

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

"Аномальная" диссипация параксиального волнового пучка, распространяющегося вдоль поглощающей плоскости

А.Г. Шалашов, Е.Д. Господчиков

Приведены решения параболического уравнения Леонтовича – Фока, описывающие структуру параксиального квазиоптического волнового пучка в среде с сильной пространственной неоднородностью коэффициента поглощения поперёк направления распространения пучка. На примере простейшей модельной задачи, описывающей распространение пучка вдоль бесконечно узкого плоского диссипативного слоя, показано, что в этом случае диссипация энергии и дифракция пучка влияют друг на друга, поэтому они должны определяться одновременно, а применение теории возмущений может приводить к качественно неправильным результатам.

Ключевые слова: параксиальный волновой пучок, резонансная диссипация, дифракция, параболическое волновое уравнение

PACS numbers: 42.25. – p, 42.25.Bs, 42.25.Fx

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.09.039068>

Содержание

1. Введение (1399).
 2. Параболическое уравнение с поглощающей плоскостью (1400).
 3. Функция Грина для параболического уравнения (1401).
 4. Асимптотические представления (1402).
 5. Поглощение гауссова пучка (1403).
 6. Некоторые обобщения (1406).
 7. Заключение (1407).
- Список литературы (1408).

1. Введение

Рассмотренная в настоящей заметке задача появилась в результате обобщения опыта моделирования электронно-циклотронного (ЭЦ) резонансного нагрева высокотемпературной плазмы в больших магнитных ловушках, применяемых в исследованиях по освоению энергии управляемого термоядерного синтеза. Характерные размеры таких установок порядка нескольких метров или десятков метров. Плазма нагревается излучением с длиной волны в несколько миллиметров, которое вводится в установку в виде достаточно широких (параксиальных) квазиоптических волновых пучков, беспрепятственно распространяющихся в слабонеоднородной плазме вплоть до области электронно-циклотронного резонанса (ЭЦР) и полностью поглощающихся в линейном режиме.

А.Г. Шалашов^(*), Е.Д. Господчиков
Институт прикладной физики РАН,
ул. Ульянова 46, 603950 Нижний Новгород, Российская Федерация
E-mail: ^(*) ags@appl.sci-nnov.ru

Статья поступила 5 августа 2021 г.,
после доработки 8 сентября 2021 г.

Типичная схема сверхвысокочастотного (СВЧ) нагрева плазмы в токамаке изображена на рис. 1а. Область поглощения излучения "размазана" вдоль поверхностей постоянного модуля магнитного поля B , её характерная толщина определяется температурой электронов и неоднородностью B . Обычно эта толщина мала по сравнению с поперечным размером пучка и неоднородностью плазмы, но велика по сравнению с длиной волны греющего излучения. Прямой расчёт подобных задач, основанный на непосредственном решении уравнений Максвелла с необходимой для интерпретации экспериментов детализацией геометрии и диэлектрического отклика среды, требует неоправданно больших вычислительных ресурсов, в связи с чем в настоящее время он возможен только для достаточно компактных установок [1–6]. Это обусловило развитие и широкое применение асимптотических методов, прежде всего геометрооптического приближения (ray-tracing) [7–11] и его обобщения для квазиоптических пучков, распространяющихся в плазме с сохранением автомодельной формы (безаберрационная квазиоптика, beam-tracing) [12–14]. Численные коды, реализующие указанные методы, настолько хорошо

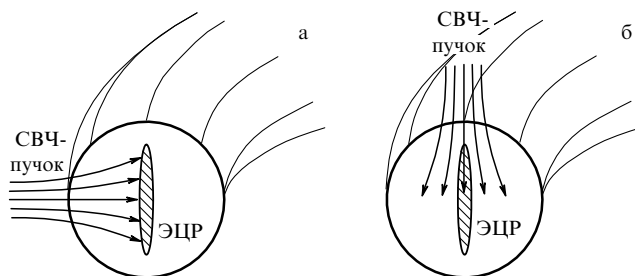


Рис. 1. Экваториальный (а) и вертикальный (б) ввод СВЧ-излучения для ЭЦ-нагрева плазмы в токамаке.

описывают и предсказывают результаты большинства экспериментов по ЭЦ-нагреву плазмы, что применяются как стандартные инструменты, не требующие дополнительной верификации [13–23] (см. также обзор [24]). Более тонкое рассмотрение привлекается только в специальных задачах, связанных с линейным [25–28] и нелинейным [29] взаимодействием волн, во всех остальных случаях отклонение от стандартной геометрической парадигмы, как правило, воспринимается специалистами как малое уточнение хорошо известной и простой физики. Между тем в современном эксперименте всё чаще начинают использоваться схемы ЭЦ-нагрева, в которых геометрическая оптика и безабберационная квазиоптика неприменимы. Причиной этого является либо формирование каустик в окрестности области поглощения, либо сильная вариация резонансного диэлектрического отклика среды [30–32].

Важный пример последнего случая приведён на рис. 1б, где изображена так называемая схема вертикального ввода (tor launch), в которой СВЧ-пучок распространяется вдоль поверхности постоянного магнитного поля, а достаточно узкая область сильного поглощения рассекает пучок на две половины в продольной плоскости. Такая схема реализуется как в тороидальных [33–36], так и в открытых [37, 38] магнитных ловушках. В рамках стандартной лучевой геометрической оптики пучок задаётся конечным набором лучей, а доля поглощённой мощности в пучке определяется количеством лучей, попадающих в область поглощения [33]. Ясно, что для узкой области поглощения факт "попадания" луча, т.е. *широкого* пучка с локально плоским фазовым фронтом, представляет собой довольно неопределённое явление. В приближении безабберационной квазиоптики поглощение обычно рассчитывается лишь на центральном луче [13]. В нашем случае применимость такого приближения сильно ограничена, поскольку неоднородное по поперечному сечению поглощение быстро разрушает автомодельную структуру пучка. Обобщённое квазиоптическое описание, последовательно учитывающее неоднородную диссипацию и дифракцию в резонансных средах с пространственной дисперсией, существует и является вполне развитым [39–43], тем не менее имеется достаточное число работ (мы не будем указывать их явно), в которых для расчёта эффективности ЭЦР-нагрева с вертикальным вводом применяются методы геометрической оптики и безабберационной квазиоптики.

Исходной целью настоящей статьи было представить простейший пример, наглядно демонстрирующий ограниченность традиционных методов для решения задачи с профилем поглощения, обострённым в поперечном сечении волнового пучка. В результате возникла новая, как нам кажется, эталонная задача с довольно неожиданной физикой, которая может быть интересна не только специалистам в области СВЧ-нагрева плазмы, но и более широкому кругу читателей, так или иначе интересующихся волновыми процессами в диссипативных линейных средах.

Структура настоящей статьи следующая. В разделе 2 формулируется базовая модель — параболическое уравнение Леонтовича–Фока [44], описывающее дифракцию двумерного волнового пучка в изотропной среде с поглощающей (бесконечно тонкой) плоскостью. В разделах 3 и 4, носящих в целом технический характер, на-

ходятся общее решение начальной задачи и его асимптотики на малых и больших трассах распространения. В разделе 5, основном, разработанная техника применяется для исследования диссипации гауссова пучка, проводится сравнение точного решения и результатов упомянутых выше приближённых подходов. В разделе 6 кратко обсуждается обобщение наших результатов для случая трёхмерных пучков с поперечной апертурой, ограниченной в двух направлениях, и сред с анизотропным и гиротропным диэлектрическим откликом. В заключении (раздел 7) подведены итоги.

2. Параболическое уравнение с поглощающей плоскостью

Рассмотрим стационарное волновое уравнение для поля $u \propto \exp(-i\omega t)$ в изотропной среде с комплексной диэлектрической проницаемостью ε ,

$$\Delta u + k_0^2 \varepsilon u = 0, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}. \quad (1)$$

Чтобы максимально упростить задачу, допустим, что $\text{Re } \varepsilon$ не зависит от координат, а всё поглощение сосредоточено в плоском слое с нулевой толщиной:

$$\text{Re } \varepsilon = \text{const}, \quad k_0^2 \text{Im } \varepsilon = 2\nu \delta(y). \quad (2)$$

Поглощению соответствует $\nu > 0$. Это моделирует описанную во введении ситуацию, когда резонансное поглощение происходит в слое, узком по сравнению с поперечной апертурой пучка. С практической точки зрения такая постановка не вполне корректна, поскольку в силу соотношений Крамерса–Кронига резонансное поглощение $\text{Im } \varepsilon(\omega)$ неизбежно приведёт к локализованному в той же области возмущению эрмитовой компоненты $k_0^2 \text{Re } \varepsilon(\omega) \sim \nu/y$. Данный эффект не меняет качественных выводов, представленных в настоящей заметке, поэтому мы ограничимся простейшей моделью (2).

Будем искать решение в виде произведения огибающей и несущей гармоники вдоль координаты x ,

$$u = U(x, y) \exp(ikx), \quad k = k_0 \sqrt{\text{Re } \varepsilon}.$$

Параксиальное приближение получается, если после подстановки этого выражения в (1) отбросить член $\partial^2 U / \partial x^2$, полагая, что зависимость $U(x)$ является плавной на масштабах длины волны $2\pi/k$ [44–48]. В результате с учётом (2) получаем

$$2ik \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2i\nu \delta(y)U = 0. \quad (3)$$

Нас будут интересовать решения задачи при $x > 0$, отвечающие заданному при $x = 0$ начальному распределению $U_0(y)$ с конечной интенсивностью:

$$U(0, y) = U_0(y), \quad I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |U_0(y)|^2 dy < \infty. \quad (4)$$

Также будем считать, что интенсивность остаётся конечной и при всех $x > 0$, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |U(x, y)|^2 dy < \infty$ и $U(x, \pm\infty) \rightarrow 0$.

При $y \neq 0$ уравнение (3) совпадает со стандартным параболическим уравнением в однородной среде, наличие поглощающего слоя проявляется в присутствии излома (скачка производной) функции U . Действительно,

проинтегрировав (3) в сколь угодно малой окрестности точки $y = 0$ и полагая U непрерывной, получаем дополнительное условие

$$\frac{\partial U(x, +0)}{\partial y} - \frac{\partial U(x, -0)}{\partial y} = -2ivU(x, 0). \quad (5)$$

Используя условие (5), можно получить уравнение переноса энергии вдоль направления распространения пучка x . Рассматривая уравнение (3) при $y < 0$ и $y > 0$, находим

$$\begin{aligned} 2ik \left(U^* \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial U^*}{\partial x} \right) &= U \frac{\partial^2 U^*}{\partial y^2} - U^* \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{\partial U^*}{\partial y} - U^* \frac{\partial U}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Интегрируя последнее выражение по всем y , за исключением выколотой точки $y = 0$, и предполагая, что интегралы в левой части сходятся равномерно, получим

$$\frac{dI}{dx} = -\frac{2v}{k} |U(x, 0)|^2, \quad (6)$$

$$I(x) = \int_{-\infty}^0 |U(x, y)|^2 dy + \int_0^{+\infty} |U(x, y)|^2 dy,$$

где $I(x)$ — интенсивность пучка. Конечно, это же выражение нетрудно получить и непосредственно из (3), интегрируя соотношение

$$\begin{aligned} 2ik \left(U^* \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial U^*}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{\partial U^*}{\partial y} - U^* \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \\ &- 2iv(U^* U + U U^*) \delta(y) \end{aligned}$$

по $y \in (-\infty, +\infty)$ и рассматривая $I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |U(x, y)|^2 dy$. Равенство результатов двух подходов подтверждает корректность использования граничного условия (5) для связи двух "недиссипативных" задач при $y < 0$ и $y > 0$.

Уравнение переноса энергии гарантирует единственность решения задачи при $v > 0$. Рассмотрим два решения, U_1 и U_2 , отвечающие одинаковым начальным условиям (4). В силу (6)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} |U_1 - U_2|^2 dy &\leq 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |U_1 - U_2|^2 dy = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow U_1 \equiv U_2. \end{aligned}$$

Аналогично можно убедиться, что если условие (6) выполнено, то интенсивность $I(x)$ автоматически остаётся конечной при всех $x > 0$.

3. Функция Грина для параболического уравнения

С математической точки зрения рассматриваемая задача является плохо определённой, поскольку граничное условие (5) в общем случае противоречит начальным условиям (4). Решение подобных задач методом разложения по ортогональным функциям обычно приводит к расходящимся рядам или интегралам, работа с которыми требует применения специальных методов регуляризации [49]. Однако этих дополнительных трудностей можно избежать, если воспользоваться интегральными представлениями решения начальной задачи, основанными на технике функций Грина. При таком подходе

меняется формальный порядок операций — сначала проводится суммирование, а затем — разложение начального распределения по ортогональным функциям. Для нашей задачи это приводит к значительному упрощению решения.

Напомним стандартное решение параболического уравнения без диссипации (см., например, [47, § 24, с. 258] или [48, гл. 17, с. 431]). Введём

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(x, \kappa) \exp(iky) d\kappa, \\ U_0(\kappa) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(y') \exp(-iky') dy'. \end{aligned} \quad (7)$$

Из уравнения (3) при $v = 0$ получим

$$\begin{aligned} 2ik \frac{\partial U(x, \kappa)}{\partial x} - \kappa^2 U(x, \kappa) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow U(x, \kappa) &= U_0(\kappa) \exp\left(\frac{\kappa^2 x}{2ik}\right). \end{aligned}$$

Подставляя последнее решение в (7) и проводя интегрирование по κ , находим общее решение

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} U_0(y') G(x, y - y') dy'. \quad (8)$$

где $G(x, y)$ — функция Грина

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iky + \frac{\kappa^2 x}{2ik}\right) d\kappa = \\ &= \sqrt{\frac{k}{2\pi ix}} \exp\left(\frac{iky^2}{2x}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} G(x, y) &= \delta(y), \\ \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y - y') G^*(x, y - y'') dy &= \delta(y' - y''). \end{aligned}$$

Первое свойство гарантирует выполнение начального условия при $x = 0$, второе — сохранение интенсивности пучка $I(x) \equiv I_0$. Основная идея последующего анализа состоит в том, что решение при наличии диссипации можно составить из двух бездиссипативных решений вида (8), сшивая их на границе $y = 0$.

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда начальное распределение огибающей поля пучка симметрично по y : $U_0(y) = U_0(-y)$. Тогда решение $U(x, y)$ также чётно по y , поэтому его можно искать только в области $y > 0$. Граничное условие (5) при этом преобразуется в

$$\frac{\partial U(x, 0)}{\partial y} = -ivU(x, 0). \quad (10)$$

Общее решение в полупространстве $y > 0$ определяется по аналогии с (8) как

$$U(x, y > 0) = \int_{-\infty}^{\infty} V(y') G(x, y - y') dy', \quad (11)$$

где $V(y')$ — некоторая, пока неизвестная, функция. При $y' > 0$ функция $V(y')$ должна совпадать с U_0 , для того чтобы обеспечить выполнение начального условия; при $y' < 0$ у нас остаётся свобода доопределить эту функцию так, чтобы обеспечить выполнение граничного условия

при $y = 0$ и всех x . Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial y} &= \int_{-\infty}^{\infty} V(y') \frac{\partial}{\partial y} G(x, y - y') dy' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V(y')}{\partial y'} G(x, y - y') dy',\end{aligned}$$

поэтому граничное условие (10) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial V(y')}{\partial y'} + iv V(y') \right\} G(x, y') dy' \equiv 0. \quad (12)$$

Далее мы поступим следующим образом: угадаем функцию $V(y')$, обеспечивающую выполнение (12), и воспользуемся единственностью решения исходной начальной задачи. Поскольку G чётна по y' , для выполнения условия (12) при всех x достаточно, чтобы функция в фигурных скобках была нечётной. Это условие однозначно определяет $V(y')$:

$$V(y') = \begin{cases} U_0(y'), & y' \geq 0, \\ W(-y'), & y' < 0, \end{cases}$$

где функция положительного аргумента $W(y)$ определяется дифференциальным уравнением

$$W' - ivW = U_0' + ivU_0.$$

Начальное условие для W следует из непрерывности V в нуле; скачок этой функции означал бы особенность типа дельта-функции в производной $V(y')$, которая не удовлетворяет требованию нечётности. Используя $W(0) = U_0(0)$, находим $W(y)$ в явном виде:

$$W(y) = U_0 + 2iv \int_0^y U_0(y') \exp(iv(y - y')) dy'.$$

В итоге общее решение (11) задачи с симметричным начальным распределением можно представить в виде суммы формального решения (8) и диссипативной добавки:

$$\begin{aligned}U(x, y > 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} U_0(y') G(x, y - y') dy' + \\ &+ \int_0^{\infty} (W(y') - U_0(y')) G(x, y + y') dy' .\end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования, второе слагаемое в последнем выражении можно привести к виду

$$\begin{aligned}\Delta U &= 2iv \int_0^{\infty} \int_0^{y'} U_0(y'') \exp(iv(y' - y'')) \times \\ &\times G(x, y + y') dy'' dy' = \\ &= 2iv \int_0^{\infty} U_0(y') \int_{y'}^{\infty} \exp(-iv(y' - y'')) \times \\ &\times G(x, y + y'') dy'' dy' .\end{aligned}$$

Внутренний интеграл по y'' можно выразить через дополнительную функцию ошибок $\operatorname{erfc} z$:

$$\begin{aligned}\Delta G &= 2iv \int_{y'}^{\infty} \sqrt{\frac{k}{2\pi ix}} \exp\left(iv(y'' - y') + \frac{ik}{2x}(y + y'')^2\right) dy'' = \\ &= iv \exp\left(-iv(x + y) - \frac{iv^2 x}{2k}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{vx + ky + ky'}{\sqrt{2ikx}}\right). \quad (13)\end{aligned}$$

Напомним, что наше решение справедливо при $y > 0$. Для того чтобы получить симметричное решение в отрицательной полуплоскости, достаточно сделать замену $y \rightarrow |y|$ в выражении для ΔU . В результате для симметричного пучка окончательно получим

$$\begin{aligned}U(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} U_0(y') G(x, y - y') dy' + \\ &+ \int_0^{\infty} U_0(y') \Delta G(x, |y|, y') dy'. \quad (14)\end{aligned}$$

Первое слагаемое автоматически сохраняет чётность по y , поэтому знак модуля можно опустить.

Аналогичным образом можно построить решение для произвольного начального распределения. Проще всего это сделать, если разбить произвольное начальное распределение на симметричную и антисимметричную части,

$$U_0(y) = U_0^+(y) + U_0^-(y),$$

$$U_0^{\pm}(y) = \frac{U_0(y) \pm U_0(-y)}{2},$$

и рассмотреть отвечающие им решения $U^{\pm}(x, y)$ уравнения (3) по отдельности. Очевидно, что эти решения будут сохранять симметрию начального распределения. В случае непрерывного в нуле начального распределения диссипация нечётного решения отсутствует, $U_0^-(0) = U^-(x, 0) = 0$, поэтому для $U^-(x, y)$ применима бездиссипативная формула (8). Для чётного решения $U^+(x, y)$ воспользуемся только что полученным решением (14). В результате для полного поля $U = U^+ + U^-$ находим следующий наиболее общий результат:

$$\begin{aligned}U(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (U_0^+(y') + U_0^-(y')) G(x, y - y') dy' + \\ &+ \int_0^{\infty} U_0^+(y') \Delta G(x, |y|, y') dy' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} U_0(y') G(x, y - y') dy' + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (U_0(y') + U_0(-y')) \Delta G(x, |y|, y') dy'. \quad (15)\end{aligned}$$

Отметим, что второе (диссипативное) слагаемое всегда чётно по поперечной координате, в то время как первое отражает симметрию начального распределения, поэтому не обязательно является чётным.

4. Асимптотические представления

При $x \rightarrow 0$ первое слагаемое в (14) и (15) стремится к начальному распределению U_0 . Убедимся, что диссипативная добавка, связанная с вкладом ΔG , действительно исчезает. При $x \rightarrow 0$ выражение для ΔG (13) содержит быстро осциллирующий множитель $\exp(ik(y + y'')/2x)$, который даёт основной вклад при минимальном значении $|y + y''|$, т.е. при нижней подстановке $y'' = y'$. Поэтому мы можем положить $iv(y'' - y') \rightarrow 0$, отсюда

$$\Delta G \approx iv \operatorname{erfc} \left[\frac{k(y + y')}{\sqrt{2ikx}} \right].$$

При вычислении ΔU перейдём к переменной $\xi = y\sqrt{k/2ix}$:

$$\begin{aligned}\Delta U(x, y) &= \int_0^\infty U_0^+(y') \Delta G dy' \approx \\ &\approx i v \sqrt{\frac{2ix}{k}} \int_0^\infty U_0^+ \left(\xi' \sqrt{\frac{2ix}{k}} \right) \operatorname{erfc}(\xi + \xi') d\xi' \approx \\ &\approx i v \sqrt{\frac{2ix}{k}} U_0(0) \Phi(\xi),\end{aligned}\quad (16)$$

где $\Phi(\xi) = \int_0^\infty \operatorname{erfc}(\xi + \xi') d\xi'$ — функция, принимающая максимальное значение $\Phi(0) = 1/\sqrt{\pi}$ в области поглощения и убывающая как $\Phi(\xi) \approx \exp(-\xi^2)/(2\xi^2\sqrt{\pi}) \sim \sim x/(ky^2)$ на периферии. Таким образом, мы получили, что при малых x поправка ΔU представляет собой узкое распределение по y с шириной порядка $\sqrt{x/k}$ и амплитудой, убывающей при приближении к начальному сечению как $\sqrt{x}$. Неаналитический закон убывания амплитуды возник вследствие несогласованности начальных и граничных условий. Можно убедиться, что если U_0 с самого начала удовлетворяет (4) и (5) одновременно, то зависимость $\sqrt{x}$ в общем решении для U исчезает вследствие того, что вклад от ΔU в точности компенсируется вкладом от скачка производной U_0 в бездиссипативном слагаемом $\int U_0 G dy'$.

Рассмотрим теперь случай больших x . При вычислении асимптотики функции Грина (13) при $x \rightarrow \infty$ заметим, что аргумент дополнительной функции ошибок неограниченно возрастает, поэтому мы можем воспользоваться асимптотическим разложением [50]

$$\begin{aligned}\operatorname{erfc} z &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \dots \right\}, \\ |\arg z| &< \frac{3\pi}{4}, \quad |z| \rightarrow \infty.\end{aligned}\quad (17)$$

Однако следует иметь в виду, что в нашем случае $z^2 = -i(vx + ky + ky')^2/(2kx)$ — чисто мнимое число, определяющее фазовый множитель в экспоненте, малые поправки к которому должны сравниться с π , а не друг с другом. Поэтому разлагать по малому параметру мы будем только степенной ряд в фигурных скобках, а аргумент экспоненты оставим как есть. Разлагая выражение в фигурных скобках в (17) по степеням малого параметра $1/(vx)$ и подставляя результат в (13), получим

$$\begin{aligned}\Delta G &= 2\sqrt{\frac{k}{2\pi ix}} \exp\left(\frac{ik(y+y')^2}{2x}\right) \left\{ -1 + \frac{k(y+y'+i/v)}{vx} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^2(y+y')(y+y'+3i/v)}{v^2x^2} + \dots \right\}.\end{aligned}$$

Заметим, что перед фигурными скобками сформировалась в точности бездиссипативная функция Грина $G(x, y + y')$. Поэтому при подстановке в формулы (14) и (15) первый член разложения частично компенсирует вклад за счёт G . В частности, для симметричных начальных распределений U_0^+ нетрудно получить

$$\begin{aligned}U^+(x, y) &= \int_0^\infty U_0^+(y') (G(x, |y| - y') - G(x, |y| + y')) dy' + \\ &+ 2 \int_{|y|}^\infty U_0^+(y' - |y|) \left\{ \frac{ky'}{vx} + \frac{ik}{v^2x} - \frac{k^2y'^2}{v^2x^2} + \dots \right\} \times \\ &\times G(x, y') dy'.\end{aligned}\quad (18)$$

Для применимости этого приближения требуется выполнение условия $|z| \ll 1$ в (17) или

$$vx \gg ky', \quad vx \gg \frac{k}{v}, \quad vx \gg ky. \quad (19)$$

Два первых условия дают ограничение снизу на длину трассы распространения. Здесь мы учитываем, что разброс $y' \sim a$ определяется шириной a начального распределения. На больших трассах пучок вследствие дифракции уширяется по линейному закону, поэтому характерный разброс $y \sim y'x/(ka^2) \sim x/(ka)$, а третье условие (19) сводится к дополнительному требованию сильной диссипации $va \gg 1$. Кроме того, третье условие неизбежно нарушается при вычислении интегралов по всему интервалу изменения поперечной координаты y , приводя, в частности, к расходящимся значениям для полной интенсивности пучка I .

Однако жёсткое третье условие (19) не приводит к ограничению на величину диссипации при вычислении значения поля точно на оси $y = 0$, т.е. непосредственно в области диссипации, что является определённой удачей, поскольку именно это поле и определяет поглощение. При $y = 0$ первое слагаемое в (18) обращается в нуль, т.е. первый член разложения для ΔG в точности компенсирует бездиссипативный вклад от G :

$$U(x, 0) = 2 \int_0^\infty U_0^+(y') \left\{ \frac{ky'}{vx} + \frac{ik}{v^2x} - \frac{k^2y'^2}{v^2x^2} + \dots \right\} G(x, y') dy'. \quad (20)$$

Формула (20) применима при $x \gg ka/v, k/v^2$ для любого $v > 0$. Первые два слагаемых в правой части (20) дают вклад, асимптотически убывающий как $1/x^{3/2}$, причём второе слагаемое в фигурных скобках содержит дополнительный множитель порядка $1/(va)$. Поэтому второе слагаемое является доминирующим для узких пучков при $va \ll 1$, третье слагаемое не влияет на асимптотику при $x \rightarrow 0$, но упрощает итоговое выражение для частного случая узкого гауссова пучка. Для широких пучков, наоборот, первое слагаемое является главным.

Заметим, что выражения (18) и (20) можно упростить, воспользовавшись равенством $\partial G/\partial y' = ik y' G/x$, однако в данной работе это свойство нам не понадобится.

5. Поглощение гауссова пучка

Развитой техники достаточно, чтобы вернуться к основной теме статьи и проиллюстрировать довольно удивительные физические особенности задачи.

Рассмотрим начальное распределение в виде гауссова пучка с полной интенсивностью I_0 и шириной a :

$$U_0(y) = A \exp\left(-\frac{y^2}{2a^2}\right), \quad A^2 = \frac{I_0}{a\sqrt{\pi}}. \quad (21)$$

Прежде чем приводить наше решение, кратко рассмотрим распространённые модели поглощения, упомянутые во введении.

В рамках стандартной лучевой геометрической оптики пучок с плоским фазовым фронтом задаётся симметричным набором лучей, среди них есть только один (в плоской задаче) центральный луч, $y = 0$, вдоль которого имеется поглощение (бесконечно сильное). Поскольку диссипация есть на множестве лучей меры нуль, поглощение полного пучка на слое с нулевой толщиной формально отсутствует. Ситуация исправляется в рамках

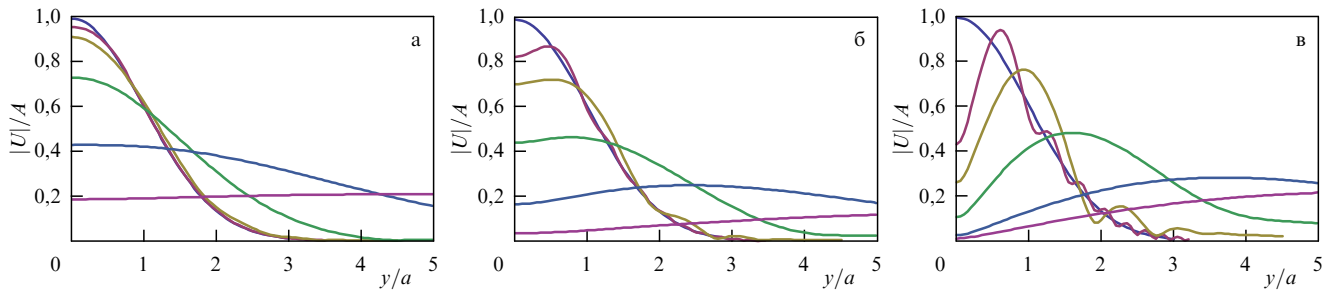


Рис. 2. (В цвете онлайн.) Дифракция начального гауссова пучка с плоским фазовым фронтом в присутствии поглощающей плоскости при $y = 0$ для (а) $va = 0,2$, (б) $va = 1$ и (в) $va = 5$. Построенные профили $|U(y)|$ отвечают последовательным отсчётам эволюционной координаты $\tau = x/(ka^2) = 0,14; 0,3; 1,0; 3,0; 10$.

безабберационного квазиоптического приближения. По сути, этот феноменологический подход является вариантом теории возмущений по малому параметру vka^2 . Строгое решение (8) параболического уравнения без диссипации имеет автомодельный вид гауссова пучка с перестраивающимися за счёт дифракции комплексными параметрами:

$$U(x, y) = \frac{A}{\sqrt{1 + i\tau}} \exp\left(-\frac{y^2}{2a^2(1 + i\tau)}\right), \quad \tau = \frac{x}{ka^2}. \quad (22)$$

Здесь и далее продольную координату x будем выражать в естественных для задач дифракции длинах ka^2 , остальные параметры пока оставим размерными. Для данного решения полная интенсивность сохраняется по мере распространения пучка, $I = I_0$, поэтому без ограничения общности можно считать, что $A^2 = I_0/a\sqrt{\pi}$. Далее полагается, что при наличии диссипации решение сохраняет автомодельный вид (22), т.е. диссипация приводит лишь к дополнительной зависимости параметров $A(\tau)$ и $a(\tau)$ от продольной координаты. Причём в первом не исчезающем порядке $a(\tau) = \text{const}$, а $A(\tau)$ определяется из уравнения переноса энергии (6). Именно так, например, устроен квазиоптический код TORBEAM, широко используемый для расчётов сценариев ЭЦ-нагрева в токамаках и стеллараторах [12–14]. В нашей задаче это приведёт к уравнению переноса

$$\frac{dI}{d\tau} = -\frac{2v}{k} ka^2 \left| \frac{A}{\sqrt{1 + i\tau}} \right|^2 = -\frac{2va}{\sqrt{\pi}} \frac{I}{\sqrt{1 + \tau^2}},$$

решение которого имеет вид

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{2va}{\sqrt{\pi}} \sinh^{-1} \tau\right). \quad (23)$$

Интенсивность пучка на малых расстояниях убывает экспоненциально, в определённом смысле этот участок пути описывается геометрической оптикой, дополненной уравнением переноса излучения вдоль луча $dI/dx = -2k_0 \text{Im} \sqrt{\epsilon} I$. Однако на масштабах $x \gtrsim ka^2$, сравнимых с дифракционной длиной, спад замедляется и становится степенным, отражая тем самым эффект дифракции: расплывание пучка уменьшает поле на оси, поэтому поглощение ослабевает. Тем не менее в безабберационном приближении дифракция не может остановить поглощение — на бесконечной трассе вся энергия пучка перейдёт в среду, $I \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Точное решение параболического уравнения с диссипативным слоем определяется формулами (9), (13), (14) и выражается в случае гауссова падающего пучка (21) через достаточно громоздкие интегралы от функции ошибок,

приводить которые мы не будем. На рисунке 2 приведён пример эволюции поля $U(\tau, \xi)$ для трёх значений параметра, определяющего диссипацию: $va \ll 1$, $va \sim 1$ и $va \gg 1$. Отметим, что при любом значении диссипации происходит формирование немонотонных профилей $|U|$; причём чем больше диссипация, тем раньше по τ эта немонотонность проявляется.

Для определения поглощения нам достаточно иметь информацию лишь о поле на центральной оси пучка, которое можно представить в виде

$$U(\tau, 0) = \frac{A}{\sqrt{1 + i\tau}} \left\{ 1 + i va \int_0^\infty \exp\left(iva\xi - \frac{\xi^2}{2(1 + i\tau)}\right) \times \right. \\ \left. \times \text{erfc}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2i\tau(1 + i\tau)}}\right) d\xi \right\}. \quad (24)$$

В подынтегральном выражении мы перешли к безразмерной поперечной координате, в результате нормированное поле U/A на оси определяется единственным безразмерным параметром va . Этот же параметр остаётся в уравнении переноса энергии, которое записывается в виде

$$\frac{dI}{d\tau} = -\frac{2v}{k} ka^2 |U(\tau, 0)|^2 = -\frac{2va}{\sqrt{\pi}} \frac{I_0}{\sqrt{1 + \tau^2}} |\{\dots\}|^2, \quad (25)$$

где многоточие обозначает выражение в фигурных скобках в (24). На рисунке 3 представлено численное решение уравнения (25) для различных параметров va . Для сравнения приведены также безабберационное решение (23) и асимптотические приближения, рассмотренные ниже.

Видно, что безабберационное приближение всегда завышает поглощение, причём ошибка возрастает с увеличением параметра va . Качественно причина такого завышения понятна. В безабберационном приближении профиль жёсткий, поэтому энергия собирается "мгновенно" со всего сечения пучка, причём при заданной полной интенсивности пучка данный процесс наиболее эффективен, поскольку максимум поля приходится на область поглощения. В строгом решении диссипация "выедает" поле в центре пучка, формируя дополнительный поток энергии из периферийных областей к центру. Этот поток (дифракция) определяется диффузионным членом $\partial_{yy} U$ в параболическом уравнении, в связи с чем на распространение возмущения из периферии пучка требуется конечное "время" $\tau \sim ky^2$, что и приводит в итоге к формированию немонотонного профиля. Максимум поля всё больше отрывается от области поглощения, в результате поглощение убывает настолько быстро, что на достаточно длинной трассе интенсивность пучка пере-

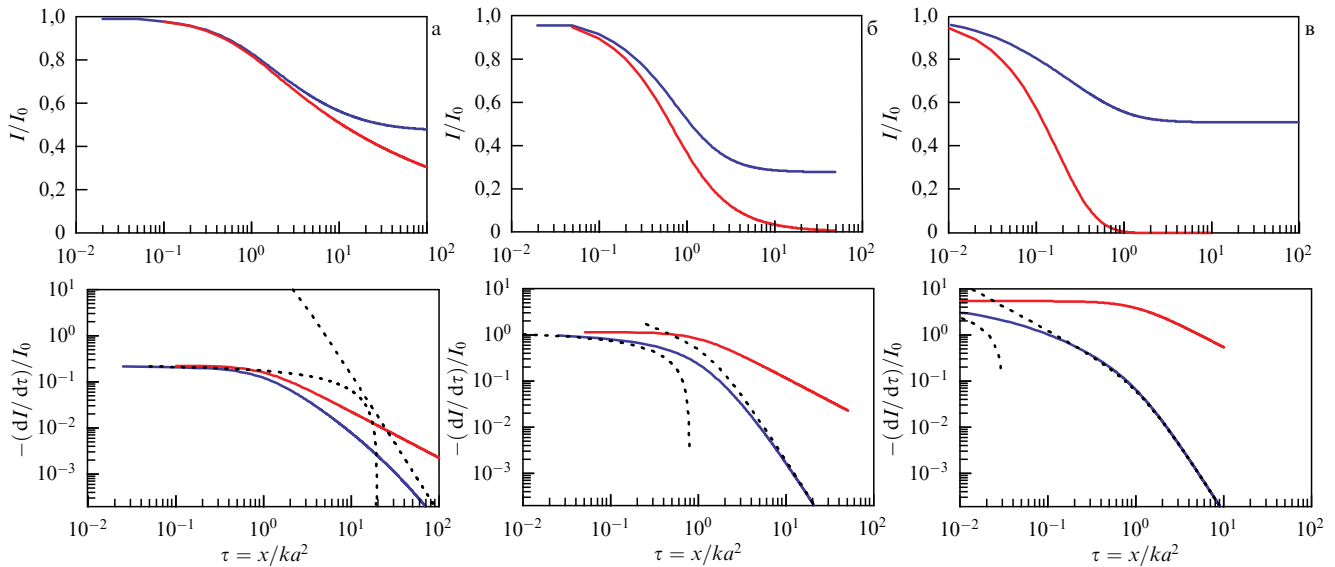


Рис. 3. (В цвете онлайн.) Изменение полной интенсивности $I(x)$ и её производной $-I'(x)$ вдоль трассы распространения пучка для начального гауссова распределения при (а) $va = 0,2$, (б) $va = 1$, (в) $va = 5$. Сплошными синими кривыми показано численное решение уравнения переноса (25) со строгим в рамках параболического уравнения полем (24), красными кривыми — решение (23) в безабберационном приближении, штриховые кривые — зависимости, отвечающие асимптотическим представлениям поля (26) и (27) при малых и больших τ соответственно.

стаёт изменяться. Разница этой предельной интенсивности и начальной интенсивности пучка определяет поглощённую мощность, зависящую только от параметра диссипации va :

$$\Delta I \equiv I_0 - \lim_{\tau \rightarrow \infty} I(\tau, va) = - \int_0^{\infty} \frac{dI}{d\tau} d\tau = \frac{2vaI_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} |\{\dots\}|^2 \frac{d\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}.$$

Универсальная функция $\Delta I(va)/I_0$ приведена на рис. 4. При малых va функция $\Delta I(va)/I_0$ линейно возрастает, при больших va убывает по закону, который будет уточнён ниже. Полная поглощаемая мощность принимает максимальное значение $\Delta I \approx 0,72I_0$ при оптимальном значении параметра диссипации $va \approx 0,94$.

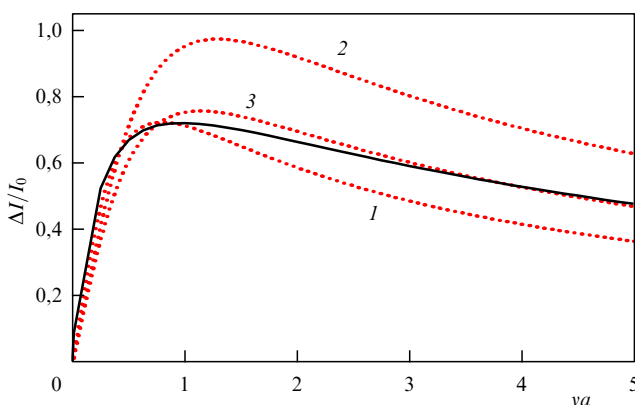


Рис. 4. (В цвете онлайн.) Универсальная зависимость полной поглощаемой мощности $\Delta I(va)/I_0$ на бесконечно тонком диссипативном плоском слое в случае продольного падения гауссова пучка с плоским фазовым фронтом. Сплошная кривая — точное решение, следующее из уравнения переноса (25) с полем (24). Пунктирными кривыми показаны приближённые оценки: 1 — $\Delta I_N/I_0$ при $N = 0,4$, определённая формулой (28), 2 — $\Delta I/I_0$ в соответствии с формулой (29), 3 — $0,75\Delta I/I_0$ в соответствии с формулой (29).

Построим количественную теорию, описывающую обнаруженные эффекты. Во-первых, рассмотрим уравнение переноса на коротких трассах, $\tau \ll 1$. Основной вклад в поле на оси определяется формулой (16); для гауссова пучка получим

$$U(\tau, 0) = \left(1 + i va \sqrt{\frac{2i\tau}{\pi}} + \dots\right) A, \quad (26)$$

отсюда

$$\frac{dI}{d\tau} = -\frac{2vaI_0}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{2va}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\tau} + \dots\right).$$

Сравнивая последнее выражение с (23), мы видим, что безабберационное приближение и точное решение совпадают при $2va\tau/\sqrt{\pi} \ll 1$ и $2va\sqrt{\tau/\pi} \ll 1$, или в размерных переменных

$$x \ll \frac{ka}{v}, \quad x \ll \frac{k}{v^2}.$$

Второе условие, следующее из точного решения, обычно более жёсткое, и именно его часто забывают при обосновании применимости безабберационного метода. Другими словами, несмотря на то что безабберационное приближение и точное решение дают одинаковую скорость диссипации при $\tau \rightarrow 0$, эти решения быстро расходятся, так как при конечных τ изменение скорости диссипации в точном решении происходит с бесконечной производной.

Рассмотрим уравнение переноса энергии при больших τ . Для гауссова пучка формула (20) приводит к результату

$$U(\tau, 0) \approx \frac{A}{va} \sqrt{\frac{2i}{\pi\tau}} \frac{1}{1+i\tau} - \frac{A}{(va)^2(1+i\tau)^{3/2}}. \quad (27)$$

Формула (27) справедлива при $\tau \gg 1/(va)$, $1/(va)^2$, первое слагаемое является доминирующим при $va \gg 1$ (для сильной диссипации и широких пучков), а второе — в обратном случае, при $va \ll 1$. После подстановки (27) в

уравнение переноса энергии (25) на больших трассах получаем $dI/d\tau \propto 1/\tau^3$. Интеграл поглощённой мощности $\Delta I = -\int (dI/d\tau) d\tau$ сходится при $\tau \rightarrow \infty$, поэтому в рамках точного решения параболического уравнения вся вводимая мощность, в отличие от таковой в безаберрационном приближении, *не может быть* поглощена на бесконечной трассе. Однако вычисление предельной поглощённой мощности затрудняется тем обстоятельством, что при $\tau \rightarrow 0$ формула (26) приводит интегралу ΔI , который логарифмически расходится на нижнем пределе. Формально это не является противоречием, поскольку приближение (27) неприменимо при малых τ .

Чтобы продвинуться далее в вычислении ΔI , рассмотрим случай широких пучков, $va \gg 1$, т.е. оставим только первое слагаемое в (27). Соответствующее уравнение переноса энергии имеет вид

$$\frac{dI}{d\tau} \approx -\frac{4I_0}{\pi\sqrt{\pi}va} \frac{1}{\tau(1+\tau^2)}.$$

Для оценки поглощаемой мощности снизу проинтегрируем последнее уравнение по области $N/va < \tau < \infty$, где N — достаточно большое число, выбранное так, чтобы в области интегрирования заведомо выполнялось наше асимптотическое представление поля. Получим

$$\Delta I \gtrsim \Delta I_N \equiv \frac{4I_0}{\pi\sqrt{\pi}va} \int_{N/va}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau(1+\tau^2)} = \frac{2I_0}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{\ln(1+(va/N)^2)}{va}. \quad (28)$$

Сопоставление с результатами численного расчёта (сплошная кривая на рис. 4) показывает, что неравенство (28) выполнено уже при $N > 0,5$. Таким образом, мы получили, что при больших аргументах поглощённая мощность убывает как $\Delta I \sim \ln(va)/(va)$. Как обычно, логарифм большого числа в результате означает, что основной вклад в интеграл даёт область больших значений τ . Поэтому для определения сходящегося интеграла для величины ΔI мы можем в значительной степени произвольно доопределить подынтегральное выражение, окончательный результат с логарифмической точностью будет одинаков. В качестве простейшего решения можно подобрать число N так, чтобы эта величина максимально близко воспроизводила рассчитанную выше ΔI ; оптимальные значения получаются при $N = 0,35-0,4$. На рисунке 4 приведён пример такой подгонки; видно, что $\Delta I \approx \Delta I_{0,4}$. Удивительный факт заключается в том, что теоретическая оценка (28), хотя она была изначально получена при $va \gg 1$, даёт качественно верный результат и при $va \ll 1$, и в переходной области. В частности, в области малых параметров мы получаем линейную зависимость $\Delta I_N \approx 2I_0va/(\pi^{3/2}N^2)$, максимального значения поглощаемая мощность $\Delta I_N \approx \approx 0,3/N$ достигает при $va \approx 2N$.

В качестве альтернативы рассмотрим второй, более физический, способ вычисления приближённой формулы для сходящегося интеграла поглощённой мощности. Доопределим поле (27) так, чтобы $U(\tau, 0) \rightarrow A$ при $\tau \rightarrow 0$. Для этого достаточно вместо $\sqrt{\pi\tau}$ в (27) взять $(\pi\tau + 2i/(va)^2)^{1/2}$, что приведёт к уравнению переноса энергии

$$\frac{dI}{d\tau} \approx -\frac{2vaI_0}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1+(\pi v^2 a^2 \tau/2)^2}} \frac{1}{1+\tau^2},$$

которому отвечает поглощённая мощность

$$\Delta I = -\int_0^\infty \frac{dI}{d\tau} d\tau \approx \frac{2vaI_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\cosh^{-1}(\pi v^2 a^2/2)}{\sqrt{(\pi v^2 a^2/2)^2 - 1}}. \quad (29)$$

Заметим, что последнее выражение остаётся действительным при всех действительных значениях va ; если $\pi v^2 a^2/2 < 1$, то в числителе и знаменателе формируются чисто мнимые величины, отношение которых даёт действительное число. При малых и больших значениях аргумента в выражении (29)

$$\frac{\Delta I}{I_0} \approx \begin{cases} \sqrt{\pi} va, & va \ll 1, \\ \frac{8}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{\ln(va)}{va}, & va \gg 1. \end{cases}$$

На рисунке 4 теоретическая зависимость (29) сопоставляется с результатами численного расчёта. Как и предыдущая приближённая формула, оценка (29) даёт качественно верный результат во всей области изменения va . Значение $va \approx 1,3$, при котором поглощаемая мощность достигает максимальной величины, близко к численно найденному значению, однако само значение $0,97I_0$ сильно завышено. Поэтому для практических оценок можно использовать формулу (29), умноженную на поправочный коэффициент $3/4$. С учётом этой поправки асимптотика $\Delta I(va)$ при больших аргументах может быть принята в виде $\Delta I/I_0 \approx \ln(va)/(va)$, численный множитель перед логарифмом очень близок к единице (равен 1,06).

Упомянем ещё один способ приближённой оценки $\Delta I(va)$ при малых значениях аргумента, приводящий к линейной зависимости. Можно взять второе слагаемое в (26), доминирующее при $va \ll 1$, и проинтегрировать отвечающее ему уравнение переноса энергии по области применимости асимптотического разложения поля, в данном случае, $N/(va)^2 < \tau < \infty$. Однако полученная формула будет неприменима при больших va и поэтому не столь наглядна, как приведённые выше универсальные аппроксимации $\Delta I(va)$.

6. Некоторые обобщения

Выше мы исследовали двумерную задачу, исключив третью координату z из рассмотрения. Однако результаты можно обобщить для случая трёхмерных пучков с поперечной апертурой, ограниченной в двух направлениях. Особенно просто это сделать, если начальное распределение поля при $x = 0$ задано в факторизованном виде $U_0(y)V_0(z)$, например, гауссов пучок определяется как $A \exp[-y^2/(2a^2) - z^2/(2b^2)]$. Будем искать решение уравнения Гельмгольца в изотропной среде в виде

$$u = U(x, y)V(x, z) \exp(ikx), \quad k = k_0\sqrt{\text{Re } \varepsilon}.$$

Полагая, что зависимость U и V от x — плавная на масштабах длины волны, получаем укороченное уравнение

$$\left(2ik \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)V + U\left(2ik \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) + 2iv\delta(y)UV = 0.$$

Это уравнение решается методом разделения переменных. Представим уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{U} \left(2ik \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2iv\delta(y) \right) &= \mu, \\ \frac{1}{V} \left(2ik \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) &= -\mu. \end{aligned} \quad (30)$$

Из первого уравнения (30) следует, что μ не зависит от z , а из второго — что μ не зависит от y , таким образом, μ может зависеть только от x . Пропорциональные $\mu(x)$ члены исключаются с помощью стандартной подстановки

$$U = \tilde{U} \exp \left[(2ik)^{-1} \int \mu dx \right], \quad V = \tilde{V} \exp \left[-(2ik)^{-1} \int \mu dx \right];$$

при этом для $\tilde{U}$ получаем уже рассмотренное уравнение (3), а для $\tilde{V}$ — одномерное параболическое уравнение без диссипации с решением, аналогичным (8). Другими словами, поскольку нас интересует $u \propto UV = \tilde{U}\tilde{V}$, мы с самого начала можем просто рассматривать уравнение (30) с $\mu = 0$. Интенсивность пучка будет выражаться произведением линейных интенсивностей $I(x) = \int |U|^2 dy \int |V|^2 dz$, причём изменение интенсивности будет определяться только первым множителем (интенсивность, связанная с V , сохраняется). Таким образом, задача для трёхмерного пучка сводится к рассмотренной выше задаче распространения двумерного пучка¹.

Более сложным является обобщение для сред с анизотропным и гиротропным диэлектрическим откликом. Характерные для указанных сред поверхности волновых векторов не обладают сферической симметрией, таким образом, в общем случае распространение волн в таких средах не описывается уравнением Гельмгольца. В несколько более широком смысле это отражает наличие пространственной дисперсии. Однако в частном случае волн, распространяющихся поперёк внешнего магнитного поля, из-за которого, собственно, и появилась настоящая заметка, предложенная модель может применяться.

Пусть магнитное поле направлено вдоль координаты z . Поскольку заряженные частицы испытывают ларморовское вращение вокруг этого направления, с точки зрения диэлектрического отклика плазмы координаты x и y одинаковы. Для волн в плазме все азимутальные направления распространения эквивалентны. Последнее выражается в том, что решение дисперсионного уравнения для j -й нормальной моды в однородной плазме всегда представляется в виде [51]

$$k_x^2 + k_y^2 = k_{\perp j}^2(\omega, k_z).$$

Для волнового пучка в слабонеоднородной по сравнению с дебаевским радиусом и гирорадиусом плазме

последнее эквивалентно уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_{\perp j}^2(\omega, k_z)u = 0.$$

Таким образом, задача сводится к рассмотренной нами выше посредством формальной замены $k_0^2 \varepsilon \rightarrow k_{\perp j}^2(\omega, k_z)$ или

$$k \rightarrow \sqrt{\operatorname{Re} k_{\perp j}^2(\omega, k_z)}, \quad \operatorname{Im} k_{\perp j}^2(\omega, k_z) \rightarrow 2v\delta(y).$$

Важно, что теперь мы не можем воспользоваться параксиальностью пучка и пренебречь зависимостью от k_z при определении несущего волнового числа k в (2) и во всех последующих выкладках. В плазме пространственная дисперсия не только существенно влияет на рефракцию волн, но и отвечает за их бесстолкновительное поглощение [52–54]. Поэтому, если нас интересует ограниченный по z пучок, сначала надо разложить начальное распределение в фурье-спектр по k_z , для каждой гармоники найти независимое решение $U(x, y, k_z)$ в соответствии с предлагаемой выше методикой, а затем свернуть поле по всем гармоникам. Обсуждавшиеся выше качественные эффекты такая процедура изменить не может. Более подробно с описанием резонансного поглощения СВЧ-излучения в высокотемпературной магнитоактивной плазме в рамках корректного (учитывающего абберации) параболического уравнения читатель может ознакомиться в [31, 40, 42, 55, 56].

7. Заключение

Итак, мы показали, что существует предельная мощность, которая может поглотиться в тонком диссипативном слое, продольно рассекающем продольно параксиальный волновой пучок, даже если слой и пучок обладают неограниченной длиной. Этот эффект, обусловленный конкуренцией неоднородной диссипации и дифракции излучения, оказался нам необычным и достаточно универсальным. Предложена воспроизводящая наш эффект простейшая эталонная задача, допускающая аналитическое рассмотрение; основной результат отражён на рис. 4.

Следует отметить, что простые приближённые соотношения (28) и (29) для предельной поглощаемой мощности имеют ценность в основном для качественного понимания эффекта, для практических оценок их следует применять с осторожностью. Хорошее количественное совпадение с результатами точного расчёта является почти случайным: формула, полученная при больших значениях va , оказалась работающей при всех значениях va .

Мы сознательно не перегружали настоящую заметку дополнительными примерами, ограничившись рассмотрением начального гауссова пучка с центром, совпадающим с поглощающей плоскостью, и плоским фазовым фронтом. Однако наша техника без изменений переносится и на более сложные начальные задачи, например, для пучков с линейным и квадратичным набегом фазы, пучков со смещённым относительно поглощающей плоскости центром. Наш эффект при этом сохранится; предложенные приближённые аналитические методы по-прежнему будут воспроизводить основные особенности точного решения, но с заметно большей количественной

¹ Заметим, что указанным методом строится в том числе и функция Грина двумерной задачи как решение вида UV , отвечающее $U_0(y)V_0(z) = \delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$. Используя свёртку с двумерной функцией Грина, можно выразить общее решение задачи в случае произвольного, не обязательно факторизованного, начального условия $u_0(y, z)$.

ошибкой, связанной с дополнительными параметрами задачи.

Авторы выражают благодарность Т.А. Хусаинову за помощь в подготовке рукописи. Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной физики (ИПФ) РАН (тема № 0030-2021-0002) и Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе (ФТИ) РАН (по договору между ФТИ РАН и ИПФ РАН № ОК44-2-21 от 06.08. 2021).

Список литературы

- Vdovin V *Fusion Sci. Technol.* **59** 690 (2001)
- Вдовин В Л *Физика плазмы* **39** 115 (2013); Vdovin V L *Plasma Phys. Rep.* **39** 95 (2013)
- Köhn A et al. *Plasma Phys. Control. Fusion* **55** 014010 (2013)
- Hammond K C et al. *Plasma Phys. Control. Fusion* **60** 025022 (2018)
- Сахаров А С *Физика плазмы* **45** 291 (2019); Sakharov A S *Plasma Phys. Rep.* **45** 289 (2019)
- Aleynikov P, Marushchenko N B *Comput. Phys. Commun.* **241** 40 (2019)
- Литвак А Г и др. *Письма в ЖТФ* **1** 858 (1975); Litvak A G et al. *Sov. Tech. Phys. Lett.* **1** 374 (1975)
- Litvak A G et al. *Nucl. Fusion* **17** 659 (1977)
- Maekawa T et al. *Phys. Lett. A* **69** 414 (1979)
- Баранов Ю Ф, Федоров В И *Физика плазмы* **9** 677 (1983); Baranov Yu F, Fedorov V I *Sov. J. Plasma Phys.* **9** 391 (1983)
- Tereshchenko M et al. *Plasma Phys. Control. Fusion* **55** 115011 (2013)
- Pereverzev G V *Phys. Plasmas* **5** 3529 (1998)
- Poli E, Peeters A G, Pereverzev G V *Comput. Phys. Commun.* **136** 90 (2001)
- Poli E et al. *Comput. Phys. Commun.* **225** 36 (2018)
- Смолякова О Б и др. *Физика плазмы* **9** 1194 (1983); Smolyakova O B et al. *Sov. J. Plasma Phys.* **9** 688 (1983)
- Harvey R W et al. *Nucl. Fusion* **37** 69 (1997)
- Wolf R C et al. *Nucl. Fusion* **41** 1259 (2001)
- Günter S et al. *Nucl. Fusion* **45** S98 (2005)
- Henderson M A et al. *Fusion Eng. Des.* **82** 454 (2007)
- Bilato R et al. *Nucl. Fusion* **49** 075020 (2009)
- Poli E et al. *Nucl. Fusion* **53** 01301 (2013)
- Farina D "GRAY: a quasi-optical ray tracing code for electron cyclotron absorption and current drive in tokamaks", IFP-CNR Internal Report FP 05/1 (2005); <https://www.ifp.cnr.it/publications/2005/FP05-01.pdf>
- Tereshchenko M A, Castejón F, Cappa Á "TRUBA user manual", Informes Técnicos CIEMAT, Editorial CIEMAT 1134 (Madrid: Laboratorio Nacional de Fusión por Confinamiento Magnético, 2008); <http://www-fusion.ciemat.es/InternalReport/IR1134.pdf>
- Prater R et al. *Nucl. Fusion* **48** 035006 (2008)
- Laqua H P et al. *Nucl. Fusion* **43** 1324 (2003)
- Тимофеев А В *УФН* **174** 609 (2004); Timofeev A V *Phys. Usp.* **47** 555 (2004)
- Балакина М А и др. *Изв. вузов. Радиофизика* **49** 686 (2006); Balakina M A et al. *Radiophys. Quantum Electron.* **49** 617 (2006)
- Шалашов А Г, Господчиков Е Д *УФН* **181** 151 (2011); Shalashov A G, Gospodchikov E D *Phys. Usp.* **54** 145 (2011)
- Гусаков Е З, Попов А Ю *УФН* **190** 396 (2020); Gusakov E Z, Popov A Yu *Phys. Usp.* **63** 365 (2020)
- Балакин А А и др. *Физика плазмы* **34** 533 (2008); Balakin A A et al. *Plasma Phys. Rep.* **34** 486 (2008)
- Maj O, Balakin A A, Poli E *Plasma Phys. Control. Fusion* **52** 085006 (2010)
- Батанов Г М и др. *Физика плазмы* **39** 987 (2013); Batanov G M et al. *Plasma Phys. Rep.* **39** 882 (2013)
- Alberti S et al. *Nucl. Fusion* **45** 1224 (2005)
- Kwak Jong-Gu et al. *Nucl. Fusion* **53** 104005 (2013)
- Shimozuma T et al. *Nucl. Fusion* **55** 063035 (2015)
- Кирнева Н А и др. *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез* **44** (3) 24 (2021)
- Imai T et al. *Fusion Sci. Technol.* **51** (2T) 36 (2007)
- Gospodchikov E D et al. *EPJ Web Conf.* **149** 03023 (2017)
- Balakin A A et al. *J. Phys. D* **40** 4285 (2007)
- Balakin A A, Balakina M A, Westerhof E *Nucl. Fusion* **48** 065003 (2008)
- Балакин А А *Изв. вузов. Радиофизика* **55** 521 (2012); Balakin A A *Radiophys. Quantum Electron.* **55** 472 (2012); Балакин А А *Изв. вузов. Радиофизика* **55** 555 (2012); Balakin A A *Radiophys. Quantum Electron.* **55** 502 (2013); Балакин А А *Изв. вузов. Радиофизика* **55** 624 (2012); Balakin A A *Radiophys. Quantum Electron.* **55** 556 (2013) в трех частях
- Балакин А А, Господчиков Е Д, Шалашов А Г *Письма в ЖЭТФ* **104** 701 (2016); Balakin A A, Gospodchikov E D, Shalashov A G *JETP Lett.* **104** 690 (2016)
- Dodin I Y et al. *Phys. Plasmas* **26** 072110 (2019); *Phys. Plasmas* **26** 072111 (2019); *Phys. Plasmas* **26** 072112 (2019)
- Леонтович М А, Фок В А *ЖЭТФ* **16** 557 (1946); Leontovich M A, Fock V A *J. Phys. USSR* **10** 13 (1946)
- Фок В А *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн* (М.: Сов. радио, 1970)
- Levy M *Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation* (London: Institute of Electrical Engineering, 2000)
- Ваганов Р Б, Каценеленбаум Б З *Основы теории дифракции* (М.: Наука, 1982)
- Вайнштейн Л А *Электромагнитные волны* (М.: Радио и связь, 1988)
- Владимиров В С *Обобщенные функции в математической физике* (М.: Наука, 1979)
- Abramowitz M, Stegun I A *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Washington, DC: New York: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1972) Ch. 7
- Гинзбург В Л *Распространение электромагнитных волн в плазме* (М.: Наука, 1967); Пер. на англ. яз.: Ginzburg V L *Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma* (Oxford: Pergamon Press, 1970)
- Bornatici M *Plasma Phys.* **24** 629 (1982)
- Аликаев В В и др., в кн. *Высокочастотный нагрев плазмы* (Горький: ИПФ АН СССР, 1983) с. 6; Alikaeiev V V et al. "Electron-cyclotron resonance heating of toroidal plasmas", in *High-Frequency Plasma Heating* (New York: AIP, 1991)
- Brambilla M *Kinetic Theory of Plasma Waves: Homogeneous Plasmas* (Oxford: Clarendon Press, 1998)
- Shalashov A G et al. *Phys. Plasmas* **23** 112504 (2016)
- Шалашов А Г и др. *ЖЭТФ* **151** 379 (2017); Shalashov A G et al. *J. Exp. Theor. Phys.* **124** 325 (2017)

"Anomalous" dissipation of a paraxial wave beam propagating along an absorbing plane

A.G. Shalashov^(*), E.D. Gospodchikov

Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Ulyanova 46, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation

E-mail: ^(*) ags@appl.sci-nnov.ru

We present solutions of the Leontovich–Fock parabolic equation which describe the structure of a paraxial quasi-optical wave beam in a medium with strong spatial inhomogeneity of the absorption coefficient transverse to the direction of beam propagation. Using as an example the simplest reference problem of a beam propagating along an infinitely narrow plane absorbing layer, it is shown that, in this case, the energy dissipation and refraction of the beam affect each other, so that they should be considered simultaneously, while the application of the perturbation theory can lead to qualitatively incorrect results.

Keywords: paraxial wave beam, resonant dissipation, diffraction, parabolic wave equation

PACS numbers: **42.25.** – p, 42.25.Bs, 42.25.Fx

Bibliography — 56 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **192** (12) 1399–1408 (2022)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.09.039068>

Received 5 August 2021, revised 8 September 2021

Physics – Uspekhi **65** (12) (2022)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2021.09.039068>