

Бароклинная неустойчивость в геофизической гидродинамике

М.В. Калашник, М.В. Курганский, О.Г. Чхетиани

Бароклинная неустойчивость — это неустойчивость течений стратифицированной вращающейся жидкой среды с вертикальным сдвигом скорости. С реализацией бароклинной неустойчивости связывают образование крупномасштабных вихрей в атмосфере Земли и других планет. Представлены современные теоретические подходы к исследованию бароклинной неустойчивости. К ним относятся описание неустойчивости в терминах взаимодействия краевых волн Россби, исследование проблемы оптимальных возмущений — возмущений с максимумом скорости роста энергии или других функционалов, анализ нелинейной динамики возмущений с использованием маломодовых аппроксимаций метода Галёркина. Рассмотрены также классические энергетические критерии устойчивости зональных течений, полученные с помощью прямого метода Ляпунова–Арнольда. Приведённые результаты могут представлять интерес для специалистов в области механики сплошных сред и астрофизики.

Ключевые слова: геофизическая гидродинамика, бароклинная неустойчивость, энергетические критерии устойчивости, нелинейная динамика возмущений, метод Галёркина

PACS numbers: **05.45.**–а, **47.10.**–g, 47.20.Ft, 47.20.Ky, 47.27.Cn, 47.32.–y, 47.32.Ef, 47.32.cd, 47.85.Dh, 92.10.Lq, **92.60.**–e, 92.60.hk

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.08.039046>

Содержание

1. Введение (1110).
2. Потенциальный вихрь и энергетические критерии бароклинной устойчивости в квазигеострофической модели динамики атмосферы (1113).
 - 2.1. О понятии потенциального вихря. 2.2. Квазигеострофическая модель. Неформальный вывод уравнений. 2.3. Энергетические критерии устойчивости.
3. Поверхностная квазигеострофическая модель и стационарные зональные течения (1117).
4. Бароклинная неустойчивость течения с постоянным вертикальным сдвигом скорости (задача Иди) (1119).
 - 4.1. Два подхода к решению линейной задачи устойчивости. 4.2. Оптимальные возмущения в линейной задаче Иди. 4.3. Нелинейная динамика возмущений в задаче Иди. 4.4. Общая постановка линейной задачи для возмущений. Генерация бароклинной неустойчивости вихревыми возмущениями.
5. Бароклинная неустойчивость зонального периодического течения (1128).
6. Дискретный вариант поверхностной квазигеострофической модели и бароклинная неустойчивость струйных течений (1130).
 - 6.1. Дискретная модель с двумя вертикальными уровнями и постановка задач устойчивости. 6.2. Неустойчивость изолирован-

ного струйного течения. 6.3. Неустойчивость системы из двух встречных струйных течений.

7. Бароклинная неустойчивость в присутствии бета-эффекта (1134).
 8. Симметричная бароклинная устойчивость (1136).
 9. Бароклинная неустойчивость в астрофизике (1140).
 10. Заключение (1142).
- Список литературы (1142).

1. Введение

Геофизическая гидродинамика — наука о движениях вращающихся и стратифицированных сред, прежде всего движениях планетных атмосфер и океанов. Фоновое вращение и стратификация приводят к возникновению двух основных особенностей движений. Первая из них состоит в том, что во вращающихся атмосферах на больших масштабах воздух движется не от области высокого давления к области низкого, а вдоль изобар (линий постоянного давления). Соответствующие движения были обнаружены лишь через два столетия после начала регулярных метеорологических наблюдений давления в XVII в. с открытием закона Бейс-Балло и получили название геострофических движений (от греч. *гео* — земля, *строфи* — поворот). В 1857 г. Бейс-Балло писал: "Если в Северном полушарии вы стоите спиной к ветру, то давление по вашу левую руку меньше, чем по правую. В Южном полушарии верно обратное" (см. в [1]). Вторая особенность связана со стратификацией — плотностным расслоением атмосферы в поле силы тяжести. В качестве меры стратификации традиционно берут квадрат частоты плавучести $N^2 = -(g/\rho_0)(d\rho_0/dz + g\rho_0/c_s^2)$, где $\rho_0(z)$ — фоновое вертикальное распределение плотности (вдоль направления силы тяжести), g — гравита-

М.В. Калашник^(*), М.В. Курганский, О.Г. Чхетиани
Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН,
Пыжевский пер. 3, 119017 Москва, Российская Федерация
E-mail: ^(*) kalashnik_obn@mail.ru

Статья поступила 2 июня 2021 г.,
после доработки 20 августа 2021 г.

ционное ускорение, c_s — скорость звука (см., например, [2]). В практически несжимаемом океане последним слагаемым во второй скобке можно пренебречь. При конвективно устойчивой стратификации ($N^2 > 0$) движения атмосферы приобретают волновые свойства, в частности, возникают внутренние гравитационные волны.

Фундаментальные основы геофизической гидродинамики изложены в ряде монографий и учебников [2–4]. Центральное место в них занимает описание различных типов гидродинамических неустойчивостей вращающихся течений и связанных с ними механизмов вихреобразования в атмосфере. Соответствующие механизмы хорошо известны специалистам, однако по ряду причин их описание не вошло в классические учебники физики, в частности в известный том *Гидродинамика* курса Ландау–Лифшица [5]. Для физиков существующий пробел отчасти восполняют отдельные статьи в *Журнале экспериментальной и теоретической физики (ЖЭТФ)* и *Письмах в ЖЭТФ*, а также опубликованные в разные годы в журнале *Успехи физических наук (УФН)* обзоры [6–11].

Основное внимание в упомянутых обзорах уделено исследованиям гидродинамической неустойчивости вращающихся течений однородной по плотности жидкости. Такую неустойчивость в геофизической гидродинамике называют баротропной. Настоящий обзор посвящён описанию так называемой бароклинной неустойчивости — неустойчивости течений стратифицированной вращающейся жидкости с вертикальным сдвигом скорости. Поскольку во вращающейся жидкости вертикальный сдвиг скорости поддерживается горизонтальным градиентом температуры, бароклинную неустойчивость интерпретируют как неустойчивость, обусловленную высвобождением доступной потенциальной энергии (рис. 1).

Первый шаг в изучении бароклинной неустойчивости был сделан в работе [12]. В 1949 г. появилась классическая работа Иди (Eady) [13], в которой для идеализированного потока с постоянным вертикальным сдвигом были определены параметры неустойчивых возмущений (бароклинных волн), хорошо согласующиеся с параметрами атмосферных циклонов и антициклонов средних широт. Работа Иди стимулировала лавинообразный рост числа публикаций, посвящённых теории бароклинной неустойчивости, который не прекращается и в настоящее время. Только в 1990 г. в нашей стране были опубликованы две монографии [14, 15] и обзор [7], содержащие результаты исследования отдельных аспектов этой проблемы. Накопление теоретических результатов, а также результатов лабораторного моделирования [16] привело к тому, что в

настоящее время формирование вихревых образований атмосферы средних широт (циклонов, антициклонов) связывают с реализацией бароклинной неустойчивости. Согласно утверждению автора монографии [15], осознание этого факта — одно из крупнейших достижений метеорологии второй половины XX в. Причём данное высказывание в равной степени относится и к океанологии, и к астрофизике.

Приведём физическую интерпретацию бароклинной неустойчивости, которую рассматривают как наклонную форму гравитационной конвекции. В классической гравитационной конвекции (без фонового вращения) изолинии фонового равновесного распределения потенциальной температуры (и давления) строго горизонтальны. Действующая на частицу сила плавучести направлена по вертикали. При учёте фонового вращения, т.е. в модели бароклинной неустойчивости, изолинии фонового распределения температуры имеют горизонтальный наклон. Это приводит к тому, что при перемещении жидкой частицы под углом к горизонтали, меньшим, чем угол наклона поверхности постоянных значений потенциальной температуры (изоэнтропической поверхности), появляется ненулевая составляющая силы плавучести, которая стремится увести частицу от начального положения вдоль исходной наклонной траектории. Именно горизонтальный наклон изолиний фонового распределения потенциальной температуры приводит к возникновению бароклинной неустойчивости.

В качестве иллюстрации рассмотрим простую схему (см. рис. 1), на которой изображены изоэнтропические (с постоянным значением потенциальной температуры $\theta = \text{const}$, однозначно связанной с энтропией) и эквипотенциальные (горизонтальные), $z = \text{const}$, поверхности в бароклинной атмосфере. Указанные поверхности формируют так называемый клин неустойчивости. Для этого клина потенциальная температура в статически устойчивой сжимаемой атмосфере монотонно возрастает с увеличением высоты [5], а также по направлению к экватору (на рис. 1 показано Северное полушарие). Наклон изоэнтропических поверхностей по отношению к горизонтали, характеризующийся малым углом $\varphi \approx 1/300$, поддерживается за счёт вращения Земли и сдвига скорости ветра с высотой, который необходим, чтобы на каждом горизонтальном уровне устанавливался баланс возникающего меридионального градиента давления и силы Кориолиса.

Пусть воздушная частица переместилась вдоль луча из точки О в точку Р (на юг) или в точку Q (на север), т.е. вдоль траектории, лежащей внутри клина неустойчивости. При этом она попадёт в окружение частиц с более высокими (в точке Р) или более низкими (в точке Q) значениями потенциальной температуры. Сила плавучести, которая возникает при таком перемещении, имеет ненулевую проекцию на наклонную траекторию PQ и стремится увести частицу вдоль этой траектории ещё дальше от точки О. Поэтому о возникающей бароклинной неустойчивости говорят как о форме наклонной конвекции (sloping convection) [3, 4, 16]. В модели бароклинной неустойчивости Иди [13] (см. выше) максимальная скорость высвобождения доступной потенциальной энергии, запасённой в основном зональном потоке, сопровождается перемещением жидких частиц вдоль биссектрисы малого угла φ .

Для дальнейшего полезно указать некоторые параметры, участвующие в описании динамики вращающихся

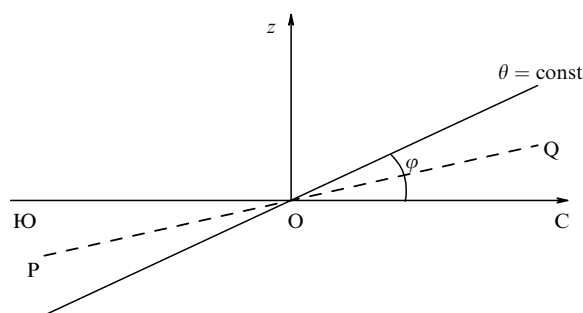


Рис. 1. Расположение изоэнтропических поверхностей при бароклинной неустойчивости; φ — угол наклона поверхностей $\theta = \text{const}$ к горизонтали.

ся атмосфер и бароклинной неустойчивости. Первый из них представляет собой называемый бароклинным радиусом деформации Россби геометрический масштаб, определённый формулой $L_R = NH/f_0$. Здесь H — эффективная толщина атмосферы (океана), N — среднее значение частоты плавучести. Параметр Кориолиса f_0 определяется как удвоенная проекция угловой скорости вращения планеты на местную вертикаль ($f_0 = 2\Omega_0 \sin \varphi_0$, Ω_0 — модуль угловой скорости, φ_0 — географическая широта точки наблюдения). Забегая вперёд, отметим, что L_R определяет с точностью до числового множителя масштаб вихрей, развивающихся в процессе бароклинной неустойчивости. Для характерных значений параметров земной тропосферы в средних широтах $H = 10$ км, $N = 10^{-2}$ с $^{-1}$, $f_0 = 10^{-4}$ с $^{-1}$ радиус деформации $L_R = NH/f_0 = 1000$ км. Для значений $H = 5$ км, $N = 10^{-3}$ с $^{-1}$, $f_0 = 10^{-4}$ с $^{-1}$, отвечающих движениям в океане, $L_R = NH/f_0 = 50$ км, т.е. более чем на порядок меньше. Отметим, что выражение для L_R можно записать как $L_R = c/f_0$, где $c = NH$ — скорость длинных внутренних гравитационных волн. В аналогичном виде выражается и так называемый баротропный радиус деформации, характеризующий движения во вращающемся слое мелкой воды с фазовой скоростью длинных волн $c = \sqrt{gH}$ [4, 17].

При описании движений с характерной горизонтальной скоростью U и горизонтальным масштабом L важную роль играет число Россби $Ro = U/f_0 L$ — безразмерный параметр, представляющий собой отношение временного масштаба вращения f_0^{-1} к адвективному временному масштабу $T = L/U$. Если $Ro \ll 1$, то временной масштаб движений много больше периода вращения атмосферы. При $L = L_R$ и характерной скорости атмосферных движений $U_* = 10$ мс $^{-1}$ число $Ro = 0,1$. Значение Ro на порядок меньше для океанических движений с характерной скоростью $U_* = 0,1$ мс $^{-1}$. Отметим, что для движений с горизонтальным масштабом $L = L_R = c/f_0$ число $Ro = U/f_0 L$ сводится к аналогу числа Маха: $Ro = U/c$. Движения с числом Россби $Ro \ll 1$, таким образом, являются аналогами движений с малыми значениями числа Маха.

Теоретическое описание бароклинной неустойчивости традиционно проводится в рамках квазигеострофической модели атмосферы, справедливой для движений с горизонтальным масштабом $L \sim L_R$ и числом Россби $Ro \ll 1$. В модели рассматриваются отклонения давления p' и плотности ρ' от их фоновых гидростатических распределений и вводится так называемая геострофическая функция тока $\psi = p'/(f_0 \rho_*)$, где ρ_* — постоянное среднее значение фоновой плотности. Горизонтальные компоненты скорости жидкости u, v и распределение плавучести $\theta = -g\rho'/\rho_*$ связаны с функцией тока соотношениями

$$u = -\psi_y, \quad v = \psi_x, \quad \theta = f_0 \psi_z. \quad (1.1)$$

Здесь и далее наряду с обычными обозначениями частные производные обозначаются нижними малыми буквенными индексами. Эволюция функции тока (в приближении Буссинеска) описывается фундаментальным уравнением переноса квазигеострофического потенциального вихря (ПВ)

$$\frac{Dq}{Dt} \equiv q_t + [\psi, q] = 0, \quad q = \Delta\psi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \quad (1.2)$$

где $[\psi, q] = \psi_x q_y - \psi_y q_x$ — двумерный якобиан, $\Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy}$ — двумерный оператор Лапласа. Асимптотический вывод уравнения (1.2), использующий разложение решения полной системы уравнений динамики в ряд по малому параметру $\varepsilon = Ro$, представлен в монографиях [3, 4]. Для движений в горизонтальном слое $0 < z < H$ к уравнению (1.2) присоединяются нестационарные краевые условия:

$$z = 0, H: \quad \frac{D\theta}{Dt} \equiv \frac{\partial \theta}{\partial t} + [\psi, \theta] = 0, \quad \theta = f_0 \psi_z. \quad (1.3)$$

Условия (1.3) отражают равенство нулю вертикальной компоненты скорости w на твёрдых горизонтальных границах слоя и следуют из общего уравнения переноса плавучести $d\theta/dt + N^2 w = 0$, в котором выделена фоновая стратификация [3, 4]. В качестве верхней границы $z = H$ в атмосферных моделях (в рамках приближения Буссинеска) обычно берут уровень тропопаузы, отвечающий резкому скачку градиента вертикального распределения фоновой температуры. Подчеркнём, что, согласно (1.1), в (1.3) фигурирует нормальная производная функции тока.

Следует отметить, что учёт дополнительных физических факторов приводит к модификации уравнения (1.2). Так, для учёта неоднородности распределения параметра Кориолиса по широте (бета-эффекта) в выражение для ПВ (1.2) добавляется слагаемое $f = f_0 + \beta y$, где $\beta y \ll f_0$. Для учёта сжимаемости в метеорологических моделях часто в качестве вертикальной координаты используют различные функции давления [18, 19]. Важно также подчеркнуть, что уравнение (1.2) справедливо для движений, удовлетворяющих условию $Ro \ll 1$, которое, как показано выше, выполняется для крупномасштабных движений атмосферы Земли в средних и высоких широтах. Выполнение этого условия для атмосфер других планет зависит от угловой скорости вращения планеты и её радиуса (максимального горизонтального масштаба). Для медленно вращающейся атмосферы Венеры, угловая скорость вращения которой в 200 раз меньше угловой скорости вращения атмосферы Земли, условие $Ro \ll 1$ не выполняется. В то же время для быстро вращающейся атмосферы Юпитера (один день на Юпитере равен 10 земным часам) условие $Ro \ll 1$ заведомо справедливо и уравнение (1.2) можно использовать для описания крупномасштабных движений [4].

Практически все решения задач о бароклинной неустойчивости получены в рамках квазигеострофической (QG) модели динамики атмосферы, основанной на уравнениях (1.2), (1.3) [3, 4, 19, 20]. Неформальный вывод этих уравнений вместе с пояснением общего закона сохранения потенциального вихря представлен в разделе 2. Там же приведены вытекающие из уравнений общие интегральные критерии бароклинной устойчивости. Для получения этих критериев использован прямой метод Лапунова — Арнольда. В разделе 3 представлена упрощённая версия QG-модели, получившая название поверхностной квазигеострофической (SQG) модели. В соответствующей модели рассматриваются течения с нулевым потенциальным вихрем, аналогичные потенциальным течениям в классической гидродинамике. При изучении их динамики на первый план выступают нестационарные краевые условия (1.3). В разделе 3 указан класс точных решений модели для стационарных зональных течений, включающий в себя течение с постоянным вертикальным

сдвигом, рассмотренное в работе Иди [13]. Задача о бароклиной неустойчивости этого течения рассматривается в разделе 4, где центральное место (раздел 4.1) занимает полученное в работе [21] описание линейной бароклиной неустойчивости в терминах взаимодействия так называемых краевых волн Россби, которым отвечают локализованные у границ периодические распределения плавучести с заданными амплитудами и фазами. Процесс взаимодействия волн описывается динамической системой уравнений относительно амплитуд и сдвига фаз между граничными распределениями плавучести. Решения системы иллюстрируют принципиальную роль сдвига фаз для возникновения неустойчивости. В разделе 4.2 рассмотрена проблема оптимальных возмущений — возмущений с максимумом скорости роста энергии или отношения конечной и начальной энергий. Представление решения начальной задачи в виде суперпозиции двух краевых волн Россби позволяет выразить энергетические характеристики как функции начальных параметров. Из анализа функций на экстремум находятся в аналитическом виде параметры оптимальных возмущений.

Нелинейная динамика возмущений течения с постоянным вертикальным сдвигом и пространственно периодического течения рассмотрена в разделах 4.3 и 5. Для описания этой динамики использованы максимально усечённые системы метода Галёркина, сохраняющие полную энергию и потенциальные энергии на границах. Из решений систем следует, что экспоненциальное возрастание возмущений на линейной стадии развития неустойчивости сменяется стадией регулярных нелинейных колебаний. Этот результат объясняет возникновение колебательных режимов в лабораторных экспериментах [22, 23].

В разделе 6 рассмотрен содержащий два вертикальных уровня дискретный вариант SQG-модели, аналогичный классической модели Филлипса. В рамках данного варианта исследованы задачи о линейной неустойчивости изолированного струйного течения и системы из двух встречных струйных течений на каждом уровне. Получены аналитические выражения для инкрементов и пространственных масштабов неустойчивых мод.

Раздел 7 посвящён описанию неустойчивости зонального течения в присутствии бета-эффекта.

В разделе 8 рассмотрена так называемая проблема симметричной неустойчивости зональных потоков — неустойчивости относительно возмущений, не зависящих от координаты вдоль потока. Неустойчивость этого типа, играющая важную роль в атмосфере, носит волновой характер и не описывается квазигеострофическими уравнениями. Из полной системы уравнений динамики для симметричных возмущений следуют дополнительные лагранжевы законы сохранения углового (геострофического) момента, которые используются для построения функционалов Ляпунова при получении достаточных критериев нелинейной симметричной устойчивости вариационным (энергетическим) методом.

В разделе 9 кратко рассмотрены проявления бароклиной неустойчивости в астрофизике: развитие турбулентности в дисковых системах, перенос углового момента и поддержание дифференциального вращения, возникновение зародышей планетообразования через развитие вихрей и аккумуляции в них вещества.

2. Потенциальный вихрь и энергетические критерии бароклиной устойчивости в квазигеострофической модели динамики атмосферы

2.1. О понятии потенциального вихря

Гидродинамика как наука оформилась в середине XVIII в., после того как Л. Эйлер вывел свои знаменитые уравнения. С тех пор и в течение всего XIX в. гидродинамика развивалась в рамках моделей или несжимаемой однородной по плотности жидкости, или, самое большее, сжимаемой баротропной жидкости, когда поля давления p и плотности ρ связаны взаимно однозначной зависимостью, что замыкает систему гидродинамических уравнений. В начале XX в. в связи с задачами применения гидродинамики к природным средам (сейчас они называются геофизическими), таким как атмосфера и океан, возникла необходимость рассмотрения более сложных реалистичных моделей, в которых ρ зависит не только от p , но и от второй независимой термодинамической переменной (в простейшем случае двух независимых термодинамических функций состояния). Наиболее фундаментальным является выбор в качестве второй термодинамической переменной или кинетической температуры T (в кельвинах), или удельной (приходящейся на единицу массы жидкости) термодинамической энтропии s . Подобная модель называется бароклиной жидкостью. Название происходит от того, что поверхности постоянного давления (изобарические поверхности) и постоянной плотности (изопикнические поверхности) уже не совпадают между собой, как в случае баротропной жидкости, а образуют угол (клин). Это имеет далеко идущие следствия. В бароклиной жидкости уже не выполняются известные теоремы Гельмгольца о сохранении вихрей в идеальной жидкости, а также не справедлива теорема Кельвина о сохранении циркуляции скорости. Напротив, в идеальной жидкости вихри могут создаваться (генерироваться) за счёт бароклинности. Эффект возникновения вихрей математически выражается, с одной стороны, в форме теоремы Бьёркнеса как обобщения теоремы Кельвина. С другой стороны, в уравнении вихря (уравнении Гельмгольца) появляется бароклинное слагаемое, пропорциональное векторному произведению градиентов ρ и p , как было показано А.А. Фридманом (уравнение Фридмана) (см. [24]). Замечательно, однако, что и в бароклиной жидкости есть динамический закон сохранения, следующий из общей теоремы о вихрях, которая является квинтэссенцией гидродинамики бароклиной жидкости и которую мы запишем в виде (ср. [2])

$$\frac{D}{Dt} \frac{\omega_a \nabla A}{\rho} = \frac{\omega_a \nabla (DA/Dt)}{\rho} + \frac{\text{helm} \omega_a \nabla A}{\rho}. \quad (2.1)$$

В этом уравнении $\omega_a = \nabla \times \mathbf{v} + 2\Omega$ — вектор абсолютной завихренности, т.е. вектор ротора скорости в абсолютной (инерциальной) системе отсчёта. В (2.1) произведён переход во вращающуюся с постоянной угловой скоростью Ω систему координат, причём $\mathbf{v}$ — вектор скорости жидкости во вращающейся системе координат, D/Dt — полная производная по времени в той же системе координат, $A(\mathbf{x}, t)$ — совершенно произвольная функция координат и времени, оператор helm , следуя А.А. Фридману, называют гельмгольцианом (в честь

Гельмгольца),

$$\text{helm } \omega_a \equiv \frac{D\omega_a}{Dt} - (\omega_a \nabla) \mathbf{v} + \omega_a (\nabla \mathbf{v}).$$

Доказывается общая теорема (см. [24]), что условие $\text{helm } \mathbf{A} = 0$ — необходимое и достаточное условие сохранения векторных линий и векторных трубок произвольного векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$. По уравнению Фридмана,

$$\text{helm } \omega_a = \rho^{-2} (\nabla \rho \times \nabla p) + \nabla \times \mathbf{F}$$

или альтернативно (в силу основного термодинамического уравнения Клаузиуса – Гиббса)

$$\text{helm } \omega_a = \nabla T \times \nabla s + \nabla \times \mathbf{F},$$

где $\mathbf{F}$ — действующие на жидкость непотенциальные силы, включая силу вязкости. Поэтому если взять $\Lambda \equiv s$ и рассмотреть адиабатический и невязкий случай, когда оба слагаемых в правой части (2.1) обращаются в нуль, то приходим к теореме Эртеля [25] о сохранении потенциального вихря:

$$\frac{D}{Dt} \Pi_s = 0, \quad \Pi_s = \frac{\omega_a \nabla s}{\rho}.$$

В метеорологии вместо удельной энтропии предпочитают использовать потенциальную температуру θ (для воздуха как смеси идеальных газов), которая однозначно с ней связана:

$$s = c_p \ln \theta + \text{const}, \quad \theta = T \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{R/c_p}, \quad p_{00} = 10^3 \text{ ГПа}.$$

Здесь R — газовая постоянная сухого воздуха, c_p — его удельная теплоёмкость при постоянном давлении. Для земной атмосферы, состоящей практически из двухатомных газов, $R/c_p = 2/7$. Для солнечной атмосферы, состоящей эффективно из одноатомного газа, $R/c_p = 2/5$. Тогда, если положить $\Lambda \equiv \theta$, получим

$$\frac{D}{Dt} \Pi_\theta = 0, \quad \Pi_\theta = \frac{\omega_a \nabla \theta}{\rho}.$$

В океанологии, а также, например, при рассмотрении внешнего жидкого ядра Земли можно формально положить $s = -c_p \ln \rho + \text{const}$ и считать движение жидких сред несжимаемым, $D\rho/Dt = 0$, так что закон сохранения потенциального вихря примет вид

$$\frac{D}{Dt} \Pi_\rho = 0, \quad \Pi_\rho = \frac{\omega_a \nabla \rho}{\rho},$$

где для удобства и единообразия в обозначениях мы сохранили ρ в знаменателе. В океанологии используется также более строгая постановка задачи, связанная с понятием потенциальной плотности [2]. Отметим, что выше был изложен классический подход к определению потенциального вихря. В современных исследованиях показано, что теорема Кельвина о сохранении циркуляции и закон сохранения потенциального вихря (инварианта Эртеля) следуют из наличия специальной группы переобозначений лагранжевых маркеров (перемаркированной симметрии) для уравнений динамики, выраженных в лагранжевых переменных [26, 27].

Мы подробно остановились на формулировке понятия потенциального вихря, поскольку оно является центральным в настоящем обзоре и будет, по сути, пронизывать всё его содержание. В большинстве разделов обзора обсуждается традиционная квазигеострофическая бароклинная неустойчивость относительно волновых возмущений, зависящих от координаты вдоль основного потока (такие возмущения обычно называются незональными или несимметричными). Ключевую роль при этом играет градиент квазигеострофического потенциального вихря в поперечном направлении к основному бароклинному потоку [28] или градиент обобщённого квазигеострофического потенциального вихря [29] (см. также [30]). В разделе 8 мы откажемся от квазигеострофического приближения и будем рассматривать так называемую симметричную бароклинную, или просто симметричную, неустойчивость относительно возмущений, которые не зависят от координаты вдоль основного потока. Как мы увидим, критерий симметричной бароклинной устойчивости элегантно в самом общем виде выражается в форме условия знакоопределённости поля потенциального вихря (положительности в Северном полушарии и отрицательности в Южном) [31].

2.2. Квазигеострофическая модель.

Неформальный вывод уравнений

В современной геофизической гидродинамике намечалась чёткая тенденция освободиться от таких в определённом смысле второстепенных факторов, как полный учёт сжимаемости атмосферного воздуха и полный учёт сферичности Земли, и выделить динамические эффекты стратификации и вращения в их наиболее чистом и универсальном виде, применимом ко всем геофизическим жидким средам, в первую очередь к атмосфере, океану и жидкому ядру Земли. Такую возможность для достаточно медленных (со скоростью, много меньшей скорости звука) вихревых процессов крупного и среднего (мезо) масштабов представляют уравнения движения в приближении Буссинеска, записанные в локальной декартовой системе координат, где единственным следом учёта сферичности Земли является предполагаемая линейная зависимость параметра Кориолиса от широтной декартовой координаты (модель бета-плоскости Россби) (см., например, [4]). Безусловно, в практических расчётах с использованием современных моделей прогноза погоды и климата сжимаемость воздуха и сферичность Земли учитываются по необходимости полным образом, но в данном обзоре речь пойдёт о теоретических исследованиях, к которым в полной мере применима указанная выше тенденция.

С целью унифицировать изложение будем исходить, имея в виду приложения к большинству геофизических жидких сред, из уравнений движения расслоённой по плотности, несжимаемой жидкости в поле силы Кориолиса: а) в приближении Буссинеска, б) в так называемом традиционном приближении, когда ось общего вращения считается совпадающей с направлением действия силы тяжести (вертикалью):

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - fv &= -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \\ \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} + b, \quad \frac{Db}{Dt} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Жидкость считается находящейся в однородном поле силы тяжести (поверхность Земли с высокой степенью точности является эквипотенциальной, а характерная толщина атмосферы и океана много меньше радиуса Земли). Уравнения (2.2) соответствуют уравнениям свободной конвекции (в книге [5]) и обобщают их с точки зрения учёта общего вращения, причём параметр Кориолиса представим в виде линейной функции широтной координаты, $f = f_0 + \beta y$, где f_0 и β — постоянные величины. Напомним, что $\phi = \tilde{p}/\rho_0$, где ρ_0 — постоянное (эталонное) значение плотности, $\tilde{p} = p - p_0(z)$, причём $p_0(z) = \text{const} - \rho_0 z$ — гидростатическое давление, отвечающее эталонному состоянию; переменная $b = -g(\rho - \rho_0)/\rho_0$ в современной литературе по геофизической гидродинамике называется плавучестью (buoyancy); её также часто обозначают греческими буквами θ или ϑ . Фактически это полная плавучесть, которую далее удобно представить в виде суммы плавучести, отвечающей среднему состоянию стратификации жидкости, $\bar{b} = -g\bar{\rho}/\rho_0$, и отклонению от неё $b' = -g\rho'/\rho_0$, полагая что $\rho - \rho_0 = \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t)$. Аналогично $\tilde{p} = \bar{p}(z) + p'(x, y, z, t)$, где $\bar{p}(z)$ и $\bar{\rho}(z)$ связаны гидростатическим соотношением, и мы представляем (2.2) в более удобном виде, выделяя в явной форме среднее устойчивое состояние жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - fv &= -\frac{\partial \phi'}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{\partial \phi'}{\partial y}, \quad \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial \phi'}{\partial z} + b', \\ \frac{Db'}{Dt} + N^2 w &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В уравнениях (2.3) $\phi' = p'/\rho_0$ и квадрат частоты плавучести (частоты Брента–Вяйсяля) $N^2 = -g(d\bar{\rho}/dz)/\rho_0$ считается постоянной величиной.

Движения крупного масштаба, рассмотрению которых в контексте бароклиной неустойчивости в большей своей части и посвящён данный обзор, характеризуются тем, что для них с хорошим приближением выполняются одновременно гидростатическое и геострофическое соотношения. Представляем поле горизонтальной скорости в виде $(u, v) = (-\partial\psi/\partial y, \partial\psi/\partial x)$, где $\psi = \phi'/f_0$ — геострофическая функция тока, и в квазистатическом приближении $b' = f_0(\partial\psi/\partial z)$. Теперь осталось ещё учесть малость вертикальной скорости, поскольку в уравнении неразрывности слагаемые $\partial u/\partial x$ и $\partial v/\partial y$ с асимптотической точностью компенсируют друг друга, причём с хорошим приближением:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Таким образом, исключая ϕ' из уравнений горизонтального движения, приходим к системе двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta\psi + [\psi, \Delta\psi + \beta y] &= f_0 \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\psi}{\partial z} + \left[\psi, \frac{\partial\psi}{\partial z} \right] &= -\frac{N^2}{f_0} w. \end{aligned}$$

Дифференцируя обе части второго уравнения по z и складывая результат после тождественных преобразований с первым уравнением, приходим к уравнению (1.2) сохранения квазигеострофической потенциальной завих-

ренности:

$$\frac{\partial}{\partial t} q + [\psi, q] = 0, \quad q = \Delta\psi + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + f_0 + \beta y. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) надо решать с условиями непроницаемости нижней $z = z_-$ и верхней $z = z_+$ границ слоя жидкости

$$\frac{\partial}{\partial t} b + [\psi, b] = 0, \quad b = f_0 \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad z = z_{\mp}. \quad (2.5)$$

С учётом $b = \theta$ условия (2.5) совпадают с условиями (1.3). В формулировке граничных условий (2.5) заключается основная специфика постановки задачи для атмосферы и океана соответственно. В атмосфере в качестве нижней границы выбирается поверхность земли $z = z_- = 0$, а в качестве верхней границы условно берут высоту тропопавзы $z = z_+ = H$ (разделяющей тропосферу и стратосферу поверхности, на которой квадрат частоты плавучести испытывает скачок в сторону увеличения). Напротив, в океане в качестве верхней границы естественно принять его поверхность $z = z_+ = 0$, а в качестве нижней границы — его дно $z = z_- = -D$. В атмосфере при использовании приближения Буссинеска переменную b можно считать пропорциональной отклонению потенциальной температуры от среднего значения.

Учитывая, что средняя плотность воздуха в атмосфере $\rho_0 = \rho_0(z)$ сильно (почти экспоненциально) убывает с увеличением высоты, а также может меняться частота плавучести, уравнение сохранения квазигеострофической потенциальной завихренности часто рассматривают в более общем виде [28]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} q + [\psi, q] &= 0, \\ q &= \Delta\psi + \frac{1}{\rho_0(z)} \frac{\partial}{\partial z} \rho_0(z) \frac{f_0^2}{N^2(z)} \frac{\partial\psi}{\partial z} + f_0 + \beta y. \end{aligned}$$

Более строгий учёт сжимаемости атмосферного воздуха достигается при переходе к изобарическим координатам, в которых давление p играет роль высоты [2, 19, 32–36] и закон сохранения квазигеострофического потенциального вида элегантно выражается как

$$\frac{\partial}{\partial t} q + [\psi, q] = 0, \quad q = \Delta\psi + \frac{\partial}{\partial p} m^2 p^2 \frac{\partial\psi}{\partial p} + f_0 + \beta y,$$

где $m^2 = f_0^2/(N^2 H_0^2)$, $H_0 = RT_0/g$ — высота однородной атмосферы, отвечающая средней приземной температуре воздуха T_0 ; частные производные по x, y, t берутся вдоль изобарических поверхностей. При этом модифицируются и условия (2.5) (см. [35, 36]).

2.3. Энергетические критерии устойчивости

В рамках уравнения (2.4) с условиями (2.5) рассматривается общая задача о нелинейной устойчивости зонального потока. Используется приближение бета-плоскости. Поток предполагается периодическим в зональном направлении с периодом L , равным средней длине окружности широтного круга. На севере и юге поток ограничен расположенными по параллелям вертикальными стенками. Считаем эти границы непроницаемыми для воздуха:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad y = y_*, \quad y^*,$$

а циркуляцию скорости на них — сохраняющейся для каждого высотного уровня:

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial y} dx = \text{const}, \quad y = y_*, \quad y^*.$$

В последнем случае исходим из того, что с учётом периодичности с периодом L прямолинейный канал топологически эквивалентен кольцевому каналу с внутренней и внешней стенками. Поскольку на каждом высотном уровне такой круговой канал не стягивается в точку, необходимо ставить условие сохранения циркуляции как на внутренней, так и на внешней границах (см. [20, 37]). Применяем метод Арнольда [37]. Используем существование в задаче интегралов движения: а) энергии

$$E = \frac{1}{2} \iiint \left\{ (\nabla \psi)^2 + \frac{f_0^2}{N^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz$$

как суммы кинетической и доступной потенциальной энергии; б) зонального компонента импульса

$$P = - \iiint \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy dz;$$

в) так называемых казимиров — величин, сохранение которых следует из (2.4) и (2.5):

$$F = \iiint \Phi(q, z) dx dy dz, \quad G = \iint_{\Sigma_-} \Gamma(\theta) dx dy,$$

$$H = \iint_{\Sigma_+} H(\theta) dx dy,$$

где Φ , Γ и H — произвольные непрерывно дифференцируемые функции, $\Sigma_{\mp}$ — нижняя и верхняя границы при $z = z_{\mp}$ соответственно. В изложении следуем статье [35] и особенно монографиям [19, 36], хотя в этих работах квазигеострофическое движение атмосферы рассматривалось в изобарической системе координат (см выше). В приближении Буссинеска данная задача рассматривалась в работе [38], но имеется определённый нюанс. В казимире F должна фигурировать функция двух переменных, т.е. на различных высотных уровнях функциональная зависимость от q каждый раз своя — она меняется от одного уровня к другому. В то же время в [38] выписывается функция одной переменной q , и это, вероятно, лишь погрешность записи, но заслуживающая упоминания. Отметим также (терминологическое замечание), что в выражении для полной энергии E второе слагаемое пропорционально квадрату возмущения потенциальной температуры (плаучести). Отсюда термин — доступная потенциальная энергия.

Составляется линейная комбинация интегралов движения $I = E - UP + F + G + H$, где постоянная U имеет размерность скорости. Пусть ψ_0 — функция тока заданного стационарного зонального течения, устойчивость которого исследуется. Разность $I[\psi] - I[\psi_0]$ является интегралом движения. Считая отклонение $\delta\psi = \psi - \psi_0$ малым, разложим $I[\psi] - I[\psi_0]$ в ряд по вариациям последовательных порядков:

$$I[\psi] - I[\psi_0] = \delta I + \frac{1}{2} \delta^2 I + \dots$$

Произвольные функции Φ , Γ и H можно выбрать так, чтобы для заданного зонального потока ψ_0 при любом

наперёд взятом значении U первая вариация δI обращалась в нуль:

$$\Phi'_q|_{q=q_0} = \psi_0 + Uy, \quad z_- < z < z_+,$$

$$\Gamma'|_{\theta=\theta_0} = \frac{f_0^2}{N^2} (\psi_0 + Uy), \quad z = z_-,$$

$$H'|_{\theta=\theta_0} = -\frac{f_0^2}{N^2} (\psi_0 + Uy), \quad z = z_+.$$

Здесь штрих означает дифференцирование, а нижний индекс q означает частное дифференцирование по этой переменной. Если предположить монотонность q_0 по широте y при каждом z и монотонность θ_0 при $z = z_{\mp}$ соответственно, то этим условиям всегда можно удовлетворить. Вычисляя вторую вариацию, находим

$$\begin{aligned} \delta^2 I = & \iiint \left\{ (\nabla \delta\psi)^2 + \frac{f_0^2}{N^2} \left(\frac{\partial \delta\psi}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{(\partial \psi_0 / \partial y) + U}{\partial q_0 / \partial y} (\delta q)^2 \left. \right\} dx dy dz + \\ & + \iint_{\Sigma_-} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{(\partial \psi_0 / \partial y) + U}{\partial \theta_0 / \partial y} (\delta \theta)^2 dx dy - \\ & - \iint_{\Sigma_+} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{(\partial \psi_0 / \partial y) + U}{\partial \theta_0 / \partial y} (\delta \theta)^2 dx dy. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если квадратичная форма (2.6) положительно определена, т.е. все коэффициенты при квадратах переменных поля положительны, то зональное течение ψ_0 устойчиво в смысле Ляпунова. Заметим, что квадратичная форма (2.6) является точным законом сохранения (интегралом движения) для уравнений, линеаризованных относительно возмущений, наложенных на основное течение, и, согласно современной терминологии, представляет собой линейную комбинацию псевдоэнергии и псевдоимпульса.

Что даёт этот критерий практически, т.е. какие зональные течения ему удовлетворяют? Чтобы удовлетворить необходимому условию $\delta I = 0$, мы предположили, что потенциальный вихрь основного зонального течения является монотонной функцией широты. Естественно считать её монотонно возрастающей функцией, по аналогии с параметром Кориолиса f . Зональные потоки в атмосфере средних широт преимущественно западные, т.е. $\partial \psi_0 / \partial y < 0$. Выбрав постоянную U , до сих пор полагающуюся совершенно произвольной, большей максимума модуля скорости основного потока, получаем, что все интегралы по объёму в (2.6) становятся положительными. Это формально аналогично, если принять во внимание галилеевскую инвариантность уравнений движения, переходу в опережающую систему отсчёта, в которой зональный ветер является восточным и выполнено условие положительной определённости объёмного интеграла (см. [37]). В субтропическом океане зональные течения направлены на восток и формально условие положительной определённости объёмного интеграла выполнено при $U = 0$. Проблему доставляют поверхностные интегралы в (2.6). Потенциальная температура на поверхности земли монотонно убывает к полюсам и интеграл по поверхности земли в (2.6) отрицателен, так что вторая вариация оказывается знаконеопределённой. Положение усугубляет взятый по верхней границе инте-

грал, являющийся положительным, если потенциальная температура убывает к полюсам, и отрицательным в противном случае. В любом случае квадратичная форма (2.6) законоопределена и выполнено необходимое условие бароклиной неустойчивости. Когда потенциальная температура меняется крайне незначительно на нижней и верхней граничных поверхностях, поверхностными интегралами в (2.6) можно пренебречь. Остаётся лишь объёмный интеграл, и мы приходим к критерию Чарни – Стерна [28], который гласит, что зональный поток с монотонно возрастающим (по модулю) к полюсам потенциальным вихрем заведомо устойчив.

К критерию Чарни – Стерна можно прийти из более простых соображений. Формально устремляя в (2.6) постоянную U к бесконечности, т.е. делая её всё большей, мы приходим в пределе к квадратичной форме

$$\delta^2 \hat{I} \equiv -\frac{\delta^2 I}{U} = -\iiint \frac{(\delta q)^2}{\partial q_0 / \partial y} dx dy dz - \iint_{\Sigma_-} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{(\delta \theta)^2}{\partial \theta_0 / \partial y} dx dy + \iint_{\Sigma_+} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{(\delta \theta)^2}{\partial \theta_0 / \partial y} dx dy, \quad (2.7)$$

которая представляет собой вторую вариацию более простого функционала $\hat{I} = P + F + G + H$. Квадратичная форма (2.7) вновь является интегралом движения линеаризованных уравнений движения и называется псевдоимпульсом. Опять считая, что нижняя и верхняя граничные поверхности изоэнтропические, мы можем ограничиться рассмотрением объёмного интеграла в (2.7). При $\partial q_0 / \partial y > 0$ вторая вариация $\delta^2 \hat{I} < 0$. Значит, зональный импульс принимает максимальное значение на заданном зональном потоке ψ_0 . Согласно (2.7) любое возмущение потока ψ_0 привело бы к уменьшению зонального импульса, чего, однако, быть не может, поскольку это интеграл движения. Следовательно, такое зональное течение устойчиво. При ненулевых поверхностных интегралах, если их вклад противоположен по знаку вкладу объёмного интеграла, данное ограничение снимается и поток может быть бароклинно неустойчивым.

Интерес представляет случай, в котором потенциальный вихрь можно считать постоянным на каждом высотном уровне, что является идеализацией, но допустимой при рассмотрении достаточно непротяжённых по широте каналов, когда параметр Кориолиса можно считать приближённо постоянным и распространить это постоянство на весь квазигеострофический потенциальный вихрь. Теперь в (2.7) исчезает объёмный интеграл, и если потенциальная температура имеет один и тот же знак роста на верхней и нижней границах, то в задаче возможна бароклиная неустойчивость (закон сохранения импульса этого не запрещает). Линейный анализ неустойчивости в модели Иди [13] подтверждает сказанное.

3. Поверхностная квазигеострофическая модель и стационарные зональные течения

В разделе 2 сформулированы уравнения (2.4), (2.5), лежащие в основе квазигеострофической модели атмосферы. В данном разделе рассматривается упрощённый вариант этой модели, который далее используется для решения конкретных задач теории бароклиной неустойчивости. Для сокращения записи частные производные

обозначаются нижними буквенными индексами, плавучесть обозначается буквой θ .

Будем рассматривать квазигеострофические движения в горизонтальном слое $0 < z < H$ с постоянными значениями частоты плавучести N и параметра Кориолиса f . В отсутствие бета-эффекта удобно использовать безразмерную форму уравнений (2.4), (2.5):

$$\frac{Dq}{Dt} \equiv q_t + [\psi, q] = 0, \quad q = \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}, \quad (3.1)$$

$$z = 0, 1: \quad \psi_{zt} + [\psi, \psi_z] = 0. \quad (3.2)$$

Здесь в качестве вертикального и горизонтального масштабов приняты соответственно толщина слоя H и так называемый бароклиный радиус деформации Россби $L_R = NH/f$ [4]. Масштабы времени, функции тока и скорости соответственно: $T_* = L_R/U_*$, $\Psi_* = U_* L_R$ и $U_* = \Theta_*/N$, где Θ_* — характерное значение перепада плавучести. Безразмерные горизонтальные компоненты скорости u, v и плавучесть θ связаны с функцией тока соотношениями $u = -\psi_y, v = \psi_x, \theta = \psi_z$.

Уравнению (3.1) удовлетворяют течения с нулевым потенциальным вихрем $q = 0$. Функция тока таких течений, аналогичных потенциальным течениям в классической гидродинамике, находится из решения уравнения Лапласа

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} = 0 \quad (3.3)$$

в полосе $0 < z < 1$, к которому присоединяются нестационарные граничные условия (3.2). Динамическая модель течений, основанная на уравнениях (3.2), (3.3), была предложена в работах [39, 40] и получила специальное название — поверхностная квазигеострофическая (SQG) модель. Непосредственно из уравнений модели следует закон сохранения полной энергии

$$E_t = 0, \quad E = \int_0^1 \overline{(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2)} dz \quad (3.4)$$

и поверхностной потенциальной энергии (для каждой границы)

$$V_t = 0, \quad V = \overline{\psi_z^2}, \quad (3.5)$$

где чертой сверху обозначена операция усреднения по горизонтальным координатам. Согласно законам сохранения все решения SQG-модели ограничены по амплитуде. Отметим, что уравнения (3.2), (3.3) фактически определяют краевую задачу, близкую к задаче о потенциальных (безвихревых) гравитационных волнах в жидкости. Потенциал скорости волн находится из решения уравнения Лапласа с нестационарными граничными условиями на поверхности [5].

В приложениях часто рассматривают SQG-модель с одной границей (модель полубесконечной атмосферы или глубокого океана). В этой модели ставится только одно условие (3.2) — условие на подстилающей поверхности $z = 0$. Для приведения уравнений к безразмерному виду используются другие масштабы переменных. При заданном горизонтальном масштабе D вертикальный масштаб определяется как $H = fD/N$ (вертикальный масштаб Россби).

Для решений уравнения Лапласа (3.3) — гармонических функций — двумерное поле скорости $(u, v) = (-\psi_y, \psi_x)$ на границах выражается через граничные распределения плавучести $\theta = \psi_z$ (нормальной производной) посредством нелокальных операторов типа Гильберта. Так, в модели с одной границей [41, 42]

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \iint \frac{\theta(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}', \quad \mathbf{x} = (x, y). \quad (3.6)$$

С учётом (3.6) граничное условие (3.2) при $z = 0$ сводится к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению для нахождения плавучести $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$. Сама плавучесть при этом играет роль индуцирующего поле скорости активного скаляра, аналогичного завихренности в двумерной гидродинамике. Формирование сингулярностей в поле этого скаляра исследовалось в работах [41, 43]. Появление в интернете численных псевдоспектральных кодов решения интегрального уравнения (<https://pyqg.readthedocs.io/en/latest/index.html>) привело к росту числа публикаций, посвящённых геофизическим приложениям SQG-модели. Приложения включали анализ динамики распределённых и точечных вихрей [44–51], динамики приповерхностных течений в атмосфере и океане [42, 47, 52], описание динамики поверхностных фронтальных зон [53], сравнение энергетических каскадов в моделях SQG- и QG-турбулентности [54–56]. Обширная библиография представлена в обзоре [57].

Далее SQG-модель с двумя границами будет использована для исследования бароклинной неустойчивости зональных течений. Эти течения описываются стационарными решениями уравнений (3.2), (3.3), не зависящими от координаты x (в атмосферных моделях оси x и y традиционно считают направленными соответственно на восток и север). Функция тока $\Psi(y, z)$ зональных течений (обозначаем переменные большими буквами) является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \Psi_{yy} + \Psi_{zz} &= 0, \quad \Psi_z(y, 0) = \theta_{\text{bott}}(y), \\ \Psi_z(y, 1) &= \theta_{\text{top}}(y), \end{aligned} \quad (3.7)$$

для двумерного уравнения Лапласа в полосе $0 < z < 1$. Здесь $\theta_{\text{bott}}(y)$, $\theta_{\text{top}}(y)$ — заданные распределения плавучести на границах $z = 0$ и $z = 1$ соответственно, производные которых считаются ограниченными при $|y| \rightarrow \infty$. Из решения задачи (3.7) находится распределение скорости $U = -\Psi_y$ и плавучести $\Theta = \Psi_z$.

В силу краевых условий (условий второго рода) решение $\Psi(y, z)$ задачи (3.7) определено с точностью до произвольной линейной функции переменной y . Соответственно поле скорости $U = -\Psi_y$ определено с точностью до произвольной постоянной U_m . Интегрируя уравнение Лапласа (3.7) по вертикальной координате и обозначая среднее по слою $\langle \Psi \rangle = \int_0^1 \Psi dz$, получим $\langle \Psi \rangle_{yy} = \theta_{\text{bott}} - \theta_{\text{top}}$ или $\langle U \rangle_y = \theta_{\text{top}} - \theta_{\text{bott}}$. Отсюда следует, что равные граничные распределения плавучести, $\theta_{\text{top}} = \theta_{\text{bott}}$, индуцируют зональные течения со средней скоростью $\langle U \rangle = 0$ (опускаем произвольную постоянную). Такие течения имеют ярко выраженный вертикальный сдвиг скорости и представляют наибольший интерес с точки зрения устойчивости. Приведём некоторые примеры точных решений задачи (3.7) для различных типов распределений плавучести $\theta_{\text{top}} = \theta_{\text{bott}}$.

I. *Линейное распределение.* Для распределения $\theta_{\text{bott}} = \theta_{\text{top}} = -y$ точное решение задачи (3.7) имеет вид

$$\Psi = -y \left(z - \frac{1}{2} \right), \quad U = -\Psi_y = z - \frac{1}{2}. \quad (3.8)$$

Данное решение описывает зональное течение с антисимметричным профилем скорости и постоянным вертикальным сдвигом. Течение поддерживается постоянным градиентом температуры $\Theta = \Psi_z = -y$. К функции тока (3.8) можно добавить произвольное линейное распределение $\Psi_m = -U_m y$, соответственно к полю скорости добавится равномерное течение со скоростью U_m .

II. *Периодическое распределение.* Распределение $\theta_{\text{top}} = \theta_{\text{bott}} = C \cos(l y)$ индуцирует пространственно периодическое течение со скоростью

$$U = C \frac{\sinh[l(z - 0.5)] \sin(l y)}{\cosh(0.5l)}. \quad (3.9)$$

Вертикальный профиль скорости течения антисимметричен относительно середины слоя $z = 1/2$.

III. *Распределение фронтального типа.* Распределение $\theta_{\text{bott}} = \theta_{\text{top}} = -\tanh(\mu y)$ моделирует фронтальную зону (сглаженную ступеньку) шириной μ^{-1} . Точное решение задачи (3.7) можно построить для значений $\mu = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$, используя либо аппарат теории конформных отображений (отображение горизонтальной полосы на полуплоскость), либо преобразование Фурье по горизонтальной координате с последующим его обращением. При $n = 1$, т.е. в ситуации, когда ширина переходной зоны порядка одной трети от радиуса деформации Россби, решение для функции тока имеет вид

$$\Psi(y, z) = \frac{2}{\pi} \arctan \left[\frac{1 - \sin(\pi z)}{\cos(\pi z)} \tanh \left(\frac{\pi y}{2} \right) \right].$$

Соответствующие распределения скорости U и плавучести Θ :

$$\begin{aligned} U(y, z) &= -\frac{\cos(\pi z)}{\cosh(\pi y) + \sin(\pi z)}, \\ \Theta(y, z) &= -\frac{\sinh(\pi y)}{\cosh(\pi y) + \sin(\pi z)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Теневая картина изолиний поля скорости (3.10) для нижней половины слоя, представленная на рис. 2а, отвечает изолированному струйному течению. В верхней половине слоя находится аналогичное струйное течение, но противоположного направления. Таким образом, равные фронтальные распределения плавучести на границах индуцируют систему из двух встречных струйных течений, расположенных в верхней и нижней половинах слоя атмосферы. В реальных условиях нижнее течение будет за счёт поверхностного трения менее интенсивным, чем верхнее течение, которое можно считать прототипом верхнетропосферного струйного течения в атмосфере Земли [58, 59].

IV. *Локализованное распределение плавучести* $\theta_{\text{bott}} = \theta_{\text{top}} = 1/\cosh^2(\pi y)$. Точные решения для поля скорости и плавучести получаются из (3.10) простым дифференцированием:

$$\begin{aligned} U(y, z) &= -\frac{\cos(\pi z) \sinh(\pi y)}{[\cosh(\pi y) + \sin(\pi z)]^2}, \\ \Theta(y, z) &= \frac{1 + \sinh(\pi y) \sin(\pi z)}{[\cosh(\pi y) + \sin(\pi z)]^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

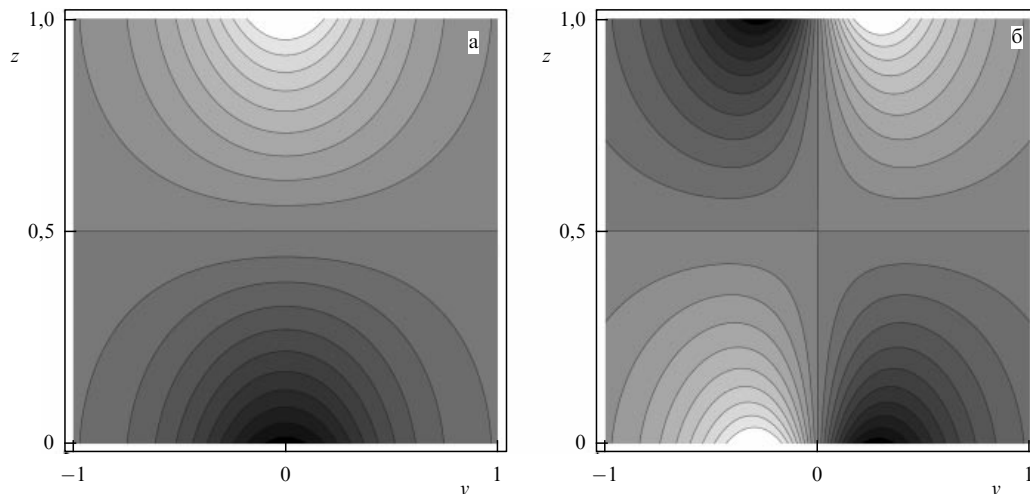


Рис. 2. Теневая картина изолиний зональной скорости в плоскости y, z : (а) для течения (3.10) и (б) для течения (3.11).

Теневая картина изолиний поля скорости (3.11) (рис. 2б) отвечает системе из двух встречных струйных течений в нижней половине слоя. Как и ранее, в нижней половине слоя расположена аналогичная система противоположного направления.

Рассмотренные примеры показывают, что структура стационарных зональных SQG-течений может быть довольно нетривиальной. Задача о линейной устойчивости таких течений сводится к нахождению решений уравнения Лапласа с линеаризованной формой краевых условий (3.2). Для течения с постоянным вертикальным сдвигом (3.8) решение задачи находится аналитически (см. раздел 4). Приближенные решения задач об устойчивости аналогов течений (3.10), (3.11) представлены в разделах 5, 6.

4. Бароклинная неустойчивость течения с постоянным вертикальным сдвигом скорости (задача Иди)

4.1. Два подхода к решению линейной задачи устойчивости

В работе Иди [13] (1949 г.) рассматривалось зональное течение с профилем скорости $U(z) = z$ и функцией тока $\Psi = -yz$. Данное течение является модифицированной формой SQG-течения (3.8), полученной добавлением равномерного течения со скоростью $U_m = 1/2$. Полагая $\psi = \Psi + \psi'$, для описания малых возмущений течения имеем уравнение Лапласа $\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} = 0$ (штрих опускаем) с линеаризованными условиями (3.2):

$$z = 0, 1 : \left(\frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_z - \psi_x = 0. \quad (4.1)$$

Если рассматривается течение в зональном канале шириной L_* , то к условиям (4.1) присоединяют также условия отсутствия нормальной компоненты скорости $v = \psi_x$ на твердых стенках канала $y = 0, L_*$.

Очень часто рассматривается случай неограниченного течения (на всей плоскости). Тогда для возмущений ставятся условия периодичности или ограниченности на бесконечности. Этим условиям удовлетворяют не зависящие от меридиональной координаты y двумерные воз-

мущения, которые, как показывает анализ, имеют максимальную скорость роста.

Существует два подхода к решению линейной задачи устойчивости. В первом из них (для течения в канале) рассматриваются возмущения в форме нормальных мод

$$\psi = \Phi(z) \exp [ik(x - ct)] \sin(l y), \quad l = \frac{\pi n}{L_*}, \quad (4.2)$$

бегущих вдоль зональной координаты с комплексной фазовой скоростью c . Подстановка (4.2) в уравнение Лапласа и краевые условия приводит к спектральной задаче

$$\Phi_{zz} - \mu^2 \Phi = 0, \quad z = 0, 1 : (z - c) \Phi_z - \Phi = 0,$$

где $\mu^2 = l^2 + k^2$ — квадрат волнового вектора. Поиск решения задачи в виде $\Phi = a \cosh(\mu z) + b \sinh(\mu z)$, где a, b — произвольные постоянные, приводит к квадратному уравнению для нахождения спектрального параметра — фазовой скорости $c = c_r + ic_i$ [3]:

$$c^2 - c + \mu^{-1} \coth \mu - \mu^{-2} = 0. \quad (4.3)$$

Из (4.3) следует существование двух нормальных мод (растущей и затухающей) и выражение для инкремента $s = kc_i$ растущей моды

$$s = kr \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad \alpha = \cosh \mu - \frac{1}{2} \mu \sinh \mu, \quad (4.4)$$

где $r = (\mu \sinh \mu)^{-1}$. Действительная часть фазовой скорости $c_r = 1/2$, т.е. нормальная мода распространяется со скоростью потока на среднем уровне.

Согласно (4.4) неустойчивость ($s > 0$) имеет место, если $-1 < \alpha(\mu) < 1$ или, что эквивалентно, $0 < \mu < \mu_b$, где граничное значение $\mu_b = 2,399$ — корень уравнения $\coth(\mu/2) = \mu/2$ (уравнения $\alpha(\mu) = -1$). С учётом $\mu^2 = l^2 + k^2$ отсюда получаем длинноволновой интервал неустойчивых волновых чисел $0 < k < k_b$, где правая граница интервала $k_b = (\mu_b^2 - l^2)^{1/2}$. Для существования неустойчивости должно выполняться условие $l < \mu_b$ или, что эквивалентно, ширина канала $L > \pi n / \mu_b$. При выполнении последнего условия (достаточно широкий канал) численный анализ выражения (4.4) даёт волновое число $k = k_m$ наиболее опасной моды, которой отвечает максимум инкремента $s = s_m$.

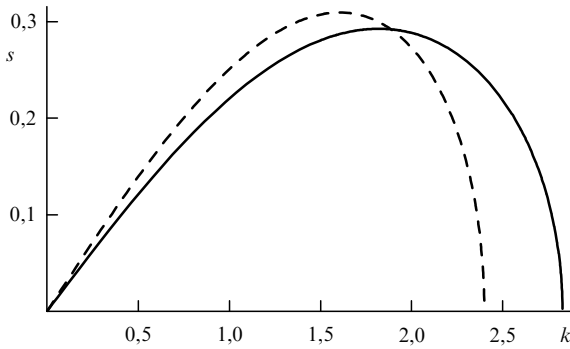


Рис. 3. Зависимость инкремента от волнового числа для дискретной (сплошная кривая) и непрерывной (штриховая кривая) моделей Иди.

Для течения на всей плоскости наиболее быстро возрастают двумерные возмущения, функция тока которых представляется в виде $\psi = \Phi(z) \exp[ik(x - ct)]$. Инкремент двумерной нормальной моды даётся выражением (4.4), в котором следует положить $\mu = k$ ($l = 0$). Зависимость инкремента $s = s(k)$ от волнового числа представлена на рис. 3. Наиболее опасной моде отвечает волновое число $k = k_m = 1,606$, максимум инкремента $s = s_m = 0,31$. Для приведённых выше значений параметров тропосферы длина волны (в размерных переменных) $(2\pi/k_m)L_R \sim 3600$ км (четверть длины волны — масштаб циклона) и время нарастания в 4 раз порядка 4 сут. Эти оценки близки к оценкам работы Иди [13]. Отметим, что течению с постоянным значением вертикального сдвига Λ отвечает размерный профиль скорости $U(z) = \Lambda z$ с характерным масштабом $U_* = \Lambda H$; адвективный временной масштаб $T_* = L_R/U_* = (N/\Lambda)f^{-1}$. Поэтому размерное значение инкремента для наиболее опасной моды часто записывают в виде [60] $s_m = 0,31(f/N)\Lambda$. При $U_* = 10$ м с⁻¹, $H = 10$ км (атмосфера) значение вертикального сдвига $\Lambda = U_*/H = 10^{-3}$ с⁻¹ и адвективный временной масштаб $T_* = 10^5$ с (порядка 1 сут).

Подчёркнём, что в развитии бароклинной неустойчивости принципиальную роль играет вертикальный сдвиг скорости, который поддерживается горизонтальным градиентом температуры. В этом состоит принципиальное отличие от баротропной неустойчивости, развивающейся за счёт горизонтального сдвига скорости. Баротропная неустойчивость фактически представляет собой классическую сдвиговую неустойчивость, отягощённую наличием бета-эффекта. В развитии баротропной неустойчивости важную роль играет упомянутый ранее баротропный радиус деформации Россби, который значительно превышает бароклиный радиус деформации (для атмосферы Земли в средних широтах баротропный радиус порядка 3000 км). Детально модели баротропной неустойчивости описаны в монографиях [2–4] и обзорах [6–11].

Другой подход к решению линейной задачи бароклинной устойчивости был предложен в работе [21] и впоследствии развивался в работах [61–63]. В этом подходе возмущение представляется вещественным решением уравнения Лапласа с периодическими распределениями плавучести на границах

$$\psi_z|_{z=0,1} = \rho_{1,2}(t) \cos(kx + \varphi_{1,2}(t)) \sin(l y). \quad (4.5)$$

Здесь $\rho_{1,2}(t)$ и $\varphi_{1,2}(t)$ — вещественные амплитуды и фазы граничных распределений. В соответствующем решении уравнения Лапласа

$$\psi = r\{\rho_2(t) \cosh(\mu z) \cos(kx + \varphi_2) - \rho_1(t) \cosh[\mu(z-1)] \cos(kx + \varphi_1)\} \sin(l y) \quad (4.6)$$

слагаемые, пропорциональные $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t)$, отвечают так называемым краевым волнам Россби, локализованным соответственно у нижней (верхней) границы [21]. Взаимодействие двух таких волн описывается сформулированной в [21] системой уравнений, которая получается подстановкой решения (4.6) в краевые условия (4.1). Система состоит из трёх нелинейных уравнений для нахождения амплитуд $\rho_1(t)$, $\rho_2(t)$ и сдвига фаз между распределениями плавучести на границах $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$:

$$\frac{d\rho_1}{dt} = kr\rho_2 \sin \varphi, \quad \frac{d\rho_2}{dt} = kr\rho_1 \sin \varphi, \quad (4.7)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -2kr[\alpha - 0,5(d + d^{-1}) \cos \varphi], \quad d = \frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (4.8)$$

К этой системе присоединяется также изолированное уравнение

$$\frac{d\varphi_+}{dt} = -k - kr(d - d^{-1}) \cos \varphi, \quad \varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (4.9)$$

которое вместе с уравнением (4.8) позволяет найти сами фазы. Выражения для входящих в систему коэффициентов α , r определены в (4.4).

Важно подчеркнуть, что введение комплексных амплитуд $a_{1,2}(t) = \rho_{1,2}(t) \exp(i\varphi_{1,2}(t))$ позволяет свести нелинейную систему (4.7)–(4.9) к системе из двух линейных уравнений:

$$\begin{aligned} i \frac{da_1}{dt} - kpa_1 + kra_2 &= 0, \\ i \frac{da_2}{dt} - k(1-p)a_2 - kra_1 &= 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $p = r \cosh \mu \equiv \coth \mu/\mu$. Эту систему легко получить и непосредственно, рассматривая комплексные решения уравнения Лапласа

$$\psi = r\{a_2(t) \cosh(\mu z) - a_1(t) \cosh[\mu(z-1)]\} \exp(ikx) \sin(l y), \quad (4.11)$$

удовлетворяющие условиям $\psi_z|_{z=0,1} = a_{1,2}(t) \exp(ikx) \sin(l y)$. Важная особенность нелинейной системы (4.7)–(4.9) состоит в том, что она, в отличие от линейной системы (4.10), иллюстрирует принципиальную роль сдвига фаз $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ для развития начального возмущения. Действительно, согласно уравнениям (4.7) амплитуды возрастают, если сдвиг фаз $0 < \varphi < \pi$ ($\sin \varphi > 0$). Далее, в важном частном случае равных граничных амплитуд $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ система (4.7), (4.8) сводится к системе двух уравнений:

$$\frac{d\rho}{dt} = kr\rho \sin \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -2kr(\alpha - \cos \varphi). \quad (4.12)$$

При $\varphi = \varphi_n$, $\cos \varphi_n = \alpha(\mu)$ система (4.12) имеет точное решение $\rho(t) = \rho(0) \exp(st)$, отвечающее растущей нормальной моде с инкрементом (4.4). Значение $\varphi = \varphi_n$ для

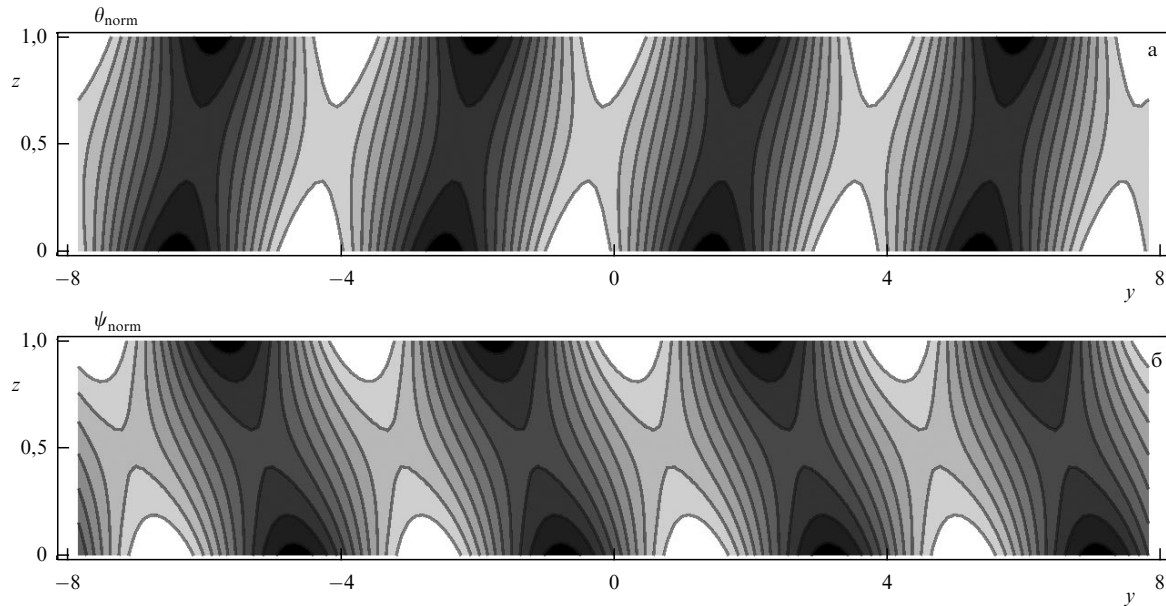


Рис. 4. Теневые картины изолиний поля плавучести (а) и функции тока (б) для наиболее опасной двумерной нормальной моды.

этой моды представляет собой неподвижную точку второго уравнения (4.12), которая существует только для значений $-1 < \alpha(\mu) < 1$, т.е. для волновых чисел из указанного ранее интервала $0 < k < k_b$. Инкремент и сдвиг фаз для двумерных нормальных мод даются выражениями

$$s(k) = \frac{1}{\sinh k} (1 - \alpha^2)^{1/2},$$

$$\cos \varphi_n = \alpha(k) \equiv \cosh k - 0,5 k \sinh k. \quad (4.13)$$

Наиболее опасной нормальной моде с волновым числом $k = k_m = 1,606$ отвечает сдвиг фаз $\cos \varphi_n = \alpha = 0,672$ ($\varphi_n = 47,8^\circ$). Подчеркнём, что информация о сдвиге фаз теряется в подходе, использующем нормальные моды. Теневые картины изолиний полей плавучести $\theta = \psi_z$ и функции тока ψ (возмущения давления) для наиболее опасной двумерной нормальной моды приведены на рис. 4. Вследствие сдвига фаз максимумы распределений полей на верхнем и нижнем уровнях смещены относительно друг друга. Эта особенность регулярно фиксируется метеорологическими наблюдениями [60].

Для полной системы (4.11), (4.12) в работе [21] указаны её первые интегралы $J_{1,2} = \text{const}$,

$$J_1 = \rho_2^2 - \rho_1^2, \quad J_2 = 0,5 (\rho_1^2 + \rho_2^2) - \alpha^{-1} \rho_1 \rho_2 \cos \varphi, \quad (4.14)$$

позволяющие свести интегрирование системы к квадратурам. Интересно простое точное решение $\rho_1(t) = \rho_2(0)(1 - \alpha^2)^{-1/2} \sinh(st)$, отвечающее задаче с начальным условием $\rho_1(0) = 0$. Данное решение описывает так называемый циклогенез типа Б — механизм генерации приземных вихревых возмущений начальными возмущениями на верхних уровнях [64, 65].

Согласно некоторым работам [66] до 80 % случаев образования приземных циклонов в атмосфере средних широт связано с данным механизмом. Представленные на рис. 5 теневые картины изолиний поля плавучести для трёх моментов времени наглядно иллюстрируют этот механизм.

4.2. Оптимальные возмущения в линейной задаче Иди

Под оптимальными возмущениями в линейной теории гидродинамической неустойчивости понимают возмущения с максимумом скорости роста энергии или отношения конечной и начальной энергий. Поиск оптимальных возмущений стимулирован осознанием ограниченности классического подхода, основанного на нахождении экспоненциально возрастающих нормальных мод. Так, показано, что скорость роста суперпозиции возрастающей и затухающей нормальных мод может превосходить скорость роста одной возрастающей моды [67–69]. Даже суперпозиция двух затухающих мод может демонстрировать алгебраическое (немодальное) возрастание энергии на начальном этапе развития. Математическая причина такого поведения связана с отсутствием свойства нормальности у дифференциальных операторов задач теории устойчивости и, как следствие, свойства ортогональности их собственных функций [68, 69].

При нахождении оптимальных возмущений, как правило, решается достаточно сложная вычислительная задача на условный экстремум функционала полной энергии. Для течения с вертикальным сдвигом алгоритм решения задачи использует конечно-разностную аппроксимацию динамического оператора задачи по вертикали с последующим нахождением сингулярного разложения (Singular Value Decomposition, SVD) его матрицы [70–74].

Важная особенность задачи Иди состоит в том, что для неё можно развить аналитический подход к определению оптимальных возмущений. Подход использует уравнение баланса энергии и вещественное представление для функции тока возмущений (3.6) (в терминах суперпозиции краевых волн Россби). Следуя работам [75, 76], мы проиллюстрируем этот подход, рассматривая (для краткости) случай двумерных возмущений с равными граничными амплитудами.

Вводя операции горизонтального и вертикального усреднения

$$\bar{\varphi}^x = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \varphi \, dx, \quad \langle \varphi \rangle \equiv \int_0^1 \bar{\varphi}^x \, dz,$$

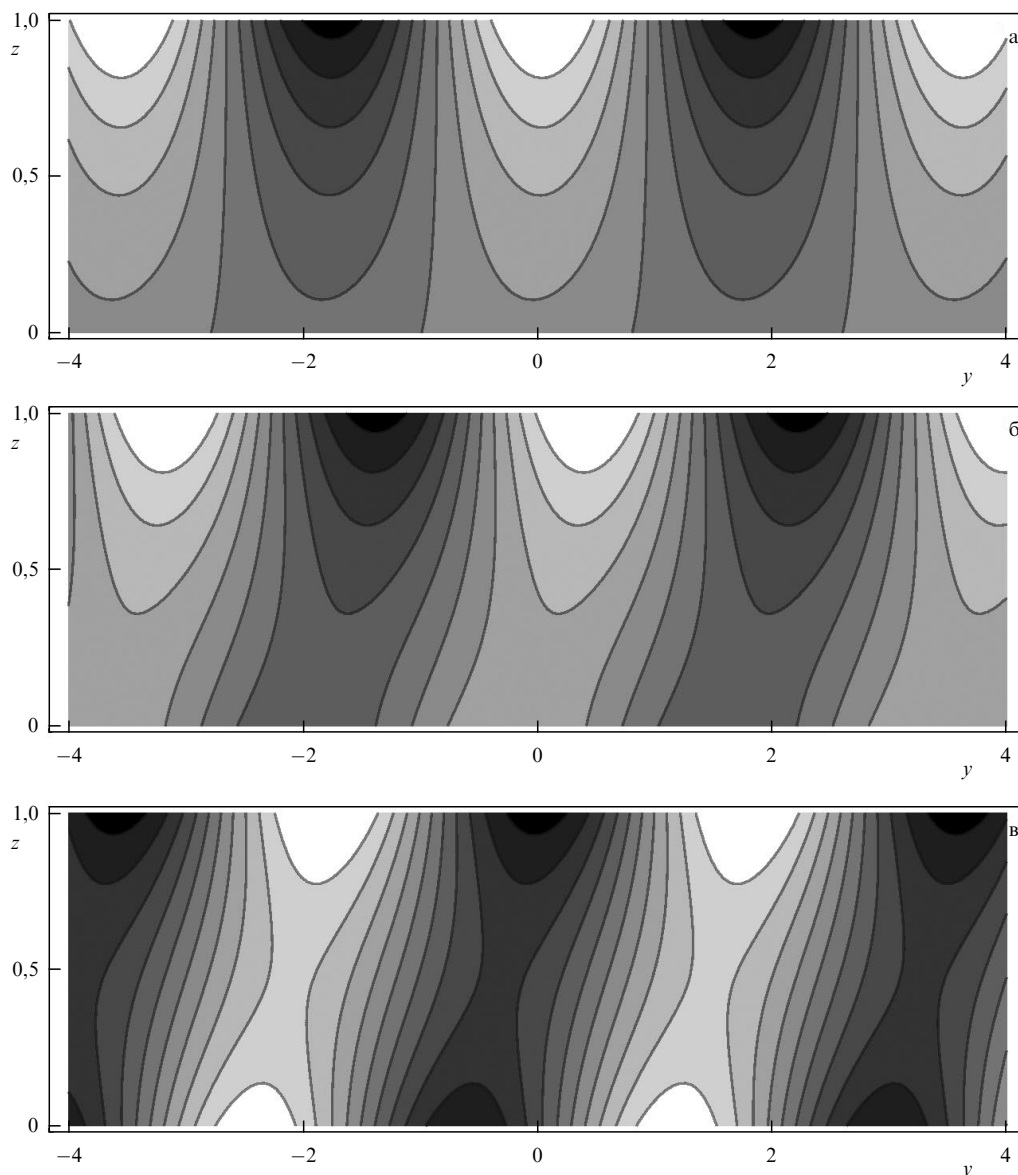


Рис. 5. Теневые картины изолиний поля плавучести в моменты времени (а) $t = 0,1$, (б) $t = 1,0$, (в) $t = 4,0$. Случай начального распределения плавучести, сосредоточенного вблизи верхней границы.

определим плотность энергии и полную энергию двумерного возмущения выражениями

$$\varepsilon = 0,5 (\psi_x^2 + \psi_z^2), \quad E = \langle \varepsilon \rangle \equiv \int_0^1 \bar{\varepsilon}^x dz.$$

Из определения ε следует тождество $\varepsilon_t = (\psi\psi_{xt})_x + (\psi\psi_{zt})_z - \psi q_t$, где $q = \psi_{xx} + \psi_{zz}$. Горизонтальное усреднение этого тождества с последующим интегрированием по z и использованием условий (4.1) приводит к уравнению баланса энергии для возмущений с нулевым ПВ, $q = 0$,

$$\frac{dE}{dt} = \overline{\psi_x \psi_z}^x \Big|_{z=1}. \quad (4.15)$$

Согласно уравнению (4.15), изменение полной энергии определяется меридиональным потоком плавучести на верхней границе.

Для двумерных возмущений с равными граничными амплитудами функция тока определяется выражением

$$\psi = r\rho(t) \{ \cosh(kz) \cos(kx + \varphi_2(t)) - \cosh[k(z-1)] \times \\ \times \cos(kx + \varphi_1(t)) \}, \quad r = (k \sinh k)^{-1}. \quad (4.16)$$

Использование (4.16), прямого интегрирования и стандартных правил усреднения периодических функций даёт выражения для полной энергии и её производной:

$$\frac{dE}{dt} = \overline{\psi_x \psi_z}^x \Big|_{z=1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sinh k} \rho^2(t) \sin \varphi(t), \\ E(t) = \frac{1}{2} \langle \psi_x^2 + \psi_z^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\coth k}{k} \rho^2(t) \times \\ \times \left(1 - \frac{1}{\cosh k} \cos \varphi(t) \right). \quad (4.17)$$

Согласно первому выражению, полная энергия возрастает, если сдвиг фаз $0 < \theta < \pi$. Только при таком сдвиге фаз возмущение способно черпать энергию из сдвигового потока.

Использование (4.17) позволяет получить простое решение задачи о начальных оптимальных возмущениях — возмущениях с максимальной скоростью возрастания энергии в начальный момент. Для скорости возрастания энергии из (4.17) следует выражение

$$\gamma = \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{k \sin \varphi}{\cosh k - \cos \varphi}, \quad (4.18)$$

зависящее только от начального сдвига фаз (при фиксированном значении волнового числа). Поскольку $\gamma > 0$ на промежутке $0 < \varphi < \pi$ и на концах промежутка обращается в нуль, существует значение $\varphi = \varphi_{\text{opt}}$, при котором функция $\gamma(k, \varphi)$ достигает максимума. Это значение отвечает начальному оптимальному возмущению. Элементарное исследование (4.18) на экстремум приводит к выражениям

$$\cos \varphi_{\text{opt}} = \frac{1}{\cosh k}, \quad \gamma_{\text{opt}} = \gamma(k, \varphi_{\text{opt}}) = \frac{k}{\sinh k}, \quad (4.19)$$

которые определяют зависимости сдвига фаз и скорости возрастания энергии от волнового числа оптимального возмущения. Поскольку для растущей нормальной моды $\cos \varphi_n = \alpha(k)$, из сравнения (4.18) и (4.12) следует, что в общем случае $\varphi_n \neq \varphi_{\text{opt}}$, т.е. экспоненциально возрастающие нормальные моды не являются оптимальными возмущениями. Скорость возрастания энергии растущей нормальной моды $\gamma = \gamma_n(k) = 2s(k)$ равна удвоенному инкременту (4.13).

Из представленных на рис. 6 зависимостей $\gamma_{\text{opt}}(k)$ и $\gamma_n(k) = 2s(k)$ видно, что существует единственное значение волнового числа $k = k_1 = 1,915$, для которого нормальная мода является оптимальной, т.е. $\cos \varphi_n = \cos \varphi_{\text{opt}}$ и $\gamma_{\text{opt}} = \gamma_n$. Этому значению (корню уравнения $\tanh k = k/2$) отвечает сдвиг фаз $\varphi_n = \varphi_{\text{opt}} = 73,22^\circ$. Значение $k_1 \neq k_m$, т.е. наиболее опасная нормальная мода не является оптимальным возмущением. Картины изолиний полей плавучести и функции тока для оптимальных возмущений качественно подобны представленным на рис. 4 картинам для нормальных мод. Отличие состоит в более ярко выраженном наклоне изолиний. Важно подчеркнуть, что для начальных оптимальных возмущений величина $\gamma_{\text{opt}}(k)$ достигает максимума в пределе длинных волн, $k \rightarrow 0$.

Более общая задача об оптимальных возмущениях формулируется следующим образом: для фиксированного момента t (времени оптимизации) найти начальное возмущение, для которого функционал $F = E(t)/E(0)$ принимает максимальное значение. С учётом разложения $F = 1 + \gamma(0)t$, $\gamma(t) = E^{-1} dE/dt$, $t \ll 1$, рассмотренные выше начальные оптимальные возмущения дают решение задачи при $t \rightarrow 0$. При конечных значениях t решение задачи требует интегрирования системы динамических уравнений (4.11).

С использованием (4.16) и первого интеграла J_2 (4.13) выражение для отношения конечной и начальной энергий приводится к виду

$$F = \frac{E(t)}{E(0)} = \frac{\alpha - \cos \varphi_0}{\cosh k - \cos \varphi_0} \frac{\cosh k - \cos \varphi(t)}{\alpha - \cos \varphi(t)}. \quad (4.20)$$

В этом выражении сдвиг фаз $\varphi(t)$ является решением задачи Коши для второго уравнения (4.11):

$$\frac{d\varphi}{dt} = -2r(\alpha - \cos \varphi), \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad (4.21)$$

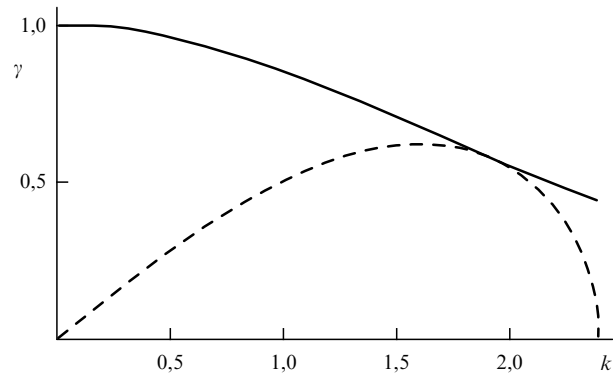


Рис. 6. Зависимости γ_{opt} (сплошная кривая), γ_n (штриховая кривая) от волнового числа k .

которое зависит от начального значения φ_0 и волнового числа k как от параметров: $\varphi = \varphi(t, k, \varphi_0)$. С учётом этой зависимости функционал F представляет собой функцию трёх переменных, $F = F(t, k, \varphi_0)$. Определение оптимального возмущения сводится к нахождению максимума этой функции при фиксированных значениях двух первых аргументов. Подчеркнём, что φ_0 — начальное значение сдвига фаз.

Явное выражение для функции $F = F(t, k, \varphi_0)$ получается интегрированием уравнения (4.20). Стандартное разделение переменных даёт точное решение $\varphi = \varphi(t, k, \varphi_0)$ в виде первого интеграла:

$$Y = \frac{X + c(t)}{c(t)X + 1}, \quad Y = \delta^{-1} \tan \left(\frac{\varphi(t)}{2} \right), \\ X = \delta^{-1} \tan \left(\frac{\varphi_0}{2} \right), \quad (4.22)$$

где $c(t) = \tanh(s(k)t)$, $\delta = (k/2 - \tanh k/2)/(\coth k/2 - k/2)$. Выражая в (4.20) $\cos \varphi(t)$ через тангенс половинного угла и используя первый интеграл (4.22), после преобразования получим соотношение

$$F = \frac{1}{1 - c^2(t)} \frac{(X + c(t))^2 + n(c(t)X + 1)^2}{X^2 + n}, \\ X = \delta^{-1} \tan \left(\frac{\varphi_0}{2} \right), \quad (4.23)$$

которое определяет функцию $F = F(t, k, \varphi_0)$ или, что эквивалентно, функцию $F = F(t, k, X)$ в явном виде. В выражении (4.23) параметр $n = \delta^{-2} \tanh^2(k/2)$ зависит только от волнового числа. Значение F для нормальной моды $F = F_n = \exp(2s(k)t)$ находится из (4.23) при $X = 1$.

Для фиксированных значений t, k на промежутке $0 < \varphi_0 < \pi$ ($0 < X < \delta^{-1}$) функция F (4.23) имеет единственную точку максимума $\varphi_0 = \varphi_{\text{opt}}$ ($X = X_{\text{opt}}$), отвечающую оптимальному возмущению. Дифференцирование (4.23) по X приводит к квадратному уравнению $X^2 - c(t)(n-1)X - n = 0$ для нахождения этой точки. Отсюда

$$X_{\text{opt}} = \delta^{-1} \tan \left(\frac{\varphi_{\text{opt}}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(c(t)(n-1) + \sqrt{c^2(t)(n-1)^2 + 4n} \right) \quad (4.24)$$

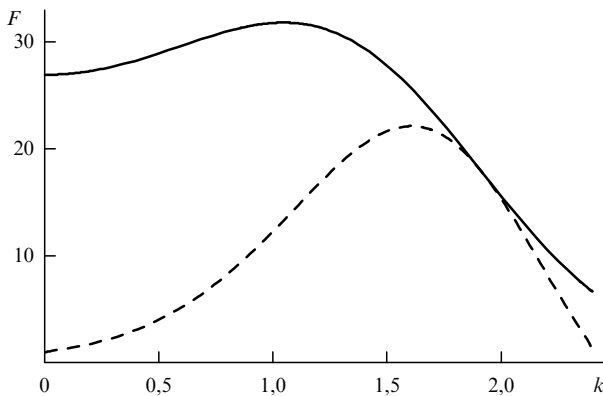


Рис. 7. Зависимости F_{opt} (сплошная кривая) и F_n (штриховая кривая) от волнового числа k при $t = 5$.

и соответствующее максимальное значение

$$F_{\text{opt}} = 1 + \frac{(n+1)c^2(t)}{1-c^2(t)} \left(1 + \frac{1}{c(t)X_{\text{opt}}} \right). \quad (4.25)$$

Формулы (4.24), (4.25) дают аналитическое решение задачи об оптимальных возмущениях.

Зависимости F_{opt} и F_n от волнового числа k , отвечающие фиксированному времени оптимизации $t = 5$, приведены на рис. 7. Важная особенность состоит в появлении на графике $F_{\text{opt}}(k)$ точки максимума $k = k_{\text{max}}(t)$, отвечающей предпочтительному волновому числу с максимумом отношения энергий. При $t = 5$ (время оптимизации порядка 5 сут) значение $k_{\text{max}} \sim 1,2$. Как и в случае начальных оптимальных возмущений, при $k = k_1$ происходит касание графиков (нормальная мода является оптимальным возмущением). Для всех других значений волнового числа $F_{\text{opt}} > F_n$. Если при фиксированном значении $k \neq k_1$ изобразить графики зависимостей F_{opt} и F_n от времени в логарифмическом масштабе, то они будут иметь вид двух параллельных прямых, расположенных одна над другой.

В работах [76, 77] рассмотрены также обобщённые задачи, использующие для оптимизации другие энергетические характеристики (кинетическую энергию, потенциальную энергию на границах и т.д.). Аналитическое решение задачи об оптимальных возмущениях для свободного слоя сдвига и струйных течений во вращающемся слое мелкой воды получено в недавней работе [78].

4.3. Нелинейная динамика возмущений в задаче Иди

Для описания нелинейной динамики возмущений в гидродинамике и теоретической физике используются два подхода. Первый из них представлен слабонелинейной теорией устойчивости, включающей анализ различных форм амплитудных уравнений [79]. Данный подход является асимптотически строгим, однако для его применения необходимо наличие критического (порогового) параметра, управляющего развитием неустойчивости. Второй подход состоит в сведении задачи устойчивости к конечномерным динамическим системам с помощью метода Галёркина [80]. Основное требование к таким системам состоит в соблюдении законов сохранения исходной нелинейной задачи. Адекватность подхода во многом зависит от удачного выбора базисных функций. Ниже, следуя недавней работе [81], мы представляем

краткий анализ нелинейной динамики возмущений в задаче Иди, использующий максимально усечённые приближения метода Галёркина.

Нелинейная динамика возмущений течения с постоянным вертикальным сдвигом описывается решением уравнения Лапласа с нелинейными граничными условиями:

$$z = 0, 1: \left(\frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_z - \psi_x + [\psi, \psi_z] = 0. \quad (4.26)$$

Течение рассматривается в бесконечном горизонтальном канале $(-\infty < x < \infty, 0 < y < \pi)$ с безразмерной шириной $L = \pi$. Ввиду условий непротекания на боковых границах канала функцию тока возмущения можно представить в форме разложения по системе базисных тригонометрических функций $f_n(y) = \sin(ny)$. Наиболее опасная мода линейной теории, отвечающая значению $n = 1$, описывается выражением (4.6), которое можно представить как $\psi = A(x, z, t) \sin y$. В нелинейной задаче эта мода взаимодействует со всеми модами, отвечающими значениям $n = 2, 3, \dots$. Будем рассматривать взаимодействие только первых двух мод ($n = 1, n = 2$) и в соответствии с методом Галёркина искать приближённые решения вида

$$\psi = A(x, z, t) \sin y + C(z, t) \sin 2y. \quad (4.27)$$

В силу уравнения Лапласа коэффициенты разложения удовлетворяют уравнениям

$$A_{xx} + A_{zz} - A = 0, \quad (4.28a)$$

$$C_{zz} - 4C = 0, \quad 0 < z < 1. \quad (4.28b)$$

Из краевых условий (4.26) следуют также уравнения, связывающие распределения A, C на границах. Для получения этих уравнений представление (4.27) подставляется в условия (4.26) и далее используются условия ортогональности системе базисных функций с $n = 1, 2$. Эти условия приводят к граничным уравнениям:

$$z = 0, 1: A_z + z A_{zx} - A_x + (C A_{xz} - A_x C_z) = 0, \quad (4.29a)$$

$$C_z + \frac{1}{2} (A_x A_z - A A_{xz}) = 0. \quad (4.29b)$$

Таким образом, в рамках метода Галёркина с двумя базисными функциями описание нелинейной динамики возмущений сводится к решению линейных уравнений (4.28) с нелинейными граничными условиями (4.29).

Решение уравнения (4.28a) ищется в виде, отвечающем нормальной моде линейной теории:

$$A(x, z, t) = r \{ \rho_2(t) \cosh(\mu z) \sin(kx + \varphi_2) - \rho_1(t) \cosh[\mu(z-1)] \sin(kx + \varphi_1) \}. \quad (4.30)$$

В качестве решения уравнения (4.28b) берётся величина

$$C = c(t) \frac{\cosh(2z) - \cosh[2(z-1)]}{2 \sinh 2}, \quad (4.31)$$

которая имеет равные значения производной на границах $z = 0, 1$: $C_z = c(t)$. Граничные значения самой функции $C = \mp mc(t)$, где числовая константа $m = (1/2) \tanh(1)$.

Подстановка решений (4.30), (4.31) в граничные уравнения (4.29) приводит к замкнутой системе из четырёх

уравнений относительно $c(t)$, амплитуд $\rho_1(t), \rho_2(t)$ и сдвига фаз между распределениями $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= -\frac{1}{2} kr \rho_1 \rho_2 \sin \varphi, \\ \frac{d\rho_1}{dt} &= kr(1+c)\rho_2 \sin \varphi, \quad \frac{d\rho_2}{dt} = kr(1+c)\rho_1 \sin \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -2kr[\alpha + \beta c - 0,5(1+c)(d+d^{-1}) \cos \varphi], \\ d &= \frac{\rho_1}{\rho_2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Здесь $\alpha = \cosh \mu - (1/2)\mu \sinh \mu$, $\beta = \cosh \mu - m\mu \sinh \mu$. К системе (4.32) присоединяется также аналогичное (4.9) изолированное уравнение для суммы фаз $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$, позволяющее найти сами фазы.

Динамическая система (4.32) обобщает систему (4.7), (4.8) для случая описания нелинейной динамики возмущений. Принципиальное отличие от линейной динамики связано с вытекающим из системы (4.31) набором первых интегралов (законов сохранения) $I_k = \text{const}$, $k = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} I_1 &= \rho_2^2 - \rho_1^2, \quad I_2 = \frac{1}{2}(\rho_1^2 + \rho_2^2) + 2c_1^2, \\ I_3 &= \rho_1 \rho_2 \cos \varphi + 4(\alpha - \beta)c_1 + 2\beta c_1^2, \end{aligned} \quad (4.33)$$

где $c_1(t) = 1 + c(t)$. Данные интегралы отражают законы сохранения полной энергии и поверхностной потенциальной энергии на границах (3.3), (3.4). Из первого интеграла I_2 следует, что, в отличие от решений линейной системы, все решения нелинейной системы ограничены по амплитуде. Таким образом, учёт взаимодействия двух мод стабилизирует режим неограниченного экспоненциального возрастания возмущений в линейной теории. Этот режим сменяется режимом устойчивых регулярных колебаний.

В случае равных граничных амплитуд, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, система (4.33) сводится к системе трёх уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= -\frac{1}{2} kr \rho^2 \sin \varphi, \quad \frac{d\rho}{dt} = kr \rho \sin \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -2kr(\alpha - \beta + \beta c_1 - c_1 \cos \varphi). \end{aligned} \quad (4.34)$$

На рисунке 8 представлены результаты численного интегрирования системы (4.34) с начальными условиями $c(0) = 0$, $\rho(0) = 0,3$, $\varphi(0) = 1,07$. Значение $\varphi(0)$ отвечает сдвигу фаз для наиболее опасной нормальной моды линейной теории с волновым числом $k = k_m = 1,478$. Расчёты наглядно иллюстрируют возникновение колебательного режима. Как показывает анализ, колебания происходят в окрестности положения равновесия системы (4.34), которому отвечает вторичное стационарное течение. Полученная в [81] формула для периода малых колебаний в окрестности положения равновесия иллюстрирует сильную зависимость периода от начальных условий. Для параметров наиболее опасной моды линейной теории период малых колебаний составляет $T = 40$ (в размерных переменных порядка месяца).

Полная функция тока ψ_* является суммой функции тока возмущения (4.27) и функции тока фонового течения $\Psi = -yz$. Если зависимости $\rho(t)$, $c_1(t)$, $\varphi(t)$ известны, то

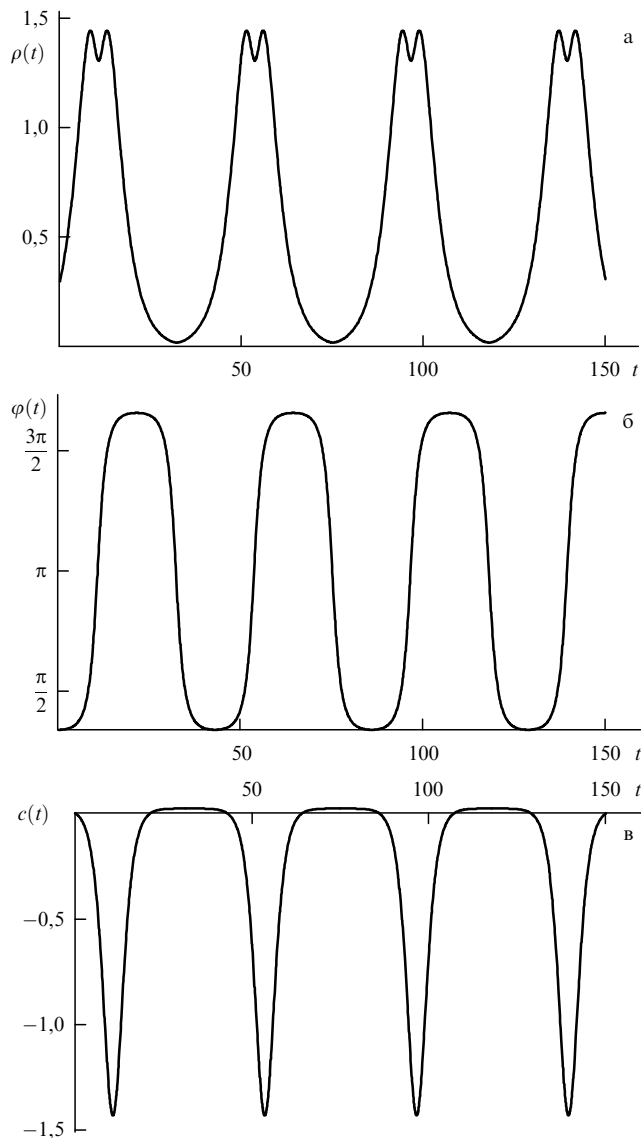


Рис. 8. Зависимости от времени (а) $\rho(t)$, (б) $\varphi(t)$, (в) $c(t)$ для $k = 1,478$ и начальных условий $\rho(0) = 0,3$, $\varphi(0) = 1,07$, $c(0) = 0$.

тогда можно исследовать структуру полной функции тока в различные моменты на разных вертикальных уровнях. Примеры картин изолиний ψ_* на нижней и верхней границах в момент времени, отвечающий четверти периода колебаний, представлены на рис. 9, 10. Как показывает анализ, на нижнем уровне происходит периодический процесс интенсификации и затухания системы циклонических и антициклонических вихрей, центры которых периодически смещаются то к правой, то к левой границам зонального канала. Эволюция на верхней границе сводится к периодическому процессу формирования меандров в зональном потоке.

Следует отметить, что режим с регулярными и строго периодическими во времени колебаниями всех параметров впервые был обнаружен Хайдом в лабораторном моделировании бароклиной неустойчивости во вращающихся цилиндрических сосудах [16, 22]. Впоследствии были сделаны попытки обнаружить периодический режим и при анализе натурных атмосферных данных [82]. Наблюдаемые колебания энергетических параметров атмосферы с периодом около 24 сут и их связь с бароклин-

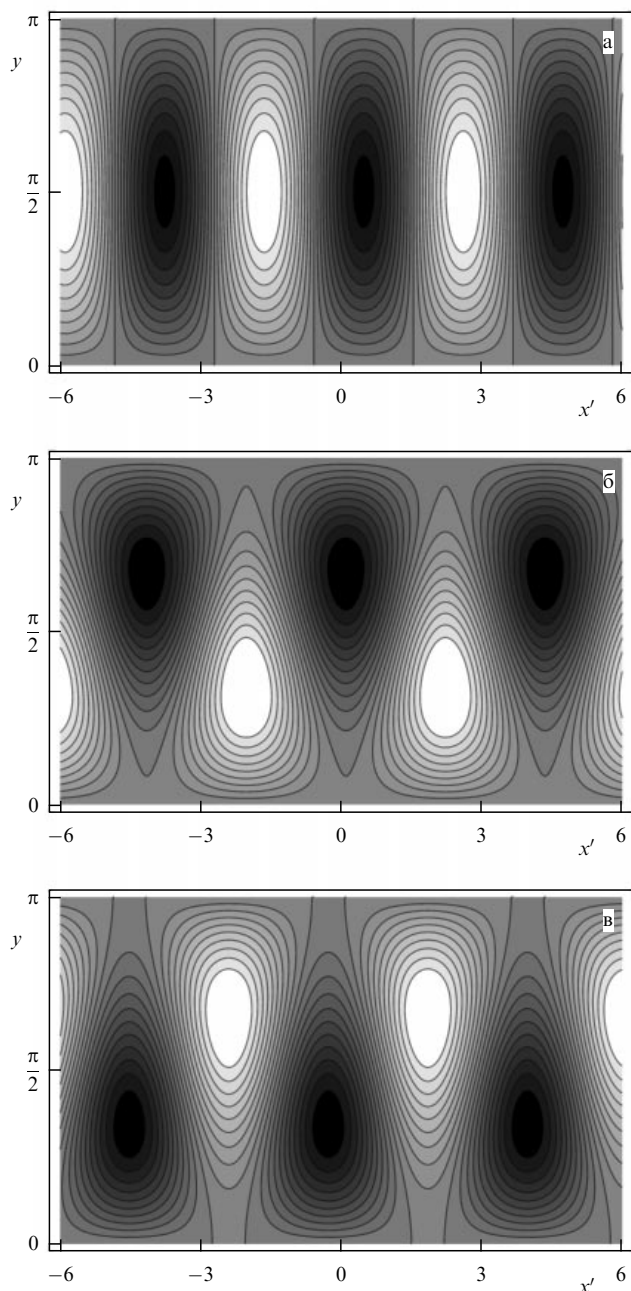


Рис. 9. Теневые картины изолиний полной функции тока на нижней границе для моментов времени: (а) $t = 0$, (б) $t = 10$, (в) $t = 30$. Значения параметров $k = 1,478$, $\rho(0) = 0,3$, $\varphi(0) = 1,07$, $c(0) = 0$. Изолинии построены в движущейся системе координат, т.е. в плоскости (x', y) .

ной неустойчивостью описаны в работе [83]. Теоретическое описание нелинейных осцилляций впервые было получено Педлоски [3, 84–87], рассмотревшим идеализированное геострофическое течение двухслойной жидкости со скачком скорости между слоями. Существование порогового для неустойчивости критического значения скачка позволило развить слабонелинейную теорию бароклиной неустойчивости. Согласно этой теории, при небольших отклонениях от критического значения устанавливается режим нелинейных осцилляций параметров течения, обусловленный периодическим обменом энергии между течением и неустойчивыми бароклиными волнами. Впоследствии изучались [3, 88–92] различные

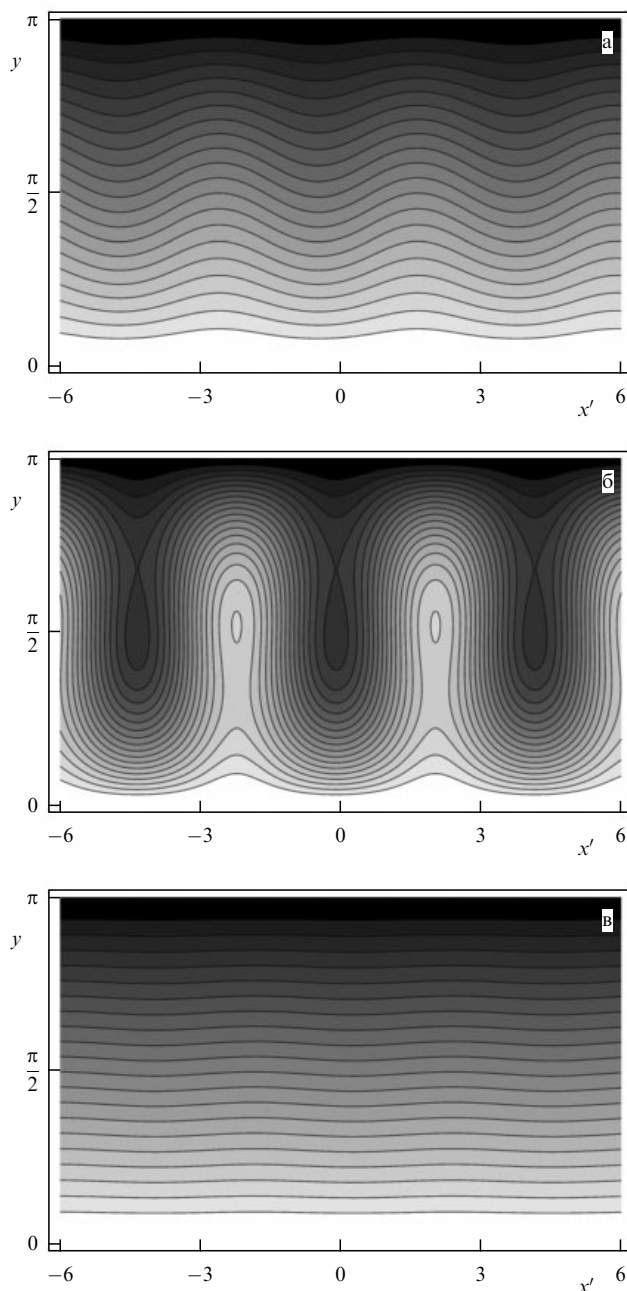


Рис. 10. То же, что и на рис. 9, но на верхней границе.

теоретические аспекты бароклиной неустойчивости двухслойного течения, однако надо иметь в виду, что применительно к земной атмосфере двухслойная структура течения является очень сильной идеализацией.

4.4. Общая постановка линейной задачи для возмущений. Генерация бароклиной неустойчивости вихревыми возмущениями

Неустойчивость в SQG-модели связана с нарастанием бароклиных волн — возмущений с нулевым распределением ПВ. В общем случае к генерации таких волн могут приводить вихревые возмущения, для которых распределение ПВ отлично от нуля. В данном разделе, следуя работам [77, 93], мы кратко опишем механизм этой генерации.

Для простоты рассмотрим двумерные возмущения в линейной задаче Иди. Функция тока таких возмущений

удовлетворяет уравнению переноса ПВ

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial x}\right) q = 0, \quad q = \psi_{xx} + \psi_{zz} \quad (4.35)$$

с граничными условиями при $z = 0, 1$: $(\partial/\partial t + z\partial/\partial x) \psi_z - \psi_x = 0$ (условия (4.1)).

Общее решение уравнения переноса (4.35) представляется в виде $q = q_i(x - zt, z)$, где $q_i(x, z)$ — начальное распределение ПВ. Описание динамики возмущений потока с вертикальным сдвигом, таким образом, сводится к решению уравнения Пуассона

$$\psi_{xx} + \psi_{zz} = q_i(x - zt, z) \quad (4.36)$$

с краевыми условиями (4.1). Решение этой задачи выражается суммой волновой и вихревой компонент:

$$\psi = \psi^{(v)}(x, z, t) + \psi^{(w)}(x, z, t). \quad (4.37)$$

Здесь вихревая компонента $\psi^{(v)}$ определена как решение уравнения (4.36) с условиями $\psi_z = 0$ при $z = 0, 1$ (условиями отсутствия возмущений плавучести на границах). Волновая компонента $\psi^{(w)}$ определяется как решение уравнения Лапласа $\psi_{xx}^{(w)} + \psi_{zz}^{(w)} = 0$ с краевыми условиями:

$$z = 0, 1: \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi_z^{(w)} - \psi_x^{(w)} = \psi_x^{(v)}, \quad (4.38)$$

которые получаются подстановкой (4.37) в исходные условия (4.1). Правая часть (4.38) представляет собой вынуждающий источник для волновой компоненты (бароклинные волны).

Явное выражение для вихревой компоненты можно получить для начального пространственно периодического распределения ПВ

$$q_i(x, z) = \Phi(z) \exp(ikx), \quad (4.39)$$

где функция $\Phi(z)$ описывает вертикальную структуру распределения. Для такого распределения вихревая компонента $\psi^{(v)}(x, z, t) = \tilde{\psi}(z, t) \exp(ikx)$, где $\tilde{\psi}(z, t)$ — решение краевой задачи $d^2\tilde{\psi}/dz^2 - k^2\tilde{\psi} = \Phi(z) \exp(-ikzt)$, $\tilde{\psi}|_{z=0,1} = 0$. Используя функцию Грина $G(z, \xi)$ этой задачи, для вихревой компоненты получим

$$\psi^{(v)} = \exp(ikx) \int_0^1 G(z, \xi) \Phi(\xi) \exp(-ik\xi t) d\xi, \quad (4.40)$$

$$G(z, \xi) = \frac{-1}{k \sinh k} \begin{cases} \cosh(kz) \cosh[k(\xi - 1)], & 0 < z < \xi, \\ \cosh(k\xi) \cosh[k(z - 1)], & \xi < z < 1. \end{cases}$$

Как и в SQG-модели, волновая компонента с нулевым распределением ПВ ищется в виде (4.11), отвечающем двумерным возмущениям ($\sin(lv) = 1$). Определяя из (4.40) значения $\psi^{(v)}$ на границах, после подстановки (4.11) в краевые условия (4.38) получим неоднородный вариант линейной системы (4.10):

$$\begin{aligned} \frac{ida_1}{dt} - kpa_1 + kra_2 &= f_1(t), \\ \frac{ida_2}{dt} - k(1-p)a_2 - kra_1 &= f_2(t), \\ f_1 &= r \int_0^1 \cosh(k\xi) \Phi(\xi) \exp(-ik\xi t) d\xi, \\ f_2 &= r \int_0^1 \cosh[k(\xi - 1)] \Phi(\xi) \exp(-ik\xi t) d\xi, \end{aligned} \quad (4.41)$$

где $r = \sinh^{-1}k$. Правые части системы (4.41) описывают источники генерации бароклиновых волн вихревой компонентой.

Важный частный случай отвечает сингулярному распределению $\Phi(z) = a_v \delta(z - h)$, где $\delta(z)$ — дельта-функция, a_v — вещественный амплитудный параметр. С учетом (4.40) для этого распределения вихревая компонента

$$\psi^{(v)} = a_v G(z, h) \exp[i(kx - \omega_v t)], \quad \omega_v = kh. \quad (4.42)$$

Выражение (4.42) (вещественная часть) описывает нейтральную вихревую волну с частотой ω_v и фазовой скоростью $A_x = h$, равной скорости течения на уровне $z = h$. В физике плазмы такие волны называют волнами Ван Кампена – Кейза или волнами непрерывного спектра [94].

Распространение вихревой волны (4.42) приводит к возбуждению бароклиновых волн (волновой компоненты решения). Описание процесса возбуждения находится из решения системы (4.41) с правыми частями $f_1 = a_v r \cosh(kh) \exp(-i\omega_v t)$, $f_2 = a_v r \cosh[k(h - 1)] \times \exp(-i\omega_v t)$. Общее решение неоднородной системы (4.41) является суммой общего решения однородной системы (бароклиновой компоненты) и частного решения неоднородной системы (вихревой компоненты). Отсюда сразу следует, что для волновых чисел из интервала неустойчивости $0 < k < k_b$ нейтральная вихревая волна приводит к возбуждению неустойчивых бароклиновых возмущений, т.е. является катализатором развития неустойчивости.

Интересная особенность связана с динамикой возмущений в устойчивом (нейтральном случае) $k > k_b$. В этом случае в отсутствие вихревого возмущения функция тока волновой компоненты представляет собой линейную комбинацию двух нейтральных краевых волн Россби с частотами

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \frac{k}{2} \pm \frac{1}{\sinh k} \sqrt{\alpha^2 - 1}, \\ \alpha &= \alpha(k) = \cosh k - 0,5 k \sinh k. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Распространение вихревой волны (4.42) может привести к эффекту резонансного возбуждения нейтральных бароклиновых волн, при котором их амплитуда возрастает по линейному закону (в отсутствие неустойчивости). Впервые этот эффект был описан в работе [95] и впоследствии изучался в работах [73, 96, 97]. Ниже приводится частотная интерпретация резонанса.

Из системы (4.41), рассматриваемой с начальными условиями $a_{1,2}(0) = 0$, находятся амплитуды $a_{1,2}(t)$ и затем функции тока волновой компоненты. Соответствующее выражение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \psi^{(w)} &= a_v \mu_1 F_1(z) \frac{\exp[i(kx - \omega_1 t)] - \exp[i(kx - \omega_v t)]}{\omega_v - \omega_1} - \\ &- a_v \mu_2 F_2(z) \frac{\exp[i(kx - \omega_2 t)] - \exp[i(kx - \omega_v t)]}{\omega_v - \omega_2}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

где коэффициенты $\mu_{1,2}$ зависят от параметров k, h и функции $F_{1,2}(z)$ представляются посредством гиперболических функций. Выражение (4.44) является суперпозицией двух нейтральных бароклиновых волн с частотами ω_1, ω_2 (соответственно верхняя и нижняя краевые волны Россби) и вихревой волны с частотой ω_v .

Справедливость решения (4.44) нарушается в резонансных случаях, когда $\omega_v = \omega_1$ или $\omega_v = \omega_2$. Резонансное волновое число $k = k_r$, при котором частоты совпадают, находится из уравнений $\omega_v(k) = \omega_{1,2}(k)$, которые всегда имеют решение. Переходя в (4.44) к пределу $\omega_1 \rightarrow \omega_v$, для первого резонансного случая получим решение

$$\psi^{(w)} = ia_v \mu_1 t F_1(z) \exp[i(kx - \omega_v t)] - a_v \mu_2 F_2(z) \frac{\exp[i(kx - \omega_2 t)] - \exp[i(kx - \omega_v t)]}{\omega_v - \omega_2}, \quad (4.45)$$

линейно возрастающее со временем. Таким образом, резонансное возбуждение реализуется при совпадении частоты вихревой волны (4.42) с одной из частот краевых бароклинических волн (Edge Rossby Waves, ERWs) (4.43).

Подчёркнём, что эффект резонанса реализуется в случае сингулярного распределения $\Phi(z)$ начальной завихренности по вертикали. Как показано в [93], в случае разрывной функции $\Phi(z)$ может осуществляться квазирезонансное возбуждение бароклинических волн с логарифмическим возрастанием их амплитуды. Проблема оптимальных возмущений с ненулевой начальной завихренностью рассматривалась в работе [77].

5. Бароклиническая неустойчивость зонального периодического течения

Следуя работе [98], рассмотрим ещё один пример, в котором развитие бароклинической неустойчивости приводит к установлению осциллирующего во времени режима. В этом примере рассматривается пространственно периодическое течение в рамках SQG-модели с одной горизонтальной границей $z = 0$ (подстилающей поверхностью). Функция тока и профиль скорости течения описываются точным двумерным решением уравнения Лапласа

$$\Psi = -\exp(-z) \cos y, \quad U = \exp(-z) \sin y. \quad (5.1)$$

Размерная форма профиля скорости $U = U_0 \exp(-z/H) \times \sin(y/L)$, $H = Lf/N$, где L — заданный горизонтальный масштаб. Представляя $\psi = \Psi + \psi'$ и опуская штрих, для описания возмущений приходим к уравнению Лапласа с краевым условием

$$z = 0: \quad \psi_{zt} + \sin y(\psi_{xz} + \psi_x) + [\psi, \psi_z] = 0. \quad (5.2)$$

Для исследования линейной устойчивости течений с одной границей в [98] применены два подхода. В первом подходе рассматриваются гармонические по координате x возмущения с периодом $2\pi/k$, имеющие по поперечной координате y период 2π (период фонового течения). Такие возмущения, удовлетворяющие уравнению Лапласа, можно представить в виде тригонометрического ряда

$$\psi = \exp(st) \exp(ikx) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp(-k_n z) \exp(iny) \varphi_n, \\ k_n = \sqrt{k^2 + n^2},$$

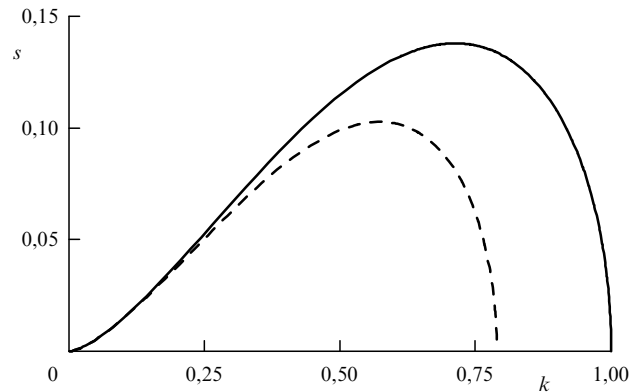


Рис. 11. Зависимость инкремента от волнового числа для первого (сплошная кривая) и второго (штриховая кривая) приближений метода Галёркина.

где s — инкремент возмущений. Подстановка указанного представления в линеаризованную форму граничного условия (5.2) приводит к дисперсионному соотношению для нахождения s , содержащему бесконечную цепную дробь. Обрывание цепной дроби на конечном шаге приводит к последовательным приближениям для инкремента. Данный подход впервые был предложен в работе [99] для исследования устойчивости течения Колмогорова.

Во втором подходе строятся маломодовые аппроксимации решения методом Галёркина. Как показано в [98], оба подхода приводят к одинаковым приближениям для инкремента. Основное (первое) приближение имеет вид

$$s^2 = \frac{k(1-k)(k_1-1)}{2k_1}, \quad k_1 = \sqrt{k^2 + 1}. \quad (5.3)$$

Формула (5.3) определяет зависимость квадрата инкремента от зонального волнового числа. Согласно (5.3) неустойчивость имеет место при $0 < k < 1$, наиболее опасному возмущению отвечает значение $k = k_m \sim 0,7$ (рис. 11). Таким образом, существует длинноволновая неустойчивость периодического течения с предпочтительным горизонтальным масштабом (в зональном направлении) порядка длины волны основного течения.

Метод Галёркина удобно применять также в описании нелинейной динамики возмущений. Максимально усечённая аппроксимация нелинейного решения, состоящая в использовании разложения по трём базисным функциям: $f_1 = \sin y$, $f_2 = \cos y$, $f_3 = 1$ — имеет следующий вид:

$$\psi = A(x, z, t) \sin y + B(z, t) \cos y + C(x, z, t). \quad (5.4)$$

В силу уравнения Лапласа коэффициенты разложения удовлетворяют уравнениям

$$A_{xx} + A_{zz} - A = 0, \quad B_{zz} - B = 0, \quad C_{xx} + C_{zz} = 0. \quad (5.5)$$

Подстановка (5.4) в граничные условия (5.2) с последующим учётом условий ортогональности базисным функциям приводит к нелинейной системе уравнений на границе:

$$z = 0: \quad A_{zt} + (B+1)C_{xz} + (1-B_z)C_x = 0, \quad (5.6a)$$

$$C_{zt} + \frac{1}{2}[(B+1)A_z + (1-B_z)A_x] = 0, \quad (5.6b)$$

$$B_{zt} + C_x A_z - A C_{xz} = 0. \quad (5.6b)$$

Линеаризованный вариант системы (5.6) сводится к системе уравнений, отвечающей линейной теории устойчивости.

Для построения периодических по координате x решений нелинейной задачи используется также один из вариантов метода Галёркина. Ищутся приближённые решения уравнений (5.5), (5.6) вида

$$\begin{aligned} A &= a(t) \exp(-kz) \sin(kx), \quad C = c(t) \exp(-kz) \cos(kx), \\ B &= b(t) \exp(-z). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Для выбранной формы решений уравнения (5.5) точно удовлетворяются, а граничные уравнения (5.6а), (5.6б) сводятся к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям без всяких аппроксимаций. Далее вводится операция усреднения по горизонтальной координате

$$\overline{\varphi}^x = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \varphi \, dx, \quad L = \frac{2\pi}{k}$$

и для выбранной формы решения вычисляется усреднённый нелинейный член уравнения (5.6в): $(C_x A_z - A C_{xz})^x = (1/2)k(k_1 - k)ac$. Из последнего выражения следует: приближённое решение для коэффициента B должно зависеть только от времени и вертикальной координаты, что учтено в представлении (5.4). Таким образом, обозначая $\tilde{b} = b + 1$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для описания нелинейной динамики возмущений:

$$\frac{da}{dt} + \alpha \tilde{b}c = 0, \quad \frac{dc}{dt} + \gamma \tilde{b}a = 0, \quad \frac{d\tilde{b}}{dt} - \beta ac = 0. \quad (5.8)$$

Коэффициенты системы

$$\alpha = \frac{k(1-k)}{k_1}, \quad \gamma = \frac{k_1-1}{2}, \quad \beta = \frac{k(k_1-k)}{2}, \quad (5.9)$$

зависят от волнового числа k возмущения. Для интервала $0 < k < 1$ неустойчивых волновых чисел линейной теории $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Нелинейная система (5.8) аналогична системе, описывающей движение симметричного волчка в механике (или движение жидкости в эллипсоидальной полости). Соответствующая теория подробно изложена в [80]. Формально математически система (5.8) относительно a, b, c имеет два устойчивых положения равновесия: $(a, 0, 0)$, $(0, 0, c)$ — и одно неустойчивое: $(0, \tilde{b}, 0)$. Важную роль играют вытекающие из (5.8) законы сохранения

$$\gamma a^2 - \alpha c^2 = I_1 = \text{const}, \quad \beta a^2 + \alpha \tilde{b}^2 = I_2 = \text{const}. \quad (5.10)$$

Непосредственно из второго закона сохранения следует, что, в отличие от решений линейной задачи, все решения ограничены во времени.

С учётом первых интегралов (5.10) решения системы (5.8) представляются в терминах эллиптических функций. Соответствующие решения описывают нелинейные колебания с периодом, зависящим от начальной амплитуды (неизохронные колебания). Для задачи с начальными условиями $a(0) = 0$, $b(0) = 0$, $c(0) = c_0$ период колебаний даётся формулой

$$T = \frac{4}{n} K(m), \quad n^2 = \alpha(\gamma + \beta c_0^2), \quad m^2 = \left(1 + \frac{\beta}{\gamma} c_0^2\right)^{-1}, \quad (5.11)$$

где $K(m)$ — полный эллиптический интеграл первого рода,

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}}.$$

Из (5.11) следует, что с уменьшением начальной амплитуды c_0 период колебаний увеличивается. Результаты численного интегрирования системы (5.8) для значения $c_0 = 0,01$ (рис. 12) наглядно иллюстрируют, как стадия экспоненциального на начальном этапе возрастания возмущений сменяется стадией устойчивых незатухающих колебаний.

Используя численные расчёты, можно построить те же картины изолиний полной функции тока $\psi_* = \Psi + \psi'$ в различные моменты времени,

$$\begin{aligned} \psi_* &= (b(t) + 1) \exp(-z) \cos y + a(t) \exp(-k_1 z) \times \\ &\times \sin(kx) \sin y + c(t) \exp(-kz) \cos(kx). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Соответствующие картины повторяются с периодом $T_1 = T/2$. В качестве примера на рис. 13 показаны линии тока на уровне $z = 0$ в безразмерные моменты времени $t = 30$, $t = 50$ для значений параметров $c_0 = 0,01$, $k = 0,5$. Как видно, в ходе развития неустойчивости в периодическом течении формируется система изолированных вихревых структур. Наиболее ярко она выражена в момент $t = 50$, отвечающий половине периода $T_1 \sim 100$. В этот момент формируется вихревой ансамбль, полностью разрушающий зональную структуру исходного течения. Далее с течением времени опять происходит возврат к невозмущённому зональному течению (в момент $t = 100$), и этот процесс периодически повторяется. Жизненный цикл нелинейных возмущений, таким образом, состоит в

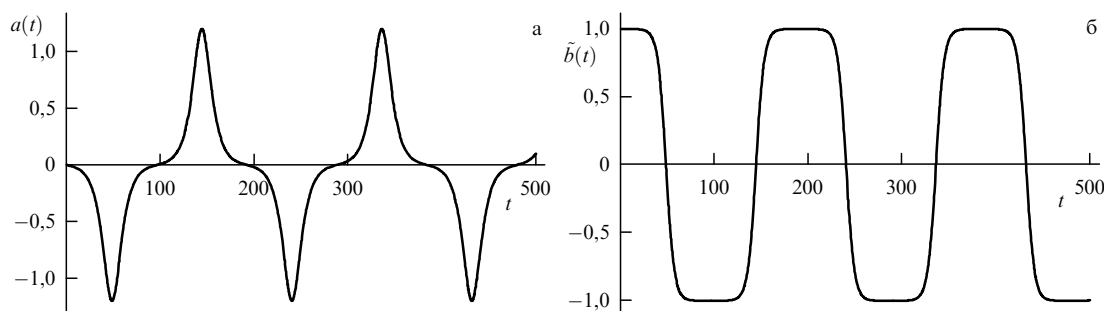


Рис. 12. Результаты численного интегрирования системы (5.8) для переменной $a(t)$ (а) и $\tilde{b}(t)$ (б).

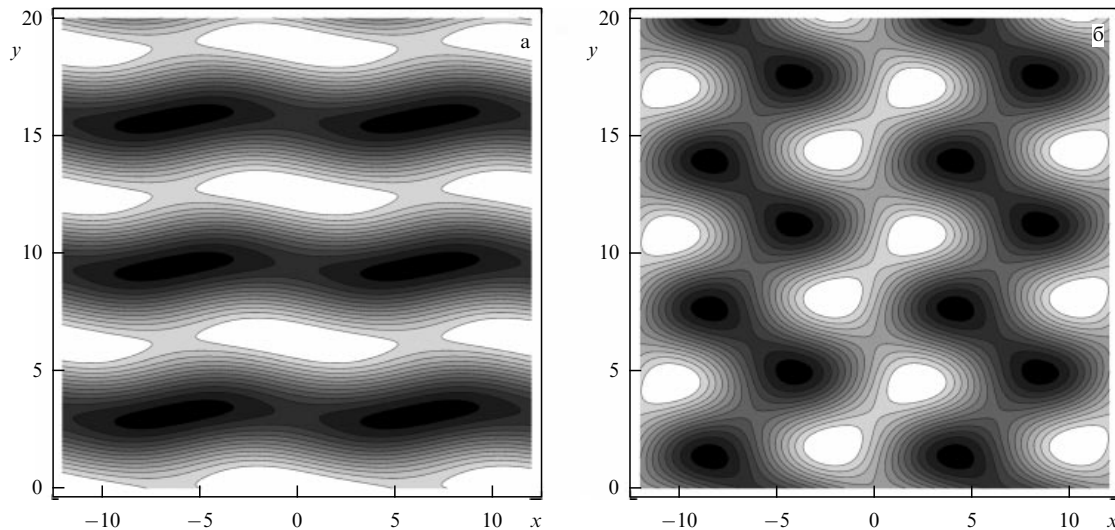


Рис. 13. Теневые картины изолиний полной функции тока (5.12) для моментов времени (а) $t = 30$ и (б) $t = 50$.

периодическом процессе рождения и гибели в потоке системы замкнутых вихревых структур.

Важно, что приближённое решение (5.12) точно удовлетворяет законам сохранения энергий SQG-модели (3.4), (3.5). Действительно, прямое вычисление энергий (возведение в квадрат, интегрирование, усреднение) для решения (5.12) даёт

$$V = \frac{1}{2} \overline{\psi_z^2} = \frac{1}{4} \left(\tilde{b}^2 + k^2 c^2 + \frac{1}{2} k_1^2 a^2 \right),$$

$$E = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2) dz = \\ = \frac{1}{4} \left(\tilde{b}^2 + k c^2 + \frac{1}{2} k_1 a^2 \right)$$

(звёздочка опускается). С учётом выражений для коэффициентов (5.9) и первых интегралов (5.10) непосредственно проверяется:

$$V = \frac{I_2 - k^2 I_1}{2\alpha}, \quad E = \frac{I_2 - k I_1}{2\alpha}. \quad (5.13)$$

Поскольку произвольная функция от независимых интегралов I_1, I_2 также является первым интегралом, из (5.13) следуют сохранение энергий V, E , а также физический смысл интегралов I_1, I_2 , которые, точнее их линейные комбинации, отражают законы сохранения поверхностной потенциальной энергии и полной энергии. Именно эти законы сохранения ответственны за возникновение колебаний в системе без диссипации. Отметим, что выполненное в [98] численное интегрирование полной системы уравнений SQG-модели подтвердило существование колебательного режима в задаче устойчивости.

Подчёркнём, что рассмотренные периодические течения можно считать геофизическим прототипом периодических течений в атмосферах планет-гигантов [100] или системы множественных струй (multiple jets), недавно обнаруженных в Южном океане [101, 102].

Данные наблюдений показывают, что множественные струи подвержены меандрированию, слиянию и расхождению, изменению их интенсивности. Это свидетель-

ствует о внутренней динамической неустойчивости таких течений и согласуется с результатами проведённого анализа.

6. Дискретный вариант поверхностной квазигеострофической модели и бароклинная неустойчивость струйных течений

Исследование бароклинной неустойчивости существенно упрощается в дискретной по вертикали SQG-модели с двумя внутренними уровнями. Зональные течения в модели инициируются заданными распределениями плавучести на границах слоя атмосферы (подстилающей поверхности и тропопаузы). Кусочно-постоянные распределения плавучести в форме ступеньки и локализованного прямоугольника (аналоги фронтальных зон) индуцируют соответственно изолированное струйное течение и систему из двух встречных струйных течений в верхней половине слоя атмосферы и течения с противоположным направлением в нижней половине слоя. Данные течения являются аналогами струйных течений (3.10), (3.11) в непрерывной модели. В разделах 6.1–6.3 рассмотрена линейная теория гидродинамической неустойчивости таких течений, определён интервал неустойчивых волновых чисел, найдены аналитические выражения для инкрементов возмущений.

6.1. Дискретная модель с двумя вертикальными уровнями и постановка задач устойчивости

Для построения двухуровневой по вертикали SQG-модели уравнение Лапласа (3.3) записывается в виде $\Delta\psi + \theta_z = 0$, где $\theta = \psi_z$, $\Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy}$. Отрезок $[0, 1]$ оси z разбивается на четыре равных отрезка длиной $h = 1/4$. Вводятся обозначения $\psi_1 = \psi|_{z=h}$, $\psi_2 = \psi|_{z=3h}$, $\theta_m = \theta|_{z=2h}$, и для аппроксимации производной θ_z используется центральная разность. Тогда для уровней $z = h$ и $z = 3h$ из уравнения Лапласа следуют соответственно уравнения

$$\Delta\psi_1 + \frac{\theta_m - \theta_{\text{bott}}}{2h} = 0, \quad \Delta\psi_2 + \frac{\theta_{\text{top}} - \theta_m}{2h} = 0, \quad (6.1)$$

где θ_{top} и θ_{bott} — значения плавучести на верхней и нижней границах. Полагая далее $\theta_m = (\psi_2 - \psi_1)/(2h)$, из (6.1) получим соотношения

$$\begin{aligned}\Delta\psi_1 + \frac{\lambda^2}{2}(\psi_2 - \psi_1) &= \frac{\theta_{\text{bott}}}{2h}, \\ \Delta\psi_2 - \frac{\lambda^2}{2}(\psi_2 - \psi_1) &= -\frac{\theta_{\text{top}}}{2h},\end{aligned}\quad (6.2)$$

связывающие распределения функции тока с граничными распределениями плавучести. Здесь и далее обозначено $\lambda^2 = 1/(2h^2) = 8$.

В рамках SQG-модели на горизонтальных границах $z = 0$ и $z = 1$ должны выполняться условия (3.2): $D\theta_{\text{bott}}/Dt = 0$, $D\theta_{\text{top}}/Dt = 0$. Перенос этих условий на уровни $z = h$ и $z = 3h$ с учётом (6.2) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned}q_{1t} + [\psi_1, q_1] &= 0, \quad q_{2t} + [\psi_2, q_2] = 0, \\ q_{1,2} &= \Delta\psi_{1,2} \pm \frac{\lambda^2}{2}(\psi_2 - \psi_1),\end{aligned}\quad (6.3)$$

которые формально совпадают с уравнениями квазигеострофической двухуровневой модели Филлипса [103], полученной дискретизацией общего уравнения переноса ПВ (3.1). Отличие от классической модели Филлипса связано с физической интерпретацией переменных. Распределения ПВ на нижнем и верхнем уровнях в модели (6.3) теперь имеют смысл удвоенных распределений плавучести на верхней и нижней границах слоя атмосферы.

Функция тока стационарных зональных течений (зависящая от координаты y) находится из уравнений (6.2). Эти уравнения сводятся к двум изолированным уравнениям

$$\bar{\Psi}_{yy} - \lambda^2 \bar{\Psi} = -(\theta_{\text{bott}} + \theta_{\text{top}}), \quad \bar{\Psi}_{yy} = \theta_{\text{bott}} - \theta_{\text{top}}, \quad (6.4)$$

для нахождения баротропной, $\bar{\Psi} = (\Psi_1 + \Psi_2)/2$, и бароклиной, $\bar{\Psi} = (\Psi_2 - \Psi_1)/2$, компонент функции тока. Здесь $\theta_{\text{bott}}(y)$, $\theta_{\text{top}}(y)$ — заданные распределения плавучести на границах $z = 0$, $z = 1$ и все переменные для зональных течений обозначены большими буквами. В случае $\theta_{\text{top}} = \theta_{\text{bott}}$ баротропная компонента $\bar{\Psi} = 0$ и поле скорости на двух уровнях $(U_1, U_2) = (-U, U)$, $U = -\bar{\Psi}_y$, где $U_{yy} - \lambda^2 U = 2d\theta_{\text{bott}}/dy$. Таким образом, как и в непрерывной модели, равные граничные распределения плавучести индуцируют противоположно направленные течения на верхнем и нижнем уровнях. Такие течения имеют ярко выраженный вертикальный сдвиг скорости и представляют наибольший интерес с точки зрения устойчивости.

Для исследования устойчивости зональных течений полагаем $\psi_1 = \Psi_1 + \psi'_1$, $\psi_2 = \Psi_2 + \psi'_2$ и рассматриваем линеаризованную форму уравнений (6.3)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)q'_1 + 2 \frac{d\theta_{\text{bott}}}{dy} \frac{\partial \psi'_1}{\partial x} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x}\right)q'_2 - 2 \frac{d\theta_{\text{top}}}{dy} \frac{\partial \psi'_2}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

В случае $\theta_{\text{top}} = \theta_{\text{bott}}$ эта система преобразуется в следующую:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\theta - \lambda^2\theta) + U \frac{\partial}{\partial x} \Delta\sigma - 2 \frac{d\theta_{\text{bott}}}{dy} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Delta\sigma + U \frac{\partial}{\partial x} (\Delta\theta - \lambda^2\theta) - 2 \frac{d\theta_{\text{bott}}}{dy} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\quad (6.5)$$

Здесь введены переменные $\sigma = (1/2)(\psi'_1 + \psi'_2)$, $\theta = (1/2)(\psi'_2 - \psi'_1)$, через которые выражаются функции тока возмущений $\psi'_{1,2} = \sigma \mp \theta$ на разных уровнях.

В рамках системы (6.5) легко получить решение дискретного варианта задачи Иди, отвечающего линейным распределениям $\theta_{\text{bott}} = \theta_{\text{top}} = -y$, причём поле скорости на двух уровнях $(U_1, U_2) = (-U, U)$, где $U = 1/4$. Для этого значения система (6.5) сводится к одному уравнению:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta\theta - 8\theta) - \frac{1}{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Delta\theta + 8\theta) = 0,$$

которое имеет экспоненциально возрастающие решения $\theta = \theta_0 \exp(st) \exp[i(kx + ly)]$ с квадратом инкремента

$$s^2 = \frac{k^2}{16} \frac{8 - \mu^2}{8 + \mu^2}, \quad \mu^2 = k^2 + l^2. \quad (6.6)$$

Сравнение инкремента (6.6) с инкрементом в непрерывной модели (см. рис. 3) показывает, что погрешность в определении правой границы интервала неустойчивых волновых чисел не превышает 16 %, т.е. двухуровневая модель оказывается достаточно точной. Отметим, что в недавней нашей работе [104] был разработан общий подход к построению многоуровневых разностных аппроксимаций уравнений SQG-модели. Применительно к задаче Иди показано, что с увеличением числа уровней относительные погрешности быстро убывают, в частности погрешность четырёхуровневой модели уже не превышает 3,6 %.

6.2. Неустойчивость изолированного струйного течения

Данное течение индуцируется кусочно-постоянным распределением плавучести $\theta_{\text{bott}}(y) = a/2$, $y < 0$, $\theta_{\text{bott}}(y) = -a/2$, $y > 0$, или $\theta_{\text{bott}}(y) = a(1/2 - H(y))$, где $H(y)$ — функция Хевисайда. Для построения этого распределения из первого уравнения (6.4) находится профиль скорости струйного течения на верхнем уровне (рис. 14)

$$U_2 = U = U_0 \exp(-\lambda|y|), \quad U_0 = \frac{a}{\lambda}. \quad (6.7)$$

На нижнем уровне располагается струйное течение противоположного направления. Отметим, что профиль (6.7) близок к наблюдаемому профилю скорости верхнетропосферных струйных течений [58].

Исследование линейной устойчивости течения (6.7) проводится в рамках системы уравнений (6.5). Поскольку для рассматриваемого распределения $d\theta_{\text{bott}}/dy = -a\delta(y)$, где $\delta(y)$ — дельта-функция, этой системе удовлетворяют решения, для которых при $y \neq 0$

$$\Delta\theta - \lambda^2\theta = 0, \quad \Delta\sigma = 0. \quad (6.8)$$

Периодические по координате x решения уравнений (6.8), удовлетворяющие условию затухания при $|y| \rightarrow \infty$,

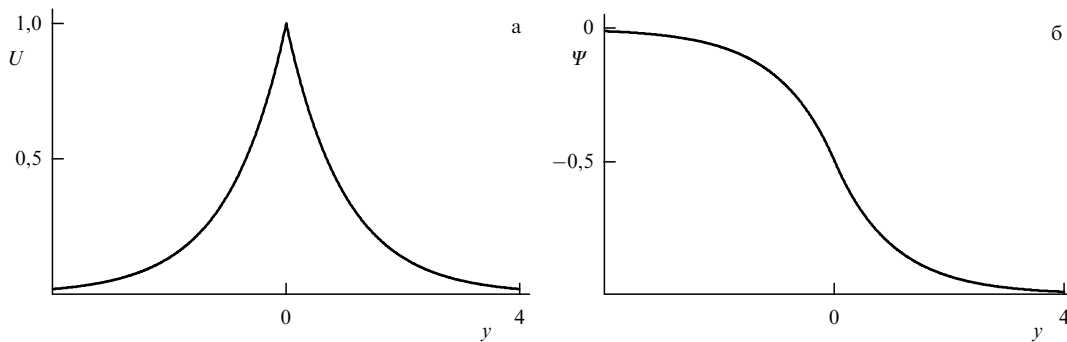


Рис. 14. Горизонтальный профиль скорости (а) и функция тока (б) для изолированного струйного течения на верхнем уровне.

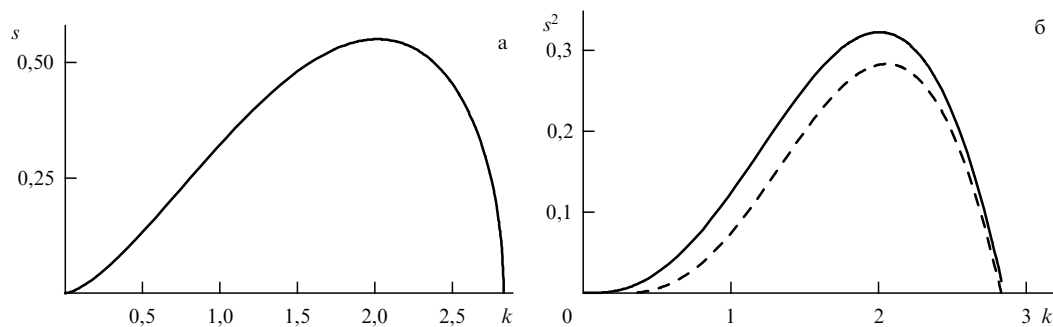


Рис. 15. Зависимость инкрементов от волнового числа для изолированного струйного течения (а) и системы из двух встречных струйных течений (б).

можно представить в виде

$$\begin{aligned}\theta &= -\frac{1}{2k_1} A(t) \exp(-k_1|y|) \cos(kx), \\ \sigma &= \frac{1}{2k} B(t) \exp(-k|y|) \sin(kx),\end{aligned}\quad (6.9)$$

где k — волновое число, здесь и далее обозначено $k_1 = (k^2 + \lambda^2)^{1/2}$. Входящие в (6.9) амплитудные функции $A(t)$, $B(t)$ находятся из условий для скачков нормальных производных при $y = 0$. С учётом $d\Theta_{\text{bott}}/dy = -a\delta(y)$ после интегрирования уравнений (6.5) по малой окрестности $y = 0$ получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \{\theta_y\} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \{\sigma_y\} + 2a \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \{\sigma_y\} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \{\theta_y\} + 2a \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\quad (6.10)$$

Здесь фигурными скобками обозначен скачок производной $\{\theta_y\} = \theta_y(y+0) - \theta_y(y-0)$.

Легко проверяется, что для решений (6.9): $\{\theta_y\} = A(t) \cos(kx)$, $\{\sigma_y\} = B(t) \sin(kx)$. Подстановка последних выражений в (6.10) с учётом $a = \lambda U_0$ даёт систему линейных дифференциальных уравнений для амплитуд: $A_t = U_0(\lambda - k)B$, $B_t = (k/k_1)U_0(k_1 - \lambda)A$. Эта система имеет решения вида $A = A_0 \exp(st)$, $B = B_0 \exp(st)$, где квадрат инкремента

$$s^2 = U_0^2 \left(\frac{k}{k_1} \right) (\lambda - k)(k_1 - \lambda). \quad (6.11)$$

Поскольку $k_1 = \sqrt{k^2 + \lambda^2} > \lambda$, из (6.11) следует, что для волновых чисел из интервала $0 < k < \lambda$, $\lambda = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,

существует экспоненциально возрастающее возмущение, т.е. имеет место неустойчивость течения (6.7). В размерных переменных правой границе интервала неустойчивости отвечает длина волны $(2\pi/\lambda)L_R = 2221,4$ км (при $L_R = 1000$ км). Наиболее опасному возмущению (с максимумом инкремента) (рис. 15) отвечает волновое число $k = k_m = 2,01$, длина волны $(2\pi/k_m)L_R = 3118,2$ км, характерное время нарастания в e раз (e-folding time) при $U_0 = 1$ составляет $T_0/\gamma_{\text{max}} = 50,45$ ч (порядка двух суток).

С учётом (6.9) можно получить выражение для функции тока растущего возмущения на верхнем уровне $\psi'_2 = \theta + \sigma$. Это выражение преобразуется в следующее:

$$\begin{aligned}\psi'_2 &= -\frac{A_0 \exp(\gamma t)}{2k_1} [\exp(-k_1|y|) \cos(kx) + \\ &+ \beta \exp(-k|y|) \sin(kx)],\end{aligned}\quad (6.12)$$

где $\beta = \sqrt{k_1(k_1 - \lambda)/k(\lambda - k)}$. Теневая картина изолиний функции тока (6.12) для значения $k = k_m$ (наиболее опасная мода) приведена на рис. 16а.

Обратим внимание, что изолинии наклонены против направления скорости потока. Только при таком наклоне растущее возмущение может извлекать энергию из энергии струйного течения. Функции тока возмущения на нижнем уровне отвечает картина с противоположным наклоном изолиний.

6.3. Неустойчивость системы из двух встречных струйных течений

Система из двух встречных струйных течений индуцируется кусочно-постоянным локализованным распределением плавучести $\Theta_{\text{bott}} = a$, $|y| < b$, $\Theta_{\text{bott}} = 0$, $|y| > b$. Для этого распределения из первого уравнения (6.4)

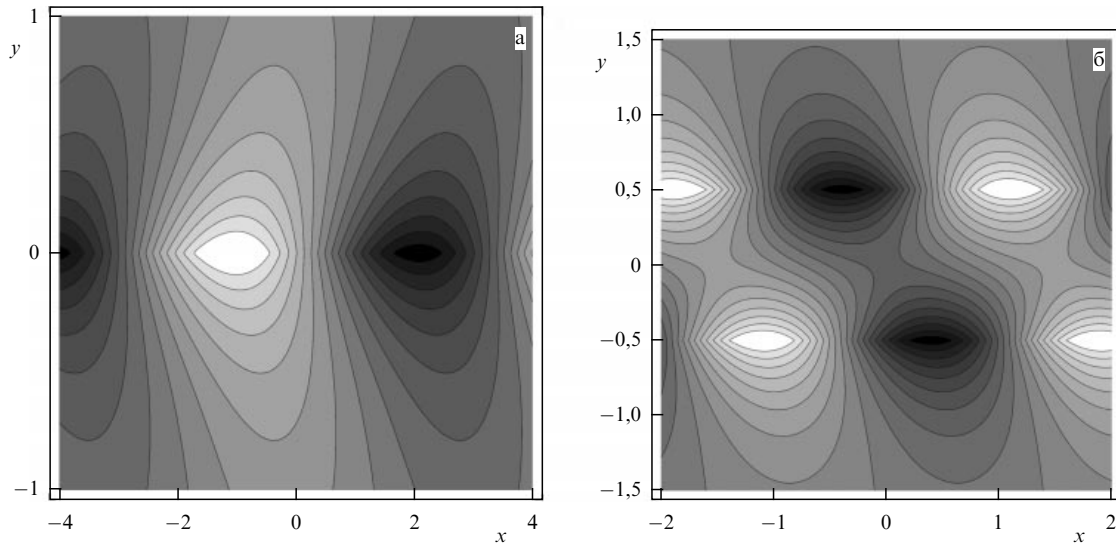


Рис. 16. Функция тока возмущения на верхнем уровне для изолированного струйного течения (а) и системы из двух встречных струйных течений (б).

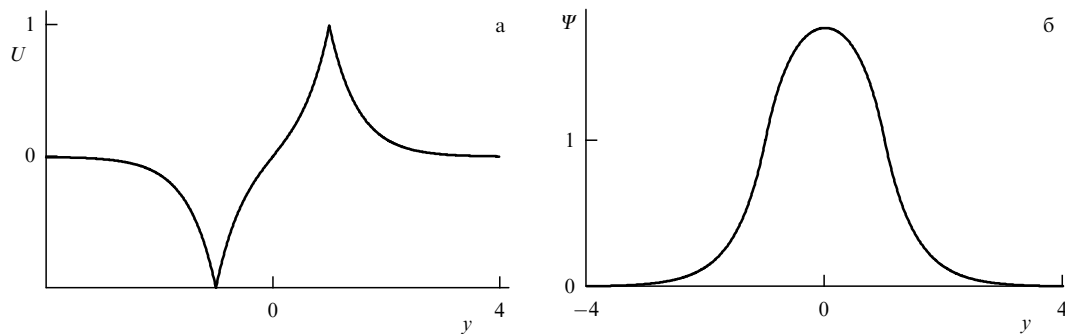


Рис. 17. Горизонтальные профили скорости (а) и функции тока (б) на верхнем уровне для системы струйных течений.

находится профиль скорости на верхнем уровне

$$U_2 = -\Psi_{2y} = U_0 \begin{cases} \frac{\sinh(\lambda y)}{\sinh(\lambda b)}, & |y| < b, \\ \operatorname{sgn} y \exp[-\lambda(|y| - b)], & |y| > b, \end{cases} \quad (6.13)$$

$$U_0 = \frac{a}{\varphi(b)}, \quad \varphi(b) = \frac{1}{2} \lambda [1 + \coth(\lambda b)],$$

описывающий систему из двух встречных струйных течений с расстоянием $2b$ между осями и осевой скоростью U_0 (рис. 17). На нижнем уровне формируется аналогичная система струйных течений, но противоположного направления.

Исследование устойчивости течения (6.13) проводится в рамках системы (6.5). С учётом $d\Theta_{\text{bott}}/dy = a[\delta(y+b) - \delta(y-b)]$ системе (6.5) удовлетворяют возмущения, для которых при $y \neq \pm b$ выполнены уравнения (6.8). Периодические по координате x решения этих уравнений, удовлетворяющие условию затухания при $|y| \rightarrow \infty$, можно представить в вещественном виде:

$$\begin{aligned} \theta &= -\frac{1}{2} k_1 [A_1(t) \exp(-k_1|y-b|) + \\ &\quad + A_2(t) \exp(-k_1|y+b|)] \cos(kx), \\ \sigma &= -\frac{1}{2k} [B_1(t) \exp(-k|y-b|) + \\ &\quad + B_2(t) \exp(-k|y+b|)] \sin(kx), \end{aligned} \quad (6.14)$$

где $k_1^2 = k^2 + \lambda^2$. Входящие в (6.14) амплитуды $A_{1,2}(t)$, $B_{1,2}(t)$ находятся из системы уравнений для скачков нормальных производных при $y = \pm b$. Для решений (6.14) скачки производных $y = \pm b$: $\{\theta_y\} = A_{1,2} \sin(kx)$, $\{\sigma_y\} = B_{1,2} \cos(kx)$. Подстановка этих выражений в систему уравнений для скачков приводит к системе из четырёх линейных дифференциальных уравнений для амплитуд. С учётом $a = U_0 \varphi(b)$ систему (6.14) можно представить в матричном виде:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -U_0 P_1 \mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{dt} = U_0 \frac{k}{k_1} P_2 \mathbf{a}. \quad (6.15)$$

Здесь векторы-столбцы $\mathbf{a} = (A_1, A_2)^T$, $\mathbf{b} = (B_1, B_2)^T$ и матрицы

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{pmatrix} k - \varphi(b) & -\varphi(b) \exp(-2kb) \\ \varphi(b) \exp(-2kb) & \varphi(b) - k \end{pmatrix}, \\ P_2 &= \begin{pmatrix} k_1 - \varphi(b) & -\varphi(b) \exp(-2k_1b) \\ \varphi(b) \exp(-2k_1b) & \varphi(b) - k_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Исследование устойчивости, таким образом, сводится к анализу поведения решений системы (6.15).

Система (6.15) имеет решения вида $\mathbf{a} = \exp(st) \mathbf{a}_0$, $\mathbf{b} = \exp(st) \mathbf{b}_0$, где векторы $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$ удовлетворяют однородной системе алгебраических уравнений $s\mathbf{a}_0 = -U_0 P_1 \mathbf{b}_0$, $s\mathbf{b}_0 = U_0 (k/k_1) P_2 \mathbf{a}_0$. Обозначая $\tilde{s}^2 = (s/U_0)^2 (k_1/k)$, эту систему можно свести к одному векторному уравнению

$(P_1 P_2 + \tilde{s}^2 E) \mathbf{a}_0 = 0$, где E — единичная матрица. Из условия разрешимости последнего уравнения следует уравнение для нахождения квадрата нормированного инкремента $\tilde{s}^2$

$$\det(P_1 P_2 + \tilde{s}^2 E) = 0. \quad (6.17)$$

Уравнение (6.17) представляет собой аналог задачи для собственных значений матрицы $P_1 P_2$ и собственного вектора $\mathbf{a}_0$.

Как показывает анализ корней уравнения (6.17), существуют две растущие нормальные моды. Квадраты инкрементов для этих мод определяются выражениями

$$\begin{aligned} s^2 &= U_0^2 \left(\frac{k}{k_1} \right) \eta_1(k) \eta_2(k), \\ s^2 &= U_0^2 \left(\frac{k}{k_1} \right) \mu_1(k) \mu_2(k). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Причём для первой моды $\eta_1(k) = \varphi(b)[1 + \exp(-2kb)] - k$, $\eta_2(k) = k_1 - \varphi(b)[1 - \exp(-2k_1 b)]$. Для второй моды $\mu_1(k) = \varphi(b)[1 + \exp(-2k_1 b)] - k_1$, $\mu_2(k) = k - \varphi(b)[1 - \exp(-2kb)]$. Первая мода возрастает для значений волнового числа $0 < k < k_b$, где k_b — корень уравнения $\eta_1(k) = 0$, т.е. уравнения $k = \varphi(b)[1 + \exp(-2kb)]$. Последнее уравнение имеет структуру уравнения, возникающего в классической задаче Рэлея о неустойчивости свободного слоя сдвига. Выражение $k_b = \varphi(b)[1 + \exp(-2b\varphi(b))]$ даёт хорошую аппроксимацию корня для широкого диапазона изменения параметра b . При больших значениях b вторая мода возрастает при $0 < k < \lambda$. Как видно из рис. 15, где представлены зависимости инкрементов от волнового числа, первая мода (сплошная кривая) растёт быстрее, чем вторая (штриховая кривая).

С использованием (6.14) и выражений для собственных векторов $\mathbf{a}_0$ можно получить выражения для возмущения функции тока $\psi'_2 = \theta + \sigma$ на верхнем уровне. Основное отличие для мод связано с наклоном изолиний поля ψ'_2 в области $|y| > b$. В то время как для первой моды имеет место оптимальный наклон против потока (рис. 16б), для второй моды изолинии наклонены по потоку. Отметим, что первая и вторая моды являются аналогами синусоидальной и варикозной мод неустойчивости для двумерных струйных течений однородной жидкости [105].

7. Бароклиная неустойчивость в присутствии бета-эффекта

Всюду выше рассматривалась бароклиная неустойчивость течений в отсутствие неоднородности распределения параметра Кориолиса (бета-эффекта). Этот эффект был учтён в работе Чарни [12], рассмотревшего задачу об устойчивости течения с постоянным вертикальным сдвигом Λ в полубесконечной атмосфере (задачу Чарни). Исследование устойчивости проводится в рамках линеаризованного варианта уравнения переноса ПВ (2.4), решение которого ищется в виде нормальной моды $\psi = \Phi(z) \exp[ik(x - ct)] \sin(l y)$, $l = \pi n / L_*$. В безразмерных переменных комплексная фазовая скорость $c = c_r + i c_i$ находится из решения спектральной задачи ($\kappa^2 = k^2 + l^2$)

$$\begin{aligned} (z - c)(\Phi_{yy} - \kappa^2 \Phi) + \Pi_y \Phi &= 0, \\ z = 0: c \Phi_z + \Phi &= 0, \end{aligned} \quad (7.1)$$

дополненной условием ограниченности $\Phi(z)$, при $z \rightarrow \infty$. Наличие в уравнении (7.1) фонового градиента потен-

циального вихря $\Pi_y = \beta$ значительно усложняет анализ спектральной задачи по сравнению с анализом задачи Иди, что связано с появлением критических уровней (особых точек), отвечающих значениям $z = c$. Представление точного решения (7.1) в терминах гипергеометрической функции показывает, что существует счётное число нейтральных мод, регулярных на критических уровнях. Эти моды отвечают некоторым значениям волновых чисел $k = k_i$. В классической ситуации (для двумерных сдвиговых течений) значения $k = k_i$ разделяют интервалы устойчивых и неустойчивых волновых чисел. Установленный Майлсом [106] тонкий результат состоит в том, что неустойчивые моды ($c_i > 0$) задачи (7.1) существуют как слева, так и справа от каждого значения $k = k_i$. Учёт бета-эффекта, таким образом, приводит к появлению счётного набора неустойчивых нормальных мод. В этом состоит основное отличие от задачи Иди, в которой имеются только две нормальные моды (возрастающая и затухающая).

Численный расчёт спектра задачи (7.1) вместе с анализом структуры наиболее опасной моды был выполнен в работах [107, 108]. Инкремент такой двумерной ($l = 0$) моды даётся выражением $s_m = 0,286(f/N)\Lambda$, которое практически не отличается от аналогичного выражения в задаче Иди $s_m = 0,31(f/N)\Lambda$ (см. раздел 3). Входящие в эти выражения константы различаются менее чем на 8 %. Длина волны наиболее опасной моды в задаче Чарни также численно близка к длине волны в задаче Иди (хотя в последней нет выделенного вертикального масштаба). Подробное сопоставление решений двух задач дано Гиллом [60].

Анализ влияния бета-эффекта на устойчивость существенно упрощается в рамках дискретных по вертикали квазигеострофических моделей. Такие модели фильтруют мелкомасштабные по вертикали слабо неустойчивые моды и позволяют наглядно описать влияние связанного с бета-эффектом ненулевого градиента потенциального вихря. В рамках двухуровневой модели это впервые было сделано в работе [103], положившей начало многочисленным публикациям по исследованию бароклиной неустойчивости в присутствии бета-эффекта (обзор представлен Педлоски [3]). Ниже мы исследуем влияние бета-эффекта в рамках дискретной по вертикали двухуровневой SQG-модели из раздела 6. С учётом этого эффекта безразмерное выражение для квазигеострофического потенциального вихря можно записать в виде (опуская константу f_0) $q = \psi_{zz} + \psi_{xx} + \psi_{yy} + \beta y$, где параметр $\beta = \beta_0 L_R^2 / U$ и (в приближении бета-плоскости) $\beta_0 = (2\Omega/R) \cos \varphi_0$. Функция тока движений с $q = 0$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \psi + \beta y + \theta_z = 0, \quad (7.2)$$

где, как и ранее, $\theta = \psi_z$, $\Delta \psi = \psi_{xx} + \psi_{yy}$. Как и в разделе 6, отрезок $[0, 1]$ оси z разбивается на четыре равных отрезка длиной $h = 1/4$, вводятся обозначения $\psi_1 = \psi|_{z=h}$, $\psi_2 = \psi|_{z=3h}$, $\theta_m = \theta|_{z=2h}$ и для аппроксимации производной θ_z используется центральная разность. При этом из соответствующей разностной формы уравнения (7.2) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \Delta \psi_1 + \beta y + \frac{\lambda^2}{2} (\psi_2 - \psi_1) &= \frac{\theta_{\text{bott}}}{2h}, \\ \Delta \psi_2 + \beta y - \frac{\lambda^2}{2} (\psi_2 - \psi_1) &= -\frac{\theta_{\text{top}}}{2h}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где θ_{top} и θ_{bott} — значения плавучести на верхней и нижней границах. Подстановка (7.3) в граничные уравнения: $D\theta_{\text{bott}}/Dt = 0$, $D\theta_{\text{top}}/Dt = 0$, приводит к уравнениям (6.3) двухуровневой модели:

$$q_{1t} + [\psi_1, q_1] = 0, \quad q_{2t} + [\psi_2, q_2] = 0, \quad (7.4)$$

где теперь

$$q_{1,2} = \Delta\psi_{1,2} + \beta y \pm \frac{F}{2} (\psi_2 - \psi_1). \quad (7.5)$$

Здесь обозначено $F = \lambda^2$. За исключением указанной ранее физической интерпретации переменных, уравнения (7.4), (7.5) совпадают с уравнениями двухуровневой или двухслойной модели с бета-эффектом. Значение параметра F , в отличие от такового в двухслойной модели, определяется не разностью плотностей в двух слоях, а шагом разностного разбиения: $F = \lambda^2 = 1/(2h^2) = 8$.

Функция тока стационарных зональных течений (зависящая от координаты y) находится из уравнений (7.3). Как и ранее, эти уравнения сводятся к двум изолированным уравнениям

$$\tilde{\Psi}_{yy} - F\tilde{\Psi} = -(\Theta_{\text{bott}} + \Theta_{\text{top}}), \quad \bar{\Psi}_{yy} + \beta y = \Theta_{\text{bott}} - \Theta_{\text{top}}, \quad (7.6)$$

для нахождения баротропной $\bar{\Psi} = (\Psi_1 + \Psi_2)/2$ и бароклиной $\tilde{\Psi} = (\Psi_2 - \Psi_1)/2$ компонент функции тока. Здесь $\Theta_{\text{bott}}(y)$, $\Theta_{\text{top}}(y)$ — заданные распределения плавучести на границах $z = 0$, $z = 1$ и все переменные для зональных течений обозначены большими буквами. Далее будем рассматривать распределения, которые индуцируют течение с равными и противоположно направленными постоянными скоростями на двух уровнях $U_{1,2} = \pm U$. Согласно уравнениям (7.6) такие распределения должны удовлетворять условиям

$$\Theta_{\text{bott}} + \Theta_{\text{top}} = -FUy, \quad \Theta_{\text{top}} - \Theta_{\text{bott}} = \beta y. \quad (7.7)$$

Второе условие (7.7) отвечает условию равенства нулю баротропной компоненты функции тока. Из условий (7.7) следует

$$\Theta_{\text{top, bott}} = \frac{1}{2} y(UF \pm \beta), \quad (7.8)$$

т.е. для возбуждения течения с противоположным направлением скорости на двух уровнях (это течение рассматривается в большинстве работ) необходимы специальные линейные распределения плавучести на границах, включающие бета-эффект.

Исследование устойчивости течения проводится в рамках линеаризованной системы уравнений (7.4). Согласно (7.8), входящие в систему производные $d(\Theta_{\text{top, bott}})/dy = -(1/2)(UF \pm \beta)$, играющие роль градиентов потенциального вихря в каждом слое, отличны от нуля — они определяются значением β и скорости U . Для переменных $\theta = (1/2)(\psi_2' - \psi_1')$, $\sigma = (1/2)(\psi_1' + \psi_2')$ система (7.4) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta\theta - F\theta) + U \frac{\partial}{\partial x} \Delta\sigma + UF \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \beta \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Delta\sigma + U \frac{\partial}{\partial x} (\Delta\theta) - \beta \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Отыскивая волновые решения уравнений (7.9) вида $\theta = a_0 \exp(\kappa t) \exp[i(kx + ly)]$, $\sigma = b_0 \exp(\gamma t) \exp[i(kx + ly)]$ и обозначая $\gamma^2 = k^2 + l^2$, приходим к квадратному уравнению

$$\begin{aligned} \kappa^2(\kappa^2 + F)\gamma^2 - i\beta(2\kappa^2 + F)\gamma - \beta^2\kappa^2 - \\ - k^2 U^2 \kappa^2 (F - \kappa^2) = 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

для нахождения комплексного инкремента γ . Вещественная часть этого инкремента $s = \text{Re } \gamma$ даёт инкремент роста возмущений. Из (7.10) следует, что при $\beta = 0$ квадрат инкремента определяется выражением

$$\gamma^2 = s^2 = \frac{U^2(F - \kappa^2)}{F + \kappa^2}, \quad (7.11)$$

которое совпадает с (6.6) (при $F = 8$, $U = 1/4$). Неустойчивость имеет место для $\kappa^2 < F$. При $\beta \neq 0$ комплексный инкремент

$$\gamma = \frac{1}{2\kappa^2(\kappa^2 + F)} (i\beta(2\kappa^2 + F) \pm \sqrt{D}), \quad (7.12)$$

$$D = k^2(U^2\kappa^4(F^2 - \kappa^4) - 4\beta^2 F^2).$$

Согласно (7.12) неустойчивость возникает, если $\kappa^2 < F$ и

$$U^2 > U_c^2(\kappa) = \frac{\beta^2}{\kappa^4(F^2 - \kappa^4)}, \quad (7.13)$$

т.е. скорость течения на верхнем уровне U должна превосходить критическое значение $U_c(\kappa)$ (7.13). Последнее условие, очевидно, эквивалентно ограничению на вертикальный сдвиг скорости $U_1 - U_2 = 2U$. Существование порогового значения скорости — основная особенность, вносимая бета-эффектом. Уравнение $U = U_c(k)$ определяет кривую нейтральной устойчивости на плоскости параметров (U, κ^2) . При $\kappa^2 = F/\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ эта кривая имеет точку минимума, минимальное значение $U_{\text{cmin}} = 2\beta$. Таким образом, для любой величины $U > 2\beta$ существует интервал неустойчивых значений κ^2 , содержащий точку минимума.

Отметим, что при $U = 0$ (отсутствие вертикального сдвига) $\gamma = i\omega_{1,2}$ и волновые решения представляют собой баротропную и бароклиную волны Россби $\sigma = C \exp[i(kx + ly - \omega_{1,2}t)]$ с частотами $\omega_1 = -\beta k/\kappa^2$, $\omega_2 = -\beta k/(\kappa^2 + F)$.

Существование нейтральной кривой позволяет развить слабонелинейную теорию неустойчивости для значений $U = U_c + \Delta$, $\Delta \ll U_c$, в терминах медленного времени $T = \Delta^{1/2}t$ [85]. С учётом $D = 4\beta^2 F^2 (U^2/U_c^2 - 1)$ для указанных значений инкремент линейных возмущений $\gamma = r\Delta^{1/2}$, где $r = \beta F/U_c^{1/2} \kappa^2 (\kappa^2 + F)$. Амплитуда линейных возмущений удовлетворяет уравнению $A_{TT} - rA = 0$. В слабонелинейной теории это линейное уравнение второго порядка заменяется уравнением, содержащим кубическую нелинейность,

$$A_{TT} - rA = N|A|^2. \quad (7.14)$$

Принципиальную роль в теории играет постоянная N , точнее её знак. Если $N < 0$, то в закритическом случае ($U > U_c$) возникают колебания относительно некоторого положения равновесия (мягкая потеря устойчивости).

При положительном N решения уравнения (7.14) неограниченно возрастают, т.е. нелинейность не стабилизирует экспоненциальное возрастание линейных возмущений. В контексте двухслойной модели автор [85] провёл достаточно длинное вычисление постоянной N и установил, что комплексная амплитуда возмущений удовлетворяет уравнению (7.14) с постоянной $N < 0$. Также было показано, что модуль комплексной амплитуды $R = |A|$ удовлетворяет уравнению, описывающему движение частицы в поле силы с потенциалом

$$V(R) = -a^2 R^2 + bNR^4 + c^2 R^{-2}. \quad (7.15)$$

При $N < 0$ потенциал $V(R)$ имеет точку минимума и зависимость от времени $R(T)$ отвечает периодическому (колебательному) движению частицы в потенциальной яме. Эти колебания аналогичны колебаниям, исследованным в разделе 3 с помощью метода Галёркина.

8. Симметричная бароклиная устойчивость

Симметричная бароклиная неустойчивость, изучение которой было начато в классических работах Рэлея [109] и Сольберга [110] (см. также [111]), появляется в задачах, рассматриваемых в цилиндрической или сферической геометрии, где изначально имеет место зональная (азимутальная) симметрия. Приближённо анализ может вестись в локальных декартовых координатах при пренебрежении эффектами кривизны координатных линий, что справедливо, например, тогда, когда соответствующие центробежные силы много меньше силы Кориолиса (ср. [112]). В атмосфере такая симметричная бароклиная неустойчивость может возникать и быть значимой в струйных течениях (с их субтропической стороны), в атмосферных фронтах, тропических ураганах и вообще в приэкваториальной атмосфере [113]. Большое, если даже не большее, чем в атмосфере, значение симметричная бароклиная неустойчивость имеет для океана (см., например, [114]).

Рассмотрим f -плоскость и круговой вихрь на ней. Под термином " f -плоскость" понимается, что параметр Кориолиса f приближённо постоянен — последнее допустимо, когда масштаб движения в меридиональном направлении не очень велик. Строго говоря, задача должна решаться в цилиндрических координатах r, λ, z , где r — радиальная координата, λ — азимутальная (зональная) координата, z — аксиальная (вертикальная) координата. Однако для простоты там, где радиус кривизны координатных поверхностей уже велик и связанная с этой кривизной центробежная сила инерции мала по сравнению с силой Кориолиса, вводятся локальные декартовы координаты x, y, z : ось x направлена по радиусу, ось y — по азимуту и ось z — вверх. Соответствующие компоненты скорости — u, v, w . Предполагаем, что гидродинамические поля изменяются гораздо сильнее по радиусу, чем по азимуту, и запишем систему уравнений (2.2) в виде

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - fv &= -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} + fu = 0, \quad \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} + b, \\ \frac{Db}{Dt} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Исследуется устойчивость стационарного поля зональной скорости $V(x, z)$, которое связано с полем плавучести $B(x, z)$ уравнением термического ветра $f(\partial V/\partial z) =$

$= \partial B/\partial x$. Накладываем на это решение малые возмущения $(u', v', w', \phi', b') = (-\partial \psi'/\partial z, v', \partial \psi'/\partial x, \phi', b')$, так что уравнение несжимаемости тождественно удовлетворяется, линеаризуем (8.1) относительно штрихованных величин и, исключая ϕ , приходим к уравнению для возмущений функции тока (ср. [31])

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} \right) + \left[\frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial z} + \right. \\ \left. + f \left(\frac{\partial V}{\partial x} + f \right) \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Коэффициенты в (8.2) считаются квазипостоянными, т.е. пространственный масштаб возмущений предполагается много меньшим пространственного масштаба основного потока. Уравнение (8.2) является строгим тогда, когда $V(x, z)$ и $B(x, z)$ представляют собой линейные функции координат x и z . Умножая обе части (8.2) на $\partial \psi'/\partial t$ и интегрируя по всей области течения с периодическими условиями на её границах, получим закон сохранения

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = 0, \quad H = \frac{1}{2} \iint \left[\psi_{xt}'^2 + \psi_{zt}'^2 + \frac{\partial B}{\partial z} \psi_x'^2 - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial B}{\partial x} \psi_x' \psi_z' + f \left(\frac{\partial V}{\partial x} + f \right) \psi_z'^2 \right] dx dz. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Нижними буквенными индексами обозначены производные по соответствующим координатам. Чтобы уравнение (8.2) имело ограниченное во времени, регулярное на всей бесконечной плоскости (или удовлетворяющее заданным условиям на границе конечной области пространства) решение, линейный оператор в квадратных скобках в (8.2) обязан быть эллиптическим [115] или, что то же самое, квадратичная форма в подынтегральном выражении в (8.3) должна быть положительно определённой. Таким образом, должны выполняться условия: а) статической устойчивости $\partial B/\partial z > 0$; б) инерционной устойчивости $f(f + \partial V/\partial x) > 0$; в) дискриминант матрицы квадратичной формы должен быть положительным, т.е.

$$\frac{\partial B}{\partial z} f \left(f + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)^2 > 0. \quad (8.4)$$

Условие (8.4) симметричной бароклиной устойчивости записывается в красивой форме, если ввести потенциальную завихренность

$$\Pi = \frac{\partial(m, B)}{\partial(x, z)} = \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial m}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial x},$$

где $m = V + fx$, и использовать уравнение термического ветра. Очевидно, что (8.4) сводится к условию положительности (в Северном полушарии, где $f > 0$) потенциальной завихренности

$$f\Pi > 0.$$

Используя уравнение термического ветра, при $f > 0$ и выполнении условия "а" статической устойчивости условие устойчивости (8.4) можно представить в виде

$$1 + \frac{1}{f} \frac{\partial V}{\partial x} - \text{Ri}^{-1} > 0, \quad (8.5)$$

где $Ri = (\partial B / \partial z) / (\partial V / \partial z)^2$ — градиентное число Ричардсона. Когда $Ri < 1$, т.е. влияние бароклинности (вертикального сдвига скорости) велико, горизонтальный сдвиг скорости уже не является существенным ингредиентом неустойчивости. Отметим, что в этом случае критерий (8.5) выглядит очень существенным, поскольку соответствующий критерий волновой сдвиговой неустойчивости $Ri < 1/4$ (критерий Майлса–Говарда [106, 116]) более ограничен. Возможно, также по этой причине симметричная неустойчивость весьма важна при изучении организованных мезомасштабных вихревых структур. Таким образом, традиционная бароклиная неустойчивость, которая рассматривалась в разделах 2–7 (напомним, это неустойчивость относительно возмущений, зависящих от координаты вдоль основного потока), реализуется при числах Ричардсона, много больших единицы. Симметричная бароклиная неустойчивость относительно возмущений, зависящих от координаты в направлении, перпендикулярном основному потоку, реализуется при числах Ричардсона в диапазоне $1/4 < Ri < 1$. Наконец, вертикальная сдвиговая неустойчивость возникает при $Ri < 1/4$. Отметим, что симметричная бароклиная неустойчивость является формой наклонной конвекции (slantwise, sloping convection) и реализуется тогда, когда перемещения жидких частиц происходят в узком клине (секторе), образованном изоэнтропическими поверхностями и поверхностями постоянного абсолютного момента $m = \text{const}$. При этом изоэнтропические поверхности должны составлять больший угол с горизонталью, чем поверхности $m = \text{const}$.

Второй, исторически более традиционный, способ получения критерия симметричной устойчивости состоит в том, чтобы исследовать устойчивость методом частиц ("parcel" instability), когда поле давления ϕ "замораживается" и считается полностью заданным функциями $V(x, z)$ и $B(x, z)$. При этом не налагается никакого ограничения на масштаб возмущений. Тогда для возмущений справедлива система уравнений, которую записываем в матричном виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} v' \\ b' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(f + \partial V / \partial x) & \partial V / \partial z \\ f^2 \partial V / \partial z & \partial B / \partial z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v' \\ b' \end{pmatrix} = 0.$$

Из этого матричного уравнения вытекает закон сохранения

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v'}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{f^2} \left(\frac{\partial b'}{\partial t} \right)^2 \right] + f \left(f + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{v'^2}{2} + \frac{\partial V}{\partial z} v' b' + \frac{1}{f^2} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{b'^2}{2} = \text{const}, \quad (8.6)$$

гарантирующий устойчивость, если квадратичная форма в (8.6) положительно определена, т.е. выполняются условия инерционной и статической устойчивости, а также условие, которое в силу уравнения термического ветра совпадает с (8.5).

Таким образом, общее вращение и устойчивая стратификация являются стабилизирующими факторами, а бароклинность, выражаемая соответствующей компонентой бароклинного слагаемого в уравнении вихря, дестабилизирует течение, и симметричная устойчивость гарантирована, только если этот дестабилизирующий фактор достаточно мал. Если последнее условие нарушается, то выполняются необходимые условия для не-

устойчивости. К. Оояма [117] доказал, что невыполнение (8.4) является и достаточным условием для неустойчивости. В самом деле, умножая (8.2) на ψ' и вводя в рассмотрение функционалы

$$K = \frac{1}{2} \iint \{ \psi_x'^2 + \psi_z'^2 \} dx dz, \\ I = \frac{1}{2} \iint \{ \psi_{xt}'^2 + \psi_{zt}'^2 \} dx dz,$$

после нескольких интегрирований по частям получим соотношение (ср. [118])

$$\frac{d^2 K}{dt^2} = 4I - 2H. \quad (8.7)$$

Предположим, что условия симметричной устойчивости нарушены в какой-либо части течения. Тогда всегда можно выбрать начальное возмущение с $H(0) < 0$. Для такого возмущения из (8.7) следует, что $d^2 K / dt^2 \geq 2|H|$, отсюда в силу сохранения H $K(t) \geq |H|t^2 + \dot{K}(0)t + K(0)$ (где точка сверху означает производную по времени). Теперь ясно, что, как бы ни была мала начальная величина $K(0)$, по прошествии конечного промежутка времени значение $K(t)$ превысит любую наперед заданную величину $\varepsilon > 0$, что и означает неустойчивость. Это согласуется с общими теоремами Н.Г. Четаева [119] о неустойчивости. В метеорологии сходный метод анализа бароклиной неустойчивости зональных течений, основанный на вычислении второй производной по времени от кинетической энергии возмущений, использовался ещё в работе [120]. Применительно к задаче о спонтанном усилении спиральности во влажной атмосфере схожий подход использовался в [121].

В качестве достаточных условий устойчивости принимают также эквивалентные вышеуказанным условиям (а, б, в) условие положительности следа матрицы

$$f \left(f + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial B}{\partial z} > 0$$

и условие (8.4) положительности дискриминанта матрицы в выписанном выше матричном уравнении (ср. [117]). В астрофизической гидродинамике аналогичные по сути, но более сложные по записи условия симметричной устойчивости зональных движений во вращающихся звёздах и дисках носят название критериев Сольберга–Хёланда (Solberg–Høiland) [122, 123] (см. подробнее ниже).

Заметим, что в литературе часто выбирается такая правосторонняя система координат (x, y, z) , в которой основной поток $U(y, z)$ направлен вдоль оси x и не зависит от x . В этом случае поле плавучести основного потока имеет вид $B(y, z)$, уравнение термического ветра записывается как $f(\partial U / \partial z) = -\partial B / \partial y$ и условия симметричной устойчивости приобретают вид

$$f \left(f - \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial B}{\partial z} > 0, \quad \frac{\partial B}{\partial z} f \left(f - \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^2 > 0.$$

Элегантный способ вывода достаточных условий нелинейной симметричной устойчивости состоит в использовании метода Арнольда [37] (см. [124, 125], где рассматривался случай несжимаемой расслоённой жидко-

сти, но без приближения Буссинеска). Исходим из (8.1) и учитываем, что $(u, w) = (-\partial\psi/\partial z, \partial\psi/\partial x)$. Рассматривается слой жидкости, ограниченный сверху и снизу горизонтальными непроницаемыми для жидкости поверхностями; по горизонтали ставятся условия периодичности. Используем существование в задаче интегралов движения: энергии

$$E = \iint \left\{ \frac{(\nabla\psi)^2}{2} + \frac{(m - fx)^2}{2} - zb \right\} dx dz$$

как суммы кинетической и потенциальной энергий, а также так называемых казимиров — величин, сохранение которых непосредственно (тривиально) следует из уравнений движения,

$$F = \iint \left\{ \Phi(m, b) - \frac{m^2}{2} \right\} dx dz.$$

Здесь $m = v + fx$, Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Составляется линейная комбинация интегралов движения $I = E + F$. Пусть (V, B) — заданное стационарное зональное течение, устойчивость которого исследуется. Вертикальная циркуляция отсутствует, $\Psi = 0$, и для этого решения выполняются геострофический баланс в радиальном направлении и гидростатический баланс в вертикальном направлении, так что справедливо уравнение термического ветра $f(\partial V/\partial z) = \partial B/\partial x$. Разность $I[m, b, \psi] - I[V + fx, B, \Psi]$ является интегралом движения. Считая отклонения $\delta m = v - V$, $\delta b = b - B$, $\delta\psi = \psi - \Psi$ малыми, разложим $I[m, b, \psi] - I[V + fx, B, \Psi]$ в ряд по вариациям последовательных порядков:

$$I[m, b, \psi] - I[V + fx, B, \Psi] = \delta I + \frac{1}{2} \delta^2 I + \dots$$

Произвольную функцию Φ можно выбрать так, чтобы для заданного зонального потока $(V, B, \Psi = 0)$ первая вариация δI обратилась в нуль:

$$\Phi'_m|_{m=V+fx, b=B} = fx, \quad \Phi'_b|_{m=V+fx, b=B} = z.$$

Штрих означает дифференцирование, а нижний буквенный индекс — частное дифференцирование по соответствующей переменной. Вычисляя вторую вариацию, находим

$$\begin{aligned} \delta^2 I = \iint \{ & (\nabla\delta\psi)^2 + \Phi''_{mm}(\delta m)^2 + \\ & + 2\Phi''_{mb}\delta m\delta b + \Phi''_{bb}(\delta b)^2 \} dx dz \end{aligned} \quad (8.8)$$

и, опуская промежуточные выкладки, укажем, что $\Phi''_{mm} = f^2(\partial B/\partial z)/\Delta$, $\Phi''_{bb} = f[(\partial V/\partial x) + f]/\Delta$, $\Phi''_{mb} = \Phi''_{bm} = -f(\partial B/\partial x)/\Delta$, где

$$\Delta = f \left(\frac{\partial V}{\partial x} + f \right) \frac{\partial B}{\partial z} - \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)^2.$$

Согласно критерию Сильвестра условие положительной определённости квадратичной формы в подынтегральном выражении в (8.8) заключается в выполнении неравенств $\partial B/\partial z > 0$ и $\Delta > 0$. Отсюда с необходимостью следуют выполнение условия инерционной устойчивости

$f[(\partial V/\partial x) + f] > 0$, а значит, и положительность следа матрицы квадратичной формы, $(\partial B/\partial z) + f[(\partial V/\partial x) + f] > 0$. При выполнении этих неравенств зональное течение (V, B) устойчиво в смысле Ляпунова.

Устойчивость геострофических состояний исследовалась с использованием прямого метода Ляпунова также в работах [126, 127]. Работа [126], опубликованная одновременно с [124], содержала ряд упрощающих приближений (в частности, приближение Буссинеска). В [127] получен ряд строгих априорных оценок для норм возмущений, вытекающих из условий устойчивости $\partial B/\partial z > 0$ и $\Delta > 0$.

До сих пор мы рассматривали критерии симметричной бароклиной устойчивости в идеальной жидкости. М. Макинтайр [112] показал, что в случае вязкой и теплопроводной жидкости при числах Прандтля, отличных от единицы, возможна дополнительная симметричная неустойчивость, как монотонная, так и колебательная, даже когда упомянутые выше критерии выполнены (см. также [113]).

Вся вышеуказанная техника обобщается для случая бароклиных круговых вихрей, в которых необходимо учитывать кривизну линий тока. Для таких вихрей в цилиндрической системе координат (r, λ, z) уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} &= -\frac{\partial\phi}{\partial r}, \quad \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} = 0, \quad \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial\phi}{\partial z} + b, \\ \frac{Db}{Dt} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial r}(ur) + \frac{\partial}{\partial z}(wr) = 0, \end{aligned}$$

причём для основного потока выполняется уравнение термического ветра

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{V^2}{r} = \frac{\partial B}{\partial r}.$$

Исследование устойчивости к азимутально симметричным возмущениям $(u', v', w', \phi', b') = (-r^{-1}\partial\psi'/\partial z, v', r^{-1}\partial\psi'/\partial r, \phi', b')$, где u, v, w отвечают радиальной, азимутальной и аксиальной компонентам скорости, ψ — функция тока Стокса, технически сложнее, но, по сути, то же, что и в рассмотренном выше простом случае. При введении обозначения $m = Vr$ для удельного углового момента и удобного сокращённого обозначения $x = r^2/2$ для радиальной координаты условия устойчивости приобретают вид: а) $\partial m^2/\partial x > 0$ — условие центробежной устойчивости (критерий Рэлея [109]); б) $\partial B/\partial z > 0$ — условие статической устойчивости; в) условие симметричной бароклиной устойчивости

$$\frac{1}{4x^2} \frac{\partial m^2}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial z} - \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)^2 \equiv \frac{1}{2x^2} m\Pi > 0,$$

где Π — потенциальная завихренность,

$$\Pi = \frac{\partial(m, B)}{\partial(x, z)} = \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial m}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Обобщение для случая общего вращения состоит в формальной замене $m \rightarrow M = m + fr^2/2 \equiv m + f/x$ в выписанных критериях устойчивости, где M — абсолютный удельный угловой момент, параметр Кориолиса f считается постоянным.

Указанные соображения можно, например, применить к центральной части интенсивных тропических циклонов (см. также [128] и приведённые там ссылки); речь в этих публикациях идёт о том, что когда выполнены условия симметричной устойчивости, становится корректной задача определения вызванной источниками импульса и плавучести меридиональной циркуляции, которая поддерживает циклострофически и гидростатически сбалансированное вихревое движение [129], а также, с определёнными допущениями, движение к дискам аккреции в астрофизике. В первом случае речь идёт с очень хорошим приближением о движении в однородном поле силы тяжести, тогда как во втором (при пренебрежении эффектами самогравитации) — о вращении жидкости (обычно тонкого жидкого диска) в гравитационном поле точечного массивного объекта в центре диска. Исходим из уравнений в цилиндрической системе координат

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{m^2}{r^3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\frac{Dm}{Dt} = 0, \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ur) + \frac{\partial}{\partial z}(wr) = 0, \quad \varphi = -\frac{GM_0}{\sqrt{r^2 + z^2}},$$

где $m = vr$ — удельный угловой момент, G — универсальная гравитационная постоянная Ньютона, M_0 — масса центрального гравитирующего тела в начале координат $(r, z) = (0, 0)$. Ось z направлена вдоль вращения диска. Диск считается симметричным относительно плоскости $z = 0$, т.е. рассматривается верхнее полупространство $z \geq 0$, и без ограничения общности тонким, т.е. $z \ll r$. Течение стратифицировано по плотности, несжимаемо, но свободно от приближения Буссинеска. Для удобства вводятся обозначение $x = r^2/2$ и, следуя работе [124], новая искомая функция $\mu = (1/4)\rho m^2$. Уравнения (8.9) допускают стационарное вращение жидкости, удовлетворяющее условиям циклострофического и гидростатического баланса,

$$-\frac{\mu}{x^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

и, как следствие, уравнению термического ветра

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial \mu}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho, \varphi)}{\partial(x, z)}. \quad (8.10)$$

Исследуем устойчивость этого стационарного вращения с помощью метода Арнольда. Исходим из существования двух интегралов движения: энергии

$$E = \iint \left\{ \frac{\rho u^2}{2} + \frac{\mu}{x} + \rho \varphi \right\} dx dz, \quad u = (u, w)$$

и казимира

$$F = \iint \Phi(\mu, \rho) dx dz,$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Составляем функционал $I = E + F$ и исследуем его на абсолютный экстремум, считая независимые вариации $\delta u, \delta \mu, \delta \rho$ малыми. Необходимое условие

равенства нулю первой вариации $\delta I = 0$ имеет вид $u = 0$, $\Phi'_\mu = -x^{-1}$, $\Phi'_\rho = \varphi(x, z)$. Теперь вторая вариация принимает вид

$$\delta^2 I = \iint (\rho(\delta u)^2 + \Phi''_{\mu\mu}(\delta \mu)^2 + 2\Phi''_{\mu\rho} \delta \mu \delta \rho + \Phi''_{\rho\rho}(\delta \rho)^2) dx dz,$$

где $\Phi''_{\mu\mu} = x^{-2}(\partial \rho / \partial z) / \Delta$, $\Phi''_{\rho\rho} = (1/\Delta)(\partial(\mu, \varphi) / \partial(x, z))$, $\Phi''_{\mu\rho} = \Phi''_{\rho\mu} = -(1/\Delta)\partial(\rho, \varphi) / \partial(x, z)$, $\Delta = \partial(\mu, \rho) / \partial(x, z)$.

Используя уравнение термического ветра (8.10), можно показать, что условия устойчивости выражаются как вид

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \rho}{\partial z} > 0, \quad \frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{\partial(\mu, \varphi)}{\partial(x, z)} \left(-\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \frac{\partial(\rho, \varphi)}{\partial(x, z)} \left(-\frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \right] > 0. \quad (8.11)$$

Легко заметить, что второе условие (8.11) имеет вид

$$-\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{\rho \Delta} \frac{\partial p}{\partial z} > 0.$$

Поскольку ввиду ограничения рассмотрением верхнего полупространства $z \geq 0$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{GM_0 z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \cong \frac{GM_0 z}{r^3} > 0,$$

причём приближённое равенство справедливо в силу условия $z \ll r$ тонкости диска и соответственно давление убывает с увеличением расстояния до плоскости симметрии диска, условия (8.11) приобретают вид

$$-\frac{\partial \ln \rho}{\partial z} > 0, \quad -\Delta = \frac{\partial(\rho, \mu)}{\partial(x, z)} \equiv \frac{\rho^2}{4} \frac{\partial(m^2, -\ln \rho)}{\partial(x, z)} > 0, \quad (8.12)$$

и мы приходим к критерию устойчивости Сольберга — Хёланда (ср. [130], где вместо $-\ln \rho$ используется удельная энтропия s ; для несжимаемой жидкости $s \cong -A_p \ln \rho + \text{const}$).

Существенной проблемой является возникновение турбулентности и соответственно турбулентной вязкости, необходимой для поддержания дисковой аккреции в квазистационарном состоянии [131]. Дело в том, что если профиль скорости кеплеровский, $v(r) \propto r^{-1/2}$, то критерий Рэлея $\partial m^2 / \partial x > 0$ центробежной устойчивости заведомо выполняется, и если дополнительно $-\partial \ln \rho / \partial z > 0$ (статическая устойчивость в аксиальном направлении), то выполняется и второе условие (8.12). Для нарушения второго условия (8.12) и появления неустойчивости необходимо учитывать отклонения профиля скорости от кеплеровского, которые зависят от аксиальной координаты z (эффект бароклинности, выражаемый уравнением термического ветра [127]).

Отметим, что для объяснения возникновения турбулентности в диске привлекали, оставаясь при этом в рамках кеплеровского профиля скорости, также и более сложные механизмы, например, связанные с магнито-вращательной (магниторотационной) неустойчивостью (magneto-rotational instability, MRI), открытой в [132] (см. также [133]), когда электропроводящая жидкость вращается вокруг оси, параллельной магнитному полю,

и угловая скорость вращения $\Omega(r) \equiv v(r)/r$ убывает с возрастанием радиуса r [134] (см. также [135]). Одним из новых направлений исследований является явный учёт устойчивой стратификации вещества в диске в направлении, перпендикулярном его плоскости, что может привести к неустойчивости кеплеровского профиля скорости (который в случае нейтральной стратификации заведомо устойчив), но уже по отношению к азимутально несимметричным возмущениям, в первую очередь с зональным волновым числом, равным единице (так называемая спиральная мода неустойчивости). Речь идёт о страторотационной неустойчивости (stratorotational instability, SRI), которая в настоящее время исследована наиболее подробно на модельных гидродинамических постановках задач (стратифицированное течение Тейлора – Куэтта и др.) [136–140].

9. Бароклинная неустойчивость в астрофизике

Бароклинная (волновая) неустойчивость естественна для астрофизических объектов, и близкие задачи рассматривались начиная с 1960-х годов. Ряд связанных вопросов рассмотрен в разделе 8. Подробный обзор работ 1960–1970-х годов представлен в [122, 141]. В частности, можно выделить следующие проблемы: а) устойчивость дифференциального вращения в применении к звёздам в общем и к солнечному тахоклину в частности; б) развитие турбулентности в астрофизических дисковых системах. В последнем случае несколько разделяются аккреционные диски и протопланетные системы. Также представляют интерес задачи о бароклинной неустойчивости в планетных атмосферах — от планет земной группы и планет-гигантов Солнечной системы до экзопланет [142–144]. Отмечается, что неустойчивость либо плохо воспроизводится, либо вообще не воспроизводится при моделировании с низким разрешением и/или большой искусственной вязкостью.

В работе Голдрейха – Шуберта [145], где использовался локальный (коротковолновый) анализ устойчивости, показано, что необходимым условием устойчивости зон лучистого переноса вращающихся звёзд являются возрастание углового момента с увеличением расстояния от центра и отсутствие зависимости скорости вращения от вертикальной координаты. Роль бароклинности в устойчивости дифференциального вращения анализировалась в [146], где, как и во многих других работах, рассматривались движения в цилиндрических координатах r, ϕ, z и основное невозмущённое состояние в виде $\mathbf{v}_0 = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega} = r\boldsymbol{\Omega}(r, z)\mathbf{e}_\phi$, (здесь $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость вращения, $\mathbf{e}_\phi$ — единичный вектор в азимутальном направлении). Положение равновесия удовлетворяет уравнению $\nabla P = \rho \tilde{\mathbf{g}}$, где $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g} + r\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{e}_\phi = \nabla \Phi + r\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{e}_\phi$ — эффективная сила тяжести, Φ — гравитационный потенциал. Достаточным условием устойчивости является выполнение соотношений $\tilde{\mathbf{g}} \cdot \boldsymbol{\beta} > 0$ и $\tilde{\mathbf{g}} \times \boldsymbol{\beta} = 0$, где $\boldsymbol{\beta} = \nabla_{\text{ad}} \nabla \ln P - \nabla \ln T$ ($\nabla_{\text{ad}} = d \ln T / d \ln P$ для адиабатических изменений). Условие устойчивости, как и в [145], выполняется при $\partial \Omega / \partial z = 0$. При появлении вертикальной неоднородности вращения, $\partial \Omega / \partial z \neq 0$, поверхности, ортогональные к направлению эффективной силы тяжести и градиенту энтропии $\boldsymbol{\beta}$, располагаются уже под углом к друг другу, подобно тому как показано на рис. 1. Возмущения, попадающие в клин между этими поверхностями, становятся неустой-

чивыми. В динамической метеорологии бароклинная неустойчивость означает неустойчивость адиабатических волновых движений в бароклинной атмосфере, и она рассматривается в глобальном анализе возмущений. Физический механизм бароклинной неустойчивости очень похож на тепловую конвекцию, хотя вращение делает результирующую неустойчивость осциллирующей. С другой стороны, рассматриваемая неустойчивость сопровождается неадиабатическими эффектами. Физическая причина этой неустойчивости очевидна: лучистый теплообмен между возмущённым элементом жидкости и его окружением вносит асимметрию в колебательное движение таким образом, что колеблющийся элемент проскакивает своё равновесное положение с увеличением скорости.

Особенностью бароклинной неустойчивости в условиях астрофизической гидродинамики является то, что гидростатический баланс и условия геострофического баланса могут не соблюдаться.

Аналитические оценки устойчивости линейного профиля скорости, зависящего как от вертикальной координаты z , так и от поперечной x (неразделённое течение), для баротропного и бароклинного случаев получены в [147]:

$$\mathbf{V}_0 = (0, \delta x + \varepsilon z, 0). \quad (9.1)$$

Здесь δ, ε — значения горизонтального и вертикального сдвигов соответственно. Используется локальная система координат, в которой x соответствует радиальному направлению, y — азимутальному. Метод разделения переменных для линеаризованной задачи неприменим, и решение можно представить здесь в виде немодальной волны с волновыми числами, зависящими от времени [148]:

$$f(x, y, z, t) = \exp[i(k - m\delta t)x + imy + i(l - m\varepsilon t)z]f(t). \quad (9.2)$$

Для возмущений с $m = 0$ во вращающейся системе координат при поддержании термического (азимутального) ветра $2\Omega \partial V_0 / \partial z = \beta g \partial T / \partial x$ получаются колебательные решения с частотой $\bar{N}$:

$$\bar{N}^2 = \frac{k^2 N^2 - 4\epsilon k l + 2(2 + \delta)l^2}{k^2 + l^2}.$$

Случай $\varepsilon = \delta = 0$ соответствует нейтрально устойчивым инерциально-гравитационным волнам. Однако при ненулевых сдвигах эти волны могут быть неустойчивыми. При $\varepsilon = 0$ и $\delta < -2$ моды с $k = 0$ ($l \neq 0$) неустойчивы. Для них вертикальная стратификация не обеспечивает восстанавливающей силы и удельный угловой момент уменьшается наружу (т.е. в положительном направлении x).

При $\varepsilon(\delta) \neq 0$ экспоненциально возрастающие решения существуют при $\text{Ri} < 2/(2 + \delta)$, где $\text{Ri} \equiv N^2/\varepsilon^2$. При $\delta = 0$ получаем обычный критерий для симметричной неустойчивости ($\text{Ri} < 1$) бароклинного течения. Однако при $-2 < \delta < 0$ диапазон неустойчивых чисел Ричардсона больше. Фактически течения с произвольно большими числами Ричардсона могут быть неустойчивыми при появлении соответствующего горизонтального (широтного) сдвига; если $\delta < -2$, то все течения неустойчивы. От-

мечается, что при $N^2 = 0$ любое течение с ненулевой бароклинностью ($\varepsilon \neq 0$) будет неустойчивым.

Для максимума инкремента неустойчивости $\sigma_{\max}$ имеем

$$\sigma_{\max}^2|_{m=0} = -N^2 + \frac{8\varepsilon^2}{\sqrt{v^2 + 16\varepsilon^2} - v}, \quad (9.3)$$

где $v = N^2 - 2(2 + \delta)$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ опять возникает условие неустойчивости $\delta < -2$. Условие экспоненциального возрастания $\text{Ri} < 2/(2 + \delta)$ следует при $\sigma_{\max}^2|_{m=0} > 0$.

При $\delta = 0$, $\varepsilon \neq 0$ безразмерное асимптотическое решение задачи имеет ветви $\sim t^{-1 \pm i\alpha} \exp(\pm 2it)$ ($\alpha = (k - m\delta)/m$) и $\sim t^{-4}$. Можно отметить, что частота колебаний (в размерных единицах) — это частота вращения 2Ω , а не частота Бранта–Вайсяля. То есть основная возвращающая сила здесь — сила Кориолиса, делающая неосесимметричные возмущения устойчивыми даже в случае неустойчивой температурной стратификации основного состояния. Таким образом, устойчивость бароклинового течения с вертикальным сдвигом полностью отличается от устойчивости течения в баротропном случае.

В общем неосесимметричном случае при $\varepsilon(\delta) \neq 0$, $k(l, m) \neq 0$ асимптотическое решение задачи имеет две моды: затухающую $\sim t^{-3}$ и возрастающую или колебательную $\sim t^{\pm i\bar{N}'d} \exp(\pm i\bar{N}'t)$. Зависимости $\bar{N}'$, d от параметров N , δ , ε , k , l , m приводятся в [147]. При $\delta^2 \text{Ri} + 4 - 2\delta < 0$ значение $\bar{N}'^2$ оказывается отрицательным, следовательно, достаточным условием для неустойчивости является $\text{Ri} < 1/4$. Отмечается, что при этом возрастание осесимметричных возмущений всегда превалирует над возрастанием неосесимметричных.

Большие горизонтальные сдвиги возможны в аккреционных дисках. Частота плавуности может быть незначительной (как, например, вблизи зон конвекции, вблизи центра звезды или в средней плоскости аккреционного диска). Кеплеровский (горизонтальный) сдвиг доминирует над вертикальным сдвигом, производимым бароклинностью основного состояния, и его влиянием нельзя пренебрегать. В частности, при длинноволновых возмущениях гидростатический баланс по вертикали сохраняется при модификации геострофического баланса.

В быстро вращающихся звёздах бароклиновая неустойчивость может возникать во всём объёме. В медленно вращающихся звёздах она может появиться только в очень узких областях, расположенных вблизи: а) центра звезды, б) границы зоны конвекции, в) скачка молекулярного веса или частоты плавуности либо г) скачка градиента скорости вращения [149].

В [150] отмечалось, что отклонения от баротропности или бароклинности определяют уровень турбулентности в дисках. В [151, 152] проведён линейный анализ бароклиновой неустойчивости в зоне лучистого переноса звезды с неоднородным по радиусу вращением. Рассматриваются глобальные возмущения, т.е. их горизонтальный масштаб не предполагается малым по сравнению с радиусом звезды. Радиальный масштаб возмущений считается при этом малым. Исходное состояние предполагается осесимметричным. Основной составляющей течения здесь является вращение, которое полагается достаточно медленным для того, чтобы отклонение стратификации от сферической симметрии было малым. Сама стратификация в лучистых зонах звёзд является устойчивой, т.е. удельная энтропия $s = c_v \ln P - c_p \ln \rho$ возрастает

с увеличением радиуса. Основной причиной неустойчивости является неоднородность вращения. Имеется два семейства неустойчивых возмущений, соответствующих волнам Россби и внутренним гравитационным волнам. Неустойчивость является динамической: время её развития, составляющее несколько тысяч периодов вращения, мало по сравнению с временем эволюции звезды. Уменьшение теплопроводности усиливает неустойчивость. Неустойчивые возмущения обладают кинетической спиральностью. Соответственно возможна генерация магнитного поля возникающей в результате развития неустойчивости турбулентностью. Неустойчивость появляется при очень малой неоднородности вращения, $\Delta\Omega \sim 10^{-3}\Omega$, тем самым рассматриваемая неустойчивость отличается от баротропных неустойчивостей, возникающих при относительно большой неоднородности вращения.

Дифференциальное вращение — не единственная возможная причина бароклинности. В дополнение к неконсервативной центробежной силе магнитное напряжение также может привести к бароклинности. В связи с этим возникает вопрос: возможна ли магнитоиндуцированная бароклиновая неустойчивость?

В [153] рассматривается бароклиновая неустойчивость для двухуровневой модели на β -плоскости при наличии зонального магнитного поля. В этом случае потенциальная завихренность уже не сохраняется. Минимальный вертикальный сдвиг, необходимый для неустойчивости, уже не зависит от β -эффекта, но определяется интенсивностью магнитного поля. Короткие волны становятся неустойчивыми, в то время как длинноволновые возмущения стабилизируются. Неустойчивые волны преобразуют доступную потенциальную энергию в энергию возмущений магнитного поля. Изменения немагнитной составляющей схожи с таковыми в модели Филлипса. Генерируются вертикальное и одночечное меридиональное магнитное поле.

В [154, 155] с использованием магнитогидродинамического (МГД) обобщения двухуровневой гидростатической (но уже негеострофической) модели, показано, что тороидальное поле стремится стабилизировать бароклинно-неустойчивые режимы в солнечном тахоклине. Соответственно бароклиновая неустойчивость должна возникать в тахоклине на тех широтах, где тороидальное поле является слабым или меняет знак, но не там, где поле сильное. В [154] отмечается: солнечный тахоклин, вероятно, близок к состоянию геострофического термического ветра, для которого сила Кориолиса, связанная с дифференциальным вращением, уравнивается градиентом широтного давления, что приводит к связи между вертикальным градиентом вращения и градиентом широтной энтропии. Скорость роста неустойчивых возмущений на средних и высоких широтах примерно в пять раз выше, чем на низких.

На всех широтах и при всех стратификациях продольный масштаб наиболее неустойчивых возмущений сопоставим с радиусом деформации Россби, в то время как скорость роста определяется градиентом локальной широтной энтропии.

Бароклиновая неустойчивость в тахоклине, конкурирующая с неустойчивостью за счёт градиента угловой скорости широтного вращения, установленной в более ранних исследованиях, важна для работы солнечной динамо-машины, и она должна быть обнаружена в боль-

шинстве звёзд, содержащих границу раздела между радиационной и конвективной областями.

В [156] исследуется бароклинность именно в контексте ненулевого вертикального сдвига. В более общем смысле бароклинным течением является течение, изобарные поверхности которого не совпадают с его изопикническими поверхностями. Такие течения оказываются бароклинными из-за молекулярно-массовых градиентов: добавление пыли влияет на плотность, но не на давление. Бароклиная неустойчивость развивается даже при большом числе Ричардсона.

Как показывают аналитические оценки и трёхмерное моделирование, в частности, протопланетарные диски имеют отрицательный градиент радиальной энтропии, что делает их бароклинными [157]. Бароклинное течение оказывается неустойчивым и генерирует турбулентность. Неустойчивость связана с развитием транзитных (немодалных) возмущений [158, 159]. Отмечается, что при баротропных начальных условиях турбулентность быстро распадается. В плоскости диска возникают волны давления, волны Россби и вихри. Наиболее интересным является то, что эти сверхплотные антициклонические вихри образуются из небольшого фонового шума и становятся долгоживущими, что, как предполагается, приводит к образованию планет [160]. Сосредоточения протопланетного вещества имеют поверхностную плотность, до четырёх раз большую, чем окружающая среда. Кроме того, они аккумулируют пыль в своих центрах, что усиливает их роль в процессах планетообразования [161]. Схожие результаты получены и в [162, 163].

Турбулентность, развивающаяся в бароклинных дисках, переносит угловой момент наружу и создаёт направленный радиально внутрь приток вещества. Потенциальная энергия высвобождается, а избыточная кинетическая энергия рассеивается. Тепловая конвекция в вертикальном направлении диска для этого эффекта не нужна. Конвекция создаёт отрицательные напряжения Рейнольдса, но они оказываются на несколько порядков слабее, чем создаваемые бароклинной неустойчивостью.

В геометрии протопланетарного диска стратификация плотности, в отличие от таковой в планетных атмосферах, происходит в радиальном направлении, поэтому азимутальные колебания давления приведут к вихревому состоянию. Ряд числовых моделей протопланетных дисков не учитывал эффекты бароклинности и поэтому мог лишь фиксировать распадающуюся турбулентность от некоторого начального распределения вихревых потоков. В [164] выявлена новая гидродинамическая неустойчивость протопланетных дисков, которая может возникнуть из-за изменения соотношения пыли к газу и привести к сосредоточению пыли внутри диска. Неустойчивость вызывает появление вертикального градиента энтропии, который в свою очередь приводит к бароклинной неустойчивости, способной создавать торoidalные газовые вихри, аккумулирующие пыль в кольца.

В [165, 166] обнаружено, что бароклиная неустойчивость с термической релаксацией приводит к образованию крупных эллиптически неустойчивых вихрей. Первоначально образуются полые вихри, которые превращаются в вихревые структуры с турбулентным ядром. Внутренние вихревые слои развиваются по всему диску вдоль критических поверхностей слоя и образуют новые вихри в верхней области диска. Такие бароклинные вихри

могут играть значительную роль в эволюции глобального диска и участвовать в отделении твёрдых тел от газовой составляющей, а также способствовать образованию новых вихрей вне плоскости диска по механизму возбуждения критического слоя.

10. Заключение

Несмотря на то что авторы стремились дать по возможности полный охват современных наиболее интересных и важных работ по бароклинной неустойчивости геофизических течений, данный обзор во многом отражает их личные пристрастия и персональный опыт работы. Частичным оправданием неполноты представленных в обзоре результатов, в особенности касающихся приложений к реальной атмосфере и океану, является то, что в основной части обзора мы стремились высветить именно современные тенденции и "точки роста" в теории бароклинной неустойчивости в рамках геофизической гидродинамики. В частности, это касается сделанного упора на систематическое использование уравнений движения, взятых в приближении Буссинеска (приближении слабой сжимаемости — в динамическом смысле — жидкой среды), что позволяет освободиться от второстепенных для теории бароклинной устойчивости, но сильно усложняющих формальный анализ факторов, таких как полный учёт сжимаемости жидкости (атмосферного воздуха). Представленные в обзоре тенденции и "точки роста", на наш взгляд, характерные именно для последнего десятилетия XX в. и начала XXI в., по вынужденности не нашли должного отражения в обзорных работах предшествующего периода, где речь шла о бароклинной неустойчивости, в том числе в блестящих обзорах А.С. Монина с соавторами, и могут представлять интерес для широкой физической общественности, включая специалистов по гидродинамике и её приложениям к геофизике и астрофизике.

Авторы надеются, что настоящий обзор позволит читателю получить представление о современном состоянии теории бароклинной устойчивости в геофизической гидродинамике и привлечёт его интерес к очерченным там проблемам, имея также в виду возможность переноса изложенных методов и результатов на смежные разделы физической науки.

Работа по написанию обзора поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 20-15-50175-экспансия. Результаты, рассматриваемые в разделе 6, получены при поддержке Российским научным фондом (проект 19-17-00248).

Список литературы

1. Wallace J M, Hobbs P V *Atmospheric Science: an Introductory Survey* (New York: Academic Press, 1977)
2. Монин А С *Теоретические основы геофизической гидродинамики* (Л.: Гидрометеиздат, 1988); Пер. на англ. яз.: Monin A S *Theoretical Geophysical Fluid Dynamics* (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990)
3. Pedlosky J *Geophysical Fluid Dynamics* (Berlin: Springer-Verlag, 1987)
4. Vallis G K *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006)
5. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука 1988); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)

6. Незлин М В *УФН* **150** 3 (1986); Nezlin M V *Sov. Phys. Usp.* **29** 807 (1986)
7. Должанский Ф В, Крымов В А, Манин Д Ю *УФН* **160** (7) 1 (1990); Dolzhanskii F V, Krymov V A, Manin D Yu *Sov. Phys. Usp.* **33** 495 (1990)
8. Монин А С *УФН* **150** 61 (1986); Monin A S *Sov. Phys. Usp.* **29** 843 (1986)
9. Монин А С, Жихарев Г М *УФН* **160** (5) 1 (1990); Monin A S, Zhikharev G M *Sov. Phys. Usp.* **33** 313 (1990)
10. Онищенко О Г, Похотелов О А, Астафьева Н М *УФН* **178** 605 (2008); Onishchenko O G, Pokhotelov O A, Astaf'eva N M *Phys. Usp.* **51** 577 (2008)
11. Фридман А М *УФН* **178** 225 (2008); Fridman A M *Phys. Usp.* **51** 213 (2008)
12. Charney J G *J. Meteorology* **4** (5) 135 (1947)
13. Eady E T *Tellus* **1** (3) 33 (1949)
14. Дымников В П, Филатов А Н *Устойчивость крупномасштабных атмосферных процессов* (Л.: Гидрометеиздат, 1990)
15. Шакина Н П *Гидродинамическая неустойчивость в атмосфере* (Л.: Гидрометеиздат, 1990)
16. Hide R, Mason P J *Adv. Phys.* **24** 47 (1975)
17. Обухов А М *Изв. АН СССР. Сер. геофиз. географ.* **13** (4) 281 (1949)
18. Lindzen R S *Dynamics in Atmospheric Physics: Lecture Notes for an Introductory Graduate-Level Course* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990)
19. Курганский М В *Введение в крупномасштабную динамику атмосферы: Адиабатические инварианты и их применение* (СПб.: Гидрометеиздат, 1993)
20. Дикий Л А *Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы* (Л.: Гидрометеиздат, 1976)
21. Davies H C, Bishop C H *J. Atmos. Sci.* **51** 1930 (1994)
22. Hide R *Quart. J. R. Meteor. Soc.* **79** 161 (1953)
23. Hide R *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* **250** 441 (1958)
24. Фридман А А *Избранные труды* (М.: Наука, 1966)
25. Ertel H *Naturwissenschaften* **30** 543 (1942)
26. Свиркунов П Н *Труды Ин-та экспериментальной минералогии РАН* **27** 88 (1996)
27. Захаров В Е, Кузнецов Е А *УФН* **167** 1137 (1997); Zakharov V E, Kuznetsov E A *Phys. Usp.* **40** 1087 (1997)
28. Charney J G, Stern M E *J. Atmos. Sci.* **19** 159 (1962)
29. Bretherton F P *Quart. J. R. Meteor. Soc.* **92** 325 (1966)
30. Montgomery M T, Shapiro L J *J. Atmos. Sci.* **52** 1829 (1995)
31. Hoskins B J *Quart. J. R. Meteor. Soc.* **100** 480 (1974)
32. Булеев Н И, Марчук Г И, в сб. *Работы по динамической метеорологии: за 1951–1954 гг.* (Труды Института физики атмосферы АН СССР, № 2, Отв. ред. И А Кибель) (М.: Изд-во АН СССР, 1958) с. 66
33. Монин А С *Изв. АН СССР. Сер. геофиз.* (4) 497 (1958)
34. Монин А С *Прогноз погоды как задача физики* (М.: Наука, 1969); Пер. на англ. яз.: Monin A S *Weather Forecasting as a Problem in Physics* (Cambridge, MA: MIT Press, 1972)
35. Дикий Л А, Курганский М В *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана* **7** 939 (1971); Diky L A, Kurgansky M V *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **7** 623 (1971)
36. Kurgansky M V *Adiabatic Invariants in Large-Scale Atmospheric Dynamics* (Boca Raton, FL: CRC Press, 2002)
37. Арнольд В И *ДАН СССР* **162** 975 (1965); Пер. на англ. яз.: Arnold V I, in *Vladimir I. Arnold — Collected Works: Hydrodynamics, Bifurcation Theory, and Algebraic Geometry 1965–1972* (Eds A B Givental et al.) (Berlin: Springer, 2014) p. 19
38. Blumen W J *Atmos. Sci.* **25** 929 (1968)
39. Blumen W J *Atmos. Sci.* **35** 774 (1978)
40. Held I M et al. *J. Fluid Mech.* **282** 1 (1995)
41. Majda A J, Tabak E G *Physica D* **98** 515 (1996)
42. Harvey B J, Ambaum M H P *Quart. J. R. Meteor. Soc.* **136** 1506 (2010)
43. Constantin P, Majda A J, Tabak E *Nonlinearity* **7** 1495 (1994)
44. Muraki D J, Snyder C J *Atmos. Sci.* **64** 2961 (2007)
45. Carton X J *Atmos. Sci.* **66** 1051 (2009)
46. Dritschel D G *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **105** 368 (2011)
47. Harvey B J, Ambaum M H P *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **105** 377 (2011)
48. Harvey B J, Ambaum M H P, Carton X J *J. Atmos. Sci.* **68** 964 (2011)
49. Lim C C, Majda A J *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **94** 177 (2001)
50. Reinaud J N, Dritschel D G, Carton X *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **110** 461 (2016)
51. Reinaud J N, Dritschel D G, Carton X *Phys. Fluids* **29** 086603 (2017)
52. Juckes M J *Atmos. Sci.* **51** 2756 (1994)
53. Hakim G J, Snyder C, Muraki D J *J. Atmos. Sci.* **59** 2405 (2002)
54. Capet X et al. *J. Fluid Mech.* **604** 165 (2008)
55. Tulloch R, Smith K S J *Atmos. Sci.* **66** 450 (2009)
56. Ragone F, Badin G J *Fluid Mech.* **792** 740 (2016)
57. Lapeyre G *Fluids* **2** 7 (2017)
58. Palmén E, Newton C W *Atmospheric Circulation Systems: Their Structure, Physical Interpretation* (New York: Academic Press, 1968); Пер. на русск. яз.: Пальмен Э, Ньютон Ч *Циркуляционные системы атмосферы* (Л.: Гидрометеиздат, 1973)
59. Калашник М В, Нерушев А Ф, Ивангородский Р В *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **53** 179 (2017); Kalashnik M V, Nerushev A F, Ivangorodsky R V *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **53** 156 (2017)
60. Gill A E *Atmosphere–Ocean Dynamics* (New York: Academic Press, 1982)
61. Heifetz E et al. *Quart. J. R. Meteor. Soc.* **130** 233 (2004)
62. Heifetz E et al. *Quart. J. R. Meteor. Soc.* **130** 211 (2004)
63. Heifetz E, Methven J *Phys. Fluids* **17** 064107 (2005)
64. Pettersen S, Smebye S J *Quart. J. R. Meteor. Soc.* **97** 457 (1971)
65. Rotunno R, Fantini M J *Atmos. Sci.* **46** 3599 (1989)
66. Mitsudera H *J. Atmos. Sci.* **51** 3137 (1994)
67. Farrell B F, Ioannou P J *J. Atmos. Sci.* **53** 2025 (1996)
68. Drazin P G *Introduction to Hydrodynamic Stability* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002); Пер. на русск. яз.: Дразин Ф *Введение в теорию гидродинамической устойчивости* (М.: Физматлит, 2005)
69. Charru F *Instabilités hydrodynamiques* (Paris: EDP Sciences, 2007); Пер. на русск. яз.: Шарру Ф *Неустойчивость в гидродинамике* (М.–Ижевск: Инст. компьют. исслед., 2015); Пер. на англ. яз.: Charru F *Hydrodynamic Instabilities* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011)
70. Diaconescu E P, Laprise R *Earth Sci. Rev.* **113** 161 (2012)
71. Morgan M C *J. Atmos. Sci.* **58** 2518 (2001)
72. Morgan M C, Chen C C *J. Atmos. Sci.* **59** 169 (2002)
73. de Vries H, Opsteegh J D *J. Atmos. Sci.* **64** 673 (2007)
74. de Vries H, Opsteegh J D *J. Atmos. Sci.* **64** 695 (2007)
75. Kalashnik M V, Chkhetiani O J *Atmos. Sci.* **75** 2741 (2018)
76. Калашник М В, Чхетиани О Г *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **54** 487 (2018); Kalashnik M V, Chkhetiani O G *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **54** 415 (2018)
77. Kalashnik M V, Chkhetiani O J *Atmos. Sci.* **74** 293 (2017)
78. Калашник М В, Чхетиани О Г *Изв. РАН. Механика жидкости и газа* (2) 28 (2020); Kalashnik M V, Chkhetiani O G *Fluid Dyn.* **55** 171 (2020)
79. Dodd R K et al. *Solitons and Nonlinear Wave Equations* (London: Academic Press, 1982)
80. Гледзер Е Б, Должанский Ф В, Обухов А М *Системы гидродинамического типа и их применение* (М.: Наука, 1981)
81. Калашник М В, Курганский М В *Изв. РАН. Механика жидкости и газа* (4) 126 (2020); Kalashnik M V, Kurgansky M V *Fluid Dyn.* **55** 554 (2020)
82. Hunt B G *J. Atmos. Sci.* **35** 1133 (1978)
83. McGuirk J P, Reiter E R *J. Atmos. Sci.* **33** 2079 (1976)
84. Pedlosky J *Tellus* **15** 20 (1963)
85. Pedlosky J *J. Atmos. Sci.* **27** 15 (1970)
86. Pedlosky J *J. Atmos. Sci.* **29** 53 (1972)
87. Pedlosky J, Polvani L M *J. Atmos. Sci.* **44** 631 (1987)
88. Hart J E *Annu. Rev. Fluid Mech.* **11** 147 (1979)
89. Hart J E *J. Atmos. Sci.* **38** 400 (1981)
90. Barcilon A, Drazin P G *J. Atmos. Sci.* **41** 3314 (1984)
91. Wang B, Barcilon A *J. Atmos. Sci.* **43** 1275 (1986)
92. Klein P, Pedlosky J *J. Atmos. Sci.* **43** 1243 (1986)
93. Калашник М В, Чхетиани О Г *Изв. РАН. Механика жидкости и газа* (5) 29 (2016); Kalashnik M V, Chkhetiani O G *Fluid Dyn.* **51** 606 (2016)
94. Тимофеев А В *УФН* **102** 185 (1970); Timofeev A V *Sov. Phys. Usp.* **13** 632 (1971)
95. Thorncroft C D, Hoskins B J *J. Atmos. Sci.* **47** 2317 (1990)
96. Chang E K J *Atmos. Sci.* **49** 2452 (1992)
97. Калашник М В *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **51** 648 (2015); Kalashnik M V *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **51** 576 (2015)
98. Kalashnik M V, Kurgansky M V, Kostykin S V *J. Atmos. Sci.* **77** 239 (2020)

99. Мешалкин Л Д, Синай Я Г *Прикладная математика и механика* **25** 1140 (1961); Meshalkin L D, Sinai Ia G *J. Appl. Math. Mech.* **25** 1700 (1961)
100. Vasavada A R, Showman A P *Rep. Prog. Phys.* **68** 1935 (2005)
101. Maximenko N A, Bang B, Sasaki H *Geophys. Res. Lett.* **32** L12607 (2005)
102. Sokolov S, Rintoul S R *J. Phys. Oceanogr.* **37** 1394 (2007)
103. Phillips N A *Tellus* **6** 274 (1954)
104. Kalashnik M V, Kurgansky M V, Chkhetiani O G *Phys. Fluids* **33** 076608 (2021)
105. Drazin P G, Reid W H *Hydrodynamic Stability* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004)
106. Miles J W *J. Fluid Mech.* **10** 496 (1961)
107. Kuo H L *J. Meteor.* **6** 105 (1949)
108. Kuo H L *J. Atmos. Sci.* **35** 1840 (1978)
109. Rayleigh Lord *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* **93** 148 (1917)
110. Solberg H *Proces-verbaux del'assoc. de meteor., Un. Geod. Geophys. Int., Edimbourg* **33** 66 (1933)
111. Emanuel K A *J. Atmos. Sci.* **36** 2425 (1979)
112. McIntyre M E *Geophys. Fluid Dyn.* **1** 19 (1970)
113. Dunkerton T J *J. Atmos. Sci.* **38** 2354 (1981)
114. Thomas L N et al. *Deep Sea Res. Pt. II Topical Stud. Oceanogr.* **91** 96 (2013)
115. Courant R, Gilbert D *Methods of Mathematical Physics* Vol. 2 (New York: Interscience Publ., 1962); Пер. на русск. яз.: Курант Р, Гильберт Д *Методы математической физики* Т. 2 (М.: Мир, 1964)
116. Howard L N *J. Fluid Mech.* **10** 509 (1961)
117. Ooyama K *J. Atmos. Sci.* **23** 43 (1966)
118. Калашник М В *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **44** 848 (2008); Kalashnik M V *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **44** 787 (2008)
119. Четаев Н Г *Устойчивость движения* 4 изд., испр. (М.: Наука, 1990); Пер. на англ. яз. 2 изд.: Chetaev N G *The Stability of Motion* (New York: Pergamon Press, 1961)
120. Charney J, in *Proc. of the 9th General Assembly, UGGI, Assoc. Meteorol., Brussel* (1951) p. 47
121. Курганский М В *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана* **29** 464 (1993); Kurgansky M V *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **29** 444 (1994)
122. Tassoul J-L *Theory of Rotating Stars* (Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1978); Пер. на русск. яз.: Тассуль Ж-Л *Теория вращающихся звезд* (М.: Мир, 1982)
123. Maeder A et al. *Astron. Astrophys.* **553** A1 (2013)
124. Калашник М В, Свирунов П Н *Докл. РАН* **348** 811 (1996); Kalashnik M V, Svirkunov P N *Dokl. Earth Sci.* **349** 829 (1996)
125. Калашник М В, Свирунов П Н *Метеорология и гидрология* (4) 58 (1998); Kalashnik M V, Svirkunov P N *Russ. Meteor.* (4) 42 (1998)
126. Mu M, Shepherd T G, Swanson K J. *Atmos. Sci.* **53** 2918 (1996)
127. Mu M, Vladimirov V, Wu Y H *J. Atmos. Sci.* **56** 400 (1999)
128. Kurgansky M V *Quart. J. R. Meteor. Soc.* **135** 2168 (2009)
129. Eliassen A *Astrophys. Norvegica* **5** 19 (1951)
130. Rüdiger G, Arlt R, Shalybkov D *Astron. Astrophys.* **391** 781 (2002)
131. Shakura N I, Sunyaev R A *Astron. Astrophys.* **24** 337 (1973)
132. Велихов Е П *ЖЭТФ* **36** 1398 (1959); Velikhov E P *Sov. Phys. JETP* **36** 995 (1959)
133. Chandrasekhar S *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Oxford: Clarendon Press, 1961)
134. Balbus S A, Hawley J F *Astrophys. J.* **376** 214 (1991)
135. Balbus S A *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **41** 555 (2003)
136. Le Bars M, Le Gal P *Phys. Rev. Lett.* **99** 064502 (2007)
137. Le Dizès S, Riedinger X *J. Fluid Mech.* **660** 147 (2010)
138. Park J, Billant P *J. Fluid Mech.* **725** 262 (2013)
139. Rüdiger G et al. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **111** 429 (2017)
140. Le Gal P et al. *J. Fluid Mech.* **907** R1 (2021)
141. Tassoul J-L *Stellar Rotation* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000)
142. Barnes J R *J. Atmos. Sci.* **41** 1536 (1984)
143. Polichtchouk I, Cho J Y-K *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **424** 1307 (2012)
144. Sugimoto N, Takagi M, Matsuda Y *J. Geophys. Res. Planets* **119** 1950 (2014)
145. Goldreich P, Schubert G *Astrophys. J.* **150** 571 (1967)
146. Shibahashi H *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **32** 341 (1980)
147. Knobloch E *Astrophys. Space Sci.* **116** 149 (1985)
148. Marcus P S, Press W H *J. Fluid Mech.* **79** 525 (1977)
149. Spruit H C, Knobloch E *Astron. Astrophys.* **132** 89 (1984)
150. Cabot W *Astrophys. J.* **277** 806 (1984)
151. Кичатинов Л Л *Письма в Астрон. журн.* **39** 631 (2013); Kitchatinov L L *Astron. Lett.* **39** 561 (2013)
152. Kitchatinov L L *Astrophys. J.* **784** 81 (2014)
153. Gilman P A *J. Atmos. Sci.* **24** 119 (1967)
154. Gilman P, Dikpati M *Astrophys. J.* **787** 60 (2014)
155. Gilman P A *Astrophys. J.* **853** 65 (2018)
156. Chiang E *Astrophys. J.* **675** 1549 (2008)
157. Klahr H H, Bodenheimer P *Astrophys. J.* **582** 869 (2003)
158. Klahr H H *Astrophys. J.* **606** 1070 (2004)
159. Lesur G, Papaloizou J C B *Astron. Astrophys.* **513** A60 (2010)
160. Adams F C, Watkins R *Astrophys. J.* **451** 314 (1995)
161. Barge P, Sommeria J *Astron. Astrophys.* **295** L1 (1995)
162. Ou S et al. *Astrophys. J.* **667** 1220 (2007)
163. Petersen M R, Julien K, Stewart G R *Astrophys. J.* **658** 1236 (2007)
164. Lorén-Aguilar P, Bate M R *Mon. Not. R. Astron. Soc. Lett.* **453** L78 (2015)
165. Barge P, Richard S, Le Dizès S *Astron. Astrophys.* **592** A136 (2016)
166. Richard S, Nelson R P, Umurhan O M *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **456** 3571 (2016)

Baroclinic instability in geophysical fluid dynamics

M.V. Kalashnik*, M.V. Kurgansky, O.G. Chkhetiani

A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences,

Pyzhevskii per. 3, 119017 Moscow, Russian Federation

E-mail: (*) kalashnik_obn@mail.ru

Baroclinic instability is that of flows in a rotating stratified fluid with a vertical velocity shear. The generation of large-scale vortical flows in the atmospheres of Earth and other planets is associated with this instability. The review presents modern theoretical approaches dealing with this instability. They include a description of baroclinic instability through the interaction of edge Rossby waves, the study of the problem of optimal perturbations, i.e., those characterized by the largest growth of energy or other functionals, and an analysis of the nonlinear dynamics of perturbations that relies on a low-mode approximation of the Galerkin method. Classical energy criteria for the stability of zonal flows obtained by the direct Lyapunov–Arnold method are also considered. The results presented may be of interest to specialists in the field of continuum mechanics and astrophysics.

Keywords: geophysical fluid dynamics, baroclinic instability, energy criteria of stability, nonlinear perturbation dynamics, Galerkin method

PACS numbers: **05.45. – a**, **47.10. – g**, 47.20.Ft, 47.20.Ky, 47.27.Cn, **47.32. – y**, 47.32.Ef, 47.32.cd, 47.85.Dh, 92.10.Lq, **92.60. – e**, 92.60.hk

Bibliography — 166 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **192** (10) 1110–1144 (2022)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.08.039046>

Received 2 June 2021, revised 20 August 2021

Physics – *Uspekhi* **65** (10) (2022)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2021.08.039046>