [49]. С трёхмерностью волновых возмущений (появлением поперечных модуляций на профиле слабонелинейной волны Гуйона) связано существование приповерхностного слоя, внутри которого завихренность является осциллирующей функцией.

В случае $\Omega_{*1} = 0$, $\Omega_{*2}(a, b) \neq 0$ в лагранжевых координатах выведено нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), описывающее эволюцию комплексной амплитуды модулированной волны $A(a, t)$ [50]:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A}{\partial a} - \frac{k}{\omega^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - k(k^2 |A|^2 + \gamma(a))A &= 0, \\ \gamma(a) &= \frac{4k^2}{\omega} \int_{-\infty}^0 \exp(2kb) \left(\int_{-\infty}^b \Omega_2(a, b') db' \right) db. \end{aligned}$$

В НУШ коэффициент при нелинейности зависит от вида распределения завихренности. Для волн Гуйона величина γ не зависит от горизонтальной лагранжевой координаты a . В квадратичном приближении слабонелинейная волна Герстнера является частным случаем волн Гуйона. Её завихренность такова (см. (17)), что коэффициент при нелинейности в НУШ обращается в

нуль [50, 51]. Эффект модуляционной неустойчивости, таким образом, для волны Герстнера отсутствует.

Это строгий результат, но его можно было предвидеть, учитывая дисперсионное уравнение для волны Герстнера (15). Поскольку в него не входит амплитуда, в силу критерия Лайтхилла [52] для волны не выполняются условия модуляционной неустойчивости.

2.5. Эпициклоидальные волны

на поверхности врачающейся полости

Для плоских волн Герстнера существует цилиндрический аналог. Рассмотрим волновые движения в жидкости, частично заполняющей цилиндр (центрифугу), быстро вращающийся с частотой ω вокруг горизонтальной оси. Под действием центробежной силы жидкость оказывается прижатой к стенке цилиндра и движется вместе с ним вокруг центрального воздушного ядра. Возникающие при этом колебания свободной поверхности называются центрифуговыми волнами [53]. Известно их описание в линейном приближении [53, 54]. Однако если внешний радиус центрифуги считать бесконечным (много большим радиуса воздушного ядра R), то задачу можно решить точно [18, 19]. В изложении метода решения будем следовать работе [19].

Пусть ось вращения жидкости совпадает с направлением оси Z . Рассмотрим движение жидкости в плоскости XY . Введём комплексные координаты траектории жидкой частицы

$$W = X + iY, \quad \bar{W} = X - iY$$

и комплексные лагранжевые координаты

$$\chi = a + ib, \quad \bar{\chi} = a - ib.$$

Тогда систему уравнений плоской гидродинамики (9), (12) удается записать в виде условия независимости от времени двух якобианов [55, 56]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(W, \bar{W})}{\partial(\chi, \bar{\chi})} = \frac{\partial D_0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(W_t, \bar{W})}{\partial(\chi, \bar{\chi})} = 0. \quad (23)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что выражение

$$W = G(\chi) \exp(i\lambda t) + F(\bar{\chi}) \exp(i\mu t), \quad (24)$$

где G, F — аналитические функции, λ, μ — действительные числа, является точным решением системы (23). Функции G, F в значительной степени произвольны, так как единственным ограничением на их выбор является не обращение якобиана D_0 в нуль в области течения.

Частицы в течениях (24) движутся по окружности радиусом $|F|$, центр которой в свою очередь вращается по окружности радиусом $|G|$. При положительном отношении частот μ и λ траекторией частицы будет эпициклоида, а при отрицательном — гипоциклоида (рис. 4); число лепестков у кривых зависит от отношения частот. По таким орбитам вращались планеты в птолемеевской картине мира, в связи с чем данный тип течений был назван птолемеевским [55, 56].

Волны Герстнера (14) в комплексных переменных записываются следующим образом:

$$W = \chi + iA \exp[i(k\bar{\chi} - \omega t)], \quad \text{Im } \chi \leq 0. \quad (25)$$

Волны Герстнера принадлежат к числу птолемеевских движений (24), но, поскольку величина λ для них равна

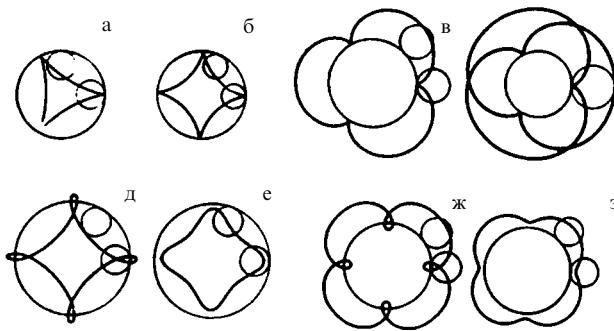


Рис. 4. (а, б) Гипоциклоиды. (в, г) Эпициклоиды. (д) Удлинённая гипоциклоида. (е) Укороченная гипоциклоида. (ж) Удлинённая эпициклоида. (з) Укороченная эпициклоида.

нулю, жидкие частицы просто вращаются по окружности.

Предположим, что волны на поверхности вращающейся полости тоже относятся к классу птолемеевских течений, тогда функции G и F должны определяться граничными условиями. Так как на бесконечности жидкость вращается как целое, в формуле (24) следует положить

$$G(\chi) = R \exp(i\chi) = v, \quad \lambda = \omega, \quad (26)$$

и считать, что $|F| \rightarrow 0$ при $|v| \rightarrow \infty$; в плоскости лагранжевой переменной χ области соответствует полуполоса в нижней полуплоскости $\text{Im } \chi \leq 0, 0 \leq \text{Re } \chi \leq 2\pi$ или внешняя область окружности радиусом R в плоскости комплексной переменной v .

Функцию F найдём из условия постоянства давления на свободной поверхности полости, соответствующей равенству $|v| = R$. С учётом соотношений (10), (11) выражение для давления можно представить (действием силы тяжести пренебрегаем) как

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \frac{1}{2} \omega^2 |v|^2 + \frac{1}{2} \mu^2 |F|^2 + \\ &+ \text{Re} \int (\omega^2 v \bar{F}' + \mu^2 \bar{F}) \exp[i(\lambda - \mu)t] dv. \end{aligned}$$

Для того чтобы на свободной поверхности давление оставалось постоянным, необходимо обращение в нуль коэффициента при временному множителе. Это выполняется, если

$$F(\bar{v}) = A \bar{v}^{-q^2}, \quad q = \frac{\mu}{\omega}, \quad (27)$$

где A — постоянная. Окончательное выражение для W получим, подставив равенства (26), (27) в выражение (24):

$$W = v \exp(i\omega t) + A \bar{v}^{-q^2} \exp(iq\omega t), \quad (28)$$

откуда легко заключить, что траекториями жидких частиц являются укороченные эпициклоиды ($q > 0$) и гипоциклоиды ($q < 0$), а профилями распространяющихся волн — эпициклоиды с числом выступов $q^2 - 1$, причём, чтобы профиль был замкнутым, следует считать q^2 целым. Для постоянной, определяющей амплитуду волн, имеется верхний предел R^{q^2+1}/q^2 , когда на свободной поверхности образуются заостре-

ния (при больших значениях A на профиле образуются петли (рис. 4а, в, д, ж), что физически нереализуемо).

Эпициклоидальные волны — вихревые. Завихренность для них записывается следующим образом:

$$\Omega_* = \frac{2\omega(1 - q^5 A^2 |v|^{-2(q^2+1)})}{1 - q^4 A^2 |v|^{-2(q^2+1)}},$$

откуда видно, что величина завихренности зависит в том числе и от знака q .

Найдём угловую скорость вращения стационарного профиля волн ω_0 . Вращение жидкости как целого с этой частотой характеризуется общим множителем $\exp(i\omega t)$ в выражении для W , поэтому в системе отсчёта, где профиль неподвижен, решение (28) примет вид

$$W = v \exp[i(\omega - \omega_0)t] + A \bar{v}^{-q^2} \exp[i(q\omega - \omega_0)t].$$

В этой системе траектории жидких частиц совпадают с формой профиля, следовательно, справедливо равенство

$$q\omega - \omega_0 = q^2(\omega - \omega_0),$$

из которого находим

$$\omega_0 = \frac{q\omega}{q + 1}.$$

В системе отсчёта, движущейся с угловой частотой ω , частота вращения профиля равняется $(q + 1)^{-1}\omega$, так что волны, соответствующие отрицательным q , движутся в направлении вращения, а положительным — против.

Отметим, что Иногамов [18] пришёл к аналогичному результату, также используя комплексные лагранжевые координаты. Но он не вводил концепцию птолемеевских течений, угадав решение в виде (28) [18], и не рассматривал его возможные обобщения.

Изученные волны находят интересную параллель в магнитной гидродинамике. Если центробежная сила выталкивает вращающиеся частицы к периферии, то сила Лоренца в магнитном поле, наоборот, удерживает заряженные частицы во вращающемся ядре. В работе [57] решены две задачи: 1) об азимутальных волнах в столбе, находящемся в однородном продольном магнитном поле равномерно заряженного электронного газа, с учётом эффектов конечной температуры; 2) о равновесной форме плазменного цилиндра в аналогичном внешнем поле. В обоих случаях границей поперечного сечения является гипоциклоида. Для азимутальных волн определён спектр собственных частот. Частота, как и для всех нелинейных волн герстнеровского типа, не зависит от амплитуды.

2.6. Обобщённые волны Герстнера при переменном давлении на свободной поверхности

Традиционно в теории волн на воде ставится условие постоянства давления на свободной поверхности. Но в присутствии ветра оно может нарушаться. Тогда действию нарушения этого условия можно приписать формирование неоднородного и нестационарного распределение давления вдоль свободной поверхности и изучать влияние заданных граничных условий на эволюцию волн.

Рассмотрим такого рода обобщения волн Герстнера. Предположим, что области течения в лагранжевых пере-

Таблица. Примеры обобщённых волн Герстнера (α, β — постоянные, имеющие в каждом из примеров разные значения)

Волновая модель	$G(\chi)$	$F(\bar{\chi})$	Литература
Осциллирующий стоячий солитон	χ	$\frac{\beta}{(\bar{\chi} + i)^n}, \quad \beta > 0, \quad n \geq 2$	[58]
Колеблющийся солитон на фоне волны Герстнера	χ	$iA \exp(i\bar{\chi}) + \frac{\beta}{(\bar{\chi} + i)^n}$	[58]
Обрушение бризера на спокойной воде	$\chi - \frac{i\beta}{(\chi - i)^2}$	$\frac{i\beta}{(\bar{\chi} + i)^2}$	[59]
Нестационарные волны Герстнера	$\chi + \frac{\beta}{\chi - i\alpha}$	$iA \exp(i\bar{\chi})$	[60]
Волна-убийца внутри пакета волны Герстнера	$\chi + \frac{i}{k} \ln \left(1 + P \left(\frac{\chi}{\alpha} \right) \right),$ $P \left(\frac{\chi}{\alpha} \right) = \frac{i\beta}{i\alpha - \chi}$	$iA \left(1 + \overline{P \left(\frac{\chi}{\alpha} \right)} \right) \exp(i\bar{\chi})$	[61]
Волна-убийца на фоне волны Герстнера	$\chi - \frac{i\beta}{(\chi - i\alpha)^2}$	$-iA \exp(i\bar{\chi}) + \frac{i\beta}{(\bar{\chi} + i\alpha)^2}$	[62]

менных по-прежнему соответствует нижнее полупространство, а движение жидкости описывается выражением

$$W = G(\chi) + F(\bar{\chi}) \exp(-i\omega t). \quad (29)$$

Это движение принадлежит семейству птолемеевских течений, но функция G уже может отличаться от линейной, а функция F — от экспоненциальной (см. (25)). В выражении (29) функция G определяет уровень, относительно которого вращаются частицы свободной поверхности, а модуль функции F задаёт радиус их вращения по окружности (амплитуду волны). На глубине частицы покоятся, поэтому должно выполняться условие

$$|F| \rightarrow 0 \quad \text{при } b \rightarrow -\infty.$$

Поскольку функция F — аналитическая, она достигает максимального значения на свободной границе. Отсюда следует, что частицы свободной поверхности будут колебаться с наибольшей амплитудой.

Волновое решение (29) отвечает следующему распределению давления:

$$\begin{aligned} \frac{p - p_0}{\rho} = & -g \operatorname{Im} [G + F \exp(-i\omega t)] + \frac{1}{2} \omega^2 |F|^2 + \\ & + \operatorname{Re} \left[\exp(i\omega t) \int \omega^2 G' \bar{F} d\chi \right], \end{aligned}$$

p_0 — постоянная. В общем случае давление меняется периодически по времени и неоднородно вдоль свободной поверхности $\operatorname{Im} \chi = 0$. По существу, мы имеем целый класс точных решений, описывающих сложную динамику свободной границы при неоднородном и гармонически меняющемся вдоль неё давлении. Завихренность волн (29) определяется равенством

$$\Omega_* = \frac{2\omega |F'|^2}{|G'|^2 - |F'|^2}.$$

В цикле работ [58–62] изучены различные примеры обобщённых волн Герстнера (29). Данные о них сведены в таблице. Птолемеевские решения позволяют на модельном уровне анализировать широкий класс нестационарных явлений. Остановимся на двух из них.

2.6.1. Обрушение бризера.

Рассмотрим птолемеевское течение вида [59]

$$W = \chi - \frac{i\beta}{(\chi - i)^2} + \frac{i\beta}{(\bar{\chi} + i)^2} \exp(-i\omega t), \quad \operatorname{Im} \chi < 0. \quad (30)$$

В выражении (30) величины W, χ, β считаются безразмерными. Переход к размерным величинам осуществляется с помощью замен $W \rightarrow \alpha_* W, \chi \rightarrow \alpha_* \chi, \beta \rightarrow \alpha_*^3 \beta$, где α_* — некоторый масштаб длины. Динамика свободной поверхности жидкости для течения (30) представлена на рис. 5. Решение (30) эволюционирует по-разному в зависимости от величины β [59]. Начнём анализ с $t_0 = \pi/\omega$. В этот момент форма свободной границы симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через точку максимального отклонения (рис. 5а) высотой 2β (или $2\alpha_* \beta$ в размерном виде). Для отрицательного β свободная поверхность имеет впадину. Когда $\beta > 0$, профиль имеет гребень.

Рисунок 5 показывает эволюцию бризера в течение одного периода осцилляций. Возмущение свободной поверхности изменяет форму, но не движется как целое. Поэтому мы можем называть его бризером. Со временем профиль бризера изменяется. Возможны два качественно разных режима: а) для $\beta = -0,25$ или $\beta = 0,5$ у профиля нет точек перегиба; б) для $\beta = 0,85$ профиль имеет точки перегиба и наблюдается опрокидывание бризера.

Интерес для нас будет представлять профиль с $\beta = 0,85$, изображённый жирной кривой на рис. 5. С течением времени крутизна переднего фронта возрастает и при $t_1 = 4,25/\omega$ (рис. 5б) точка перегиба появляется первый раз. Эта точка характеризуется вертикальной касательной к профилю, показанной пунктирной

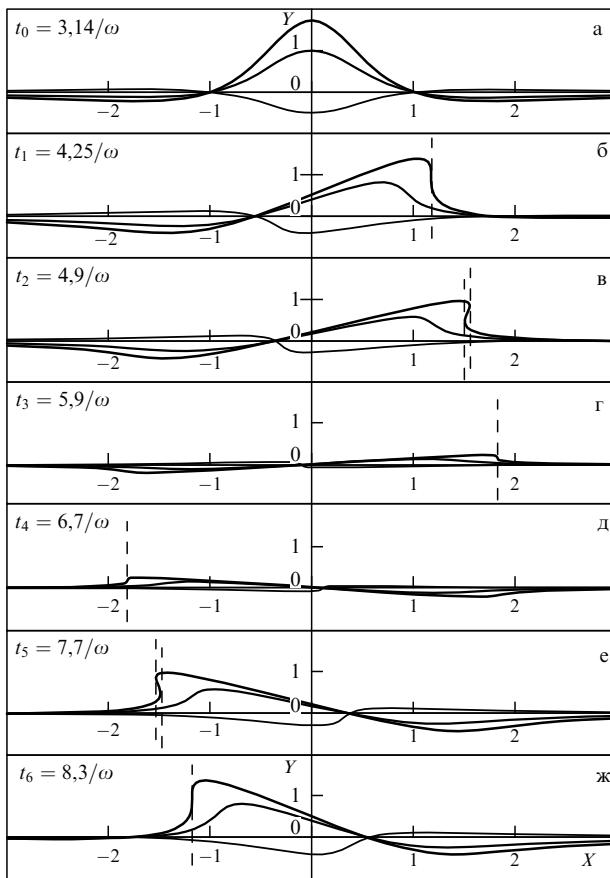


Рис. 5. Эволюция профиля близера для различных величин β . Жирная чёрная кривая соответствует $\beta = 0,85$, тонкая чёрная — $\beta = 0,5$, светлая кривая — $\beta = -0,25$. Координаты X и Y нормированы на α_* .

линей. Далее, профиль имеет две точки перегиба вплоть до момента $t_3 = 5,9/\omega$, когда они сливаются. Затем точка перегиба исчезает. В момент $t = 2\pi/\omega$ свободная поверхность становится плоской.

В течение следующего полуцикла все стадии эволюции повторяются симметрично (рис. 5д–ж), но точки перегиба формируются на левом склоне близера. Точка перегиба возникает при $t_4 = 6,7/\omega$, когда крутизна достаточно мала. Наблюдать такую ситуацию в натурных условиях едва ли возможно. Но динамика близера в течение первого полуцикла очень схожа с опрокидыванием океанских волн. Ближе к моменту появления вертикальной касательной у профиля необходимо учитывать уже влияние вязкости, которая разрушит рассматриваемое решение в некоторый момент $t_* > t_1$. Таким образом, выражение (30) описывает опрокидывание волны в интервале (t_0, t_*) . Например, можно выбрать $t_* = t_2$.

Подчеркнём, что выражение (30) соответствует неоднородному и нестационарному распределению давления на свободной поверхности. Давление осциллирует в противофазе с колебаниями профиля.

2.6.2. Волна-убийца на фоне волны Герстнера. На рисунке 6 изображена динамика волновой поверхности для выражения (29) с функциями G и F , соответствующими формулам в последней строке таблицы [62]. Численный расчёт проводился для случая $A = 0,5$ м, $k = 0,074$ м⁻¹, $\alpha = 12$ м, $\beta = 328$ м³, $\omega = \sqrt{gk} = 0,85$ с⁻¹, $\lambda = 84,9$ м. В начальный момент ($t = 0$) форма свободной поверхности (верхняя кривая) в точности совпадает с профилем волны Герстнера. В дальнейшем на профиле начинает расти пик, который в момент $t = \pi/\omega$ достигает максимальной величины, а впоследствии уменьшается и исчезает к концу периода. Наибольшая высота пика $h = 2\beta/\alpha^2 + A \approx 5,1$ м превосходит амплитуду волны Герстнера A в восемь раз. Поэтому формирование пика может рассматриваться как образование волны-убийцы (подробнее о феномене волн-убийц см. [63]). Причиной тому служит действующее на границе давление. Нижняя кривая на рис. 6 показывает отклонение давления на свободной поверхности от атмосферного p_0 . В каждой точке поверхности давление на свободной поверхности изменяется со временем, но его отрицательный перепад в области пика волны составляет около 100 мм ртутного столба.

3. Точные решения для волн с учётом вращения Земли

Выберем на вращающейся Земле систему отсчёта, как показано на рис. 7. Её начало находится на широте Φ , ось X направлена на восток, ось Y — горизонтально на север, а ось Z — вертикально вверх. В этой системе отсчёта вектор угловой скорости вращения Земли Ω лежит в плоскости YZ . Во вращающейся системе на каждую частицу помимо силы тяжести будут действовать сила Кориолиса и центробежная сила, а уравнение движения

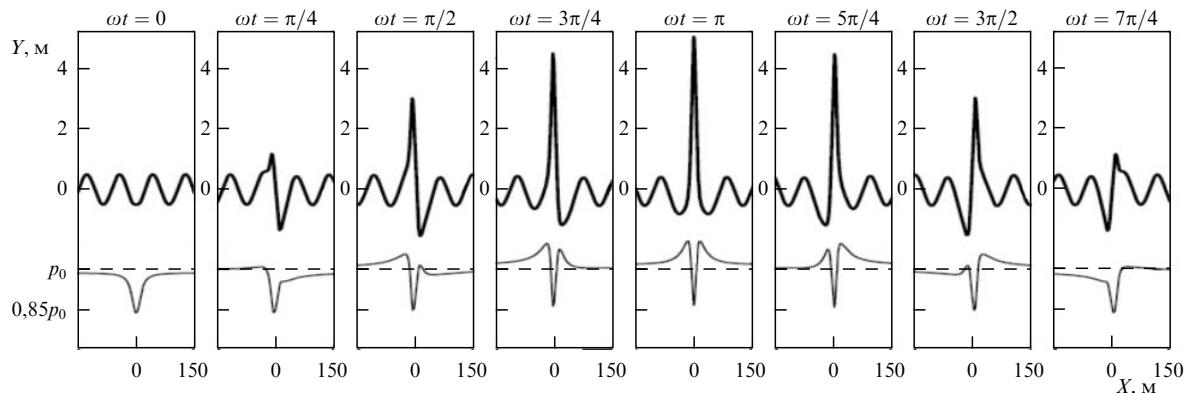


Рис. 6. Образование волны-убийцы на фоне волны Герстнера.

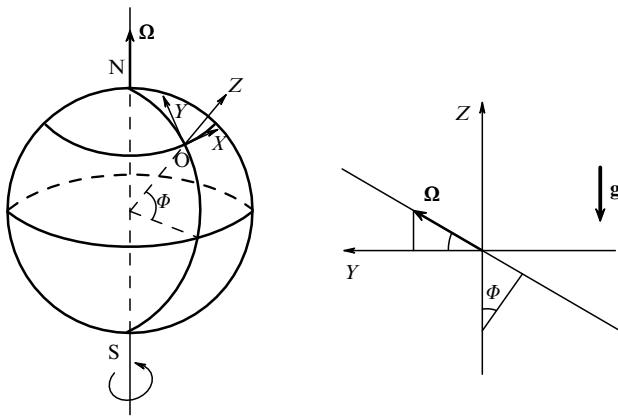


Рис. 7. Система координат на поверхности Земли.

примет следующий вид [29]:

$$\mathbf{R}_{tt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_t = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}), \quad (31)$$

здесь $\Phi = -gZ$ — потенциал силы тяжести; в левую часть включено ускорение Кориолиса, а в правую часть — центростремительное ускорение со знаком минус. Центробежная сила имеет градиентный характер, поэтому уравнение (31) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{tt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_t &= -\frac{1}{\rho} \nabla H, \\ H &= \frac{\rho}{\rho} - \Phi + \Phi_c, \quad \Phi_c = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})^2, \end{aligned} \quad (32)$$

где Φ_c — потенциал центробежных сил.

Умножая скалярно уравнение (31) на \mathbf{R}_{ai} , получим уравнения движения в лагранжевых координатах:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{tt} \mathbf{R}_{ai} + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_t) \mathbf{R}_{ai} &= -H_{ai}, \\ i = 1, 2, 3, \quad \{a_i\} &= \{a, b, c\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Вместе с уравнением непрерывности (5) три уравнения (33) составляют систему уравнений идеальной несжимаемой жидкости в лагранжевых переменных во вращающейся системе отсчёта.

В разделах 3.1, 3.2 будут изучены различные волновые движения, когда:

а) угловую скорость вращения Земли во всей области течения можно считать неизменной: параметры Кориолиса $f = 2\Omega_Z = 2\Omega \sin \Phi$ и $\tilde{f} = 2\Omega_Y = 2\Omega \cos \Phi$ полагаются постоянными (приближение f -плоскости);

б) приэкваториальные течения находятся в полосе малых широт $\Phi \sim Y/R_*$, R_* — радиус Земли, параметры Кориолиса: $f = \beta Y$, $\beta = 2\Omega/R$ и $\tilde{f} = 2\Omega$ (приближение β -плоскости).

Представление для вектора $\boldsymbol{\Omega}$ в каждом из случаев будет разным, но для них можно сформулировать общий результат [64, 65]. Исключим из уравнений (33) градиентный член путём взятия перекрёстных производных и после промежуточных вычислений получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{R}_{ta_j} \mathbf{R}_{a_i} - \mathbf{R}_{ta_i} \mathbf{R}_{a_j} + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_{a_j}) \mathbf{R}_{a_i}] = 0, \quad i \neq j,$$

которое эквивалентно условиям сохранения трёх инвариантов, S_1, S_2, S_3 :

$$\mathbf{R}_{tb} \mathbf{R}_c - \mathbf{R}_{tc} \mathbf{R}_b + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_b) \mathbf{R}_c = S_1(a, b, c), \quad (34)$$

$$\mathbf{R}_{tc} \mathbf{R}_a - \mathbf{R}_{ta} \mathbf{R}_c + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_c) \mathbf{R}_a = S_2(a, b, c), \quad (35)$$

$$\mathbf{R}_{ta} \mathbf{R}_b - \mathbf{R}_{tb} \mathbf{R}_a + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_a) \mathbf{R}_b = S_3(a, b, c), \quad (36)$$

являющихся функциями только лагранжевых координат. Уравнения (34)–(36) представляют собой следствие уравнений движения. Вместе с уравнением непрерывности (5) они составляют систему уравнений гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости во вращающейся системе отсчёта.

В случае $\boldsymbol{\Omega} = 0$ уравнения (34)–(36) принимают следующий вид:

$$\mathbf{R}_{tb} \mathbf{R}_c - \mathbf{R}_{tc} \mathbf{R}_b = S_{10}(a, b, c), \quad (37)$$

$$\mathbf{R}_{tc} \mathbf{R}_a - \mathbf{R}_{ta} \mathbf{R}_c = S_{20}(a, b, c), \quad (38)$$

$$\mathbf{R}_{ta} \mathbf{R}_b - \mathbf{R}_{tb} \mathbf{R}_a = S_{30}(a, b, c), \quad (39)$$

индекс 0 обозначает движение в невращающейся системе отсчёта. Выражения (37)–(39) впервые были записаны Коши (1815 г.), и Ламб приводит их в книге [4]. Функции S_{10}, S_{20}, S_{30} , названные инвариантами Коши [27, 28, 66–71], равны циркуляциям по каждой из трёх бесконечно малых замкнутых кривых, плоскости которых перпендикулярны координатным осям [4]. Формулы (37)–(39) дают обобщение инвариантов Коши для движения во вращающейся системе отсчёта.

3.1. Волны Герстнера во вращающейся жидкости

В приближении f -плоскости (f — постоянный параметр Кориолиса) Поллард указал следующее точное решение уравнений гидродинамики [12]:

$$\begin{cases} X = a - \frac{Am}{k} \exp(mc) \sin[k(a - Ut)], \\ Y = b + f \frac{Am}{k^2 U} \exp(mc) \cos[k(a - Ut)], \\ Z = c + A \exp(mc) \cos[k(a - Ut)], \end{cases} \quad (40)$$

здесь A, m — положительные постоянные, k и U — соответственно волновое число и фазовая скорость волн. Подставляя (40) в уравнение непрерывности (5), получим

$$\det \hat{R} = 1 - m^2 A^2 \exp(2mc).$$

Область течения задаётся условием $c \leq c_0 < 0$, поэтому для однозначности отображений (40) (необращения детерминанта в нуль) следует потребовать, чтобы выполнялось неравенство $A \leq 1/[m \exp(mc)]$, гарантирующее отсутствие самопересечений на профиле волны (в волне Герстнера роль параметра m играет волновое число).

Подстановкой (40) в выражения (34)–(36) проверяем, с одной стороны, их корректность, а с другой — вычисляем значение обобщённых инвариантов Коши:

$$S_1 = 0,$$

$$S_2 = m(k^2 - m^2)UA^2 \exp(2mc) + \tilde{f}[1 - m^2 A^2 \exp(2mc)],$$

$$S_3 = f.$$

Из уравнения (35) находится также значение параметра m :

$$m^2 = \frac{k^4 U^2}{k^2 U^2 - f^2}. \quad (41)$$

Таким образом, в решении (40) остаётся лишь один свободный параметр A , определяющий амплитуду волн.

Волновые колебания частиц экспоненциально затухают с увеличением глубины, поэтому условие непротекания на дне ($c = -\infty$) выполняется. Для определения давления следует подставить выражения (40) в уравнения (33) и пренебречь центробежной силой. Выражение для давления имеет вид

$$p - p_0 = \rho \frac{mgA^2}{2} [\exp(2mc) - \exp(2mc_0)] - \rho g(c - c_0). \quad (42)$$

Как и для волны Герстнера, давление зависит только от вертикальной лагранжевой координаты. При выводе соотношения (42) как следствие независимости давления на свободной поверхности от времени находится дисперсионное уравнение волн:

$$U^2(k^2 U^2 - f^2) = (g - \tilde{f} U)^2.$$

Если вращение отсутствует (параметры Кориолиса равны нулю), то последнее уравнение переходит в дисперсионное соотношение для волн Герстнера. Волна бежит с запада на восток, а её гребни параллельны оси Y .

Из соотношений (40), (41) следует, что жидкые частицы движутся по окружностям:

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = \frac{m^2 A^2}{k^2} \exp(2mc).$$

Центр каждой из этих окружностей находится в точке (a, b, c) , которая не совпадает с начальным положением частицы, а радиус вращения равен $mA \exp(mc)/k$. Сопоставляя два последних выражения решения (40), заключаем, что движение происходит одинаковым образом во всех плоскостях, параллельных плоскости

$$Y - f \frac{m}{k^2 U} Z - b + f \frac{m}{k^2 U} c = 0,$$

составляющей с осью Z угол $\arctan [fm/(k^2 U)]$. Траектории вращения частиц лежат в этих плоскостях. На экваторе $f = 0$, $m = k$ и решение Полларда переходит в решение Герстнера (см. (14), роль b играет теперь координата c). На экваторе частицы колеблются в плоскости XZ , при $f \neq 0$ угол наклона плоскости их колебаний в каждом полушарии обращён к соответствующему полюсу. Правда, как заключил сам Поллард [12], величина этого угла крайне мала.

Устойчивость волн Полларда исследована в коротковолновом пределе. При превышении определённого порога крутизны они неустойчивы к возмущениям, попечерным к направлению распространения (запад – восток) [69].

Константин и Монисмит рассмотрели распространение волн Полларда на фоне однородного зонального потока U_0 . Если в первое из выражений (40) добавить слагаемое $-U_0 t$, то они по-прежнему будут служить точным решением уравнений вращающейся жидкости. Но дисперсионное соотношение будет другим. Исследуя

его, авторы [72] указали на возможность существования двух типов волн. Первый, описанный Поллардом, представляет немного модифицированную волну Герстнера, в которой отсутствует дрейф жидких частиц. Второй тип (инерциальная волна Герстнера), который характеризуется более медленной скоростью распространения, "привязан" к среднему течению и не может возникнуть в его отсутствие.

Удаётся учесть также эффект вращения Земли и для краевых волн Герстнера [15]. Вид точного решения схож с выражениями (21), только масштабы экспоненциального затухания по вертикали и горизонтали теперь разные. Статьи Молло-Кристенсена [14, 15] написаны чрезвычайно лаконично. Более полно и обстоятельно их идеи обсуждаются и развиваются в работе [73] для приэкваториальной области и в работах [74, 75] для произвольной широты.

3.2. Волны в приэкваториальной области

Вблизи экватора в приближении β -плоскости уравнения (34)–(36) принимают вид [65]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(X_t, X)}{\partial(b, c)} + \frac{\partial(Y_t, Y)}{\partial(b, c)} + \frac{\partial(Z_t, Z)}{\partial(b, c)} + \\ & + 2\Omega \frac{\partial(Z, X)}{\partial(b, c)} + \beta Y \frac{\partial(X, Y)}{\partial(b, c)} = S_1(a, b, c), \\ & \frac{\partial(X_t, X)}{\partial(c, a)} + \frac{\partial(Y_t, Y)}{\partial(c, a)} + \frac{\partial(Z_t, Z)}{\partial(c, a)} + \\ & + 2\Omega \frac{\partial(Z, X)}{\partial(c, a)} + \beta Y \frac{\partial(X, Y)}{\partial(c, a)} = S_2(a, b, c), \\ & \frac{\partial(X_t, X)}{\partial(a, b)} + \frac{\partial(Y_t, Y)}{\partial(a, b)} + \frac{\partial(Z_t, Z)}{\partial(a, b)} + \\ & + 2\Omega \frac{\partial(Z, X)}{\partial(a, b)} + \beta Y \frac{\partial(X, Y)}{\partial(a, b)} = S_3(a, b, c). \end{aligned} \quad (43)$$

Приближение f -плоскости на экваторе следует из них, если положить $\beta = 0$ (при этом $f = 0$, $\tilde{f} = 2\Omega$).

3.2.1. Приближение f -плоскости. Рассмотрим двумерные приэкваториальные течения в плоскостях, параллельных плоскости XZ , т.е. $Y = b$. Уравнение непрерывности (5) примет вид

$$\frac{\partial(X, Z)}{\partial(a, c)} = S_0(a, c), \quad (44)$$

где S_0 — не зависящая от времени функция, а из уравнений для инвариантов Коши следует

$$\frac{\partial(X_t, X)}{\partial(a, c)} + \frac{\partial(Z_t, Z)}{\partial(a, c)} = -S_2(a, c) - 2\Omega S_0(a, c). \quad (45)$$

Система уравнений (44), (45) эквивалентна системе (9), (12) с той лишь разницей, что роль координаты b теперь играет переменная c . Соотношения (44), (45) представляют собой систему уравнений двумерной гидродинамики, так что все точные решения для плоских волн в невращающейся жидкости останутся в силе и в приближении f -плоскости. При этом выражения для завихренности волн и их дисперсионные соотношения изменятся. Следуя подобным рассуждениям, Хсу описал волну Герстнера в приэкваториальной области в f -приближе-

нии [76], а Класчек изучил влияние на неё однородного течения [77]. В работе [78] найден порог крутизны, при превышении которого волна Герстнера становится неустойчивой.

Решение уравнений (44), (45) вида $X = X(a, c, t)$, $Z = Z(a, c, t)$ можно обобщить, полагая

$$Y = b + \sigma(a, c)t.$$

Последнее соответствует наложению на известное двумерное движение меридионального течения с профилем $\sigma(a, c)$. Это изменяет завихренность суммарного течения и инварианты S_1 , S_3 , которые приобретают значения $S_1 = -\sigma'_c$ и $S_3 = \sigma'_a$. Генри изучил влияние таких течений на волну Герстнера [79], Класчек — на герстнеровскую волну на течении [77], а Абрашкин — на птолемеевские течения в приэкваториальной области [64].

В эту копилку точных решений стоит добавить также описание волны Герстнера, генерируемой бегущей гармонической волной давления [64]. Давление p на профиле герстнеровской волны выражается в виде (см. (14), $b \rightarrow c$):

$$\begin{aligned} \frac{p - p_0}{\rho} = & -gc + \frac{\omega(\omega + 2\Omega)}{2} A^2 \exp(2kc) + \\ & + [\omega(\omega + 2\Omega)k^{-1} - g] A \cos(ka - \omega t). \end{aligned} \quad (46)$$

Традиционно для волн на воде ставят граничное условие постоянства давления на свободной поверхности ($c = 0$). Отсюда, приравнивая нуль множитель перед косинусом в выражении (46), получают дисперсионное уравнение волн [76]. Однако можно предположить, что на свободной поверхности в результате действия ветра поддерживается распределение давления в виде гармонической бегущей волны:

$$p^* = p_1 + p_2 A \cos(ka - \omega t), \quad (47)$$

где p_1 , p_2 — постоянные величины, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \frac{\omega(\omega + 2\Omega)}{2} \rho A^2, \\ p_2 &= \rho [\omega(\omega + 2\Omega)k^{-1} - g] A. \end{aligned} \quad (48)$$

При выполнении условий (48) можно говорить, что герстнеровское решение (14) соответствует стационарным трохоидальным волнам на поверхности жидкости, поддерживаемым внешним давлением (47). По известным ω и k из второго соотношения системы (48) находится амплитуда волны A , а из первого — величина p_0 . Возышение свободной поверхности определяется формулой $Y = A \cos(ka - \omega t)$, поэтому в случае положительных значений p_2 давление изменяется в фазе с профилем, а при отрицательных — в противофазе. Случай $p_2 = 0$ отвечает волне Герстнера с постоянным давлением на профиле.

Разрешая квадратное уравнение в (48) относительно ω , получим дисперсионное соотношение для волн:

$$\omega = \pm \sqrt{\Omega^2 + \left(g + \frac{p_2}{\rho A}\right)k - \Omega}. \quad (49)$$

Будем считать $(g + p_2/\rho A) > 0$. Выбирая знак +, получим волну, бегущую на восток, знак минус соответствует

распространению волны на запад. Интересно сравнить дисперсионное уравнение (49) с дисперсионным соотношением для экваториальных волн на однородном течении [77]. Величина $p_2/(2\rho A\Omega)$ аналогична скорости течения. Таким образом, ветер в зависимости от знака p_2 либо ускоряет, либо замедляет волны.

Рассмотренное решение интересно и с точки зрения реализации волн Герстнера в лабораторных и натурных условиях. Одним из возможных механизмов их генерации, как следует из нашего анализа, может быть ветер.

3.2.2. Захваченные волны (приближение β -плоскости). В случае, когда параметр Кориолиса изменяется линейно с расстоянием (это приближение называют β -плоскостью), Константин нашёл точное решение системы (43):

$$\begin{cases} X = a - \frac{1}{k} \exp\{k[c - h(b)]\} \sin[k(a - Ut)], \\ Y = b, \\ Z = c + \frac{1}{k} \exp\{k[c - h(b)]\} \cos[k(a - Ut)], \end{cases} \quad (50)$$

где $h(b) = \beta b^2/[2(kU + 2\Omega)]$, а фазовая скорость волны выражается как

$$U = \frac{\sqrt{\Omega^2 + kg} - \Omega}{k}.$$

Лагранжевы переменные a , b изменяются в пределах $(-\infty, \infty)$, тогда как c лежит в пределах $(-\infty, c_0)$, где $c_0 < 0$. Соотношения (50) описывают экваториальные поверхности волны, бегущие со скоростью U в восточном направлении [80]. Это периодические пространственные волны, амплитуда которых в меридиональном направлении убывает экспоненциально, в связи с чем их называют захваченными. При $h = 0$ выражения (50) переходят в решение Герстнера. Дополнительный экспоненциально затухающий множитель у амплитуды — "изюминка" этого точного решения.

Выражения для обобщённых инвариантов Коши волн (50) выглядят следующим образом [65]:

$$\begin{aligned} S_1 &= 0, \quad S_2 = 2\Omega - 2(kU + \Omega) \exp(2\zeta), \\ S_3 &= \beta b \left[1 - \frac{2(kU + \Omega)}{kU + 2\Omega} \exp(2\zeta) \right], \quad \zeta = k[c - h(b)]. \end{aligned} \quad (51)$$

Зональная компонента вектора \mathbf{S} $\{S_1, S_2, S_3\}$ равна нулю. Завихренность $\boldsymbol{\omega}$ для волн (50) определяется следующими равенствами [80]:

$$\boldsymbol{\omega} = S_0^{-1} \left\{ -bkU^2g^{-1}\beta \exp\zeta \sin\theta, -2kU \exp(2\zeta), \right. \\ \left. bkU^2g^{-1}\beta [\exp\zeta \cos\theta - \exp(2\zeta)] \right\}, \quad (52)$$

$$S_0^{-1} = 1 - \exp(2\zeta), \quad \theta = k(a - Ut).$$

Все три компоненты завихренности отличны от нуля, а зональная и вертикальная составляющие зависят от времени. Сравнение формул (51) и (52) показывает наглядное различие между вектором завихренности и вектором лагранжевых инвариантов.

Давление в жидкости записывается так:

$$p - p_0 = \rho g \left(\frac{\exp(2\zeta)}{2k} - c \right) - \rho g \left(\frac{\exp(2kc_0)}{2k} - c_0 \right). \quad (53)$$

Вид свободной поверхности на экваторе, где $b = 0$, получается из (50), если положить $c = c_0$. Захваченные экваториальные волны можно качественно сопоставить с краевыми волнами вдоль вертикальной береговой стены на экваторе.

Захваченные экваториальные волны, как и их более простые аналоги — волны Герстнера и краевые волны герстнеровского типа, линейно неустойчивы, когда их крутизна превышает некоторый предел [81].

Выражения (50) являются уникальным примером точного решения уравнений движения жидкости в экваториальной области. Они обобщаются для случая однородного зонального приповерхностного течения [82–84], учёта центробежных сил [85], коррекции силы гравитации в рамках стандартной модели β -плоскости [86] и краевых волн у наклонного берега, лежащего параллельно экватору [87]. В работах [88, 89] соотношения (50) используются для описания волн, распространяющихся на фоне зонального течения вдоль произвольной широты. При этом используется нетрадиционное β -приближение, когда параметр f изменяется с широтой, а параметр \tilde{f} полагается постоянным. Такое приближение для пространственной задачи является весьма грубым, и полученные решения для волн нельзя называть точными.

4. Волны в стратифицированной жидкости

Внушительная библиография, посвящённая волнам герстнеровского типа во вращающейся жидкости, преимущественно основывается на трёх решениях для однородной жидкости, описывающих:

- волны Герстнера [3];
- волны над наклонным дном [13–16];
- захваченные приэкваториальные волны [80].

Именно они останутся в центре внимания и в данном разделе.

4.1. Непрерывная стратификация

Пусть известно некоторое точное решение $X(a, b, c, t)$, $Y(a, b, c, t)$, $Z(a, b, c, t)$ для волн герстнеровского типа в однородной жидкости с плотностью ρ^0 . Одна из особенностей таких волн состоит в том, что давление в них зависит только от двух лагранжевых переменных: $p^0 = p^0(\varphi(b, c))$, где $\varphi(b, c)$ — функция, постоянная на свободной поверхности (верхний индекс указывает, что это давление в однородной жидкости).

Пусть в стратифицированной жидкости представления для X, Y, Z останутся такими же, а её плотность ρ_s — некоторая функция от $\varphi(b, c)$. Это означает, что $\rho_s = \rho_s(p^0)$. Поскольку плотность стратифицированной жидкости не зависит от времени, уравнение непрерывности (5) будет выполняться. Чтобы остались справедливыми и уравнения движения (7), следует положить

$$\frac{1}{\rho^0} \frac{\partial p^0}{\partial a_i} = \frac{1}{\rho_s(p^0)} \frac{\partial p_s}{\partial a_i}, \quad a_i = \{a, b, c\},$$

где p_s — давление в стратифицированной жидкости. Как следствие записанного условия

$$p_s = \int \frac{\rho_s(p^0)}{\rho^0} dp^0.$$

Давление p_s — функция давления в однородной жидкости. Выбором константы интегрирования удовлетворяется условие постоянства давления на свободной поверхности.

Посредством схожих рассуждений было указано на существование в стратифицированной жидкости волн Герстнера [10], краевых волн на наклонном берегу: классических [13, 90] и экваториальных в приближении f -плоскости [13, 91], а также захваченных приэкваториальных волн [80]. Решение Герстнера остаётся справедливым в стратифицированной жидкости с произвольным распределением $\rho_s(b)$ [8]. Для всех остальных решений вид стратификации зависит от некоторых выражений частного вида, содержащих уже две координаты: b и c . Это довольно широкий класс стратификаций, но, разумеется, не самый общий.

Ещё одну, крайне неожиданную, область приложения герстнероподобных решений указал Годин [92, 93], заметив, что в случае, когда давление, энтропия и плотность остаются постоянными для движущейся частицы, описания несжимаемых движений сжимаемой жидкости и течения несжимаемой жидкости кинематически эквивалентны. Это означает, что движение несжимаемой среды, для которого указанные термодинамические величины для жидкой частицы служат инвариантами и удовлетворяют уравнению состояния для сжимаемой среды, также описывают и её течение. Для волн Герстнера и рассмотренных их "модификаций" (в [92, 93] подробно разбирается пример краевых волн) давление и плотность можно выбрать таким образом, чтобы их связь соответствовала, например, идеальному или политропному газу. Тогда волновое герстнероподобное решение будет описывать в том числе и движение сжимаемой жидкости с выбранным уравнением состояния.

4.2. Волны в слоях с разрывами плотности

Молло-Кристенсен [94] обратил внимание на два оригинальных обстоятельства, связанных с волной Герстнера.

Рассмотрим двухслойную модель жидкости (рис. 8). Пусть плотности нижнего и верхнего слоёв постоянны и равны соответственно ρ_1 и ρ_* ($\rho_1 > \rho_*$). Предположим, что в нижней жидкости на фоне однородного потока U распространяется волна Герстнера (14), а верхняя представляет собой равномерный поток со скоростью, равной скорости герстнеровской волны $U + \omega/k$. В этом случае на границе раздела скорость будет непрерывной, а равенство давлений с обеих сторон выполняется, если положить, что частота волны ω удовлетворяет условию

$$\omega^2 = \frac{\rho_1 - \rho_*}{\rho_1} gk,$$

которое совпадает с дисперсионным соотношением линейных волн на границе раздела двух жидкостей. Построенное таким образом решение описывает внут-



Рис. 8. Двухслойная модель Молло-Кристенсена.

ренною волну Герстнера на однородном потоке и может быть обобщено для случаев как произвольно стратифицированной нижней жидкости, так и для однородно вращающейся жидкости [94].

Частный случай двухслойной модели Молло-Кристенсена, когда верхняя жидкость неподвижна и $U = -\omega/k$, изучался в [95]. Это условие соответствует остановившейся волне, т.е. движению жидких частиц с плотностью ρ_1 по трохоидальным траекториям в отрицательном направлении оси X (автор [95] не отмечает этого обстоятельства). Идеи Молло-Кристенсена в более полном виде были развиты применительно к зонально бегущим волнам в приэкваториальной области. В приближении f -плоскости дано описание внутренних волн Герстнера [96], а также их трансформации на течении [97] и вкупе с ним меридионального потока [98].

Вторая находка автора [94] ещё более красива. Перешифтуем выражения (14), изменив знак перед синусом и в показателях экспоненты (текущее изучается в плоскости XY):

$$\begin{aligned} X &= a + A \exp(-kb) \sin(ka - \omega t), \\ Y &= b + A \exp(-kb) \cos(ka - \omega t). \end{aligned} \quad (54)$$

Эти соотношения тоже удовлетворяют системе уравнений гидродинамики (9), (12), но чтобы они описывали ограниченные по амплитуде волны, следует считать $b > 0$. Амплитуда волны будет убывать с увеличением вертикальной лагранжевой координаты, что соответствует перевёрнутой трохоидальной волне Герстнера, но только обращённой своими впадинами теперь вверх. Назовём такие волны антигерстнеровскими.

Как итог, в работе [94] предложена модель трёхслойного течения жидкости (рис. 9):

- в нижней жидкости ($b = b_1 < 0$) с плотностью ρ_1 вдоль оси X бежит волна Герстнера с частотой ω_1 на фоне однородного течения U_1 ;
- в верхней жидкости ($b = b_2 > 0$) с плотностью ρ_2 вдоль оси X бежит антигерстнеровская волна с частотой ω_2 на фоне однородного течения U_2 ;
- в центральной части ($b_1 \leq b \leq b_2$) захваченная волной жидкость с плотностью $\rho_*(\rho_1 > \rho_* > \rho_2)$ течёт равномерно в направлении оси X со скоростью

$$U_1 + \frac{\omega_1}{k} = U_2 + \frac{\omega_2}{k},$$

где k — одинаковое для обеих волн волновое число. Выражения для частот определяются из условия непрерывности давления на границах раздела [94].

Данная схема течений служит моделью облаков, захваченных волнами и движущихся вместе с ними. Молло-Кристенсен использует для них термин *billows* — большие волны, валы. Многие облачные валы не содержат конденсата и поэтому остаются невидимыми, но их характерной чертой как раз является конечная величина амплитуды возмущений. В статье [94] рассмотрены два случая: гравитационные волны в невращающейся среде и геострофические волны ($g = 0$, но учитывается вращение атмосферы). Комбинированный случай, в котором принимается во внимание и действие гравитации, и вращение Земли, получается объединением этих двух решений. Применительно к океану идея трёхслойной модели для системы "герстнер–антигерстнер" использовалась в [99].

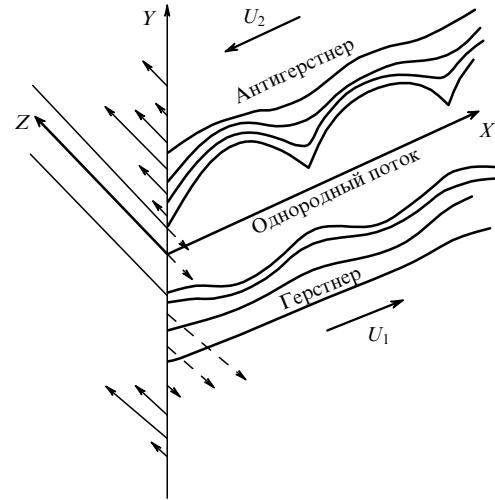


Рис. 9. Трёхслойная модель Молло-Кристенсена. Направления течения указаны для геострофических валов [94]. Стрелками вдоль оси Z обозначен меридиональный поток с переменным по направлению профилем скорости.

Многослойные движения жидкости с захваченными герстнероподобными волнами в приэкваториальной области изучал Константин [100, 101]. Роль волн Герстнера в указанных работах играют открытые их автором приэкваториальные волны [80]. В работе [100] рассматриваются бегущие на восток экваториально-захваченные волны в термоклине (симметричные относительно экватора). Жидкость над термоклином предполагается покоящейся (аналог двухслойной модели Молло-Кристенсена). В работе [101] изучен "антигерстнеровский" вариант волн, когда амплитуда волновых возмущений выше термоклина убывает, а ниже его движется однородный поток. Устойчивость данных двухслойных моделей исследуется в статьях [102–104], а в работах [105, 106] рассматриваются их обобщения для случая дополнительных фоновых течений. Класчек по примеру работы [101] построил решение для внутренней волны Полларда [107, 108], в нашей терминологии — "антиполлардовскую" волну. Но правильнее называть все волны, описанные в настоящей статье, герстнероподобными.

Вебер, изучая свойства слабонелинейных волн на границе двух жидкостей [109, 110], предлагает называть всякую волну, для которой отсутствует дрейф жидких частиц, герстнероподобной. Очевидно, все проанализированные и упоминаемые нами точные решения обладают таким свойством. В этом смысле, видимо, имеет смысл говорить о семействе различных волн, которые могут быть объединены именем Герстнера и называться герстнероподобными.

5. Заключение

В статье приведён полный набор точных решений для волн в жидкости, связанных с классическим решением Герстнера. Нельзя не отметить, что практически половина работ, приведённых в списке литературы, относится к последнему десятилетию. Можно без преувеличения сказать, что решение Герстнера для волн на глубокой воде обрело "вторую молодость". Особо отметим значительный вклад в развитие этого направления научной

школы профессора Венского университета Адриана Константина. Также уместно вспомнить, что имя Франца Йозефа Герстнера пользуется необычайным почтением в Австрии в связи с его заслугами в области образования и инженерии. Но он навсегда вошёл и в историю мировой науки как автор первого точного решения в теории нелинейных волн.

Все представленные семейства герстнероподобных волн обладают завихренностью. В связи с этим неизбежно возникает вопрос о механизме её генерации. В рамках модели идеальной жидкости завихренность в жидкости естественно связать со сдвиговыми течениями (задаваемыми изначально), на фоне которых и рождаются волны. Так, в частности, Г. Ламб объяснял возможность образования волны Герстнера [4]. Этот механизм срабатывает при возбуждении эпциклоидальных волн на поверхности полости во вращающейся жидкости (цилиндрических волн Герстнера [18, 19]). Монисмит и др. наблюдали волну Герстнера, создавая в приповерхностном слое фоновое течение, которое компенсировало дрейф жидких частиц в направлении распространения волны [20]. Волны Герстнера наблюдались также в других лотках [21–23] и в открытом океане [24].

Возможен, однако, и иной сценарий образования вихревых поверхностных волн, связанный уже с учётом действия вязкости вблизи свободной поверхности. Например, в приближении вязкой жидкости стоячие волны на поверхности колеблющегося сосуда (рябь Фарадея) являются потенциальными в линейном приближении. Но в квадратичном приближении благодаря действию вязкости они становятся вихревыми [111]. Этот результат напоминает об аналогичном свойстве волны Герстнера, которая в линейном приближении тоже не обладает завихренностью, но приобретает её в следующем. И ещё одно интересное обстоятельство. Завихренность капиллярной ряби, измерявшаяся в эксперименте, изменялась прямо пропорционально квадрату крутизны волны [111]. При достаточно малых значениях крутизны волны так же ведёт себя и завихренность волны Герстнера. Конечно, результаты для стоячих волн нельзя однозначно переносить на бегущие колебания, тем более что в данном случае у ряби вектор завихренности направлен вертикально. Но приведённый пример показывает, что на качественном уровне сценарий с вязким подслоем представляется весьма реалистичным. Кроме того, если на поверхности жидкости находится упругая пленка, то эффект генерации вертикальной завихренности возрастает [112]. Последнее указывает на возможность более эффективной генерации волн Герстнера в жидкостях, на поверхности которых находится упругая пленка (см. также [24]). Сценарий с вязким подслоем играет определяющую роль и в задачах возбуждения поверхности вихревой волны ветром. Но вопрос о механизме генерации волны Герстнера всё ещё остаётся открытым. Это задача на будущее.

Работа поддержана государственным заданием Института прикладной физики РАН, тема № 0030-2021-0007 "Исследование нелинейных волновых процессов и турбулентности в геофизических и биологических системах и технических устройствах". Работа выполнена при поддержке лабораторией динамических систем и приложений Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики", грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-

1931. Авторы выражают искреннюю признательность рецензенту за глубокое изучение статьи и ценные рекомендации по её улучшению.

Список литературы

1. Scott R J, in *Report on the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844* (London: John Murray, 1844) p. 311
2. Korteweg D J, de Vries G *Phil. Mag.* **39** 422 (1895)
3. Gerstner F "Theorie der Wellen" *Abhandlungen Königlichen Böhmisches Gesellschaft Wissenschaften* (1802); *Ann. Physik* **2** 412 (1809)
4. Lamb H *Hydrodynamics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932); Пер. на русск. яз.: Ламб Г *Гидродинамика* (М.-Л.: ОГИЗ, 1947)
5. Воронин М И, Воронина М М *Франц Антон Герстнер, 1793–1840* (СПб.: Наука, 1994)
6. Straub H *Die Geschichte der Bauingenieurkunst* (Wissenschaft und Kultur, Vol. 4) (Basel: Springer, 1964) <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-4109-2>
7. Stokes G G *Cambridge Trans.* **8** 441 (1847); *Mathematical and Physics Papers* Vol. 1 (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1880) p. 197
8. Крылов А Н *Собрание сочинений* Т. 11 *Качка корабля* (М.-Л.: Изд. АН СССР 1951) с. 183
9. Сретенский Л Н *Теория волновых движений жидкости* (М.: Наука, 1977)
10. Dubreil-Jacotin M L *Atti. Accad. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* **6** (15) 814 (1932)
11. Benjamin T B, Feir J E *J. Fluid Mech.* **27** 417 (1967)
12. Pollard R T *J. Geophys. Res.* **75** 5895 (1970)
13. Yih C-S *J. Fluid Mech.* **24** 765 (1966)
14. Mollo-Christensen E *Phys. Fluids* **25** 586 (1982)
15. Mollo-Christensen E *J. Phys. Ocean.* **9** 226 (1978)
16. Constantin A *J. Phys. A* **34** 9723 (2001)
17. Mollo-Christensen E *J. Atmos. Sci.* **35** 1395 (1978)
18. Иногамов Н А *ДАН СССР* **278** (1) 57 (1984); Inogamov N A *Sov. Phys. Dokl.* **29** 714 (1984)
19. Абрашкин А А *Прикладная механика техническая физика* (3) 86 (1984); Abrashkin A A *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **25** 411 (1984)
20. Monismith S G et al. *J. Fluid Mech.* **573** 131 (2007)
21. Swan C, in *Proc. of the 22nd Intern. Coastal Engineering Conf., July 2–6, 1990, Delft, The Netherlands* (Ed. B L Edge) (New York: American Society of Civil Engineers, 1990) p. 489
22. Jiang J Y, Street R L S *J. Geophys. Res. Oceans* **96** 2711 (1991)
23. Thais L, Thèse (Toulouse: Inst. Nat. Polytech, 1994)
24. Smith J A *J. Phys. Oceanogr.* **36** 1381 (2006)
25. Leblanc S J. *Fluid Mech.* **506** 245 (2004)
26. Weber J E H *Wave Motion* **48** 301 (2011)
27. Bennett A *Lagrangian Fluid Dynamics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006)
28. Абрашкин А А, Якубович Е И *Вихревая динамика в лагранжиевом описании* (М.: Физматлит, 2006)
29. Pedlosky J *Geophysical Fluid Dynamics* (New York: Springer-Verlag, 1979); Пер. на русск. яз.: Педлоски Дж *Геофизическая гидродинамика* Т. 1 (М.: Мир, 1984)
30. Truesdell C *The Kinematics of Vorticity* (Bloomington: Indiana Univ. Press, 1954)
31. Овсянников Л В *Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей* (Новосибирск: Наука, 1967) с. 5
32. Коchin Н Е, Кибель И А, Розе Н В *Теоретическая гидромеханика* Т. 1 (М.: Физматлит, 1963); Пер. на англ. яз.: Kochin I A, Kibel' I A, Roze N V *Theoretical Hydromechanics* Vol. 1 (New York: Interscience Publ., 1964)
33. Froude W *Trans. Inst. Naval. Arch.* **3** 45 (1862)
34. Rankine W J M *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **153** 127 (1863)
35. Reech F *C.R. Acad. Sci. Paris* **68** 1099 (1869)
36. Абрашкин А А, Пелиновский Е Н *УФН* **188** 329 (2018); Abrashkin A A, Pelinovsky E N *Phys. Usp.* **61** 307 (2018)
37. Kinsman B *Wind Waves: Their Generation and Propagation on the Ocean Surface* (New York: Dover, 2002)
38. Монин А С *ДАН СССР* **203** 769 (1972)
39. Constantin A *J. Phys. A* **34** 1405 (2001)
40. Henry D J. *Nonlin. Math. Phys.* **15** 87 (2008)

41. Constantin A, in *Nonlinear Water Waves with Applications to Wave-Current Interactions and Tsunamis* (CBMS-NSF Conf. Series in Applied Mathematics, Vol. 81) (Philadelphia, PA: SIAM, 2011)
42. Stokes G G, in *Rep. 16th Brit. Assoc. Adv. Sci.* (1846) p. 1; *Papers* Vol. 1 (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1880) p. 157
43. Johnson R S *Phil. Trans. R. Soc. A* **365** 2359 (2007)
44. Дубинина В А и др. *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **40** 525 (2004)
45. Ionescu-Kruse D *J. Differ. Equ.* **256** 3999 (2014)
46. Dubreil-Jacotin M L *J. Math. Pures Appl.* **9** *13* 217 (1934)
47. Gouyon R *Ann. Faculté Sci. l'Univ. Toulouse* (4) 22 1 (1958)
48. Абрашкин А А, Зенькович Д А *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана* **26** (1) 35 (1990)
49. Абрашкин А А *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа* (4) 125 (1996); Abrashkin A A *Fluid Dyn.* **31** 583 (1996)
50. Abrashkin A A, Pelinovsky E H *Nonlin. Proc. Geophys.* **24** 255 (2017)
51. Абрашкин А А, Пелиновский Е Н *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **1** 112 (2018); Abrashkin A A, Pelinovsky E N *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **54** (1) 101 (2018)
52. Lighthill M J *J. Inst. Math. Appl.* **1** (3) 269 (1965)
53. Philips O M *J. Fluid Mech.* **7** 340 (1960)
54. Сунь Цао *Прикладная механика техническая физика* (3) 90 (1960)
55. Абрашкин А А, Якубович Е И *ДАН СССР* **276** (1) 76 (1984); Abrashkin A A, Yakubovich E I *Sov. Phys. Dokl.* **29** 370 (1984)
56. Абрашкин А А, Якубович Е И *Прикладная механика техническая физика* (2) 57 (1985); Abrashkin A A, Yakubovich E I *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **26** 202 (1985)
57. Абрашкин А А *Физика плазмы* **10** 730 (1984); Abrashkin A A *Sov. J. Plasma Phys.* **10** 423 (1984)
58. Абрашкин А А, Соловьев А Г *Изв. РАН. Механика жидкости и газа* (5) 125 (2013); Abrashkin A A, Soloviev A G *Fluid Dyn.* **46** 679 (2013)
59. Abrashkin A A, Oshmarina O E *Phys. Lett. A* **378** 2866 (2014)
60. Abrashkin A A *Chaos Solitons Fractals* **118** 152 (2018)
61. Abrashkin A A, Oshmarina O E *Commun. Nonlin. Sci. Num. Simul.* **34** 66 (2016)
62. Abrashkin A A, Soloviev A *Phys. Rev. Lett.* **110** 014501 (2013)
63. Kharif C, Pelinovsky E, Slunyaev A *Rogue Waves in the Ocean* (Berlin: Springer, 2009)
64. Abrashkin A *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **39** 4443 (2019)
65. Abrashkin A *Deep Sea Res. Pt. II Topical Studies Oceanography* **160** 3 (2019)
66. Абрашкин А А, Зенькович Д А, Якубович Е И *Изв. вузов. Радиофизика* **39** 783 (1996); Abrashkin A A, Zen'kovich D A, Yakubovich E I *Radiophys. Quantum Electron.* **39** 518 (1996)
67. Захаров В Е, Кузнецов Е А *УФН* **167** 1137 (1997); Zakharov V E, Kuznetsov E A *Phys. Usp.* **40** 1087 (1997)
68. Kuznetsov E A *J. Nonlin. Math. Phys.* **13** (1) 64 (2006)
69. Frisch U, Villone B *Eur. Phys. J. H* **39** 325 (2014)
70. Besse N, Frisch U *J. Fluid Mech.* **825** 412 (2017)
71. Ionescu-Kruse D *Phys. Fluids* **28** 086601 (2016)
72. Constantin A, Monismith S G *J. Fluid Mech.* **820** 511 (2017)
73. Matioc A-V *J. Phys. A* **45** 365501 (2012)
74. Weber J E H *J. Geophys. Res.* **117** C03048 (2012)
75. Ionescu-Kruse D *Nonlin. Anal. Real World Appl.* **24** 190 (2015)
76. Hsu H-C *Monatsh. Math.* **176** 143 (2015)
77. Kluczek M *Appl. Anal.* **97** 1867 (2018)
78. Henry D, Hsu H-C *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **35** 909 (2015)
79. Henry D *Nonlin. Anal. Real World Appl.* **28** 284 (2016)
80. Constantin A *J. Geophys. Res. Oceans* **118** 2802 (2013)
81. Constantin A, Germain P *J. Geophys. Res. Oceans* **118** 2802 (2013)
82. Henry D *Eur. J. Mech. B* **38** 18 (2013)
83. Henry D, Sastre-Gomez S *J. Math. Fluid Mech.* **18** 795 (2016)
84. Genoud F, Henry D *J. Math. Fluid Mech.* **16** 661 (2014)
85. Henry D *J. Fluid Mech.* **804** R1 (2016)
86. Henry D *Phil. Trans. R. Soc. A* **376** 20170088 (2017)
87. Ionescu-Kruse D *J. Math. Fluid Mech.* **17** 699 (2015)
88. Chu J, Ionescu-Kruse D, Yang Y *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **39** 4399 (2019)
89. Chu J, Ionescu-Kruse D, Yang Y *J. Math. Fluid Mech.* **21** 19 (2019)
90. Stuhlmeier R *J. Nonlin. Math. Phys.* **18** 127 (2011)
91. Matioc A-V *Appl. Anal.* **92** 2254 (2013)
92. Godin O A *Phys. Rev. Lett.* **108** 194501 (2012)
93. Godin O A *J. Fluid Mech.* **767** 52 (2015)
94. Mollo-Christensen E J *Atmos. Sci.* **35** 1395 (1978)
95. Stuhlmeier R *Appl. Anal.* **93** 1451 (2013)
96. Hsu H-C *J. Math. Fluid Mech.* **16** 463 (2014)
97. Henry D *J. Nonlin. Math. Phys.* **22** 499 (2015)
98. Rodriguez-Sanjurjo A *Monatsh. Math.* **186** 685 (2017)
99. Stuhlmeier R, Stiassnie M *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **34** 3171 (2014)
100. Constantin A *J. Phys. Oceanogr.* **43** 165 (2013)
101. Constantin A *J. Phys. Oceanogr.* **44** 781 (2014)
102. Henry D, Hsu H-C *J. Differ. Equ.* **258** 1015 (2015)
103. Ionescu-Kruse D *Ann. Mat. Pura Appl.* **195** 585 (2016)
104. Rodriguez-Sanjurjo A *Wave Motion* **88** 144 (2019)
105. Kluczek M *J. Math. Fluid Mech.* **19** 305 (2017)
106. Rodriguez-Sanjurjo A, Kluczek M *Appl. Anal.* **96** 2333 (2016)
107. Kluczek M *J. Nonlin. Math. Phys.* **26** (1) 133 (2019)
108. Kluczek M *J. Math. Phys.* **59** 123102 (2018)
109. Weber J E H *Wave Motion* **77** 186 (2018)
110. Weber J E H *Wave Motion* **88** 257 (2019)
111. Filatov S V et al. *Phys. Rev. Lett.* **116** 054501 (2016)
112. Parfenyev V M, Vergeles S S, Lebedev V V *Phys. Rev. E* **94** 052801 (2016)

Gerstner waves and their generalizations in hydrodynamics and geophysics

A.A. Abrashkin^(1,2,a), E.N. Pelinovsky^(1,2,3,b)

⁽¹⁾ National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod Branch,
ul. B. Pecherskaya 25/12, 603155 Nizhny Novgorod, Russian Federation

⁽²⁾ Federal Research Center Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences,
ul. Ul'yanova 46, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation

⁽³⁾ Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, ul. Minina 24, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation
E-mail: ^(a)aab rashkin@hse.ru, ^(b) pelinovsky@hydro.appl.sci-nnov.ru

To mark 220 years since the appearance of Gerstner's paper that proposed an exact solution to the hydrodynamic equations, an overview of exact solutions for water waves is given, each of which is a generalization of the Gerstner wave. Additional factors are coastal geometry, fluid rotation, varying pressure on the free surface, stratification, fluid compressibility, and background flows. Waves on a rotating Earth are studied in the *f*-plane approximation, and, in the near-equatorial region, also in the *β*-plane approximation. The flows are described in Lagrangian variables. For all waves in the absence of background flows, the trajectories of liquid particles are circles, as in the Gerstner wave (hence, their common name — Gerstner-like).

Keywords: Gerstner waves, Lagrangian coordinates, vorticity, Cauchy invariants, edge waves, Ptolemaic flows, rotating fluid, *f*-plane approximation, equatorially trapped waves

PACS number: 47.35.Bb

Bibliography — 112 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **192** (5) 491–506 (2022)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.05.038980>

Received 1 February 2021, revised 9 April 2021

Physics – *Uspekhi* **65** (5) (2022)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2021.05.038980>