

ОБОЗРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Вейвлет-анализ пространственно-временной структуры физических полей

П.Г. Фрик, Д.Д. Соколов, Р.А. Степанов

Использование методов спектрального анализа, восходящих к методу Фурье, является общей идеей физики. Вейвлеты появились как естественное обобщение классического спектрального анализа на случай сложных нестационарных и пространственно-неоднородных систем, для которых сравнение с бесконечной синусоидой, составляющее основу метода Фурье, приходится заменять на сравнение с конечным волновым пакетом, который и называют вейвлетом. В предлагаемом обзоре авторы, основываясь в значительной степени на собственном опыте использования вейвлет-анализа в задачах астро- и геофизики, солнечно-земных связей, а также климатологии, медицинской физики и лабораторного гидродинамического эксперимента, попытались показать возможности и обсудить практические аспекты приложения аппарата вейвлетов к интерпретации сигналов и изображений различной физической природы.

Ключевые слова: вейвлеты, спектральный анализ, обработка сигналов и изображений, солнечная и звёздная активность, галактические магнитные поля, геофизика, медицинская физика

PACS numbers: 47.27.er, 95.75.–z

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.10.038859>

Содержание

1. Введение (69).
2. Основные понятия вейвлет-анализа (71).
 - 2.1. Вейвлет-спектрограммы модулированных колебаний в примерах.
 - 2.2. Вейвлет-дифференцирование.
 - 2.3. Помасштабная кросс-корреляция сигналов.
 - 2.4. Вейвлет-анализ сигналов с провалами.
3. Вейвлеты для поиска и изучения квазипериодичностей (76).
 - 3.1. Циклы солнечной активности.
 - 3.2. Циклы в звёздных данных.
 - 3.3. Вейвлет-анализ климатических и геофизических данных.

4. Вейвлет-анализ астрофизических изображений (85).
 - 4.1. Изотропный анализ.
 - 4.2. Анизотропный анализ.
 5. Вейвлеты в экспериментальной физике (91).
 - 5.1. Эволюция спектральных характеристик импульсного турбулентного потока.
 - 5.2. RM-синтез поляризованного радиоизлучения межзвёздной среды.
 - 5.3. Биосигналы в медицинской физике.
 6. Заключение (97).
- Список литературы (97).

1. Введение

Разложение сигнала по базису гармонических функций справедливо рассматривается как естественное средство для изучения периодических компонент разнообразных сигналов. Идея этого анализа, в частности, математически формализуется в виде преобразования Фурье

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt. \quad (1)$$

Комплексная функция $\hat{f}(\omega)$ представляет спектральный состав анализируемого сигнала $f(t)$, показывая амплитуду и фазу того вклада, который даёт в него колебание с круговой частотой ω . Интеграл (1) должен быть сходящимся, т.е. функция $f(t)$ предполагается в каком-то смысле убывающей на бесконечности. Однако это требование, кажущееся естественным, далеко не всегда адекватно соответствует физическому содержанию задачи. Например, пусть $f(t)$ — сигнал, передаваемый некоторой радиостанцией (более конкретно, значение в данной точке одной из компонент электрического вектора создаваемого электромагнитного поля). Такой сигнал локали-

П.Г. Фрик^(1,2,a), Д.Д. Соколов^(3,4,5,b), Р.А. Степанов^(1,6,c)⁽¹⁾ Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королёва 1, 614013 Пермь, Российская Федерация⁽²⁾ Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева 15, 614068 Пермь, Российская Федерация⁽³⁾ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы 1, 119991 Москва, Российская Федерация⁽⁴⁾ Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Ленинские горы 1, 119991 Москва, Российская Федерация⁽⁵⁾ Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН (ИЗМИРАН), Калужское шоссе 4, 108840 Троицк, Москва, Российская Федерация⁽⁶⁾ Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Комсомольский просп. 29, 614990 Пермь, Российская ФедерацияE-mail: ^(a) frick@icmm.ru, ^(b) sokoloff.dd@gmail.com, ^(c) rodion@icmm.ru

Статья поступила 8 августа 2020 г., после доработки 20 октября 2020 г.

зован во времени: его заведомо не было до развития радиосвязи, а передающая его радиостанция наверняка со временем прекратит своё существование либо изменит рабочую частоту. Однако это общее соображение вряд ли поможет в вычислении интеграла (1). Если разобраться, то нас интересует не столько номинальная частота сигнала радиостанции, которая обычно и так известна, сколько изменения спектрального состава этого сигнала во времени, которые, собственно, и несут ту информацию, которую передаёт радиостанция. Непосредственно в выражении (1) не предусмотрено средств выявления этих модуляций.

Если говорить более строго, анализ Фурье применим к сигналам, *ограниченным* во времени. Тогда, если сигнал не содержит неинтегрируемых особенностей, существует интеграл (1), называемый также непрерывным преобразованием Фурье. Он также используется для *периодических* сигналов (таких, что $f(t + T) = f(t)$), для которых возможно разложение в ряд Фурье, являющийся дискретной формой преобразования Фурье. Наконец, он применим к *статистически стационарным* сигналам, автокорреляционная функция которых затухает и, согласно теореме Хинчина – Винера¹ (см., например, [1]), позволяет вычислить спектральную плотность энергии сигнала.

Очевидно, что возможный подход к проблеме анализа сигналов, спектральный состав которых меняется со временем, состоит в том, чтобы вычислять преобразование Фурье локально, т.е. в окрестности заданного момента времени t' , игнорируя при этом сигнал на значительном временном удалении от интересующего нас момента. Именно это делают различные варианты метода фурье-преобразования в окнах (Windowed Fourier transform), известного также как преобразование Габора [2], где t' — дополнительная независимая переменная. Для радиосигнала этот алгоритм реализовать нетрудно, поскольку несущая частота сигнала, обеспечивающая его передачу, гораздо выше тех частот, которые несут передаваемую содержательную информацию, хотя и в этом случае стоит обратить внимание, не создаёт ли способ, которым вырезается часть сигнала, каких-нибудь артефактов. Однако физические системы в естественных условиях, как правило, не имеют выраженного разделения характерных временных масштабов. Нелинейность приводит как к быстрой модуляции (амплитудной или фазовой) основной собственной частоты (если таковая имеется), так и к заметному изменению формы колебаний. Например, пульс здорового человека, находящегося в состоянии покоя, сравнительно стабилен и относительно плавно модулируется дыханием. Стоит перейти к физическим нагрузкам — и картина может сильно меняться. Другой пример: магнитная активность Солнца имеет знаменитый 11-летний цикл, который надёжно восстанавливается по данным многовековой истории различных наблюдений. Однако для построения физической теории важно знать не только средние параметры цикла, но и их динамику, видимую уже на протяжении 2–3 последовательных колебаний.

Принципиальный шаг состоит в том, что мы отказываемся от эталона с бесконечным числом периодов и вводим новый стандарт волны с ограниченным числом цик-

лов (далее — вейвлет), который является квазипериодической функцией в строгом понимании. Это можно сделать, например, если умножить гармоническую функцию на гауссову огибающую $\exp(2\pi i t - t^2/\sigma^2)$, где параметр σ отвечает за эффективное число циклов. С использованием преобразований сдвига и сжатия/растяжения мы получаем базис функций для разложения $f(t)$. Таким образом, вейвлеты позволяют выявить циклические осцилляции с плавающим периодом, амплитудой и локализацией (по сути, это локализованный спектральный анализ). Выбор функции вейвлета определяют требования к пространственному и временному разрешению (чувствительности к изменениям спектральных свойств $f(t)$), а в случае построения дискретного базиса — и требование ортогональности получаемого базиса. Для приведённого выше примера, который лежит в основе широко используемого вейвлета Морле, анализ с большим значением σ соответствует более высокому разрешению по частоте, но проигрывает в точности локализации эпохи, к которой приписывается результат, на оси времени. Уменьшая σ , мы жертвуем спектральным разрешением разложения, зато точнее знаем, к какому моменту времени относится полученный спектр. Это обстоятельство вполне аналогично принципу неопределённости в квантовой механике.

В самых разных областях науки возникают задачи анализа пространственных полей со сложной, многомасштабной структурой либо сигналов с меняющимся со временем спектральным составом (нередки случаи, когда обе проблемы связаны между собой). Эти задачи стимулировали попытки построения специальных функциональных разложений, использующих тот или иной базис, каждая функция которого характеризуется как определённым пространственным (временным) масштабом, так и местом её локализации в физическом пространстве (во времени). Идею применения коротких волновых пакетов при анализе сейсмических сигналов, в которых требуется выделить и время всплеска в сигнале, и его масштаб, активно развивал Жан Морле, чья встреча с Александром Гроссманном привела к рождению вейвлетов. Сам термин был введён в работе [3], где были сформулированы основные определения и доказаны основополагающие теоремы. Работа вызвала огромный интерес. Математические аспекты вейвлет-анализа широко разрабатывались с конца 1980-х годов, и уже к началу 1990-х годов вейвлет-анализ превратился в развитую область математической физики, нашедшую широкое применение в задачах анализа временных сигналов, распознавания образов и синтеза изображений, шифровки и дешифровки информации и многих других. Первые содержательные приложения вейвлет-анализа в физике появились в середине 1990-х годов. Литература по вейвлет-анализу обширна. Изложение математических аспектов нашло своё место в фундаментальной книге Ива Мейера [4], лауреата премии Абеля 2017 года за вклад в теорию вейвлетов, и в ряде книг прямых учеников Александра Гроссманна: Ингрид Добеши [5], Матиаса Холшнайдера [6], Бруно Торрезани [7], Стефана Малла [8]. Несмотря на обширную литературу и по математическим аспектам вейвлет-анализа, и по самым разнообразным его приложениям, представляется полезным обзор современных вейвлет-методов и достигнутых с их помощью результатов для наблюдателей, экспериментаторов, обработчиков сигналов.

¹ Как со многими классическими результатами, с этой теоремой связывают много имён великих учёных, к названному добавляют имена Колмогорова и Эйнштейна.

За последние 20 лет сложился целый комплекс приёмов, важных и нужных для решения различных физических задач. Целью предлагаемого обзора является обобщение опыта практического применения вейвлет-анализа в самых различных областях физики, знакомство с практическими аспектами приложения вейвлетов и презентация оригинальных вейвлет-алгоритмов. В этом контексте следует упомянуть обзоры для физиков (в широком смысле слова для "потребителей" математических методов анализа), среди которых первой попыткой стал обзор [9], а для российского читателя важную роль сыграл обзор [10]. В журнале *УФН* впоследствии возвращались к этой теме в ряде статей [11–13], с публикации части из них уже прошло значительное время, а другие посвящены достаточно специальным проблемам. Отметим, что авторы данного обзора волею судьбы оказались в вейвлетной тематике с первых лет её становления (в рамках работ по моделированию турбулентности [14], которые остаются вне этого обзора), постепенно расширяя область успешного применения вейвлетов и углубляясь в уже "истоптанные" проблемы. Например, одной из первых работ по астрономии, в которых для поиска квазипериодичностей использовалось вейвлет-преобразование, была работа [15]. Символично, что эта же проблема была существенно переосмыслена в самой свежей работе [16]. Несмотря на большой выбор обзорной и специальной литературы, кажется целесообразным предложить читателю наше представление о языке вейвлетов как об универсальном инструменте анализа и интерпретации физических сигналов многомасштабных систем.

2. Основные понятия вейвлет-анализа

Арсенал вейвлет-анализа содержит большой набор инструментов, которые подбираются в зависимости от поставленной задачи и особенностей сигнала. Не претендуя на общность и полноту изложения, мы остановимся в этом разделе на основных определениях и свойствах вейвлет-анализа, делающих его интуитивно понятным подходом к интерпретации сложных сигналов.

Исходной точкой любого исследования является собственно разложение исследуемой функции по подходящему вейвлет-базису, сочетающему в себе два важных свойства: выраженную локализацию в физическом и фурье-пространствах и подобие. Локальность по обе стороны от фурье-преобразования предполагает регулярность, т.е. отсутствие разрывов (дающих неизбежный вклад в высокие частоты) и равенство нулю среднего значения (нулевой частоты). Последнее свойство ещё называют условием допустимости, которое объясняет появление поправки в действительной части вейвлета Морле:

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{\sigma^2}\right) (\exp(2\pi i t) - \exp(-\sigma^2 \pi^2)). \quad (2)$$

Семейство вейвлет-функций получается из анализирующего вейвлета $\psi(t)$ (пользуются также термином "материнская" вейвлет-функция) двумя преобразованиями подобия: растяжением (сжатием) и сдвигом, а в многомерном случае к ним добавляется вращение.

Непрерывное вейвлет-преобразование по аналогии с преобразованием Фурье (1) вводит вейвлет-образ

$$w(\tau, t') \equiv W_{\tau, t'}\{f\} = |\tau|^\kappa \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-t'}{\tau}\right) dt, \quad (3)$$

который определён на пространстве двух независимых переменных: времени t' и масштаба τ . Предпочтение отдаётся в пользу параметра τ , имеющего смысл периода, а не частоты (как в преобразовании Фурье), с тем чтобы оба параметра имели одинаковые единицы измерения. Параметр κ определяет нормировку, выбор которой проводится в конце раздела. Вейвлет-коэффициент $w(\tau, t')$ следует интерпретировать как характеристику амплитуды (и фазы, если ψ — комплексная величина) колебаний анализируемой функции с характерным периодом τ в окрестности момента времени t' . При этом необходимо учитывать, что точность локализации в частотно-временном пространстве конечна и предопределяется выбором вейвлета. Разрешающая способность $\psi(t)$ частоты Δ_ω и времени Δ_t определяется как дисперсия случайной величины, если нормированные функции $|\psi(t)|^2$ и $|\hat{\psi}(\omega)|^2$ принять в качестве функций плотности вероятности. Эффективная площадь частотно-временного окна для любого ψ ограничена принципом неопределённости Гейзенберга $\Delta_\omega \Delta_t \geq 1/2$ [17]. Таким образом, вопрос о выборе вейвлета может рассматриваться как задача оптимизации.

Показатель нормировки κ позволяет относительно усилить (ослабить) высокие (низкие) частоты и приспособить анализ к конкретным задачам, когда для сравнения интенсивности структур различных масштабов нам интересна какая-то специальная мера. При анализе многомерных сигналов в (3) приходится брать многомерный интеграл, но, что более важно, рассматривать дополнительный параметр, отвечающий за анизотропию вейвлета, и вводить дополнительную переменную (как правило, это позиционный угол, см. раздел 4).

Увеличение размерности пространства параметров говорит об определённой избыточности получаемой информации, представление которой само по себе требует оптимизации. Вейвлет-спектрограмма одномерного сигнала представляет собой распределение модуля функции w (реже рисуют его квадрат) на плоскости (τ, t') . При использовании комплексного вейвлета полезную информацию несёт и фаза функции w . Распределение фазы на плоскости (τ, t') , как правило, не рассматривают, но именно фаза может представлять основной интерес, например, при поиске коррелированных составляющих в паре сигналов (см. раздел 2.3).

Не останавливаясь на обзоре используемых вейвлет-функций, упомянем популярный вещественный вейвлет, известный под именем "мексиканская шляпа", $\psi(t) = (1 - t^2) \exp(-t^2/2)$. Имея хорошую локализацию в физическом пространстве, он используется для выделения отдельных всплесков в сигнале. Отметим также, что широко применяемые (в том числе в коммерческих программных пакетах) функции Добеши [5] предназначены, прежде всего, для дискретного вейвлет-преобразования, которое в задачах анализа структуры сигнала используется мало, и нами не рассматриваются.

Сигнал (или его любая составляющая) может быть восстановлен из $w(\tau, t')$ обратным вейвлет-преобразованием

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dt' \psi\left(\frac{t-t'}{\tau}\right) \frac{w(\tau, t')}{|\tau|^{3+\kappa}}. \quad (4)$$

Величина C_ψ играет роль нормировки вейвлет-базиса и вычисляется как

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega. \quad (5)$$

Обратное вейвлет-преобразование возможно только при условии, что C_ψ имеет конечное значение, из чего следует условие допустимости вейвлета $\hat{\psi}(0) = 0$. Для некоторых часто используемых вейвлетов C_ψ находится аналитически, например, $C_\psi = \pi$ для "мексиканской шляпы" и $C_\psi = -\ln 2$ для вейвлета Шеннона $\psi(t) = (\sin 2\pi t - \sin \pi t)/(\pi t)$, а для вейвлета Морле C_ψ находится только приближённо (поскольку интеграл (4) от функции $\exp(i\omega t - \sigma t^2)$ расходуется, см. уравнение (2)).

Необходимость интегрирования (4) по области отрицательных значений τ возникает в случае анализа комплекснозначных сигналов $f(t)$ (см. пример в разделе 5.2). Для действительного $f(t)$ можно ограничиться положительными τ . По переменной t' , формально говоря, нужно интегрировать по всему диапазону, но для реальных сигналов интегрирование проводится по той области, где есть наблюдения (имея в виду, что на границе области появляются искажения по мере выхода анализирующего вейвлета за её границу). Обратное преобразование, взятое по некоторой подобласти плоскости (τ, t') , может рассматриваться как процедура фильтрации с широкими возможностями выбора полосы пропускания.

На практике важно следить, чтобы условие допустимости выполнялось не только для аналитически заданной ψ , но и для её численного представления. Так, при анализе минимальных масштабов, на область локализации вейвлета может приходиться всего несколько точек и численное среднее на столь ограниченной выборке может сильно отличаться от нуля. Проблемы могут возникнуть с вещественной частью вейвлета (2) при использовании $\sigma \lesssim 1$ (выполнение условия допустимости для мнимой части обеспечивается её нечётной симметрией). Для улучшения сходимости интеграла (5) бывает полезно потребовать обращения в нуль среднего значения не только самого вейвлета, но и нескольких его производных. Условие допустимости означает, что при обратном преобразовании анализируемая функция восстанавливается с точностью до среднего значения. Если требуется восстанавливать и среднее значение сигнала, то его придётся вычислять отдельно и потом прибавлять к тому, что даёт формула (4).

Не вдаваясь в математические выкладки, стоящие за основными свойствами вейвлет-преобразования, приведём важное следствие теоремы Парсевала о сохранении энергии:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |w(\tau, t')|^2 \frac{d\tau dt'}{\tau^{3+2\kappa}}. \quad (6)$$

Напомним, что в фурье-анализе спектральной плотности энергии является величина $E(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$, и введём величину

$$M(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |w(\tau, t')|^2 dt', \quad (7)$$

которая характеризует интенсивность *всех* пульсаций заданного масштаба. Если в определении вейвлет-преобразования (3) положить $\kappa = -1/2$, то формулу (6) можно переписать в виде

$$E = \int_0^{\infty} E(\omega) d\omega = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{\infty} M(\tau) \frac{d\tau}{\tau^2}. \quad (8)$$

В этом случае $M(\tau)$ описывает распределение энергии пульсаций по масштабам и называется интегральным

вейвлет-спектром. Из сказанного следует, что нормировка $\kappa = -1/2$ должна использоваться, если результаты вейвлет-анализа предполагается сопоставлять с фурье-представлением сигнала. Действительно, если фурье-спектр следует степенному закону $E(\omega) \sim \omega^\alpha$, то при этой нормировке интегральный вейвлет-спектр имеет тот же степенной закон $M(\tau) \sim \tau^{-\alpha} \sim \omega^\alpha$ (это следует из формулы (8) с учётом того, что $\omega \sim 1/\tau$, а $d\omega \sim -d\tau/\tau^2$). Отметим также, что интегральный вейвлет-спектр всегда является сглаженной версией спектра Фурье, а степень сглаживания определяется спектральным разрешением используемого вейвлета.

Все последующие этапы вейвлет-анализа построены на дальнейшей постобработке $w(\tau, t')$ и представлении содержащейся в ней информации в разрезе, который диктуется целями исследования. В этом плане интегральный вейвлет-спектр $M(\tau)$ — это полезная отправная точка исследования, но всего лишь максимальная редукция информации, заложенной в $w(\tau, t')$.

2.1. Вейвлет-спектрограммы модулированных колебаний в примерах

Практическое использование вейвлет-преобразования предполагает в обязательном порядке изучение спектрограмм. Для относительно регулярных сигналов это представляет несомненный интерес. Любая хорошая книга или научная презентация по вейвлетам всегда содержит демонстрацию тестовых сигналов. Подбор тестов обычно подчёркивает особенности задачи и отражает логику последующей аргументации. Самые простые, но в то же время очень поучительные тесты неоднократно проиллюстрированы в научной и методической литературе (см., например, [6, 8, 18]). Мы предлагаем рассмотреть ряд из трёх примеров:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sin\left(\frac{2\pi t}{20}\right) \left(1 + \frac{t}{500} \sin\left(\frac{2\pi t}{125}\right)\right), \\ f_2(t) &= \sin\left(\frac{2\pi t}{20}\right) + \sin\left(12\pi \exp\left(\frac{t}{400}\right)\right), \\ f_3(t) &= \sin\left(\frac{2\pi t}{20}\right) + \left(1 + \frac{3t}{500}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{200}\right), \end{aligned} \quad (9)$$

спектрограммы для которых иллюстрируют проявление нестационарных амплитудных или частотных модуляций. Можно заметить, что эти функции имеют в составе общую гармонику с периодом 20, на которую накладываются различные искажения: $f_1(t)$ — амплитудная, линейно возрастающая со временем модуляция гармонической функцией с периодом 125; $f_2(t)$ — аддитивная компонента с экспоненциально убывающим периодом, подобранная таким образом, чтобы в середине интервала периоды двух компонент совпали; $f_3(t)$ — модуляция частоты по гармоническому закону с периодом 200 и линейно растущей амплитудой. Каждая модуляция приводит к определённой деформации равномерной полосы, соответствующей вейвлет-образу чисто гармонической функции.

Графики анализируемых функций и их вейвлет-спектрограммы показаны на рис. 1. Все три сигнала обработаны вейвлетом (2) с двумя значениями параметра σ . Увеличение σ повышает спектральное разрешение, т.е. даёт более узкие полосы на спектрограммах (нижний ряд на рис. 1). При относительно хорошей локализации в физическом пространстве (при $\sigma = 1$) на вейвлет-образе w_1

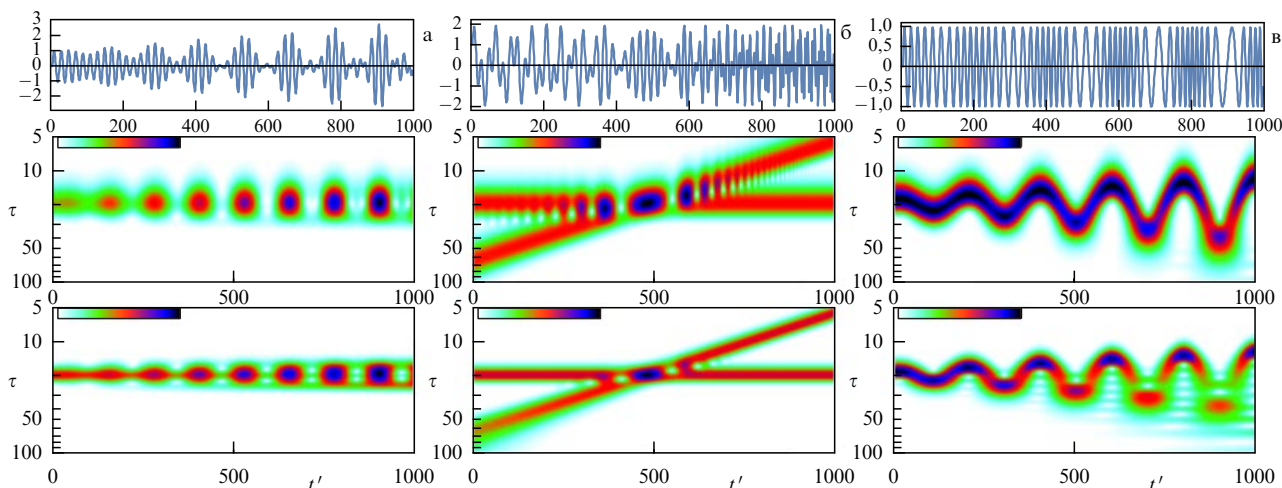


Рис. 1. (В цвете онлайн.) Тестовые сигналы f_1 (а), f_2 (б) и f_3 (в) (верхний ряд), вейвлет-спектрограммы $|w_1|$ (а), $|w_2|$ (б) и $|w_3|$ (в) при $\sigma = 1$ (средний ряд) и $\sigma = 2$ (нижний ряд).

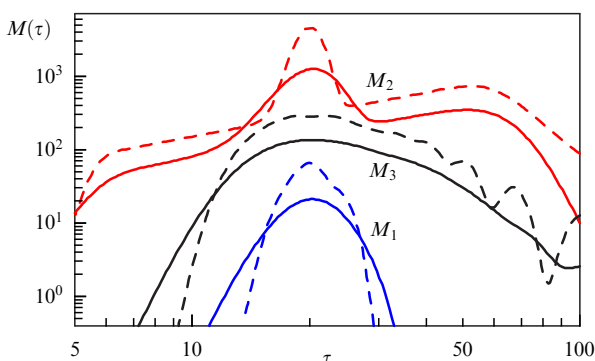


Рис. 2. (В цвете онлайн.) Интегральные вейвлет-спектры тестовых функций f_i : M_1 — синие кривые, M_2 — красные, M_3 — чёрные. $\sigma = 1$ — сплошные кривые, $\sigma = 2$ — штриховые. Спектры $M_i(\tau)$ раздвинуты по вертикали для лучшего восприятия.

хорошо видна тенденция возрастания амплитуды несущих колебаний. На вейвлет-образе w_2 пятна — это биения, которые возникают как результат суперпозиции осцилляций с близкими периодами. Можно видеть, как этот эффект нарастает по мере приближения к середине интервала. Если снизить разрешение в физическом пространстве в пользу разрешения по масштабам ($\sigma = 2$), то периодические составляющие изолируются лучше и на w_1 просматриваются осцилляции на периодах, соответствующих полу сумме и полуразности основной и модулирующей частот. Однако увеличение σ может снижать информативность вейвлет-образа. Отслеживать частотные модуляции f_3 лучше при малых σ . При низкой локализации в физическом пространстве относительно быстрые модуляции в длинноволновой области размываются.

Подбор тестовых сигналов таков, что интегральные вейвлет-спектры, как и спектры Фурье, не могут отразить их особенности. Тем не менее мы приводим их вид на рис. 2, для того чтобы показать чувствительность к основной стационарной компоненте. Для f_1 и f_2 вклад на масштабе 20 доминирует, а для f_3 — сильно размазан в интервале, обусловленном амплитудой модуляции.

2.2. Вейвлет-дифференцирование

Задача о численном дифференцировании функции, известной приближённо, является классическим приме-

ром некорректно поставленной задачи, приводящей к неустойчивости решения [19]. Для обеспечения устойчивости точное решение заменяют приближённым, которое управляется неким параметром регуляризации и стремится к точному при отсутствии погрешности измерений. На практике регуляризация обычно сводится либо к сглаживанию исходных данных в физическом пространстве, либо к подавлению высоких частот в спектре измеренных данных. При этом оптимальная ширина сглаживающего окна или соответствующая ему полоса пропускания фильтра связывается с ожидаемым уровнем шума.

Принципиальное отличие алгоритма фурье-дифференцирования от прямого дифференцирования в физическом пространстве заключается в том, что при вычислении преобразования Фурье используется информация о сигнале во всех точках числовой оси, в то время как дифференцирование является по определению операцией локальной.

Задача регуляризации процедуры дифференцирования зашумлённых данных естественным образом формулируется на языке вейвлет-представления сигналов, которое позволяет совместить преимущества работы в физическом пространстве и пространстве Фурье [20].

Пусть функция $f(t)$ имеет первую производную $g(t) = \partial f / \partial t$ и определена на наборе точек t_n с точностью до некоторых случайных ошибок ξ ($f_n = f(t_n) + \xi_n$). Выполняя вейвлет-преобразование функции $g(t)$ и проводя дифференцирование по частям, мы можем легко получить

$$\begin{aligned} W_{\tau, t'}\{g\} &= \tau^\kappa \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(\frac{t-t'}{\tau} \right) g(t) dt = \\ &= -\tau^{\kappa-1} \int_{-\infty}^{\infty} \psi'^* \left(\frac{t-t'}{\tau} \right) f(t) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, вейвлет-образ производной функции $f(t)$ может быть получен без прямого вычисления производной исходных данных. Сама производная $g(t)$ получается восстановлением из своего вейвлет-образа обратным вейвлет-преобразованием (4). По сути, процедура численного дифференцирования f_n заменяется численным интегрированием и аналитическим дифференцированием заданного семейства вейвлет-функций. Отме-

тим, что $\psi'(t)$ также должна удовлетворять всем требованиям, предъявляемым к вейвлетам.

2.3. Помасштабная кросс-корреляция сигналов

Анализ поведения сложных систем состоит не только в том, чтобы проследить за эволюцией спектрального состава некоторого сигнала, но и в том, чтобы изучить степень коррелированности двух сигналов отдельно на каждом временном масштабе. Возможности фурье-анализа в этом вопросе весьма ограничены. Можно ввести кросс-спектр Фурье

$$E_{ij}(\omega) = \hat{f}_i(\omega) \hat{f}_j^*(\omega),$$

который сам по себе, в силу равенства $|E_{ij}|^2 = E_{ii}E_{jj}$, не несёт дополнительной информации. Частичное решение проблемы было предложено введением когерентности [21]

$$\gamma(\omega) = \frac{\overline{E_{ij}(\omega)}}{(\overline{E_{ii}(\omega)} \overline{E_{jj}(\omega)})^{1/2}}, \quad (11)$$

где $\overline{(\cdot)}$ обозначает некоторую операцию сглаживания. Величина $\gamma(\omega)$ варьируется в интервале от 0 до 1, причём 1 соответствует линейной связи интенсивности колебаний на заданной частоте в обоих сигналах. Стоит отметить, что выбор ширины фильтра $\overline{(\cdot)}$ необходимо обосновывать отдельно.

Язык вейвлетов позволяет сформулировать характеристики корреляции сигналов, локализованные в пространстве масштабов и времени, естественным образом. Распределение энергии на кросс-спектрограмме $C_w(\tau, t') = w_1(\tau, t') w_2^*(\tau, t')$ (см. для примера рис. 3) выделяет масштабы и временные диапазоны, в которых колебания появляются одновременно в двух сигналах. При этом заложенные принципы сохранения оптимального разрешения в масштабно-временном пространстве делают интерпретацию результатов анализа более уверенной. Идея вейвлетного кросс-корреляционного анализа впервые была предложена при сопоставлении изменчивости различных солнечных параметров [22]. Вейвлет-корреляционная функция двух сигналов была определена в виде

$$C_{12}(\tau) = \frac{\int C_w(\tau, t') dt'}{(\int w_1^2(\tau, t') dt' \int w_2^2(\tau, t') dt')^{1/2}}, \quad (12)$$

где w_1 и w_2 — вейвлет-образы рассматриваемых сигналов. Абсолютное значение $|C(\tau)|$ характеризует степень согласованности возникновения колебаний с масштабом t' в двух сигналах, а фаза $\delta\phi_{12} = \arg(C_{12}(\tau))$ показывает средний сдвиг фаз между ними. Парные вейвлет-корреляционные функции для ранее рассмотренных тестовых сигналов (9) представлены на рис. 4. Видно, что они достигают максимума при $\tau = 20$. При этом для тестовых сигналов коэффициенты кросс-корреляции равны 0,56 между f_1 и f_2 , $-0,04$ между f_1 и f_3 , $0,02$ между f_2 и f_3 .

По аналогии с характеристикой (11) можно рассматривать вейвлет-когерентность [23]

$$\Gamma(\tau, t') = \frac{\overline{w_{ij}(\tau, t')}}{(\overline{w_{ii}(\tau, t')} \overline{w_{jj}(\tau, t')})^{1/2}}, \quad (13)$$

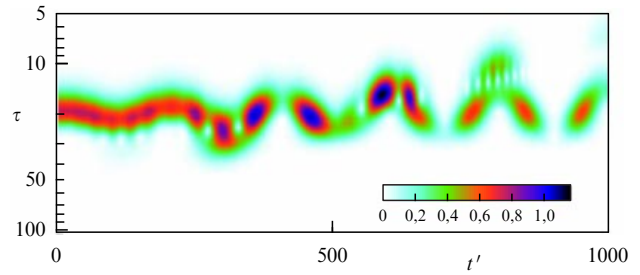


Рис. 3. (В цвете онлайн.) Кросс-спектрограмма сигналов f_2 и f_3 .

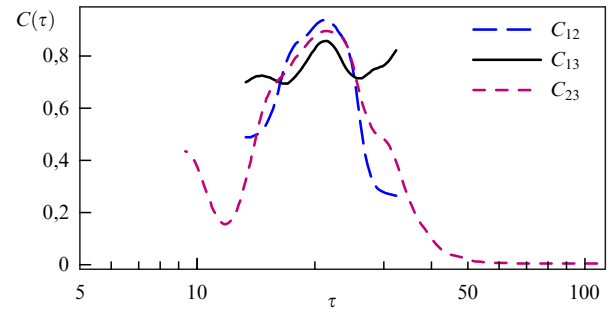


Рис. 4. (В цвете онлайн.) Вейвлет-кросс-корреляции тестовых функций (9).

где операцию сглаживания, например скользящим средним, проводят в плоскости (τ, t') . Тогда функция $C(\tau)$ является частным случаем $\Gamma(\tau, t')$, где $\overline{(\cdot)}$ — усреднение по t' . На основе $\Gamma(\tau, t')$ можно построить спектрограмму вейвлет-когерентности, которая будет отображать коэффициент кросс-корреляции и величину фазового сдвига, локализованного в масштабно-временном пространстве. Наиболее эффективно $\Gamma(\tau, t')$ применяется для анализа хаотических сигналов с широким диапазоном масштабов [24, 25].

Отметим предложенное в работах [26, 27] обобщение метода вейвлет-корреляций на случай нескольких временных рядов. Корреляция вводится как матричное произведение вейвлет-преобразований соответствующих рядов. Тогда пик в корреляционной функции возникает только на частоте, присутствующей в каждом из обрабатываемых рядов.

2.4. Вейвлет-анализ сигналов с пробелами

Рассмотрим теперь алгоритм, предложенный для решения принципиальной проблемы, возникающей при обработке наблюдательных данных и (реже) данных измерений: проблемы неизбежных, вызванных самими разнообразными причинами пробелов (дыр) в рядах. Например, многие звёзды при наблюдениях в данной обсерватории лишь часть года находятся над горизонтом, а в остальное время не видны. Это происходит по той же причине, почему в приполярных широтах Солнца не видно во время полярной ночи. Хотя в принципе можно комбинировать данные обсерваторий, находящихся на различных широтах, но это очень непростая задача, поэтому обычно данные о звёздной активности известны лишь за некоторую часть года (за время так называемых наблюдательных сезонов, см. пример на рис. 16). При анализе циклов звёздной активности эти проблемы существенны, так как длительность наблюдений (в лучшем случае несколько десятков лет) включает всего несколько

циклов активности. Анализ спектрального состава таких сигналов сталкивается с принципиальными проблемами, смягчить которые удаётся с помощью вейвлет-алгоритма, предложенного как раз в контексте задач изучения цикличности активности звёзд [28]. Математическое обоснование алгоритма дано в работе [29].

Рассмотрим сигнал $f(t)$, который регистрируется с пробелами, т.е. вместо функции $f(t)$ нам известна функция

$$\tilde{f}(t) = f(t)G(t), \tag{14}$$

где $G(t)$ — "функция дыр", которая равна единице, если сигнал регистрируется, и нулю во всех остальных точках (внутри пробелов и вне сигнала). В результате при вычислении вейвлет-коэффициентов вместо искомых значений $w(a, b)$ получаются коэффициенты

$$\tilde{w}(\tau, t') = W_{\tau, t'}\{\tilde{f}\} = \tau^\kappa \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(\frac{t-t'}{\tau} \right) \tilde{f}(t) dt. \tag{15}$$

Идея алгоритма, получившего название "дырявые вейвлеты" (gapped wavelets), состоит в перенесении проблемы пробелов с неизвестной функции $f(t)$ на хорошо известную функцию ψ . Перепишем формулу (15) в виде свёртки исходной функции $f(t)$ с "дырявым" вейвлетом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(\frac{t-t'}{\tau} \right) \tilde{f}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^* \left(\frac{t-t'}{\tau} \right) f(t) dt,$$

где $\tilde{\psi}[(t-t')/\tau] = \psi[(t-t')/\tau]G(t)$.

Попадая на дыры, функция $\tilde{\psi}$ перестаёт удовлетворять требованиям, предъявляемым к вейвлетам, в частности, $\int \tilde{\psi}(t) dt \neq 0$. "Испорченный" вейвлет $\tilde{\psi}$ предлагается заменить на "исправленный" ψ_g , который должен, по меньшей мере, удовлетворять условию $\langle \psi_g \rangle = 0$ и стремиться к исходному вейвлету ψ при исчезновении пробелов. На языке фурье-представлений можно дать следующую интерпретацию предлагаемой идеи. Особенностью вейвлетов является то, что их фурье-образ локализован в ограниченной полосе частот. Нарушение условия $\langle \psi \rangle = 0$ приводит к появлению в спектре $|\hat{\psi}(\omega)|^2$ низких частот вплоть до $\omega \rightarrow 0$, а разрывы на краях дыр производят высокочастотный шум. Необходимо указать алгоритм, подавляющий как низкочастотный, так и высокочастотный шум, обусловленный дырами и краями (край можно рассматривать как полубесконечную дыру).

Для реализации этой идеи вейвлет ψ представляется в виде

$$\psi(t) = h(t)\Phi(t), \tag{16}$$

где $\Phi(t)$ — положительно определённая масштабная функция ("оболочка", в качестве которой обычно используется функция Гаусса $\Phi(t) = \exp(-t^2/2)$), а $h(t)$ — "заполняющая" функция (парабола для "мексиканской шляпы", комплексная гармоническая функция для вейвлета Морле).

Искомый вейвлет ψ_g будем искать в виде

$$\psi_g(t) = (h(t) - H)\Phi(t)G(t). \tag{17}$$

Величина H определяется для каждого масштаба τ и положения центра вейвлета t' исходя из условия $\langle \psi_g \rangle = 0$ и

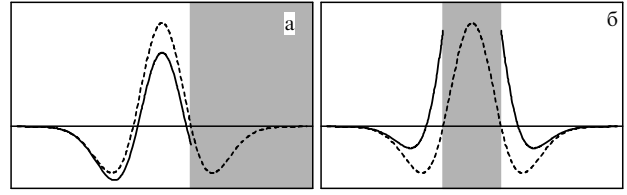


Рис. 5. Примеры корректировки анализирующего вейвлета при обработке фрагмента сигнала с пробелами (а — на крае, б — на одиночной дыре). Серым фоном показаны пробелы, пунктирной кривой — исходный вейвлет, сплошной — результат коррекции.

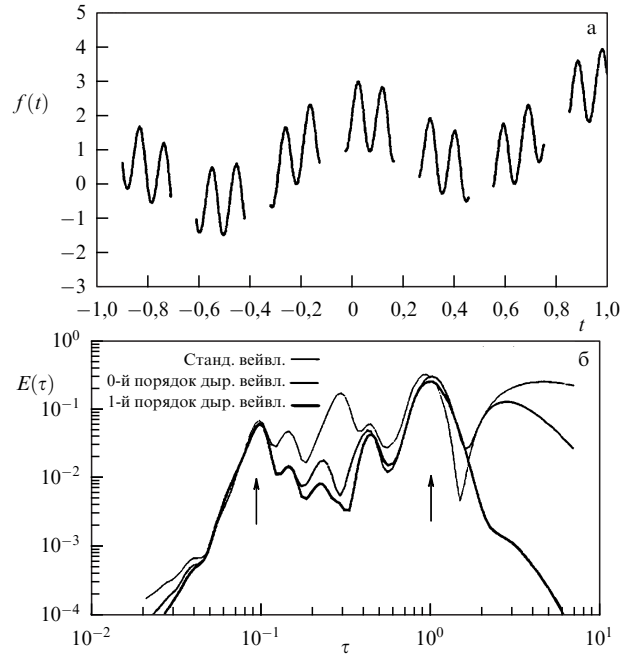


Рис. 6. Модельный сигнал с пробелами (а) и его вейвлет-спектры (б): стандартное вейвлет-преобразование (тонкая линия), метод дырявых вейвлетов (жирная линия). (Адаптированный рисунок из работы [29].)

равна

$$H(\tau, t') = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(t-t'/\tau)\Phi(t-t'/\tau)G(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t-t'/\tau)G(t) dt}. \tag{18}$$

Характер изменения вейвлета на крае и одиночной дыре показан на рис. 5. В качестве анализирующего вейвлета $\psi(t)$ взята "мексиканская шляпа" (показана пунктирной кривой). Представлены случаи, когда отклонения среднего значения от нуля максимальны: в первом случае (рис. 5а) край полностью отсекает одно крыло, во втором (рис. 5б) — дыра точно закрывает весь центральный максимум (на рисунке эти области показаны серым). Можно видеть, что даже в этих ситуациях не происходит критических изменений в структуре функции. Новые функции $\psi_g(t)$ (сплошная линия) имеют разрывы, но эти разрывы совпадают с границами дыр и не вносят при интегрировании дополнительного шума. Пример вычисления вейвлет-спектра модельного сигнала с пробелами показан на рис. 6. На рисунке 6а показан анализируемый сигнал, на рис. 6б — его вейвлет-спектры, вычисленные стандартным вейвлет-алгоритмом (тонкая линия) и с помощью "дырявых" вейвлетов (жирная линия). Спектр

исходного сигнала должен содержать два пика, положение которых помечено стрелками. Можно видеть, что при применении стандартной методики появляется ложный пик, связанный с систематичностью пробелов, а также значительный низкочастотный шум. В скорректированном спектре не только существенно подавлен ложный максимум, но и положения основных максимумов намного точнее соответствуют исходным частотам в сигнале.

Нужно отметить, что алгоритм требует больших вычислительных ресурсов, так как включает расчёт двух дополнительных свёрток в (18), но при анализе сигналов с многочисленными пробелами либо коротких сигналов, для которых критическим может стать влияние краевых эффектов, эти затраты оправданы. Возможность ускорения расчётов на основе алгоритмов быстрого вейвлет-преобразования рассмотрена в работе [30].

3. Вейвлеты для поиска и изучения квазипериодичностей

3.1. Циклы солнечной активности

Одной из наиболее очевидных физических проблем, при решении которой могут пригодиться вейвлеты, является задача выделения и анализа квазипериодичностей в разнообразных временных рядах, полученных в ходе лабораторных, натуральных или астрономических наблюдений. Едва ли не самым обсуждаемым объектом такого рода являются результаты долговременных наблюдений циклической активности Солнца, среди них важное место занимают данные о числе солнечных пятен (см., например, [31, 32]). В самом деле, астрономия в контексте изучения Солнечной системы — одна из тех областей знания, в которой сформировался современный комплекс физико-математических наук. Какие-то сведения о пятнах на Солнце известны с глубокой древности, но даже если ограничиться лишь данными инструментальных наблюдений (с помощью телескопов), то они восходят непосредственно к 1611 году, когда Галилей впервые применил телескоп для астрономических наблюдений. Вряд ли можно найти временной ряд инструментальных наблюдений или измерений, более длинный в реальном астрономическом времени.

Хорошо известно (для обзора см., например, [33]), что эволюция солнечной активности содержит квазипериодические составляющие — приблизительно каждые 11 лет число солнечных пятен увеличивается и достигает максимума, а потом уменьшается и достигает минимума. Это знаменитый 11-летний цикл солнечной активности, который привлекает внимание общественности, а представители самых различных специальностей обсуждают возможность того, что солнечный цикл влияет на разные стороны жизни людей, вплоть до интенсивности применения наркотиков или цен на пшеницу. Один цикл активности может несколько отличаться от предыдущего и последующего как по длительности, так и по интенсивности. На рубеже XVII и XVIII веков число солнечных пятен было существенно меньше, чем в другие известные нам периоды, так что возникло представление о глобальном минимуме солнечной активности, получившем название минимума Маундера по имени английского астронома, начавшего изучать это явление. Кроме солнечных пятен, существуют и другие трассеры солнечной активности, некоторые из которых связаны с дина-

микой радиоактивных изотопов в различных объектах. Изотопные трассеры позволяют до некоторой степени проследить динамику солнечной активности на протяжении гораздо больших временных интервалов, вплоть до 10000 лет [34]. Эти данные говорят о том, что глобальные минимумы, подобные минимуму Маундера, имели место неоднократно, причём их последовательность не обнаруживает очевидной закономерности. Все отмеченные черты солнечной активности делают её очень удобным и интересным материалом для применений вейвлет-анализа. Вероятно, именно поэтому одна из первых работ, посвящённых использованию вейвлет-анализа для выявления квазипериодичностей в данных астрономических наблюдений, была направлена на изучение данных о солнечных пятнах [15].

Анализ временных рядов, охватывающих сотни лет, сталкивается с рядом специфических проблем, нетипичных для многих областей физики, которые, как правило, рассматривают то, что происходит сейчас и, в принципе, может быть воспроизведено много раз. Если же длительность временного ряда существенно превышает как типичное время активной деятельности отдельного наблюдателя, так и типичное время существенного улучшения наблюдательной техники, то возникают трудности в составлении временного ряда, претендующего хоть на какой-то уровень однородности. Очевидно, что первые телескопы были намного менее совершенны, чем современные, и методика наблюдений солнечных пятен тоже сложилась не сразу. Тем не менее примеры показывают, что и среди самых первых наблюдателей были аккуратные и прилежные люди, качество наблюдений которых вызывает приятное удивление. С другой стороны, в современной науке, финансируемой за счёт грантов, стали редкими проекты, предполагающие десятилетия однотипных рутинных наблюдений. Всё это делает проблему релевантной компиляции временного ряда конкретного трассера солнечной активности в чём-то похожей на проблему описания исторических событий по данным различных источников, так что приходится говорить о той или иной реконструкции временного ряда [35]. Такие проблемы не связаны прямо с задачами вейвлет-анализа (хотя он тоже может помочь при сшивке данных двух наблюдателей, результаты которых частично перекрываются во времени). Не обсуждая этих аспектов проблемы (см. о них, например, [36] и [37]), мы здесь воспользуемся данными о среднемесечном числе групп солнечных пятен с 1611 по 1996 гг. [38]. Совсем недавно была выполнена глубокая ревизия этих данных [39], на основе которой выполнена калибровка данных различных наблюдателей [40, 41]. Мы собрали эти данные вместе и получили ряд, который замечателен тем, что он включает в себя минимум Маундера, а также самый последний период времени (после 1996 г.). В эти годы, непосредственно предшествующие современности, поведение Солнца очень необычно. Хотя солнечная активность, видимо, не настолько слабая, какой была в годы минимума Маундера, но напоминает менее выраженный эпизод пониженной активности, случившийся в период наполеоновских войн и известный как минимум Дальтона.

Представляя результаты вейвлет-анализа обобщённого ряда данных, мы следуем работе [15], которая была одной из первых работ по использованию вейвлетов для задач астрономии и астрофизики, однако пересчитываем результаты для современного набора данных. К тому же

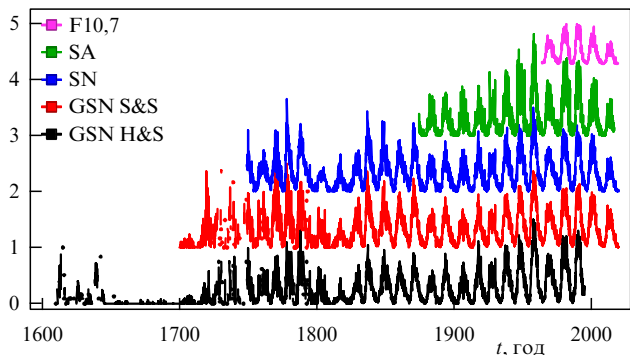


Рис. 7. (В цвете онлайн.) Анализируемые данные солнечной активности с месячным усреднением: число групп солнечных пятен по широко известной работе [38] (обозначено как GSN H&S) и их данные с глубокой переработкой, перекалибровкой [40] и добавлением современных данных [42] (GSN S&S), число солнечных пятен (SN) по данным SILSO (<http://www.sidc.be/silso/datafiles>), площадь солнечных пятен (SA) по данным Royal Greenwich Observatory (<https://solarscience.msfc.nasa.gov/greenwch.shtml>) и индекс солнечного излучения на 10,7 см (F10,7) по данным OMNIWeb (<https://omniweb.gsfc.nasa.gov>).

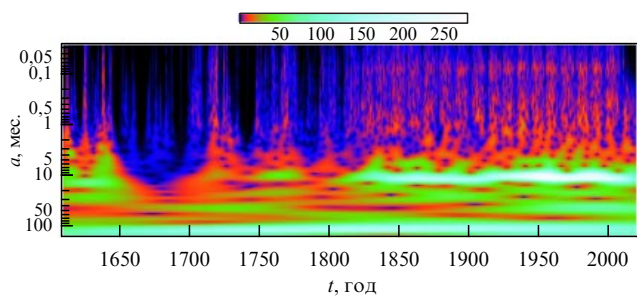


Рис. 8. (В цвете онлайн.) Вейвлет-спектрограмма групп солнечных пятен.

существовавшие в то время методы позволяли использовать лишь временные ряды с равномерно отстоящими друг от друга по времени данными, а база данных содержит небольшие пропуски, которые приходилось интерполировать. Сейчас в этом нет необходимости, так как используется техника дырявых вейвлетов.

На рисунке 7 показаны анализируемые временные ряды, а на рис. 8 — вейвлет-спектрограмма числа групп солнечных пятен по данным с дневным разрешением с 1610 по 1739 гг. из работы [38], с 1739 по 2010 гг. по данным [41] и с 2010 г. по данным месячного разрешения [42]. На сегодняшний день это самый длинный ряд числа групп солнечных пятен. Хорошо видна яркая полоса, соответствующая номинальному 11-летнему циклу. Непосредственно во время минимума Маундера яркая полоса прерывается, это означает, что анализируемый временной ряд (во всяком случае, в рамках спектрального анализа) не указывает на наличие в это время цикла Швабе. Конечно, остаётся возможность того, что в эту эпоху цикл существовал, но по каким-то причинам не проявлялся в виде доступных наблюдению солнечных пятен, скажем, магнитные трубки вовсе не всплывали или пятна были так малы, что ускользали от внимания наблюдателей.

По вейвлет-спектрограмме можно количественно проследить за изменениями параметров солнечного цикла.

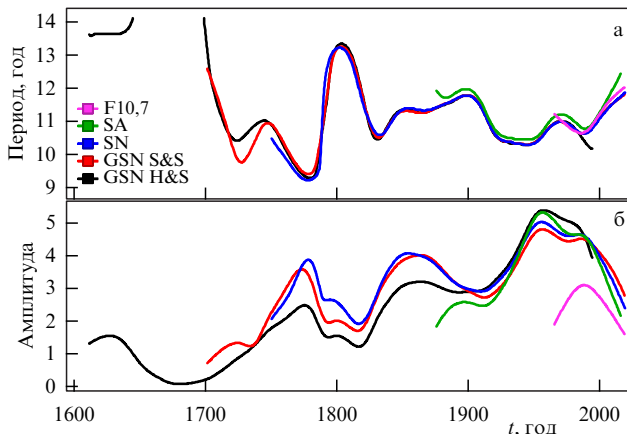


Рис. 9. (В цвете онлайн.) Характерный период τ^* (а) и амплитуда w^* (б) 11-летнего цикла.

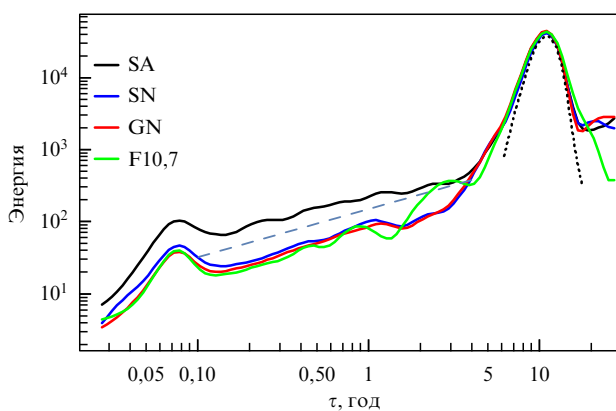


Рис. 10. (В цвете онлайн.) Глобальные вейвлет-спектры для разных трассеров в интервале $0,02 < \tau < 20$ лет. Штриховая линия обозначает наклон $\tau^{2/3}$. Пунктирная линия показывает ожидаемый отклик от 11-летнего синусоидального сигнала. (Из работы [16].)

На рисунке 9 показана эволюция характерных периода τ^* и амплитуды w^* основного цикла активности, которые определяются по максимуму интенсивности в текущий момент времени, $w^*(t') = |w(\tau^*, t')| = \max_{\tau} |w(\tau, t')|$. Видно, что если отвлечься от эпохи вблизи минимума Маундера, то длина цикла Швабе, конечно, меняется от цикла к циклу, но в целом эти вариации небольшие. Кажется естественным связать их со статистическими флуктуациями параметров, определяющих работу механизма, обеспечивающего самовозбуждение магнитного поля (солнечного динамо) [43, 44].

Перейдём теперь к вариациям числа групп солнечных пятен и других сходных трассеров с характерным временем менее 11 лет [16]. На рисунке 10 в этой области временных масштабов виден непрерывный участок спектра, типичный для многих задач, возникающих при изучении турбулентных и конвективных потоков. Изучение подобных явлений было начато, как известно, Ричардсоном и составляет центральную идею теории колмогоровской турбулентности. С другой стороны, в физике Солнца широко распространено представление о так называемых квазидвухлетних циклах [45]. В качестве возможной длительности этих циклов назывались практически все значения в интервале между 1 годом и 4 годами, а сама терминология намекает на то, что это явление не вполне подобно 11-летнему циклу Швабе. Вариации активности

обнаружены и при наблюдениях за звёздами (см. раздел 3.2), но доступные временные ряды магнитной активности звёзд гораздо короче аналогичных временных рядов для Солнца, так что задача разделения явлений, аналогичных циклу Швабе, и квазидвухлетних колебаний оказывается гораздо более трудной. Известно, что статистический анализ отдельных редких событий может выявить реакцию глобальных хаотических систем, таких как земной или космический климат, на слабые внешние воздействия [46].

Ещё более остро эта проблема стоит при поисках физических механизмов, приводящих к солнечным и звёздным циклам. Сейчас общепринято представление о том, что физической причиной цикла Швабе является самовозбуждение волны магнитного поля в результате совместного действия дифференциального вращения и зеркально-асимметричной конвективной турбулентности, хотя детали этого солнечного динамо остаются ещё предметом дискуссий (см., например, [47]). Во всяком случае, речь идёт о появлении собственного колебания в линеаризованных уравнениях, описывающих это явление. Заметное усложнение этой модели позволяет рассматривать самовозбуждение магнитного поля в двух слоях конвективной оболочки, скажем, вблизи поверхности и у дна конвективной зоны Солнца. Можно добиться и того, чтобы собственные колебания, возбуждаемые в этих оболочках, имели существенно разные периоды, хотя при этом возникает неприятный вопрос о том, как следы этих колебаний, происходящих далеко внутри Солнца, проникают на поверхность Солнца, а области в параметрическом пространстве, где происходит подобное явление, оказываются опасно узкими. Перспектива объяснять подобным образом целый набор периодов кажется совершенно непривлекательной, а понимание квазидвухлетних колебаний как элементов непрерывного конвективного спектра — естественным разрешением этой проблемы.

Следуя работе [16], мы посмотрим, насколько методы вейвлет-анализа позволяют прояснить эту проблему. Интегральные (глобальные) вейвлет-спектры вариаций четырёх трассеров активности на интервале времени с 1875 по 2019 гг. (или на его части, если для всей этой эпохи данных нет) представлены на рис. 10. Во всех спектрах хорошо видны два максимума — один из них, конечно, соответствует циклу Швабе, а другой близок к времени оборота Солнца. Естественная интерпретация второго максимума состоит в том, что время жизни некоторых солнечных пятен превышает время оборота Солнца и мы видим их несколько раз. Используемая база данных учитывает такие солнечные пятна многократно. Между этими максимумами на интегральном вейвлет-спектре виден непрерывный степенной участок спектра, типичный для турбулентных систем. Убедиться в стохастической природе колебаний с циклом порядка 2 лет можно, рассмотрев зависимость $w(\tau = 2, t')$ (рис. 11). Видно, что квазидвухлетние колебания существенно различаются между разными трассерами, а также сильно варьируются со временем.

Предполагая, что в спектре солнечной активности существует некоторая дополнительная выделенная периодичность, пусть даже меняющаяся со временем, нам следует принять требование, чтобы соответствующие колебания были выражены как минимум в течение нескольких солнечных циклов. Вырезая различные временные

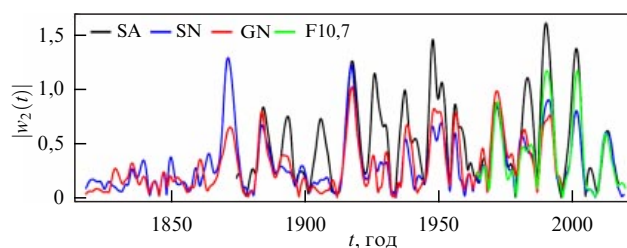


Рис. 11. (В цвете онлайн.) Вариация амплитуды двухлетней квазипериодичности ($w(\tau = 2, t')$) для различных трассеров. (Из работы [16].)

участки вейвлет-плоскости, можно получить вейвлет-спектр в масштабах конкретного солнечного цикла. На рисунке 12 представлены спектры колебаний для двенадцати отдельных солнечных циклов (с 13-го по 24-й), при этом для облегчения восприятия спектры нормированы на $\tau^{2/3}$ и для отдельных циклов искусственно сдвинуты друг относительно друга по вертикали.

Можно видеть, что только два пика выживают во всех циклах, в то время как спектральный состав между ними изменяется от цикла к циклу, не давая устойчивых особенностей. Локальные максимумы в отдельных циклах появляются в диапазоне масштабов от $\tau = 0,2$ до $\tau = 4$ года. На рисунке 12б показана высота локальных максимумов, найденных в спектре отдельного цикла, относительно ближайших локальных минимумов. Можно распознать два высоких максимума при $\tau = 2$ (в цикле $N = 16$) и $\tau = 2,7$ (в цикле $N = 23$) года. Есть много других чуть менее значимых максимумов, которые равномерно встречаются в среднесрочном диапазоне. На рисунке 12в показаны интегральные скомпенсированные спектры с указанием доверительных интервалов, полученных на статистике реализаций в отдельных циклах. Видно, что в конкретных циклах возникают колебания различной длительности менее 11 лет, но устойчивые колебания с более или менее постоянной длительностью отсутствуют.

Таким образом, вейвлет-анализ показал, что в каждом отдельном цикле присутствуют выраженные колебания со шкалами времени от нескольких месяцев до 11 лет, однако их случайные вклады дают гладкий общий спектр. При больших τ отклонения от закона $\tau^{2/3}$ становятся больше, что объясняется плохой статистикой в пределах отдельного цикла. Это может быть проявлением сильной перемежаемости процесса динамо, на которую указывают прямые вычисления вариаций скейлинговых характеристик [48].

Наконец, отметим результаты моделирования структуры спектра активности в рамках простой модели солнечного динамо [49], которая включает образование солнечных пятен. В данном контексте нет нужды настаивать, что именно эта модель наиболее адекватно описывает солнечный цикл. Важно, что при построении модели в неё не вложены никакие физические механизмы, кроме тех, которые приводят к циклу Швабе.

На рисунке 13 приведены результаты вейвлет-анализа расчётной базы данных в сравнении с реальными данными. Видно, что вариация параметров модели, которая лежит в допустимых пределах, позволяет практически точно воспроизвести реальный вейвлет-спектр данного трассера. В целом проведённый анализ позволяет заключить, что имеющиеся данные заставляют понимать квазидвухлетние колебания как элементы непрерывного спек-

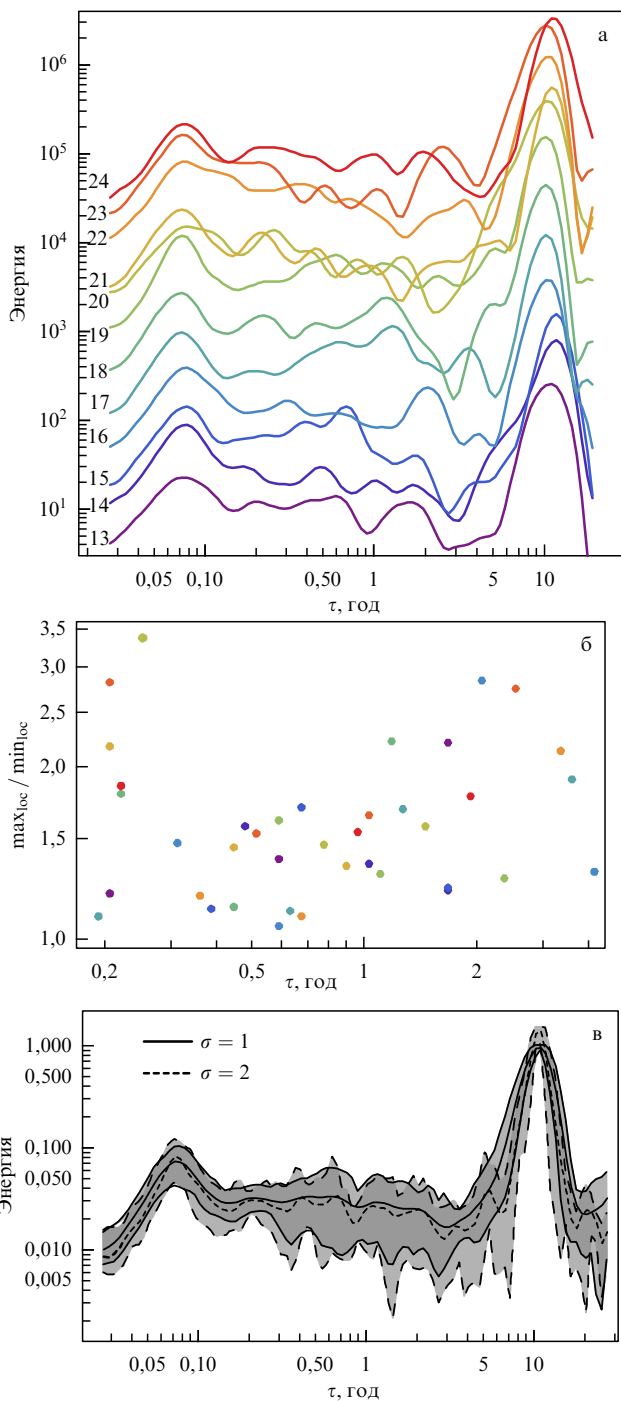


Рис. 12. (В цвете онлайн.) (а) Вейвлет-спектры для отдельных циклов, компенсированные на $\tau^{2/3}$ и равномерно сдвинутые по вертикали для лучшей визуализации. (б) Локальные максимумы для отдельных циклов. (в) Вейвлет-спектр, усреднённый по 12 циклам. Затенение серым цветом отображает двусторонний доверительный интервал 80 %. Сплошные и штриховые линии соответствуют результату, полученному при различных значениях вейвлет-параметра: $\sigma = 1$ и $\sigma = 2$ соответственно. (Из работы [16].)

тра, физическая природа которого отличается от природы цикла Швабе.

Сравнительный анализ вейвлет-обработки данных измерений и математического моделирования открывает широкие возможности для построения согласованной картины физического явления. В последнее время особое внимание уделяется экспериментальным и теоретиче-

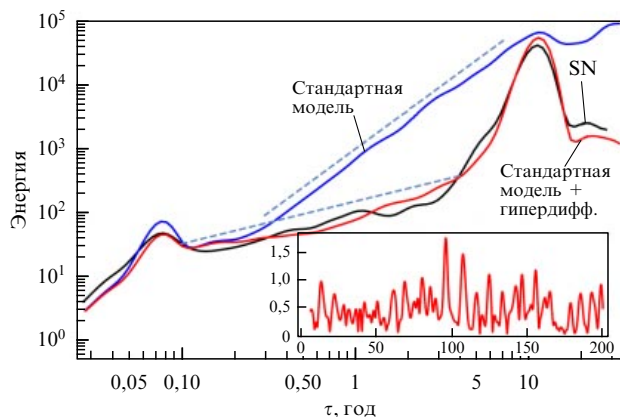


Рис. 13. (В цвете онлайн.) Вейвлет-спектры для SN (чёрная кривая) и двух симуляционных сигналов: (синяя) стандартная динамо-модель (см. [49]) и (красная) эта же модель с эффектом гипердиффузии. Штриховые линии обозначают наклоны 2 и 2/3. На вставке показана эволюция вейвлет-амплитуды двухлетней квазипериодичности. (Из работы [16].)

ским исследованиям источников магнитогидродинамических (МГД) колебаний и волн в атмосфере солнечных пятен (см. обзор [50]). Можно выделить анализ динамики распространяющихся волновых фронтов в активной зоне, для пространственного разрешения которых был разработан метод попиксельной вейвлет-фильтрации [51 – 53].

Идея вейвлетного кросс-корреляционного анализа впервые была предложена при сопоставлении изменчивости различных солнечных параметров [22]. Дело в том, что в эпоху знаменитого минимума Маундера постоянно измерялась ещё одна характеристика Солнца — видимый солнечный диаметр (слово видимый существенно — изменения этого параметра не обязательно означают изменения физического размера Солнца, а могут быть оптическим эффектом). Вариации видимого солнечного диаметра непрерывно регистрировались астрономами французской школы с 1683 по 1718 гг., а отдельные серии измерений проводились различными астрономами и ранее. Систематические наблюдения за этой характеристикой были возобновлены только в 1974 году [54]. Все доступные результаты измерений собраны на рис. 14а. Бросается в глаза существенное отличие современных данных от тех, которые были выполнены 400 лет назад. Напрашивается простое объяснение этому факту, состоящее в том, что качество измерений в то далёкое время было существенно ниже и это обусловило высокий уровень пульсаций сигнала (систематическое отличие в уровне сигнала объясняется тем, что видимый диаметр Солнца — величина субъективная и зависит от способа его определения). Однако вейвлет-анализ показывает, что трудно всё списать на погрешности измерений и эти архивные измерения несут полезную информацию.

На рисунке 14б показана корреляционная функция (12), вычисленная для вариаций числа групп пятен и вариаций диаметра по перекрывающимся интервалам наблюдений. Видно, что на временах порядка 2 года имеется узкий положительный пик, а на временных масштабах порядка 10 лет и более сигналы становятся строго антикоррелированными (больше пятен — меньше диаметр).

Наибольший интерес представляет частота основного (11-летнего) солнечного цикла. Графики отфильтро-

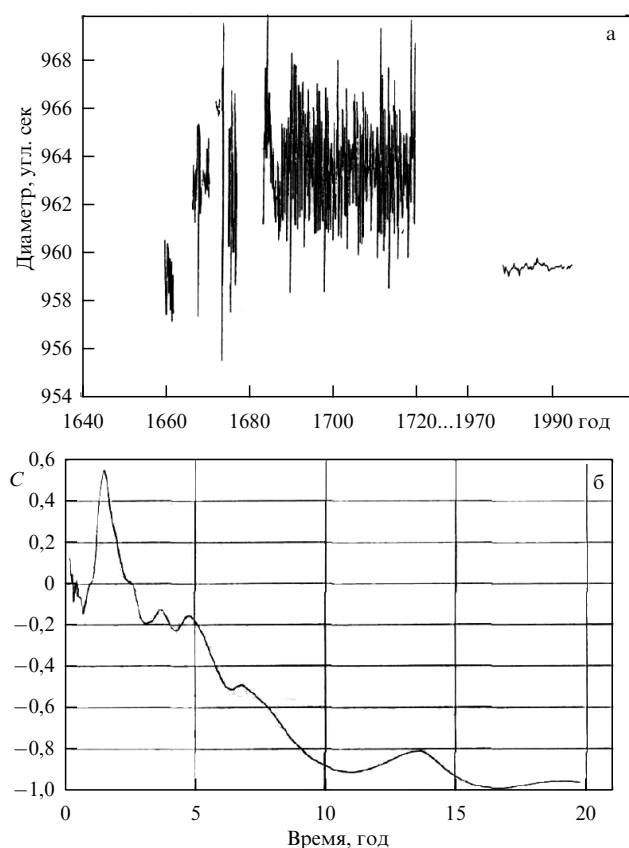


Рис. 14. (а) Вариации видимого солнечного диаметра по историческим источникам (до 1720 г.) и современным данным [54]. (б) Вейвлетная кросс-корреляция вариаций видимого солнечного диаметра и числа групп солнечных пятен. (Рисунок из работы [22].)

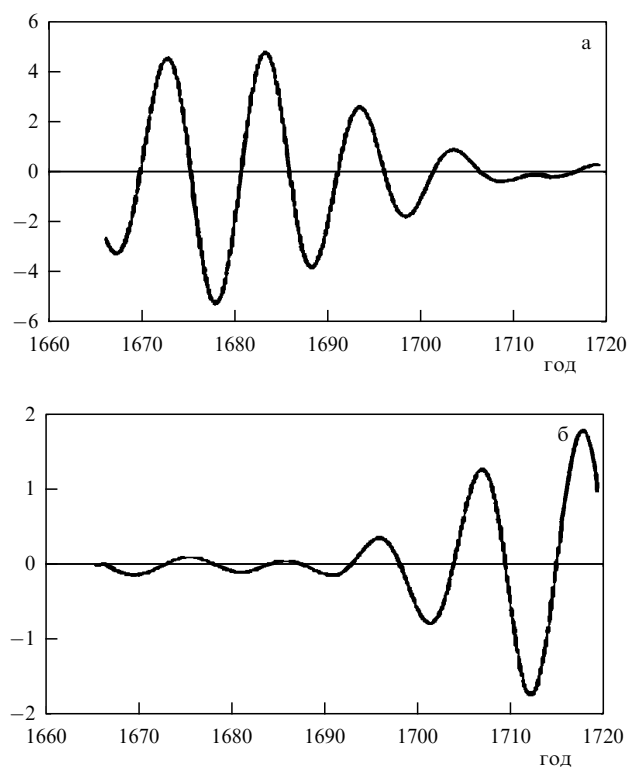


Рис. 15. 11-летние колебания, выделенные из данных вариаций видимого солнечного диаметра (а) и числа групп солнечных пятен (б). (Из работы [22].)

ванных 11-летних вариаций диаметра и числа групп пятен для интервала времени 1666–1718 гг. показаны на рис. 15. Замечательно, что наблюдения за изменениями солнечного диаметра начались во время минимума Маундера и продолжались во время выхода из минимума. Результаты вейвлет-фильтрации данных наблюдений, представленные на рис. 15, показывают, что 11-летние вариации солнечного диаметра имели наибольшую амплитуду как раз во время глубокого минимума солнечной активности. По мере выхода из минимума вариации числа пятен начинают возрастать, а вариации диаметра — уменьшаться. Этот результат даёт возможность объяснить разительное отличие современных данных от данных XVIII века: в сравнении с 1718 годом, когда были прекращены измерения диаметра, среднее количество групп пятен возросло примерно на порядок, а в свете полученной закономерности это должно привести к существенному снижению интенсивности вариаций диаметра, что и видно в современных наблюдениях.

Полученный результат открывает возможность считать, что минимум Маундера имеет не магнитную, а гидродинамическую природу. Конечно, имея дело с тонкими архивными наблюдениями, приходится соблюдать осторожность в выводах, но видно, что вычисления корреляции с помощью вейвлетов придают больше уверенности.

3.2. Циклы в звёздных данных

Циклическая активность Солнца не является уникальным явлением, а встречается и на других звёздах, более или менее похожих по своим физическим характеристикам на Солнце. И в самом деле, уже около полувека астрономы различными методами обнаруживают и исследуют циклическую активность различных звёзд (например, [55]). Здесь приятно вспомнить, что один из центральных методов этих исследований, так называемые обратные доплеровские изображения, которые позволяют картировать распределение температуры на поверхности звёзд ряда типов, представляет собой отечественную разработку [56]. Исследования звёздной активности не только интересны сами по себе, но и позволяют лучше понять солнечную активность. Например, недавно выяснилось, что на звёздах, близких по своим характеристикам к Солнцу, случаются такие мощные вспышки, возникновение которых на Солнце несло бы очевидные опасности для современной технологической цивилизации (см. подробнее в [57]). Видимо, в этом конкретном случае непосредственной опасности для Земли всё же нет и удаётся найти некоторые различия между свойствами звёзд с мощными вспышками и свойствами Солнца, но в целом подобные исследования представляют не только познавательный интерес.

На рисунке 16 показаны для примера данные наблюдений хромосферной активности двух звёзд солнечного типа с выраженной циклическостью. Они хорошо иллюстрируют проблемы звёздных наблюдательных данных: ряды относительно коротки (включают только несколько осцилляций основного цикла), изобилуют пробелами (наблюдения сезонные), характеризуются высоким уровнем шума (при этом заранее не ясно, связан ли шум с характером излучения звезды, со свойствами межзвёздной среды или условиями наблюдения).

Не останавливаясь на сравнении циклическости в активности различных звёзд (из-за ограниченности объёма

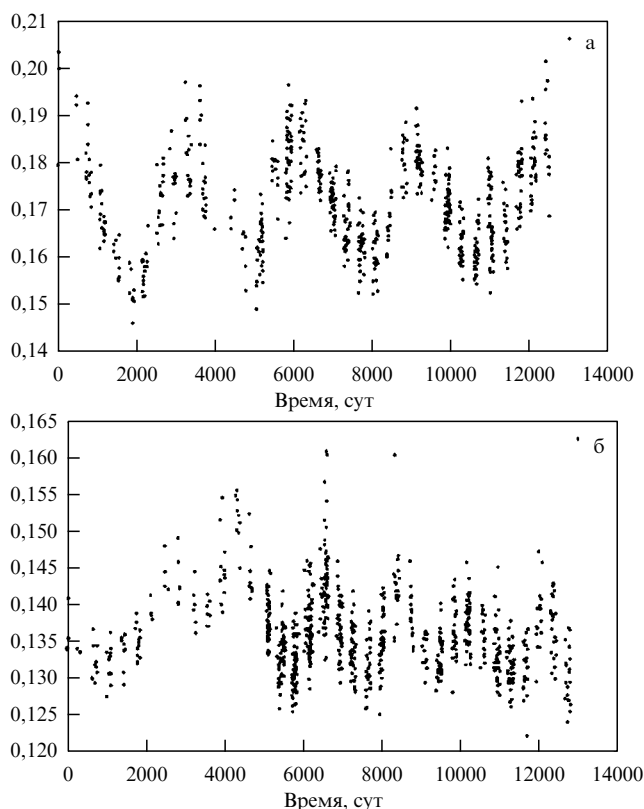


Рис. 16. Примеры данных наблюдений за хромосферной активностью двух звёзд: HD81809 (а) и HD161239 (б).

отошлём читателя к работам [28, 58, 59]), мы покажем полезность вейвлет-анализа не только для изучения глобальных и локальных спектральных свойств, но и для выявления более тонких характеристик периодических или квазипериодических сигналов.

Рассмотрим предложенный в контексте этих задач метод, названный авторами двойным вейвлет-анализом (Double Wavelet Analysis, DWA) [58, 60]. Идея метода состояла во введении параметра, который характеризует отклонение формы звёздного цикла от гармонической. В качестве анализирующего вейвлета используется вейвлет Морле в виде (2) с регулируемым параметром σ , который определяет спектральное (пространственное) разрешение. Если анализируемый сигнал представляет собой периодическую последовательность относительно коротких всплесков, то при большом значении параметра σ (высокое спектральное разрешение) хорошо видна основная частота и кратные гармоники, которых тем больше, чем выше скважность всплесков. При малых σ (скажем, $\sigma = 0,3$) вейвлет (2) имеет вид одиночного всплеска и разрешает каждое колебание, след от которого на вейвлет-плоскости тянется к высоким частотам (малым масштабам), причём максимум энергии уходит настолько далеко от основной частоты, насколько уже сам всплеск. Последнее обстоятельство побудило ввести меру отклонения сигнала от гармонического, определяемую по степени удаления максимума от основной частоты.

Алгоритм состоит в следующем. Сначала проводится вейвлет-преобразование анализируемой периодической (квазипериодической) функции $f(t)$, причём используется вейвлет Морле с хорошим спектральным разрешением ($\sigma > 1$), чтобы с хорошей точностью найти масштаб

таб (характерный период) основного колебания T_c по максимуму в вейвлет-спектре $M_0(\tau)$.

Далее выполняется первый шаг двойного преобразования — вновь вычисляются вейвлет-коэффициенты, но с малым σ , обеспечивающим хорошее временное разрешение,

$$w_1(\tau, t') = W_{\tau, t'}\{f\}. \quad (19)$$

Второй шаг (повторное вейвлет-преобразование) призван выявить, на каком временном масштабе лучше всего проявляется основная частота. Для этого проводится вейвлет-анализ поля $w_1(t')$ для каждого значения τ , причём вычисления выполняются только для одного фиксированного масштаба T_c :

$$\begin{aligned} w_2(\tau, t) &= W_{T_c, t}\{w_1(\tau, t')\} = \\ &= a^{-1/2} \int |w_1(\tau, t')| \psi\left(\frac{t' - t}{T_c}\right) dt'. \end{aligned} \quad (20)$$

На этом этапе вновь требуется хорошее спектральное разрешение, т.е. $\sigma > 1$. И, наконец, вычисляется DWA-спектр:

$$M_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |w_2(\tau, t)|^2 dt. \quad (21)$$

Чем уже отдельные всплески в сигнале, тем дальше пик в спектре M_2 уходит от положения основного пика в исходном вейвлет-спектре M_0 . В качестве параметра негармоничности вводят величину

$$A = \frac{T_c}{\tau^*}, \quad (22)$$

где T_c — масштаб основного цикла, вычисленный на первом шаге, τ^* — временной масштаб (период), на который приходится максимум энергии в спектре M_2 . Для гармонического сигнала $A = 1$, чем больше параметр A , тем сильнее временной ряд напоминает пульсирующий сигнал.

Для данных, представленных на рис. 16, вейвлет-спектры M_0 (тонкие линии) и M_2 (жирные линии) показаны на рис. 17 (с произвольным сдвигом по вертикали). В обоих случаях в спектрах M_0 хорошо виден максимум, соответствующий основному звёздному циклу (2900 и 1900 суток соответственно). В средней части спектра виден всплеск вблизи 365 суток — это результат сезонности наблюдений. В высокочастотной части спектра у звезды HD81809 виден небольшой максимум на масштабе 40 суток — это период обращения звезды (колебания интенсивности излучения обусловлены неравномерным распределением активных областей по поверхности звезды).

Подчеркнём две особенности спектров M_2 . Во-первых, у обеих звёзд наблюдается выраженный сдвиг главного максимума. Параметр негармоничности для них имеет значения $A = 1,5$ и $A = 1,3$ (для различных звёзд значения A составляют от 1,0 до 5 [59]). Во-вторых, обращает на себя внимание тот факт, что при повторном вейвлет-преобразовании в спектрах абсолютно доминируют два пика — основной (это ожидаемый результат) и тот, который соответствует периоду вращения звезды.

Таким образом, метод двойного вейвлет-анализа позволяет идентифицировать слабый высокочастотный периодический сигнал (вращение) при условии наличия вы-

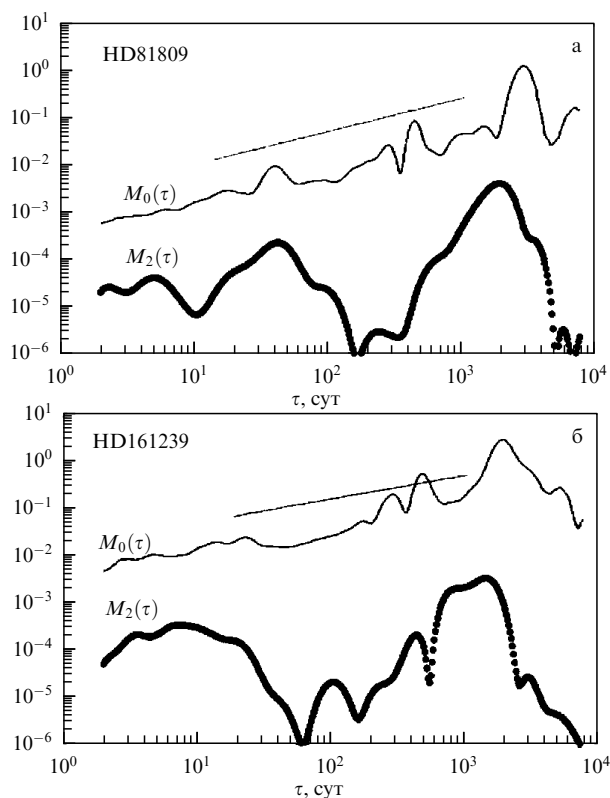


Рис. 17. Результаты обработки данных наблюдений за хромосферной активностью звёзд HD81809 (а) и HD161239 (б). Вейвлет-спектры исходных данных (тонкие линии) и спектры, полученные после двойного вейвлет-анализа (жирные линии). (Адаптированный рисунок из работы [58].)

раженной низкочастотной составляющей. Такой метод измерения периода вращения звезды можно сравнить с настройкой радиоприёмника по качеству звука: вращая ручку настройки радиоприёмника (соответствует перебору частот в спектре M_2), мы ищем частоту, на которой громкость полезного сигнала низкой частоты (циклическая звёздная активность) максимальна. Если мы нашли максимум, то считаем, что определили и частоту передающей радиостанции (период вращения звезды).

Заметим, что в некоторых случаях этот метод позволил выделить период вращения даже при отсутствии его следа в спектре исходного сигнала [58]. Для звезды HD161239 двойной вейвлет-анализ дал значение периода вращения 7 суток, в то время как в различных источниках период вращения этой звезды определялся как 10 или 23 суток (выраженного пика, связанного с периодом вращения, в спектре M_0 нет).

Отметим, что в работах [61, 62] был предложен близкий алгоритм (с похожим названием "Double wavelet approach"), но выполняемый с иной целью и в иной последовательности действий. В нём для анализа систем с двумя существенно различающимися доминирующими частотами сначала выделяется высокая частота, а повторное преобразование используется для изучения процессов, обуславливающих модуляцию высокой частоты.

Важно, что, наблюдая за активностью звёзд, можно регистрировать только интегральное излучение. Упомянутое выше картирование проводится при помощи сопоставления интегральных сигналов, полученных на мно-

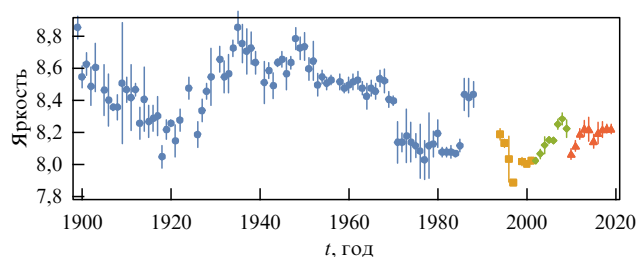


Рис. 18. Долговременные вариации среднегодовой яркости звезды V833 Тау, минимальные значения которой соответствуют максимальной активности (наибольшему числу звёздных пятен). Источники наблюдательных данных и подходы к их объединению подробно изложены в [64].

гих длинах волн и в разные моменты времени. Выделение в спектре интегрального излучения частоты вращения звезды, следовательно, означает, что на поверхности звезды возникают области с повышенным или пониженным излучением и время жизни этих областей (структур) должно превышать время оборота звезды. Кроме того, звёзды, как и практически все нетвёрдые вращающиеся космические объекты, характеризуются дифференциальным вращением (угловая скорость вращения неоднородна и по широте, и по радиусу). Это означает, что активные области дают вариацию общего излучения с различной частотой (вариации угловой скорости могут достигать 20%). В работе [63] был предложен способ оценки степени дифференциальности вращения по результатам вейвлет-анализа интегрального излучения звёзд. Дело в том, что если в сигнале присутствуют две близкие частоты, а спектральное разрешение вейвлета недостаточно для того, чтобы их разделить, то на вейвлет-плоскости возникают биения (см. рис. 1). Суть метода [63] состоит в том, что, оптимизируя спектральное разрешение вейвлета, — подбирая параметр σ в формуле (2), добиваются заметного эффекта биения, по частоте которого оценивают разброс частот, т.е. угловых скоростей вращения отдельных областей, находящихся на различных широтах.

Последний рассматриваемый нами пример вейвлет-обработки звёздных данных касается недавних результатов анализа излучения звезды V833 Тау [64]. Эта звезда интересна по двум причинам: беспрецедентной для звёзд длительности наблюдений (около 120 лет) и сложного характера зависимости излучения от времени, допускающего широкий набор интерпретаций. Нетрудно видеть (рис. 18), что в зависимости от выбора наблюдаемого интервала времени длиной в несколько декад, характерной для подавляющего большинства звёзд, V833 Тау проявляет качественно различное поведение. На данном примере можно сделать замечание общего характера, что наблюдение 10 характерных времён эволюции одной звезды может быть более ценным, чем наблюдение одного характерного времени 10 разных звёзд. В литературе квазипериодичность V833 Тау описывается как составная, а именно выделяются колебания с периодами 78,25, 18,8, 6,4 и 2,5 года [65]. Широкий диапазон разрешаемых масштабов позволяет поставить вопрос о том, в какой степени колебания с этими периодами изолированы и доминируют над остальными. С альтернативной точки зрения колебания V833 Тау могут формировать непрерывный турбулентный спектр аналогично

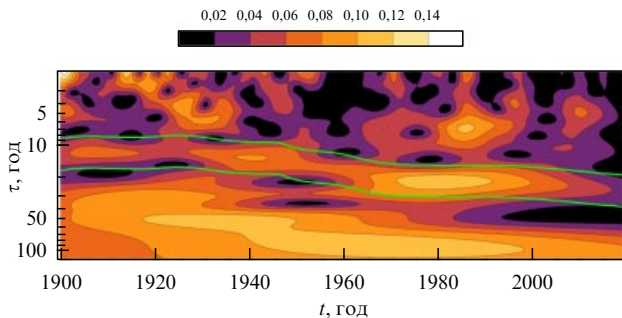


Рис. 19. (В цвете онлайн.) Вейвлет-спектрограмма магнитной активности V833 Тау ($|w(\tau, t')|$ при $\kappa = -1$). Зелёные линии показывают диапазон масштабов, в котором отслеживаются колебания для дальнейшей реконструкции. (Из работы [64].)

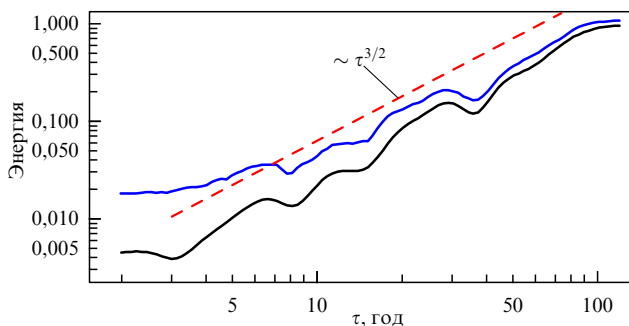


Рис. 20. (В цвете онлайн.) Интегральный вейвлет-спектр для V833 Тау (чёрная кривая). Синяя кривая показывает верхнюю границу доверительного интервала (0,9). (Из работы [64].)

тому, как в разделе 3.1 интерпретированы квазидвухлетние колебания солнечной активности.

Вейвлет-спектрограмма V833 Тау на рис. 19 демонстрирует большое разнообразие многомасштабных колебаний. Прежде всего, мы не видим яркой полосы, которая есть на спектрограмме Солнца (см. рис. 8). С некоторой осторожностью можно различить несколько структур, между масштабами 10 и 40 лет, где как раз ожидается действие динамо звезды. В области, выделенной зелёными линиями, можно видеть некоторую связанность структуры (пиков) во времени. Интегральный вейвлет-спектр для данных V833 Тау показан на рис. 20. С одной стороны, мы не наблюдаем выраженного локального максимума, который можно было бы качественно сравнить с максимумом солнечного спектра (см. рис. 9). В окрестности $\tau \approx 30$ имеется скачок, который является вкладом колебаний в пределах полосы, выделенной на спектрограмме. Можно провести моделирование по методу Монте-Карло, используя стандартную ошибку, показанную столбиком для каждой точки данных на рис. 18, чтобы оценить верхнюю границу доверительного интервала (на рис. 20 показан уровень для вероятности 0,9). Видно, что максимум при $\tau = 30$ не является достаточно значимым. С другой стороны, интегральный вейвлет-спектр V833 Тау может быть описан степенным законом с $\tau^{3/2}$. На коротковременную часть спектра ($\tau \lesssim 10$), вероятно, влияет шум, но остальная часть относительно статистически устойчива. Колебания активности V833 Тау в диапазоне $3 < \tau < 100$ можно сопоставить с поведением колебаний солнечной активности, которая наблюдается в масштабах $0,1 < \tau < 10$. Тогда кажется есте-

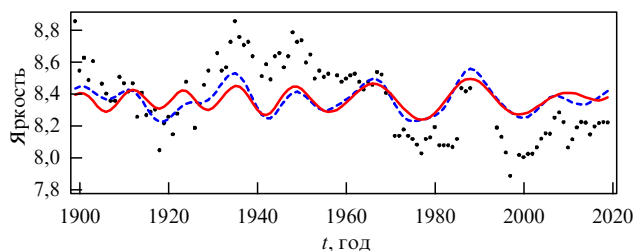


Рис. 21. (В цвете онлайн.) Варианты восстановления основного цикла звезды V833 Тау: реконструкция по вейвлет-коэффициентам, между зелёными линиями на рис. 19 (красная кривая) и реконструкция по фиксированному диапазону масштабов $10 < \tau < 40$ (синяя штриховая кривая). Исходные данные показаны чёрными точками. (Из работы [64].)

ственным предположить, что если V833 ТАУ и имеет динамо-цикл солнечного типа, то его период в 10 раз длиннее, чем у солнечного динамо. Однако имеющихся данных ещё просто недостаточно, чтобы его изолировать.

Интересно, что V833 Тау — довольно молодая и очень активная звезда. Её период вращения составляет менее 2 суток, что может означать высокую степень насыщенности динамо-процесса. Для такого режима звёздного динамо характерно квазистационарное магнитное поле с хаотическими вариациями. Обсуждение всех теоретических предпосылок можно найти в [64]. Здесь мы покажем лишь, как с помощью обратного вейвлет-преобразования можно выделить динамо-цикл V833 Тау, если настаивать на поиске колебаний, сопоставимых с 11 годами солнечного цикла. Стандартный подход, доступный для любого метода фильтрации, состоит в том, чтобы оставить сигнал, содержащийся в некотором выделенном диапазоне масштабов. В рамках вейвлет-анализа раскрывается масштабно-временная развёртка сигнала, что позволяет отследить переходные процессы. На рисунке 21 представлены две возможные реконструкции, одна из которых выполняется с использованием вейвлет-коэффициентов в фиксированном диапазоне шкал $10 < \tau < 40$ (синяя штриховая кривая), а другая — в адаптивной полосе, показанной на рис. 19. Наиболее значимое отличие можно наблюдать в интервале 1920–1930 гг., где синяя штриховая кривая имеет сбой фазы, тогда как характерный масштаб колебаний, отслеживаемых красной кривой, заметно сокращается и не теряет осциллирующего характера. Такое поведение ещё раз подчёркивает отличие наблюдаемых вариаций V833 Тау от солнечной активности (см. вейвлет-анализ фазы цикла Швабе в [66]).

3.3. Вейвлет-анализ климатических и геофизических данных

Едва ли не самым востребованным вейвлет-анализ оказался в области наук о Земле, особенно в задачах климатологии, земного магнетизма и солнечно-земных связей. Число работ, использующих в этих областях вейвлеты, составляет тысячи, и даже беглый их обзор представляет сложности, да и навряд ли интересен без выделения конкретной физической проблемы. Поэтому мы следуем только поставленной нами задаче об иллюстрации возможностей метода. С точки зрения вейвлет-методов большинство работ можно отнести к двум группам. Первая касается анализа изменчивости тех или иных

характеристик и выявления цикличности в самой различной форме. Вторая группа работ касается анализа пространственной и/или временной корреляции сигналов различной природы с целью выявления взаимосвязей и физических механизмов, их обуславливающих.

К первой группе относятся многочисленные работы по анализу данных наблюдений, от самых простых квазипериодических процессов (сезонные вариации) к более сложным (Эль-Ниньо и пр.), от поиска следов слабых периодических воздействий (воздействие спутников, планет и пр.) до аперриодических процессов, таких как землетрясения и цунами, или вариации полярности геомагнитного поля, разделение (фильтрация) периодических изменений и длинновременных трендов.

Вторая группа включает статьи по анализу солнечно-земных связей (тут поиски корреляций геофизических сигналов различной природы с солнечной активностью), корреляциям (часто не очевидным) изменчивости самых различных климатических и геофизических характеристик в различных точках планеты, выявлению антропогенного влияния на природу.

Что касается первой группы работ, то восстановление данных по изменению климата Земли имеет не только научный, но и очевидный практический интерес. Речь идёт о сравнительно небольших (порядка градусов) изменениях температуры за достаточно длинные (как минимум десятки лет) промежутки времени. В то же время саму среднюю температуру поверхности Земли получают по мгновенным данным метеостанций, которые существенно изменяются от места к месту, от дня к дню и от ночи к дню. Разделение глобальных и локальных, медленных (климатических) и относительно быстрых (погодных) вариаций требует адекватной фильтрации данных.

Продемонстрируем возможности обратного вейвлет-преобразования на примере выделения долговременного температурного тренда в данных о температуре в Центральной Англии (район Стратфорда-на-Эйвоне), имеющих с середины XVII века [67]. Это наиболее длинный временной ряд региональных данных, не подверженный, насколько это возможно, непосредственному влиянию близлежащих больших городов. Существует ещё несколько временных рядов примерно такой же длины для измерений температуры в отдельных населённых пунктах. Сопоставление этих данных с региональными данными о температуре в Центральной Англии, в том числе методами вейвлет-анализа, представляет несомненный интерес, но выходит за рамки данного обзора.

При анализе этого ряда было проведено прямое вейвлет-преобразование, проанализирован интегральный вейвлет-спектр, на его основе разделены короткопериодические температурные вариации (погода в широком смысле слова) и долгопериодические вариации (климат), и по второй части проведено обратное вейвлет-преобразование. Естественно, желательно, чтобы граница между погодой и климатом была выражена как можно ярче и проходила по глубокому минимуму в интегральном вейвлет-спектре, но реально этот минимум (за который принимается период около 50 лет) не такой глубокий, как хотелось бы. Поэтому разделение между климатическими изменениями и погодными колебаниями оказывается до некоторой степени условным, и на рис. 22 представлены результаты восстановления с тремя верхними границами фильтрации: $\tau < 200$ лет (1), $\tau < 120$ лет (2) и $\tau < 40$ лет (3).

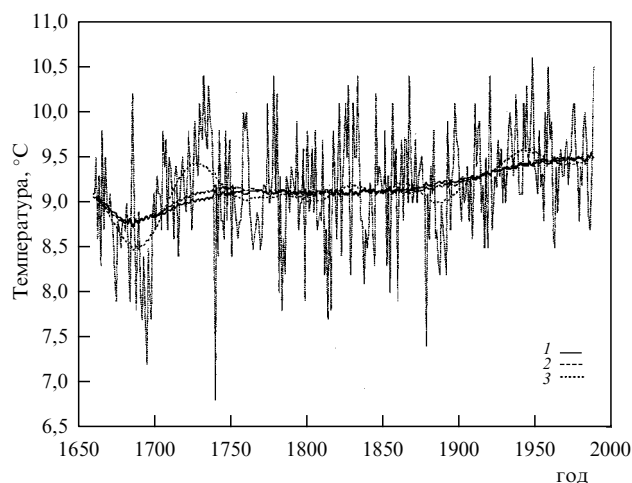


Рис. 22. Результаты вейвлет-фильтрации вариаций температуры в Центральной Англии с различными верхними границами: $\tau < 200$ лет (1), $\tau < 120$ лет (2), $\tau < 40$ лет (3) [67].

На рисунке 22 видно, что начиная с середины XIX века среднегодовая температура в Центральной Англии действительно растёт и достигает максимальных значений в наши дни, зато на рубеже XVII и XVIII веков видно заметное понижение среднегодовых температур, которое иногда называют малым ледниковым периодом. В целом эти результаты вписываются в концепцию глобального потепления, но трудно утверждать, что они сами по себе подтверждают все детали этой концепции. Как это часто бывает, даже совершенные методы анализа данных об одном трассере не позволяют узнать всё то, что интересует исследователя.

Значительный опыт использования вейвлетов накоплен и в задачах исследования вариаций магнитного поля Земли. Анализ квазипериодичностей геомагнитного поля на масштабах в сотни и тысячи лет по данным из осадочных пород из различных регионов Земли привёл авторов к выводу об отсутствии выделенных масштабов в диапазоне 300–4000 лет [68]. Заметим, что вывод об отсутствии выделенных частот часто не менее важен, чем вывод о том, что выделенная частота есть.

Едва ли не самым длинным во времени рядом наблюдательных данных, в которых исследователи пытаются найти следы квазипериодичностей, является шкала геомагнитной полярности (ШГП), которая несёт информацию только о знаке магнитного поля (точнее, говорит о том, в каком полушарии Земли находился северный магнитный полюс). На сегодня стандартная шкала содержит сотни инверсий магнитного поля за последние 250 млн лет и обсуждаются перспективы её продления на более ранние эпохи. Сама возможность адекватной оценки спектральных характеристик сигнала только по результатам регистрации смены его знака далеко не очевидна. Вейвлет-анализ различных модельных сигналов случайных процессов и построенных по ним аналогов шкалы полярности, проведённый совместно с анализом ШГП, позволил авторам утверждать, что для низкочастотной части спектра (к низким частотам в этом случае относятся колебания с периодом более 1 млн лет) показатель γ степени в спектре $E(\omega) \sim \omega^{-\gamma}$ близок к единице [69]. Более поздние попытки методами вейвлет-анализа найти выделенные квазипериодичности в шкале поляр-

ности были предприняты в работе [70], в которой были обнаружены следы периода около 50 млн лет, эти следы были сопоставлены с данными моделей геодинамо [71].

Что касается вейвлетной кросс-когерентности (13), то она позволяет выделить нетривиальные корреляции между наблюдаемыми явлениями. Так, совместный анализ индекса Северо-Атлантической осцилляции и солнечной активности выявил квазипериодическую смену знака когерентности с периодом около 50 лет [72].

В качестве примера анализа долговременных солнечно-климатических корреляций приведём работу по изучению реконструированных по антарктическим льдам данных вариации температуры и углекислого газа за 11000 лет и их сопоставление с реконструированными за этот же период данными по солнечной активности [73]. В спектрах колебаний всех трёх рядов был найден ряд совпадающих пиков, но только колебания на масштабах, близких к 1000 лет, показали устойчивую корреляцию вариаций температуры и солнечной активности со стабильным сдвигом фазы. При этом корреляция вариации углекислого газа и температуры оказалась невысокой и неустойчивой.

Интересным примером пространственного корреляционного анализа может служить работа по обработке археомагнитных данных (оценка амплитуды геомагнитного поля во время обжига керамических изделий, собранных археологами в данном регионе), собранных в трёх районах: Болгарии, Грузии и Средней Азии [74]. Данные в каждой группе представляли собой неравномерную случайную выборку на интервале времени от 2000 г. до н.э. до настоящего времени. Спектр каждой выборки характеризовался набором пиков, среди которых наиболее чётко выделялся во всех трёх рядах пик, соответствующий периоду колебаний 1750 лет, причём сдвиги фаз на этой частоте во всех трёх сигналах позволили идентифицировать волну возмущений геомагнитного поля, распространяющуюся с востока на запад со скоростью порядка 0,2 град/год. В контексте анализа пространственных корреляций данных наблюдений за магнитным полем Земли упомянем работу по анализу кросс-корреляции данных геомагнитных обсерваторий, расположенных в разных точках Земли [75].

Вертикальная составляющая геомагнитного поля, наблюдаемая наземными обсерваториями Международной сети магнитных обсерваторий в реальном времени, использовалась для анализа индуцированных магнитных полей, создаваемых движением цунами и геомагнитного поля [76]. Основное внимание было сосредоточено на мелкомасштабных геомагнитных вариациях, вызванных цунами 27 февраля 2010 года по данным обсерваторий острова Пасхи (IPM) и Папэте (PPT). Для обнаружения возмущений цунами в геомагнитных данных использовался вейвлет-анализ и метод максимальной вариации (MVA). Было показано, что в такой комбинации методы можно использовать для калибровки моделей цунами и применять их в реальном времени для анализа сценариев прогнозирования цунами.

4. Вейвлет-анализ астрофизических изображений

Исторически современная физика сформировалась как экспериментальная наука, т.е. как наука, имеющая дело со сравнительно простыми, до некоторой степени искус-

ственными ситуациями: шар, который бросал с башни Галилей, падает совсем не так, как тонкий лист бумаги из окна дома. Однако в ходе развития конкретной области физики рано или поздно встаёт задача сопоставления таких слегка идеализированных концепций с гораздо более хаотическим окружающим нас миром. Например, приходится вписывать идеи лабораторной гидродинамики в контекст физики атмосферы или физики моря. Мы выбираем здесь для демонстрации возможностей и трудностей применения вейвлетов задачи, связанные с изучением спиральных галактик методами радиоастрономии. Эти задачи оказываются, как нам кажется, особенно трудными, потому что у людей отсутствуют органы чувств, которые позволяют непосредственно воспринимать информацию, получаемую в радиоастрономии. Изображение, полученное на оптическом телескопе, можно, по крайней мере на первых порах, воспринимать как объективную реальность. Напротив, карта, скажем, поляризованного излучения какой-нибудь спиральной галактики представляется как набор плохо упорядоченных пятен, и требуются существенные усилия для того, чтобы, разумным образом комбинируя радиоданные друг с другом и с оптическим изображением, можно было сделать его пригодным для научного анализа. Как видно из самой терминологии, на изображениях спиральных галактик, полученных в различных трассерах, видны спиральные структуры, так называемые спиральные рукава. Спиральные рукава, полученные по трассерам, визуализирующим распределение межзвёздного газа или звёзд, как правило, не совпадают с рукавами, полученными по трассерам, визуализирующим распределение магнитного поля. Конечно, бывают простые примеры, когда локализация конкретного спирального рукава не вызывает сомнений, но случается, что при поверхностном знакомстве с изображением человек видит, скажем, два спиральных рукава, а по мере работы он начинает видеть четыре, а потом и шесть рукавов. Выделение спиральных рукавов и соотношений между ними позволяет понять, какие физические процессы приводят к их формированию. Для этого нужно научиться измерять угол закрутки этих рукавов, что практически невозможно без алгоритмически описанных методов выделения и количественной оцифровки этих объектов.

Важен и ещё один аспект проблемы. Спиральная структура образуется не только в распределении газа и звёзд в галактиках, но и в распределении магнитного поля. Эти магнитные поля наблюдают и измеряют по эффекту Фарадея вращения плоскости поляризации синхротронного излучения при прохождении его через замагниченную плазму. Классическое описание этого эффекта, который находит применение (в несколько другой форме) и в сахарной промышленности, приведено в книге В.Л. Гинзбурга [77]. Обычно речь идёт о среде, которая одновременно излучает и вращает волну, а параметры задачи таковы, что наблюдения разумно вести в радиодиапазоне (классический диапазон длин волн, используемый в этой задаче, от 3 до 20 см). В результате не только поворачивается плоскость поляризации, но и уменьшается степень поляризации (обычно она составляет не порядка 70 %, а лишь около 10 %). В простых ситуациях поляризационные углы ψ излучения с разными длинами волн λ подчиняются правилу

$$\psi(\lambda) = \psi_0 + \text{RM}\lambda^2, \quad (23)$$

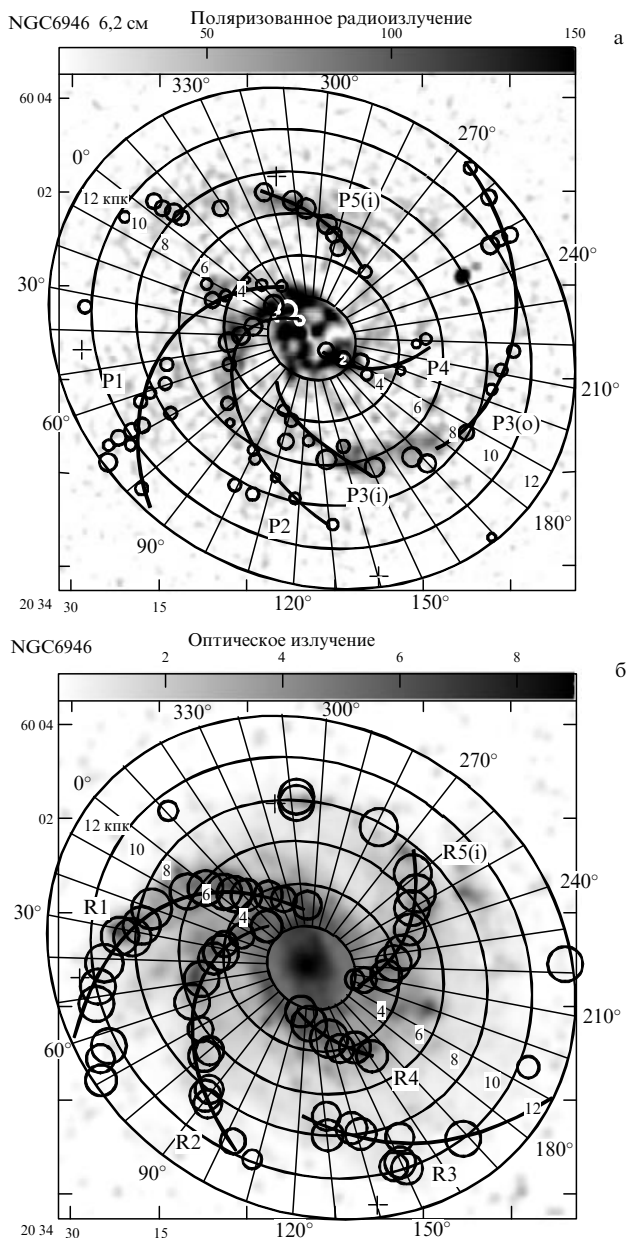


Рис. 23. Карты поляризованного радиоизлучения (а) и оптического излучения (б) галактики NGC6946 с нанесёнными на них максимумами в одномерных азимутальных вейвлет-образах. Размер кружков соответствует масштабу вейвлета, на котором этот максимум наблюдается. (Рисунок из работы [79].)

где мера фарадеевского вращения RM пропорциональна напряжённости магнитного поля, а угол ψ_0 содержит информацию о направлении магнитного поля (см. подробнее [78]). Естественно, что речь идёт о наблюдениях радиоизлучения с различными длинами волн, т.е. о многочастотных наблюдениях.

Первая попытка вейвлет-идентификации спиральных рукавов была предпринята в работе [79]. Изображения галактики NGC6946 проектировались на галактическую плоскость, после чего разбивались на концентрические кольца. В каждом кольце проводился одномерный (по азимутальному углу) вейвлет-анализ и положения локальных максимумов наносились на карту кружками, размер которых соответствовал масштабу вейвлета. Результат для изображений этой галактики в поляризован-

ном радиоизлучении и оптическом диапазоне показан на рис. 23. Сплошными линиями на этом рисунке показаны результаты параметризации соответствующей структуры логарифмической спиралью. Приведённые изображения чётко показывают, что магнитные рукава существенно смещены относительно газовых рукавов, наблюдаемых в оптическом диапазоне.

Такой подход достаточно трудоёмок и применим, когда количество изучаемых объектов сравнительно невелико и их можно рассматривать индивидуально. При массовых наблюдениях, в которых объём наблюдательной информации таков, что не позволяет просмотреть и обдумать каждое изображение индивидуально, естественно использовать двумерные вейвлеты.

4.1. Изотропный анализ

Вейвлет-образ двумерной функции определим как

$$w(\tau, \mathbf{x}') = \frac{1}{\tau^\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) \psi^* \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\tau} \right) d\mathbf{x}, \quad (24)$$

где переменная τ задаёт пространственный масштаб, $\mathbf{x} = (x, y)$, а $f(\mathbf{x})$ — двумерная анализируемая функция. Выбор анализирующего вейвлета становится ещё шире: наряду с простыми осесимметричными функциями для анализа структур можно использовать достаточно сложные функции, описывающие не только разного вида волновые пакеты, но и структуры специального вида (например, спиральные), приводящие к появлению дополнительных параметров преобразования. В качестве простейшего изотропного вейвлета широко используется двумерный вариант "мексиканской шляпы": $\psi(\rho) = (2 - \rho^2) \exp(-\rho^2/2)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, а также более сложные осесимметричные функции, позволяющие улучшить спектральное разрешение вейвлета (см., например, [80]).

Формула обращения для *изотропного* преобразования (24) является естественным обобщением формулы (4) и имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} w(\tau, \mathbf{x}') \psi \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{a} \right) \frac{d\tau}{\tau^{5-\kappa}} d\mathbf{x}', \quad (25)$$

где

$$C_\psi = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2}{|\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k}, \quad (26)$$

а $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ — двумерный волновой вектор.

Прежде чем коснуться анализа спиральной структуры, обсудим возможности статистического анализа галактических изображений, конкретно, анализа спектральной плотности пространственных флуктуаций регистрируемых полей и корреляции этих флуктуаций в различных полях.

В вейвлет-представлении распределение энергии пульсаций по масштабам характеризуется *интегральным* вейвлет-спектром, определяемым как средняя энергия всех вейвлет-коэффициентов данного масштаба τ на всей плоскости:

$$M(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |w(\tau, \mathbf{x}')|^2 d\mathbf{x}'. \quad (27)$$

Вейвлет-спектр (27) можно легко связать со спектром Фурье. В изотропном случае эта связь имеет вид

$$M(\tau) = \frac{\tau^{4-2\kappa}}{2\pi} \int_0^\infty E(k) |\hat{\psi}(\tau k)|^2 dk, \quad (28)$$

где $E(k)$ — спектральная плотность пульсаций,

$$E(k) = \int_{|\mathbf{k}|=k} |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}. \quad (29)$$

Соотношение (28) показывает, что вейвлет-спектр всегда представляет собой сглаженную версию спектра Фурье.

При обсуждении свойств многомасштабных полей наряду со спектрами часто используют структурные функции

$$S_q(l) = \langle (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{l}))^q \rangle_{|\mathbf{l}|=l}, \quad (30)$$

где угловые скобки $\langle \dots \rangle$ подразумевают усреднение по пространству. При этом спектральной плотности соответствует структурная функция второго порядка S_2 . Заметим, что если структурная функция второго порядка следует степенному закону

$$S_2(l) \sim l^\lambda, \quad (31)$$

то спектральная плотность энергии

$$E(k) \sim k^{-(\lambda+1)}, \quad (32)$$

а степень вейвлет-спектра зависит от параметра κ в определении (24). При $\kappa = 2$ получают для спектра $M(\tau)$ тот же степенной закон, что и для структурной функции:

$$M(\tau) \sim \tau^\lambda; \quad (33)$$

а при выборе $\kappa = 3/2$ получают $M(\tau) \sim \tau^{\lambda+1}$, что удобно, если вейвлет-спектр предполагается сравнивать со спектром Фурье $E(k)$. Заметим, что параметр масштаба τ имеет тот же смысл (и размерность), что и расстояние l в структурной функции (30).

Следует сделать важное замечание относительно использования вейвлетов для выделения степенных законов в спектрах. Любой вейвлет имеет собственный спектральный образ, хвосты которого сами по себе могут следовать степенной зависимости. Следовательно, скорость затухания этих хвостов и определяет предельную скорость убывания спектра, которая может быть обнаружена данным вейвлетом.

Ещё осторожнее нужно быть при использовании структурных функций. Вычисление S_2 , в соответствии с формулой (30), можно интерпретировать как вычисление вейвлет-спектра (27) с помощью специфического (анизотропного) вейвлета, образованного разностью двух дельта-функций, отстоящих друг от друга на единичное расстояние:

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \delta(\mathbf{x}) - \delta(\mathbf{x} - \mathbf{e}), \quad (34)$$

где \mathbf{e} — единичный вектор. Это очень "плохой" вейвлет, поскольку, имея прекрасную локализацию в физическом пространстве, он неизбежно имеет очень плохое спектраль-

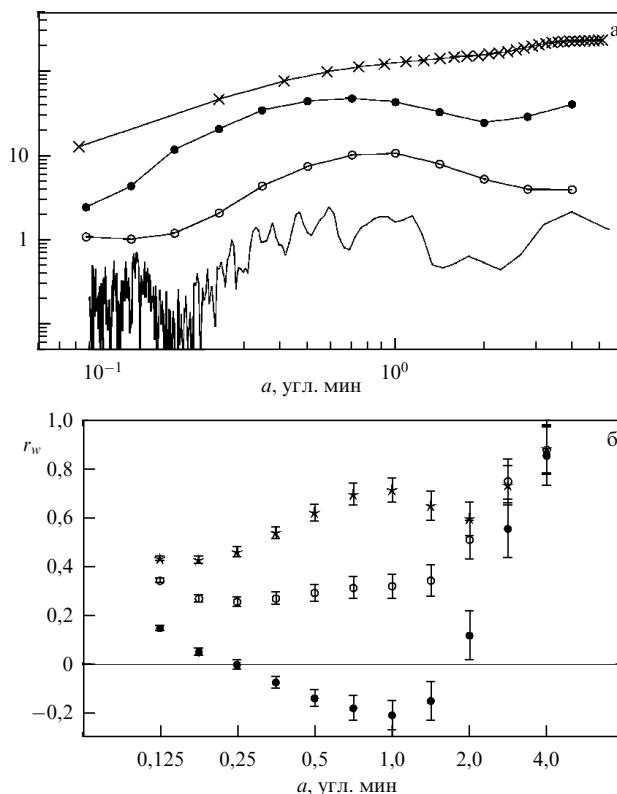


Рис. 24. Спектральные характеристики изображения галактики NGC6946: структурная функция, вейвлет-спектры с двумя различными анализирующими вейвлетами и спектр Фурье (сверху вниз на рис. а) и вейвлетная кросс-корреляция трёх пар изображений (б): водород-поляризованное радиоизлучение (чёрные точки), водород-тепловое излучение (звёздочки), водород-нетепловое излучение (светлые кружки). (Из работы [80].)

ное разрешение. Это означает, что структурные функции дают очень плохое разрешение по масштабам и могут использоваться только тогда, когда есть уверенность в гладком поведении спектральной плотности. Иначе говоря, если имеется поле, спектр которого представляет собой совокупность нескольких пиков, структурные функции могут превратить эти пики в гладко убывающую зависимость.

Сделанные выводы иллюстрирует рис. 24, на котором показаны спектральные характеристики карты поляризованного радиоизлучения той же галактики NGC6946 (структурная функция, два вейвлет-спектра и спектр Фурье). Можно видеть, что гладкая форма графика структурной функции (верхняя кривая) действительно теряет всякую информацию о доминирующих масштабах (в данном случае это масштабы порядка $0,5' - 1'$, соответствующие ширине рукавов). Оптимальным результатом кажется вейвлет-спектр, полученный с помощью функции РН (вторая кривая снизу), который свободен от многочисленных деталей, присущих спектру Фурье, но чётко идентифицирует максимум в спектре энергии.

Рисунок 24 взят из работы [80], в которой анализировались изображения галактики NGC6946, полученные в девяти различных диапазонах радио- и оптического излучения. Большой интерес представляет связь между различными видами излучений, для анализа которой в этой работе для каждой пары изображений

была посчитана вейвлетная кросс-корреляционная функция

$$r_w(\tau) = \frac{\int w_1(\tau, \mathbf{x}) w_2^*(\tau, \mathbf{x}) d\mathbf{x}}{(M_1(\tau) M_2(\tau))^{1/2}}. \quad (35)$$

Поскольку величина r_w есть статистическая характеристика, неопределённость в её оценке $\Delta r_w(\tau)$ обусловлена количеством использованных при её вычислении независимых точек n (зависит от масштаба и принимается равной $n = (L/\tau)^2$) и самим уровнем корреляции [81]:

$$\Delta r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}. \quad (36)$$

На рисунке 24б показана вейвлет-корреляция для пар распределений водорода, поляризованного радиоизлучения и теплового излучения. Можно видеть, насколько отличаются эти три зависимости. Нижняя кривая даёт существенные отрицательные значения на масштабах порядка ширины галактических рукавов, показывая, что поляризованное радиоизлучение, которое является индикатором наличия магнитных полей, сильнее вне газовых рукавов. На рисунке показаны и погрешности определения величины r_w . Увеличение погрешности на больших масштабах происходит в силу сокращения количества независимых точек, используемых при вычислении коэффициента корреляции.

Такой помасштабный кросс-корреляционный анализ был применён при обработке радиоизображений галактик М31 и М33 [82] и галактики М83 [83].

4.2. Анизотропный анализ

Для анализа структуры спиральных галактик привлекательным становится использование *анизотропных* вейвлетов, т.е. семейства функций, которые помимо масштаба и положения имеют третью характеристику — ориентацию. Простейший вещественный анизотропный вейвлет можно построить на основе той же "мексиканской шляпы", сохранив при переходе на плоскость степенную зависимость только по одной координате. Получается функция $\psi(x, y) = (1 - y^2) \exp[-(x^2 + y^2)/2]$, названная в работе [84] "техасской шляпой", чтобы подчеркнуть её отличие от осесимметричной "мексиканской шляпы".

Вейвлет-преобразование двумерного поля $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x, y)$, при использовании анизотропной анализирующей функции имеет вид

$$w(\tau, \varphi, \mathbf{x}') = \frac{1}{\tau^k} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) \psi_\varphi\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\tau}\right) d\mathbf{x}, \quad (37)$$

где ориентация вейвлета задаётся углом φ , а остальные обозначения остаются прежними.

Для заданного положения \mathbf{x}' и заданного масштаба τ максимальное по всем углам φ значение $w(\tau, \varphi, \mathbf{x}')$,

$$w_m(\tau, \mathbf{x}') = \max_{0 \leq \varphi \leq \pi} w(\tau, \varphi, \mathbf{x}'), \quad (38)$$

может служить для выделения доминирующего направления, определяемого углом φ_m , таким что $w_m(\tau, \mathbf{x}') = w(\tau, \varphi_m, \mathbf{x}')$.

Распределение энергии пульсаций анализируемой величины по масштабам τ и направлениям ориентации φ

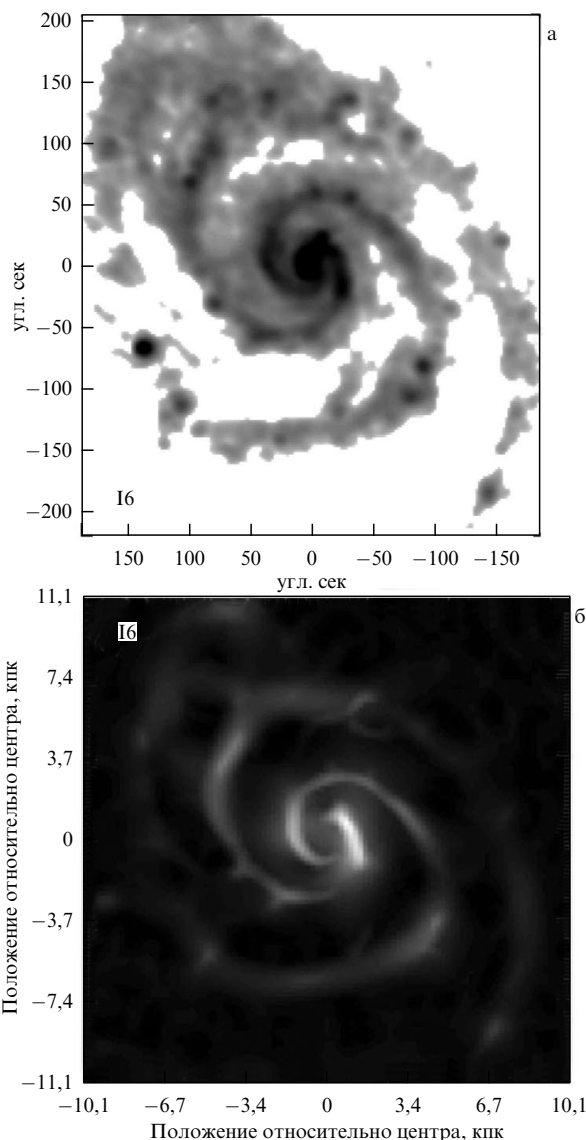


Рис. 25. Карта синхротронного радиоизлучения галактики М51 на длине волны 6 см (а) и результат вейвлет-идентификации рукавов (б). (Из работы [84].)

определяется анизотропным вейвлет-спектром

$$M(\tau, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |w(\tau, \varphi, \mathbf{x}')|^2 d\mathbf{x}'. \quad (39)$$

Впервые анизотропные вейвлеты были применены для количественной идентификации рукавов спиральной галактики М51 [84]. На рисунке 25 показан пример идентификации спиральных рукавов на карте радиоизлучения этой галактики, а на рис. 26 рукава (точнее, их "хребты"), выделенные на различных картах, представлены различными цветными линиями на галактической плоскости. Эти построения позволили авторам выявить систематический сдвиг (до нескольких килопарсеков) газовых рукавов и рукавов, видимых в радиоизлучении. Представление этих данных в логарифмических координатах (рис. 26б, в) позволило проследить за изменением угла закрутки вдоль спирали и прямо увидеть отклонения от логарифмической спирали. Было показано, что два основных магнитных рукава (идентифицируемые по по-

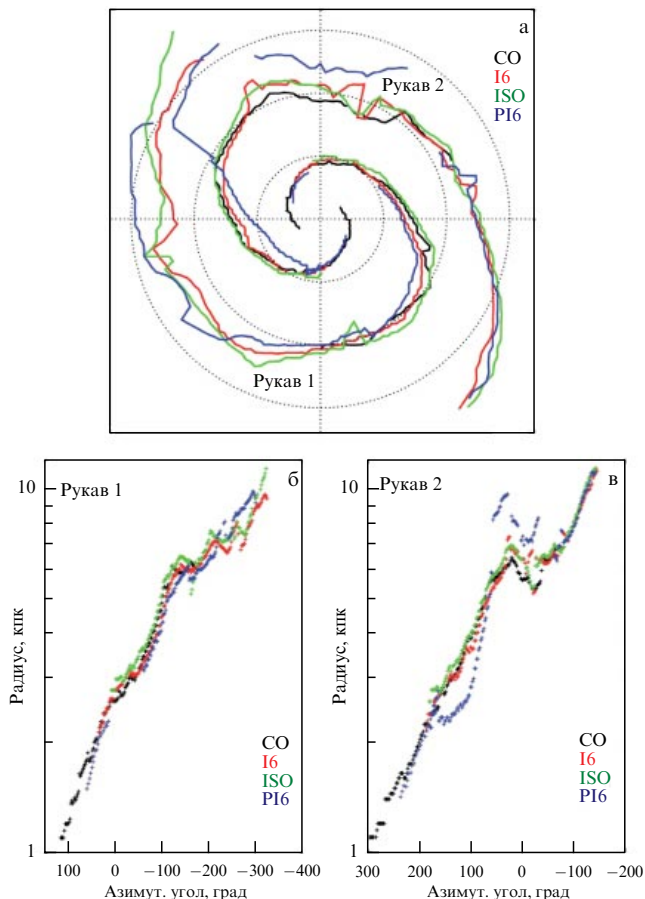


Рис. 26. (В цвете онлайн.) Рукава галактики M51, выделенные из различных карт радиоизлучения, (а) и анализ каждого рукава с точки зрения гипотезы логарифмических рукавов (б, в). (Из работы [84].)

ляризованному радиоизлучению) ведут себя различно: первый достаточно точно следует за газовым рукавом (идентифицируемым по излучению CO), причём магнитное поле направлено вдоль рукава, а второй существенно сдвинут по отношению к газовому рукаву и направление магнитного поля в нём не совпадает с направлением рукава [84].

Ещё одна относительно близкая галактика с выраженной спиральной структурой — галактика M83, была изучена в работе [83]. Эта галактика относится к так называемым галактикам с перемычками. Перемычка в ядре и связанные с ней два главных рукава схематически показаны на рис. 27 на фоне излучения холодного межзвёздного газа. Галактика M83 имеет более сложную структуру, чем M51, что иллюстрирует и помасштабный анализ карт излучения. На этом же рисунке показаны результаты вейвлет-фильтрации с помощью вейвлета "техасская шляпа" для двух масштабов: $\tau = 0,35'$ и $\tau = 0,7'$, с нанесёнными направлениями ориентации доминирующей структуры (угол φ_m). Можно видеть, что на представленных масштабах различается не только общий рисунок спиральной структуры, но и ориентация её элементов.

Из важных выводов проведённого анализа выделим только один, касающийся отсутствия единой для всей галактики закономерности взаимного расположения (и взаимодействия) магнитных и газовых структур. Один магнитный рукав смещён относительно газового, подобно тому как наблюдается в галактике NGC6946, а другой магнитный рукав накрывает газовый — такая картина наблюдается в галактике M51. Этот вывод иллюстрирует рис. 28, на котором на фоне контура газовых рукавов (штриховая линия есть изолиния 20% от максимальной интенсивности излучения) показаны направления силовых линий магнитного поля и ориентации анизотропных структур на масштабе рукава. Левый рукав (внешняя часть рукава II по схеме рис. 27) характеризуется устойчивой корреляцией двух направлений, не наблюдаемой в другом рукаве и перемычке.

На основе анизотропного вейвлет-преобразования можно ввести изотропную и анизотропную составляющие через амплитуду азимутальных мод $n = 0$ и $n = 2$ (мода $n = 1$ равна нулю в силу симметрии $w(\tau, \varphi, \mathbf{x}) = w^*(\tau, \varphi + \pi, \mathbf{x})$):

$$m^i(\tau, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{+\pi} |W(\tau, \varphi, \mathbf{x})|^2 d\varphi, \quad (40)$$

$$m^a(\tau, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{+\pi} |W(\tau, \varphi, \mathbf{x})|^2 \exp(2i\varphi) d\varphi, \quad (41)$$

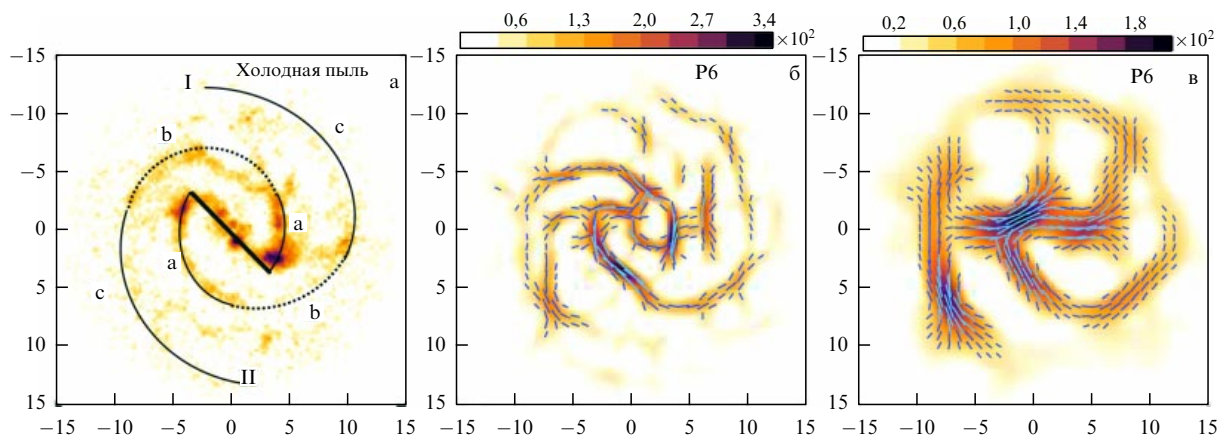


Рис. 27. (В цвете онлайн.) Схема перемычки и двух спиралей галактики M83 на фоне карты излучения холодного межзвёздного газа (а) и результаты вейвлет-фильтрации карты поляризованного радиоизлучения на масштабе $\tau = 0,35'$ (б) и $\tau = 0,7'$ (в). Синие линии показывают ориентацию доминирующей структуры (угол φ_m). Галактические координаты отложены в килопарсеках. (Из работы [83].)

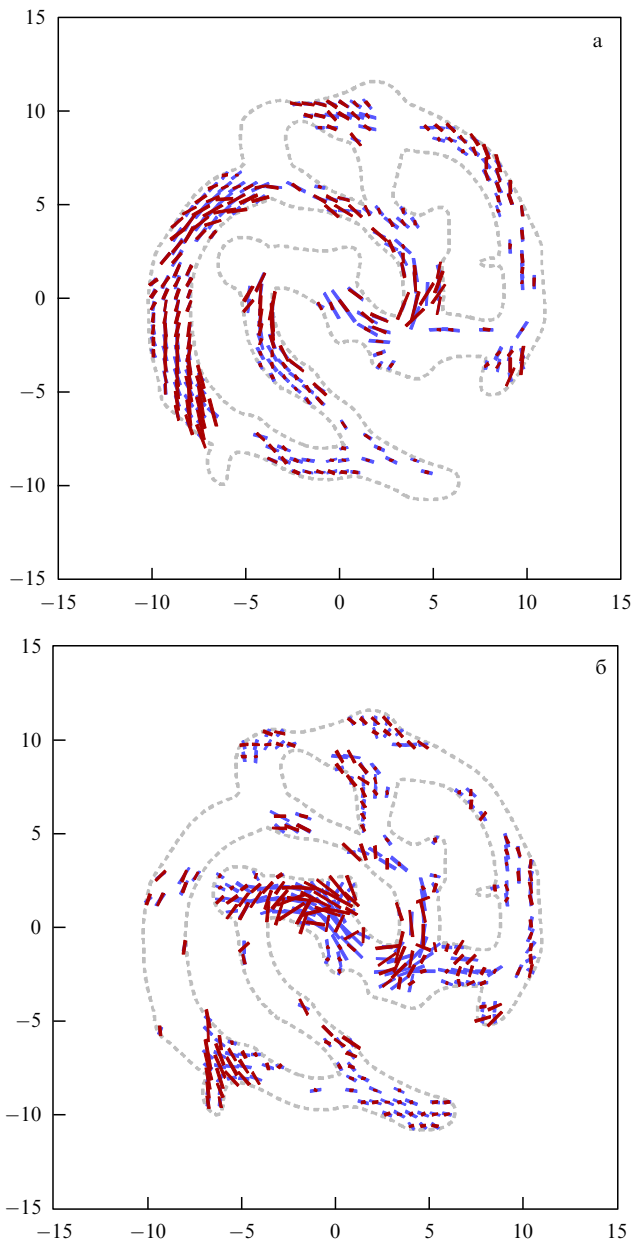


Рис. 28. (В цвете онлайн.) Галактика M83: направление магнитного поля (красные отрезки) и направление ориентации газовых структур (синие отрезки) на фоне контура газовых рукавов (штриховая линия). На рис. а показаны области, в которых оба направления близки (менее 33°), на рис. б — остальные области. (Из работы [83].)

и соответствующие спектры:

$$M^i(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m^i(\tau, \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (42)$$

$$M^a(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |m^a(\tau, \mathbf{x}')| d\mathbf{x}'. \quad (43)$$

Далее естественно ввести степень анизотропии как

$$d_{loc}^w(\tau) = \frac{M^a(\tau)}{M^i(\tau)}. \quad (44)$$

Степень глобальной анизотропии можно вычислить через среднее комплексных вейвлет-коэффициентов

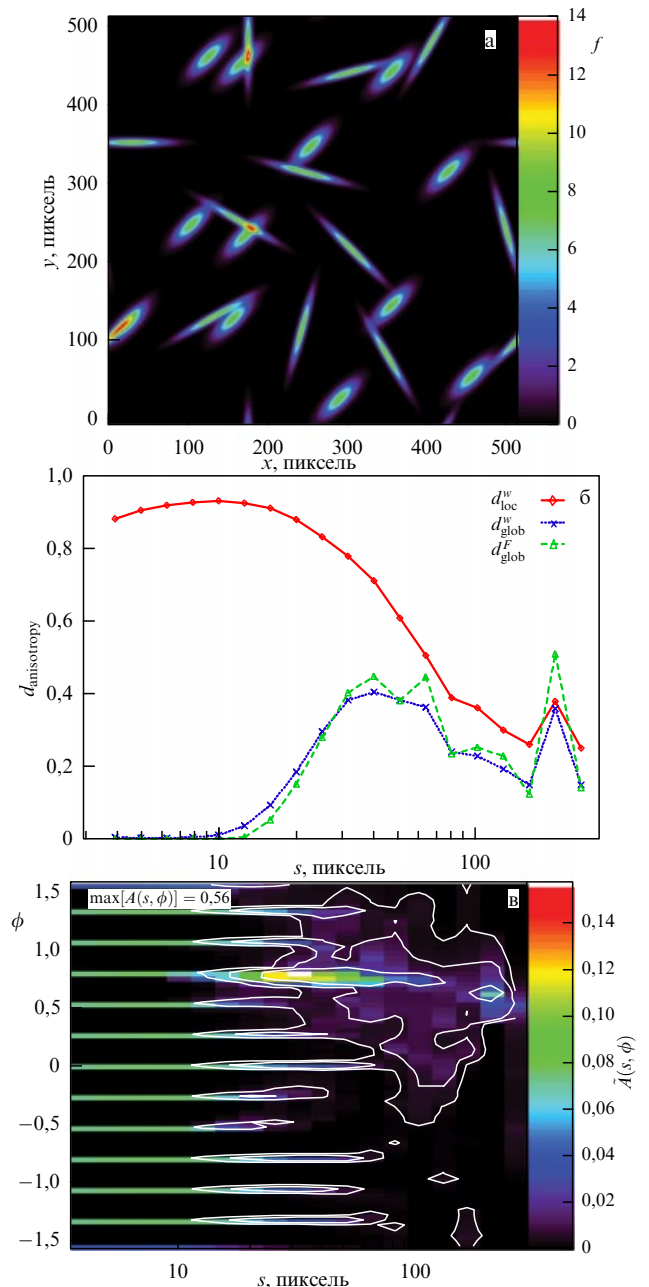


Рис. 29. (В цвете онлайн.) Тестовое распределение анизотропных структур двух типов: все структуры с отношением сторон 3:1 ориентированы под углом 45° градусов, а структуры с отношением сторон 9:1 ориентированы случайным образом. Исходное изображение (а). ИЗОТРОПНЫЙ И АНИЗОТРОПНЫЕ СПЕКТРЫ (б). РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ АНИЗОТРОПИИ ПО МАСШТАБАМ И УГЛУ (в). (Рисунок из работы [85].)

$m^a(\tau, \mathbf{x})$ вместо их амплитуд, так что разные фазы компенсируют друг друга:

$$d_{glob}^w(\tau) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} m^a(\tau, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|}{M^i(\tau)}. \quad (45)$$

На рисунке 29 показан демонстрационный пример, в котором рассмотрено тестовое распределение анизотропных структур одинакового размера, но с разными соотношениями сторон и с различной ориентацией. Сравнение локальной и глобальной степеней анизотропии позволяет оценить чувствительность метода. Глобаль-

ная анизотропия обеспечивается структурами с отношением сторон 3:1 и проявляется только в масштабах от 30 до 60 пикселей. На меньших масштабах доминирует локальная анизотропия, обусловленная структурами с отношением сторон 9:1. Распределение степени анизотропии по масштабам и углам (рис. 29в) показывает значения позиционных углов, по которым распределены анизотропные структуры. Широкий набор тестовых конфигураций рассмотрен в работе [85], где метод использован для анализа нитеобразной мелкомасштабной структуры молекулярных облаков в созвездии Орла (Aquila) и в полярной области (Polaris Flare). В частности, было показано, что в облаке Aquila, где происходит активное звездообразование, доминируют анизотропные структуры выделенного масштаба, имеющие общую ориентацию. В спокойном облаке типа Polaris Flare анизотропия носит преимущественно локальный характер и присутствует в одинаковой степени на всех масштабах.

5. Вейвлеты в экспериментальной физике

Вейвлет-преобразования одномерных сигналов, получаемых при проведении различных физических экспериментов, дают информацию, развёрнутую в частотно-временном пространстве. Так, в МГД-течениях, возбуждаемых сложными переменными полями, вейвлеты позволили эффективно отфильтровать турбулентные пульсации от пульсаций внешних электромагнитных полей [86]. Вейвлетные кросс-корреляции успешно применены для анализа поведения крупномасштабной циркуляции по данным лабораторных и численных экспериментов по турбулентной конвекции в замкнутых объёмах [87, 88]. В целом ряде работ вейвлеты были применены для изучения нестационарных турбулентных течений [89–91].

В этом разделе мы приведём три примера вейвлет-обработки данных физических измерений: первый касается анализа спектральных характеристик нестационарного потока, второй связан с обработкой сигналов многоканальных поляризационных радиотелескопов, в которых вейвлеты помогают решить нетривиальную обратную задачу с использованием априорной информации о симметрии объектов наблюдения, а третий иллюстрирует применение вейвлетов для обработки и анализа сигналов биофизической природы.

5.1. Эволюция спектральных характеристик импульсного турбулентного потока

В качестве примера анализа нестационарных сигналов покажем некоторые результаты исследования импульсного турбулентного течения в замкнутом канале [92]. Работа выполнялась в контексте исследований эффектов генерации магнитных полей потоками проводящей жидкости (см. обзор [47]). Эти эффекты становятся заметными только при очень больших числах Рейнольдса. Точнее, определяющим параметром является магнитное число Рейнольдса R_m , связанное с обычным (гидродинамическим) числом Рейнольдса Re через магнитное число Прандтля: $R_m = Re Pm$. Эффекты генерации флуктуаций магнитного поля турбулентным потоком проявляются при $R_m \approx 1$, но проблема в том, что магнитное число Прандтля, которое есть отношение коэффициента кинематической вязкости к коэффициенту диффузии магнитного поля, для жидких металлов очень мало ($Pm \approx 10^{-5}$) и для достижения требуемых магнитных

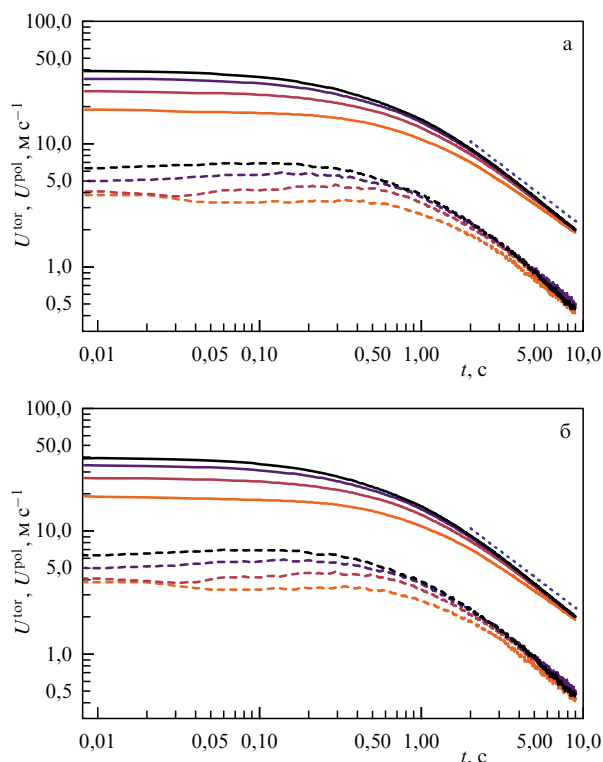


Рис. 30. (В цвете онлайн.) Вырождение средней скорости (а) и среднеквадратичных пульсаций скорости (б) в импульсном течении жидкого натрия для различных скоростей вращения канала ($\Omega = 20, 30, 40, 50$ об. s^{-1} ; чем меньше скорость, тем светлее линии). Сплошными линиями показана тороидальная скорость, штриховыми — полоидальная. Время отсчитывается от момента полной остановки канала. Пунктир соответствует закону t^{-1} . (Из работы [92].)

чисел Рейнольдса нужно создать течение жидкого металла, характеризующее $Re \approx 10^5$. Поэтому и возникла идея создать короткое импульсное течение с требуемыми параметрами в тороидальном канале, заполненном жидким натрием [93–95]. В описываемых экспериментах использовался канал радиусом 0,18 м и радиусом сечения 0,08 м, который раскручивался до скорости 50 оборотов в секунду, а затем тормозился за время 0,3 с.

Установленный в стенке канала кондукционный датчик скорости позволял регистрировать тороидальную (вдоль канала) и полоидальную (вдоль стенки, но поперёк канала) компоненты скорости. Картину эволюции средних значений обеих компонент скорости и среднеквадратичных значений пульсаций скорости иллюстрирует рис. 30 (отметим, что графики даны в двойных логарифмических координатах). Видно, что к концу торможения тороидальная скорость достигает значения 40 м с^{-1} (полоидальная — 7 м с^{-1}), но пульсации скорости доминируют в полоидальной компоненте скорости. Эволюция потока быстротечна — половина кинетической энергии диссипирует уже в первую секунду после окончания торможения. При $t > 1$ с пульсации скорости убывают по характерному для турбулентного вырождения закону $\sim t^{-1}$. Необходимо выяснить, как быстро формируется инерционный интервал (успевает ли развиться турбулентность).

Ни о какой стационарности речи быть не может, и в таком случае на помощь приходят вейвлеты. Спектрограмма полоидальной компоненты скорости, полученная с помощью вейвлета Морле, показана на рис. 31.

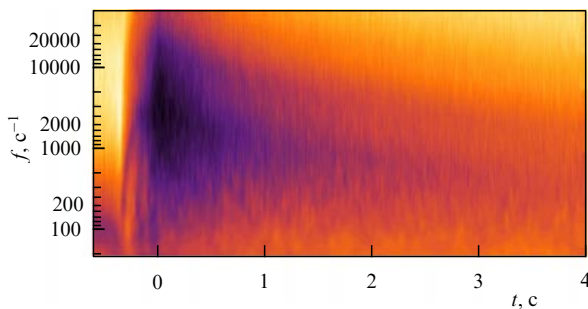


Рис. 31. (В цвете онлайн.) Спектрограмма поперечной компоненты скорости, полученная с помощью вейвлета Морле для скорости вращения канала $\Omega = 50 \text{ об. с}^{-1}$. (Из работы [92].)

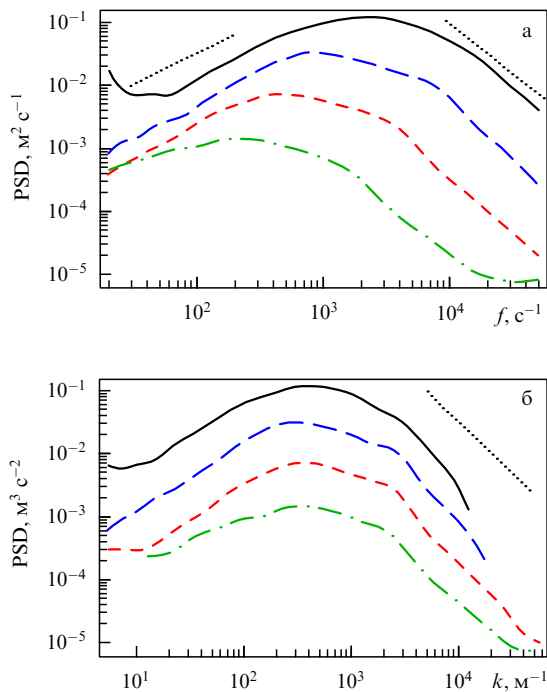


Рис. 32. Спектральные плотности энергии пульсаций скорости: (а) временные спектры, полученные как вертикальные сечения вейвлет-спектрограммы (см. рис. 31), усреднённые по интервалам между моментами времени $t = 0, 0,5, 1,5, 3,5, 7,5 \text{ с}$ (сверху вниз); (б) соответствующие пространственные спектры, пересчитанные по гипотезе Тейлора по средней тороидальной скорости потока для каждого момента времени. Пунктиром показан закон Колмогорова $\sim \omega^{-5/3}$ для инерционного интервала и зависимость $E(\omega) \sim \omega$ для низкочастотной части спектра. (Из работы [92].)

Видно, что по окончании торможения происходит вспышка высокочастотных пульсаций с пиком на частотах $\sim 2-4 \text{ кГц}$. Пятно заметно слабеет к исходу первой секунды, а частота, на которую приходится пик плотности энергии пульсаций, уменьшается.

Вертикальные разрезы вейвлет-спектрограммы дают мгновенные (либо усреднённые по разумному интервалу времени) спектры пульсаций скорости. На рисунке 32 показаны временные (частотные) спектры пульсаций скорости, построенные путём усреднения по четырём последовательным интервалам времени, подтверждающие как затухание энергии пульсаций, так и смещение пика в сторону низких частот. На этом же рисунке показаны пространственные спектры энергии пульсаций скорости для

тех же интервалов времени. Они получены путём пересчёта временных частот в волновые числа по гипотезе Тейлора с учётом меняющейся средней скорости потока. На пространственных спектрах максимум энергии остаётся на одном масштабе, определяемом диаметром канала. По пространственным спектрам можно судить о стадиях формирования инерционного интервала.

5.2. RM-синтез поляризованного радиоизлучения межзвёздной среды

Развитие методов наблюдений часто приводит к таким проблемам обработки наблюдений, которые просто не приходили в голову специалистам предыдущих поколений, а сейчас требуют сложных и новых методов обработки данных. Мы рассмотрим здесь один пример такого рода, который возникает при изучении магнитных полей в галактиках и других небесных телах галактического масштаба. Напомним, что магнитное поле галактик изучают по эффекту Фарадея, количественной мерой которого является *фарадеевская мера вращения* RM, для вычисления которой нужны наблюдения на многих длинах волн. До конца прошлого века слово "много" в этом контексте означало два-три-четыре, самое большее шесть (обычный набор длин волн 3, 6, 18, 20 см, иногда ещё 13 см). С появлением широкополосных приёмников радиоизлучения стало возможным проводить наблюдения с квазипрерывным набором частот, а во многих случаях наблюдения проводятся сейчас на более длинных волнах, в метровом или даже декаметровом диапазоне. В последнем случае плоскость поляризации может испытывать много поворотов при распространении синхротронного излучения через замагниченную среду, тогда как угол в выражении (23), естественно, определён лишь с точностью до прибавления целого числа π . Объём данных, которые можно в принципе получить таким образом, настолько велик, что оказывается нереальным сначала провести наблюдения, к примеру, близкой внешней галактики на всех возможных частотах, потом разбить изображение галактики на небольшие секторы и провести сравнение распределения поляризованных углов по секторам и частотам для построения распределения магнитного поля в этой галактике. Примерно так поступали исследователи в конце XX века (см., например, [96]). Даже при использовании наблюдений на трёх-четырёх длинах волн путь от наблюдений до построения распределения магнитного поля занимал несколько лет.

Сейчас ещё не вполне ясно, как именно современная радиоастрономия разрешит возникшую проблему. Один из существующих здесь подходов называется RM-синтезом. Суть его состоит в том, чтобы, пожертвовав на первом этапе выяснением вопроса о геометрии магнитного поля, получить сначала хотя бы величину магнитных полей (точнее, фарадеевских вращений) различных слоёв замагниченной среды, через которые проходит радиоизлучение от места излучения до точки наблюдения. Во многих случаях этих слоёв несколько, а результаты RM-синтеза представляются достаточными для решения тех задач, которые реально стоят перед исследователями.

Основная идея RM-синтеза [97] известна давно. Ещё в классической работе [98] отмечено, что степень поляризации синхротронного излучения $P(\lambda)$ может рассматриваться как преобразование Фурье по величине λ^2 от некоторой функции F (её называют фарадеевской дис-

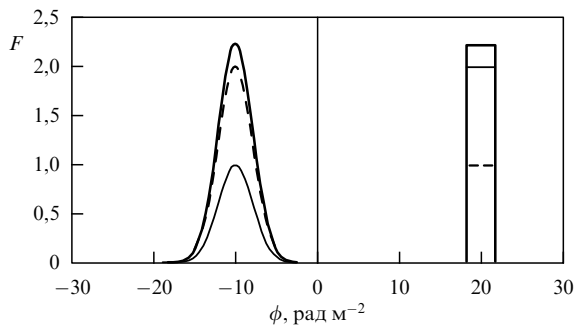


Рис. 33. Тестовый пример фарадеевской дисперсии, использованной для RM-синтеза: модуль фарадеевской дисперсии — жирная сплошная линия, действительная часть — тонкая сплошная линия, мнимая часть — штриховая линия. (Из работы [99].)

персий, и по ней можно вычислить RM),

$$P(\lambda^2) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\phi) \exp(2i\phi\lambda^2) d\phi. \tag{46}$$

Здесь величина ϕ есть фарадеевская глубина, определяемая как

$$\phi(z) = -0,81 \int_z^0 B_{\parallel} n_e dz', \tag{47}$$

где B_{\parallel} — компонента магнитного поля вдоль луча, n_e — плотность тепловых электронов, а интеграл берётся от источника до наблюдателя ($z = 0$).

Если имеются наблюдения в широком диапазоне длин волн λ , то нужно взять обратное преобразование Фурье по переменной λ^2 от степени поляризации и получить искомый ответ. Проблема только в том, что λ^2 — существенно положительная величина, а в обратном преобразовании Фурье она должна изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. Кроме того, и в области положительных λ^2 практи-

чески невозможно покрыть весь диапазон требуемого интегрирования. Для решения проблемы необходима дополнительная информация. Так, для изолированного объекта проблему отрицательных λ^2 можно решить исходя из симметрии наблюдаемого объекта, но даже при наличии на пути излучения двух объектов задача методами анализа Фурье не решается. Вейвлет-анализ, который позволяет делать преобразование Фурье локально, вносит вклад и в решение этих проблем, давая возможность применить свойства симметрии для каждого изолированного объекта в пространстве фарадеевских глубин [99–101].

Для того чтобы показать работоспособность идеи RM-синтеза, рассмотрим тестовый сигнал с двумя локализованными источниками, один из которых имеет плавное распределение магнитного поля, моделируемое гауссианами, а другой — распределение в виде ящика с резкими границами (рис. 33). В обоих случаях распределение фарадеевской дисперсии симметрично относительно середины источника. Такое распределение соответствует квадрупольной симметрии магнитного поля галактик. Вычислим комплексную поляризацию, соответствующую заданной фарадеевской дисперсии. Она, конечно, определена лишь для положительных λ^2 , однако её можно формально продолжить в область отрицательных λ^2 , используя свойства квадрупольной симметрии фарадеевской дисперсии. Теперь мы можем вычислить вейвлет-коэффициенты комплексной поляризации (их распределение на вейвлет-плоскости показано на рис. 34а), а потом с помощью обратного вейвлет-преобразования восстановить исходный сигнал (рис. 34б). Видно, что восстановленный сигнал действительно похож на исходный.

Естественно, что при анализе данных, полученных на реальном радиотелескопе, который принимает сигналы лишь в ограниченном диапазоне длин волн, мы восстановим только часть информации об исходной фарадеевской дисперсии. Вейвлет-анализ позволяет понять, какую именно часть информации можно получить таким обра-

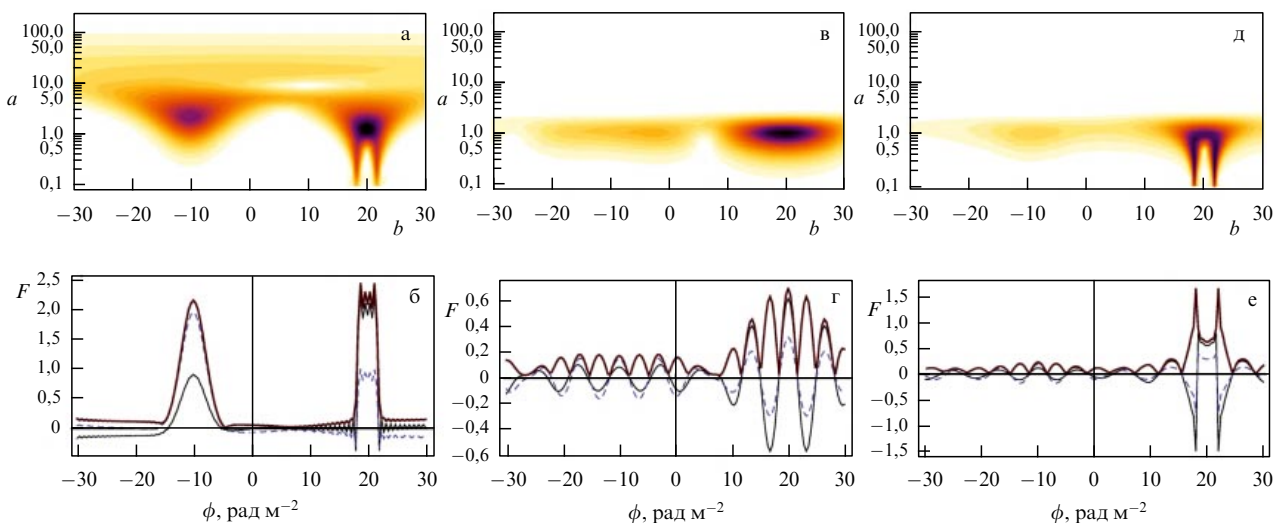


Рис. 34. (В цвете онлайн.) RM-синтез с использованием вейвлетов для сигнала на рис. 33. Распределение модулей вейвлет-коэффициентов на вейвлет-плоскости (а, в, д) и результаты реконструкции для всего диапазона длин волн (б), для $0,6 < \lambda < 0,78$ м (г) и $0,6 < \lambda < 2,5$ м (е). Соответствующее восстановление F (б, г, е): действительная часть — тонкая сплошная линия, мнимая часть — штриховая линия, модуль — сплошная жирная линия. (Из работы [99].)

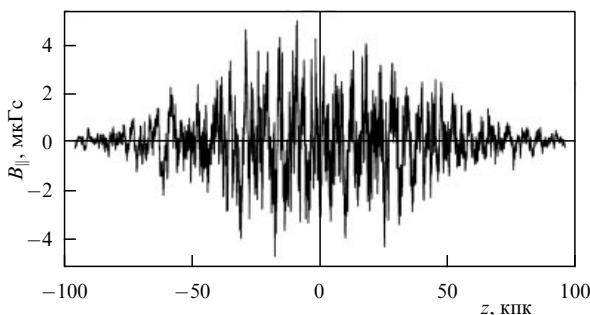


Рис. 35. Тестовый пример мелкомасштабного магнитного поля. (Из работы [101].)

зом. Рассмотрим в качестве примера возможности радиотелескопа, работающего на длинных волнах ($0,6 < \lambda < 0,78$ м, рис. 34б, в и $0,6 < \lambda < 2,5$ м, рис. 34д, е); эти примеры иллюстрируют трудности, возникающие при наблюдениях только на длинных волнах и до определённой степени моделируют возможности телескопа LOw Frequency ARray (LOFAR). Видно, что в обоих диапазонах почти полностью теряется информация о первом источнике. В первом из диапазонов удаётся восстановить локализацию второго источника, а расширение диапазона в область длинных волн позволяет зафиксировать положение границ второго источника. Можно проверить, что включение в диапазон измерений области вплоть до $\lambda = 0,03$ м позволяет восстановить фарадеевскую дисперсию почти так же полно, как на рис. 34а, б. Этот диапазон длин волн соответствует строящемуся телескопу Square Kilometre Array (SKA), что показывает преимущества этого инструмента для наблюдений магнитных полей спиральных галактик. Подчеркнём, что каждый телескоп имеет специфические ограничения, делающие его более приспособленным для одного круга задач и менее приспособленным для другого.

В рассмотренном примере мы видели, что наблюдения на длинных волнах, которые сейчас особенно популярны в связи с появлением телескопа нового поколения LOFAR, содержат прежде всего информацию об областях с резкими изменениями магнитного поля. Этот вывод можно подтвердить на другом тестовом примере (рис. 35), в котором магнитное поле локализовано в некотором протяжённом слое и имеет выраженную мелкомасштабную, турбулентную структуру. Мы проанализировали соответствующий сигнал в диапазонах длин

волн, характерных для действующих и строящихся радиотелескопов (рис. 36). Видно, что наблюдения на телескопе SKA позволяют передать все основные детали сигнала, наблюдения в узком диапазоне длинных волн (Westerbork Synthesis Radio Telescope (WSRT) имеет две узкие полосы) передают только общую локализацию мелкомасштабного сигнала, а расширение диапазона в сторону длинных волн (характерно для LOFAR) позволяет передать мелкомасштабные детали сигнала. В настоящее время основанная на использовании вейвлетов версия RM-синтеза прошла всестороннее апробирование и сравнение с другими алгоритмами и показала преимущества, свойственные вейвлетам [102].

Опираясь на отмеченные возможности вейвлетов, можно сделать следующие шаги по использованию наблюдений на длинных волнах для исследования магнитных полей галактик. По наблюдениям на небольшом наборе длин волн известно, что магнитное поле в спиральных галактиках образует сравнительно узкие спиральные рукава, которые могут быть сдвинуты относительно спиральных рукавов в распределении межзвёздного газа и звёзд [103]. При многоканальных наблюдениях в сравнительно узкой области длин волн ($0,17 - 0,23$ м) RM-синтез, не использующий возможностей вейвлетов, на месте двух узких магнитных рукавов выявляет лишь два расплывчатых пятна (рис. 37). Это связано, в частности, с тем, что при большом количестве каналов на каждый из них приходится меньше времени наблюдений, так что ухудшается отношение сигнала к шуму. Конечно, можно проинтегрировать сигнал по спектру и восстановить отношение сигнала к шуму, характерное для наблюдений в одном канале, но это означает эмулирование работы телескопа предыдущего поколения на современном телескопе. Можно, конечно, подождать ввода в строй телескопа SKA, который позволит использовать возможности наблюдений на коротких волнах, однако результаты хочется получать немедленно. Вейвлет-анализ позволяет выделить вклад мелкомасштабных магнитных полей, к которым телескоп наиболее чувствителен.

Вейвлетный RM-синтез был обобщён на двумерный случай и применён к многоканальным данным радиотелескопа LOFAR наблюдений за галактикой NGC 6946. Удалось обнаружить след магнитных спиральных рукавов, которые не видны другими методами [104]. Вейвлет-анализ искусственных данных позволил подтвердить обнаруженный механизм деполаризации, находящийся в основе обнаруженного эффекта [105].

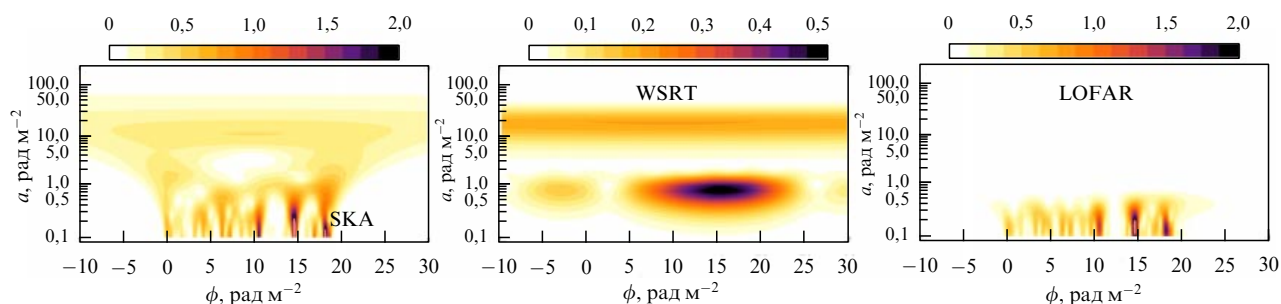


Рис. 36. (В цвете онлайн.) Вейвлет-спектрограммы модельного турбулентного сигнала (см. рис. 35), "видимого" в диапазонах длин волн трёх радиотелескопов: (а) $\lambda \in [0,03; 4,3]$ (SKA), (б) $\lambda \in [0,17; 0,23] \cup [0,77; 0,97]$ (WSRT) и (в) $\lambda \in [1,25; 2,73]$ (LOFAR). (Из работы [101].)

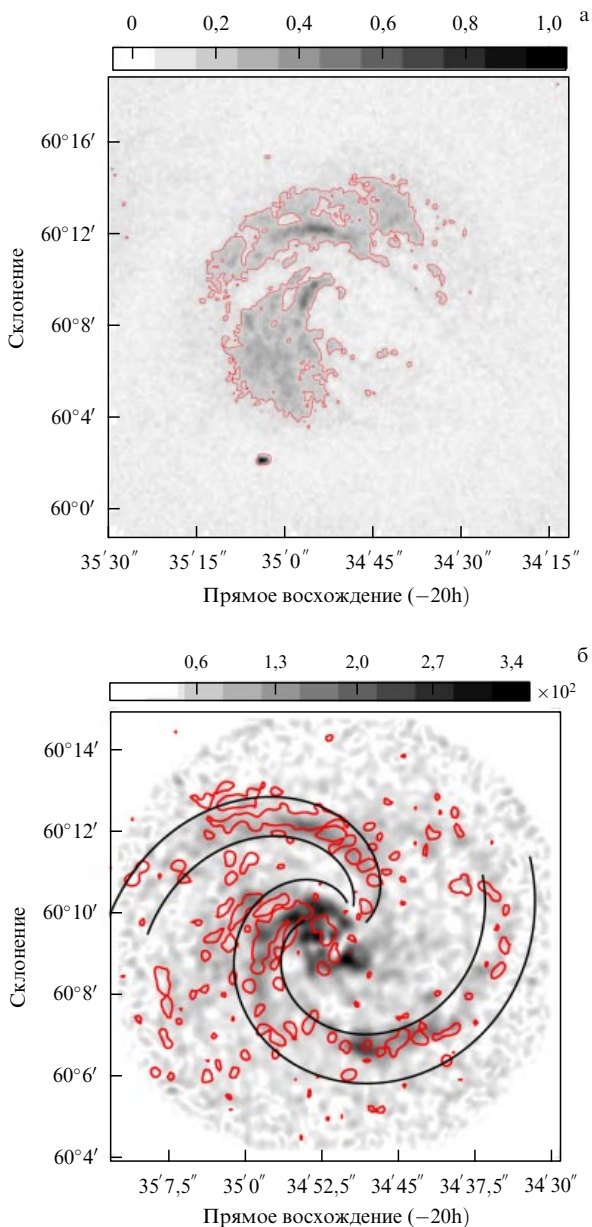


Рис. 37. Выделение магнитных спиральных рукавов в галактике NGC 6946 по наблюдениям в диапазоне 0,17–0,23 м: (а) стандартный RM-синтез, (б) анализ с использованием вейвлетов. (Из работы [71].)

5.3. Биосигналы в медицинской физике

Представляется важным подчеркнуть в рамках этого обзора универсальность описываемых методик регистрации, обработки и анализа сигналов. Выбор того или иного метода анализа обусловлен на практике не природой сигнала, а его структурой и тем, что именно мы стремимся выявить в результате проводимого анализа.

Прекрасным примером сложной нелинейной системы с запутанной временной динамикой является человеческий организм, существование которого обеспечивается двумя ярко выраженными квазипериодическими процессами — работой сердца и дыханием, на фоне и при непосредственном воздействии которых формируется целый спектр циклических процессов, связанных с жизнедеятельностью организма. Примеров успешного применения вейвлетов для обработки сигналов в медицине

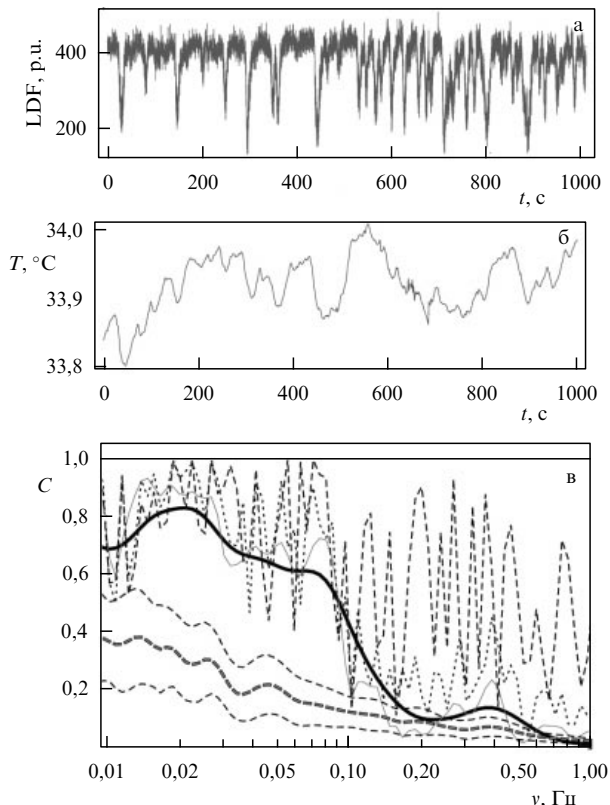


Рис. 38. (а) Сигнал доплеровского флоуметра, характеризующего интенсивность кровотока в ткани (в перфузионных единицах), (б) температура кожи. (в) Модуль вейвлетной кросс-корреляционной функции для этих сигналов, вычисленный с помощью вейвлета Морле для $\sigma = 1$ (жирная чёрная линия), $\sigma = 2$ (тонкая линия), $\sigma = 10$ (пунктирная), $\sigma = 100$ (штриховая), $\sigma = \infty$ (тонкая горизонтальная линия). Жирная штриховая линия показывает результат расчёта по 70 реализациям суррогатных данных. Тонкие штриховые линии показывают первый и третий квартиль. (Из работы [110].)

достаточно много. Упомянем только обзоры по вейвлет-анализу кардиосигналов [106] и нейродинамики [13], а также некоторые работы по анализу динамики периферийного кровотока [107–111]. В качестве примера результата, в достижении которого вейвлет-алгоритмы сыграли принципиальную роль, на рис. 38 представим результат кросс-корреляционного анализа пульсаций температуры на поверхности кожи и сигнала лазерного доплеровского флоуметра, который характеризует интенсивность периферийного кровотока в подкожных слоях. Структуры двух сигналов, приведённых на рис. 38а, б, совершенно различны, однако вейвлетная кросс-корреляционная функция, модуль которой показан на рис. 38в, демонстрирует высокую степень корреляции в диапазоне частот от 0,01 до 0,1 Гц [110]. Именно этот диапазон частот интересен с точки зрения изучения механизма регулирования микроциркуляции крови. Приведённый график интересен ещё и тем, что на нём представлены результаты вычисления функции (12) при использовании вейвлета (2) с различными значениями параметра σ , а также результаты тестовых вычислений по суррогатным (случайным рядам со схожими спектральными свойствами) данным, подтверждающие значимость полученных оценок.

В качестве основного примера приложения вейвлет-анализа к исследованию временной изменчивости сис-

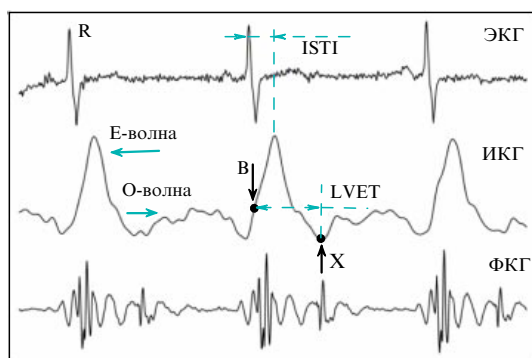


Рис. 39. Типичные сигналы полирекардиографа: электрокардиограмма (ЭКГ), дифференциальная реокардиограмма (импедансная реокардиограмма, ИКГ) и фонокардиограмма (ФКГ). (Из работы [106].)

темы, в которой доминируют два квазипериодических процесса, покажем результаты анализа сигнала полирекардиографа — прибора для регистрации различных характеристик сердечной деятельности [112].

Импедансная реокардиография (ИКГ) — простой, недорогой, неинвазивный метод изучения центральной гемодинамики, при помощи которого можно определить один из её ключевых показателей — ударный объём, а также оценить сердечный выброс, общее периферическое сосудистое сопротивление, время изгнания крови из левого желудочка и другие параметры. Главный принцип метода основан на регистрации изменений электрического сопротивления биологических тканей при прохождении высокочастотного переменного тока.

Сигнал ИКГ имеет набор характерных точек и волн, которые на рис. 39 обозначены как В, Е, Х, О. Эти точки связаны с различными физиологическими событиями в сердечном цикле. Точка В синхронизована с первым тоном сердца, возникающим при закрытии атриовентрикулярных клапанов в самом начале систолы желудочков. Иногда определение локализации точки В проблематично, поскольку форма сигнала ИКГ в этой области не всегда чётко выражена. Точка Е — это максимум на дифференциальной реограмме. Эта точка отражает максимальную скорость изменения импеданса, что, в свою очередь, связано с максимальной скоростью выброса, измеренного с помощью ультразвуковых методов. Точка Х соответствует захлопыванию полулунных клапанов в конце систолы желудочков (и второму тону сердца). Для ИКГ первый максимум (т.е. Е-волна) связан с систолической фазой сердечного цикла, а второй максимум — с меньшей амплитудой (О-волна) — связан с диастолической фазой. Амплитуда Е-волны пропорциональна ударному объёму, а амплитуда О-волны коррелирует с изменением объёма левого предсердия во время фазы диастолы. В некоторых случаях амплитуда О-волны оказывается важным диагностическим параметром. Считается, что ударный объём пропорционален времени выброса и максимальному значению первой производной импеданса dZ/dt для данного цикла. Время изгнания крови из левого желудочка (LVET) определяется как временной интервал между открытием клапана аорты и его последующим закрытием.

Отметим, что вейвлеты широко применяются при анализе медицинских сигналов, но их использование почти всегда ограничивается фильтрацией, выполняемой

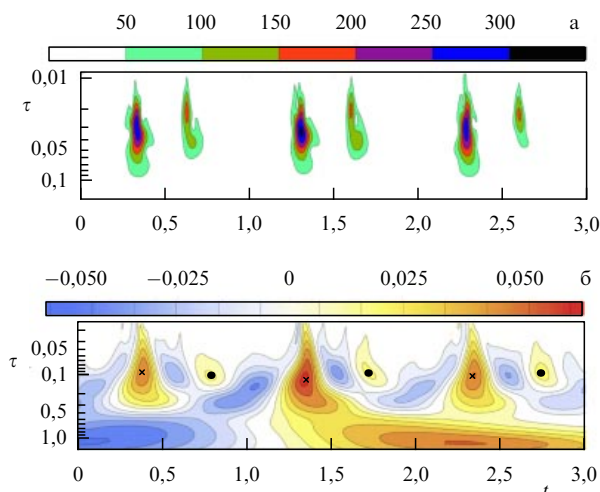


Рис. 40. (В цвете онлайн.) Вейвлет-образы трёх кардиоциклов по сигналам фонокардиографии (а) и импедансной реокардиографии (б), где максимумы Е-волны обозначены крестиками, а О-волны — точками. (Из работы [112].)

в терминах дискретного вейвлет-преобразования. Возможности вейвлет-анализа существенно шире, и в работах [112, 113] аппарат непрерывного вейвлет-преобразования использован не только для фильтрации сигнала реокардиографа, но и для регуляризации процедур обработки исходных сигналов, исследования степени коррелированности сигналов в заданной полосе частот и определения количественных функциональных характеристик сердца, таких как ударный объём. Была предложена методика оценки функционального состояния сердечно-сосудистой системы на основе анализа двумерных частотно-временных распределений вейвлет-коэффициентов преобразования кривых дифференциальной реограммы. На изображениях (вейвлет-портретах) кардиоциклов для различных групп больных удаётся распознать характерные особенности в систолической и диастолической фазах сердечного цикла.

Характерные вейвлет-образы дифференциальной реограммы и фонокардиограммы трёх последовательных кардиоциклов показаны на рис. 40. Хорошо видно, что, хотя пациент находится в состоянии покоя, каждый из трёх последовательных циклов имеет свой "портрет". Протяжённые структуры на рис. 40б соответствуют одному дыхательному циклу (вдох и выдох).

Традиционно ударный объём в ИКГ определяется как произведение максимума первой производной реограммы на время изгнания с соответствующими антропометрическими коэффициентами и учётом полного биоимпеданса. В стандартных методиках амплитуда Е-волны определяется после установки реограммы на изолинию, т.е. после компенсации дыхательных и двигательных артефактов. Применение подхода на основе вейвлетов позволяет разделить пульсовую и дыхательную волны и использовать для определения амплитуды вейвлет-коэффициентов Е-волны, а для определения LVET — масштаб этой волны. Такой подход обеспечивает большую точность в сравнении с методом определения времени изгнания по характерным точкам дифференциальной реограммы. Параметр ISTI в рамках этого подхода определяется как временной интервал между R-пиком ЭКГ и максимумом вейвлет-представления Е-волны.

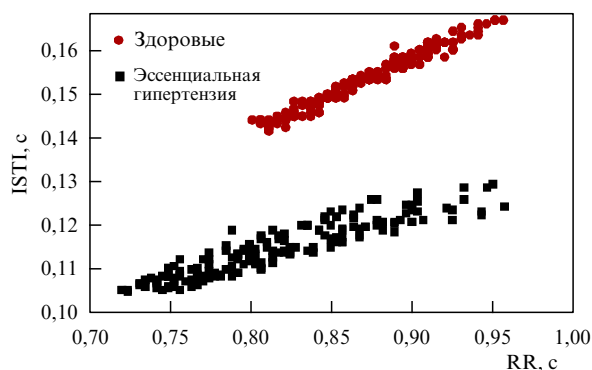


Рис. 41. (В цвете онлайн.) Нагрузочный тест: вычисленная по результатам вейвлет-анализа зависимость интервала ISTI от RR-интервала для здоровых (красные точки) и больных (чёрные точки). (Из работы [112].)

Для верификации метода в работе [112] было проведено обследование 12 здоровых мужчин в возрасте от 20 до 25 лет, составивших группу контроля, и 14 пациентов с диагнозом эссенциальной гипертензии. Использовался метод полиреокардиографии, в котором одновременно с ИКГ регистрировались ЭКГ и фонокардиограмма. Во время регистрации полиреокардиограммы проводился нагрузочный изометрический тест — подъём ног из горизонтального положения и удержание под углом 30–45 град. Во время нагрузочного теста для здоровых пациентов регистрируется линейный рост амплитуд E- и O-волн. После прекращения нагрузки (опускания ног в горизонтальное положение) амплитуды E- и O-волн принимают начальные значения. Линейный рост ударного объёма во время нагрузки соответствует нормальной физиологической реакции. Для пациентов с гипертензией наблюдаются слабо выраженные изменения амплитуд E- и O-волн и укорочение интервала ISTI во время теста, что свидетельствует о серьёзном нарушении компенсаторных механизмов. На рисунке 41 показана связь длин интервала ISTI и интервала RR для здоровых и больных пациентов, свидетельствующая о том, что вейвлет-метод позволяет однозначно разделить эти группы.

6. Заключение

За несколько десятилетий существования вейвлет-анализа он, как мы старались показать, превратился из математической новинки в привычный инструмент в арсенале физика. Объём физической литературы, в которой используются вейвлеты, таков, что её представительное перечисление превратило бы обзор в библиографический список. Поэтому мы старались начинать с простых и очевидных вопросов и постепенно переходить к сложным. Конечно, наш выбор субъективен и основывается, прежде всего, на работах нашей группы. Однако и в рамках такого выбора видно, что применения вейвлетов связаны не с традиционными областями лабораторной физики, а с такими областями, как астрономия, геофизика, медицинская физика и т.п. Вейвлеты находят применение и в лабораторном эксперименте, но и здесь речь идёт главным образом о новых и не вполне стандартных исследованиях, таких как нестационарный гидродинамический и магнитогидродинамический эксперименты.

Сравнивая развитие вейвлет-анализа с тем, как развивался метод Фурье, мы видим определённое сходство. Многие разделы современной физики, хотя бы спектральный анализ, просто невозможно представить себе вне рамок идей метода Фурье. В то же время эти области физики, конечно, существенно развили базисные идеи метода Фурье. Нам представляется, что подобное же развитие можно теперь ожидать и для вейвлет-анализа. Вейвлет-представление спектральных свойств сигнала — это в значительной степени развитый и продолжающийся расширяться инструментальный постобработки наблюдательных, экспериментальных данных и данных математического моделирования. Часть инструментария всесторонне апробирована и является, что называется, общим местом. Постоянно предлагаемые новые дополнения вейвлет-анализа зачастую дублируют друг друга, поэтому их использование требует более внимательного отношения к нюансам и результатам интерпретации. Этому, собственно, и посвящён наш обзор.

Как видно из приведённого обзора, во многих областях физики и смежных наук возникают представления о циклических процессах. Самое поверхностное знакомство с экспериментальным и наблюдательным материалом, на котором основаны такие представления, говорит о том, что мы имеем дело с чем-то отличным от периодических процессов в прямом смысле. Набор подобных ситуаций быстро увеличивается по мере удаления от традиционных областей физики.

Постепенное освоение физикой новых пограничных областей представляется естественной тенденцией, в рамках которой вейвлет-анализ может и, как нам кажется, должен сыграть фундаментальную роль. В этом смысле представляется знаменательным, что настоящий обзор написан в рамках программы РФФИ-Экспансия.

Обзор подготовлен при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ 19-11-50217). Авторы благодарят Илью Усокина и Лейфа Свалгаарда за советы по подбору данных при обновлении результатов некоторых рассматриваемых в обзоре работ.

Список литературы

1. Яглом А М *Корреляционная теория стационарных случайных функций с примерами из метеорологии* (Л.: Гидрометеоиздат, 1981)
2. Gabor D J. *Inst. Electr. Eng.* **93** 429 (1945)
3. Grossmann A, Morlet J *SIAM J. Math. Anal.* **15** 723 (1984)
4. Meyer Y *Wavelets and Operators* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992)
5. Daubechies I *Ten Lectures on Wavelets* (Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992)
6. Holschneider M *Wavelets: an Analysis Tool* (New York: Oxford Univ. Press, 1995)
7. Torresani B *Continuous Wavelet Transform* (Paris: Savoie, 1995)
8. Mallat S A *Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way* 3rd ed. (Amsterdam: Elsevier, Academic Press, 2009)
9. Farge M *Annu. Rev. Fluid Mech.* **24** 395 (1992)
10. Астафьева Н М *УФН* **166** 1145 (1996); Astaf'eva N M *Phys. Usp.* **39** 1085 (1996)
11. Дремин И М, Иванов О В, Нечитайло В А *УФН* **171** 465 (2001); Dremine I M, Ivanov O V, Nechitailo V A *Phys. Usp.* **44** 447 (2001)
12. Павлов А Н, Анищенко В С *УФН* **177** 859 (2007); Pavlov A N, Anishchenko V S *Phys. Usp.* **50** 819 (2007)
13. Павлов А Н и др. *УФН* **182** 905 (2012); Pavlov A N et al. *Phys. Usp.* **55** 845 (2012)

14. Frick P, Zimin V, in *Wavelets, Fractals and Fourier Transform* (Inst. of Math and its Appl. Conf. Ser. No. 43, Eds M Farge, J Hunt, J Vassilicos) (Oxford: Clarendon Press, 1993) p. 265
15. Frick P et al. *Astron. Astrophys.* **328** 670 (1997)
16. Frick P et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **491** 5572 (2020)
17. Bruijn de N G, in *Inequalities: Proc. of a Symp., Wright-Patterson Air Force Base* (Ed. O Shisha) (New York: Academic Press, 1965) pp. 57–71
18. Фрик П Г *Турбулентность: подходы и модели* 2-е изд., испр. и доп. (М. – Ижевск: РХД, 2010)
19. Тихонов А Н, Арсенин В Я *Методы решения некорректных задач* (М.: Наука, 1986)
20. Патрикеев И А, Степанов Р А, Фрик П Г *Вычислительные методы и программирование* **6** 35 (2005)
21. Bloomfield P *Fourier Analysis of Time Series: an Introduction* (New York: Wiley, 1976)
22. Nesme-Ribes E et al. *Comptes Rendus B Acad. Sci. Paris* **321** 525 (1995)
23. Torrence C, Webster P J J. *Climate* **12** 2679 (1999)
24. Guedes M R G, Pereira E S, Cecatto J R *Astron. Astrophys.* **573** A64 (2015)
25. Chavez M, Cazelles B *Sci. Rep.* **9** 7389 (2019)
26. Soon W et al. *Earth-Sci. Rev.* **134** 1 (2014)
27. Velasco Herrera V M et al. *New Astron.* **56** 86 (2017)
28. Frick P et al. *Astrophys. J.* **483** 426 (1997)
29. Frick P, Grossmann A, Tchamitchian P J. *Math. Phys.* **39** 4091 (1998)
30. Soon W et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **483** 2748 (2019)
31. Монин А С *УФН* **132** 123 (1980); Monin A S *Sov. Phys. Usp.* **23** 594 (1980)
32. Витинский Ю И, Копецкий М, Куклин Г В *Статистика пятнообразовательной деятельности Солнца* (М.: Наука, 1986)
33. Soon W W-H, Yaskell S H *The Maunder Minimum and the Variable Sun-Earth Connection* (River Edge, NJ: World Scientific, 2003)
34. Ogurtsov M G et al. *Solar Phys.* **211** 371 (2002)
35. Sokoloff D *Sun Geosphere* **12** 20 (2017)
36. Zolotova N V, Ponyavin D I *Astrophys. J.* **800** 42 (2015)
37. Usoskin I G et al. *Astron. Astrophys.* **581** A95 (2015)
38. Hoyt D V, Schatten K H *Solar Phys.* **179** 189 (1998)
39. Vaquero J M et al. *Solar Phys.* **291** 3061 (2016)
40. Svalgaard L, Schatten K H *Solar Phys.* **291** 2653 (2016)
41. Chatzistergos T et al. *Astron. Astrophys.* **602** A69 (2017)
42. Svalgaard L, Personal communication (2020); in *Sun-Climate Symp. 2020, Tucson, AZ; "Three Centuries of Validated Monthly Sunspot Groups Numbers"*, <https://leif.org/research/Three-Centuries-of-Validated-Sunspot-Group-Numbers.pdf>
43. Pipin V V, Sokoloff D D, Usoskin I G *Astron. Astrophys.* **542** A26 (2012)
44. Kitchatinov L L, Mordvinov A V, Nepomnyashchikh A A *Astron. Astrophys.* **615** A38 (2018)
45. Bazilevskaya G et al. *Space Sci. Rev.* **186** 359 (2014)
46. Рузмайкин А *УФН* **184** 297 (2014); Ruzmaikin A *Phys. Usp.* **57** 280 (2014)
47. Соколов Д Д, Степанов Р А, Фрик П Г *УФН* **184** 313 (2014); Sokoloff D D, Stepanov R A, Frick P G *Phys. Usp.* **57** 292 (2014)
48. Plunian F, Sarson G R, Stepanov R *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **400** L47 (2009)
49. Pipin V V, Kosovichev A G *Astrophys. J.* **867** 145 (2018)
50. Сыч Р А *Солнечно-земная физика* **1** (2) 3 (2015)
51. Sych R A, Nakariakov V M *Solar Phys.* **248** 395 (2008)
52. Sych R et al. *Astron. Astrophys.* **539** A23 (2012)
53. Sych R et al. *Astron. Astrophys.* **577** A43 (2015)
54. Laclare F *Astron. Astrophys.* **125** 200 (1983)
55. Lanza A F *Proc. Int. Astron. Union* **5** (S264) 120 (2009)
56. Гончарский А В и др. *Астрон. журн.* **59** 1146 (1982); Gonchar-skii A V et al. *Sov. Astron.* **26** 690 (1982)
57. Miyake F, Usoskin I, Poluianov S (Eds) *Extreme Solar Particle Storms* (Bristol: IOP Publ., 2019)
58. Frick P et al. *New Astron.* **9** 599 (2004)
59. Baliunas S et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **365** 181 (2006)
60. Baliunas S et al. *Solar Phys.* **224** 179 (2004)
61. Sosnovtseva O V et al. *Phys. Rev. E* **70** 031915 (2004)
62. Sosnovtseva O V et al. *Phys. Rev. Lett.* **94** 218103 (2005)
63. Soon W, Frick P, Baliunas S *Astrophys. J.* **510** L135 (1999)
64. Stepanov R et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **495** 3788 (2020)
65. Кацова М М, Бондарь Н И, Лившиц М А *Астрон. журн.* **92** 596 (2015); Katsova M M, Bondar N I, Livshits M A *Astron. Rep.* **59** 726 (2015)
66. Stefani F et al. *Astron. Nachr.* **341** 600 (2020)
67. Baliunas S et al. *Geophys. Res. Lett.* **24** 1351 (1997)
68. Panovska S, Finlay C C, Hirt A M *Earth Planet. Sci. Lett.* **379** 88 (2013)
69. Галягин Д К и др. *Докл. РАН* **360** 541 (1998); Galyagin D K et al. *Dokl. Earth Sci.* **360** 617 (1998)
70. Соколов Д Д, Шибалова А С *Физика Земли* (5) 156 (2015); Sokoloff D D, Shibalova A S *Izv. Phys. Solid Earth* **51** 764 (2015)
71. Sokoloff D D, Shibalova A S *Geomagn. Aeron.* **58** 888 (2018)
72. Gruzdev A N, Bezverkhni V A *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* **187** 53 (2019)
73. Zhao X H, Feng X S *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* **122** 26 (2015)
74. Бураков К С и др. *Изв. РАН. Физика Земли* **34** 83 (1998); Burakov K S et al. *Izv. Phys. Solid Earth* **34** 773 (1998)
75. Klausner V et al. *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* **92** 124 (2013)
76. Klausner V et al. *J. Geophys. Res. Space Phys.* **119** 3077 (2014)
77. Гинзбург В Л *Распространение электромагнитных волн в плазме* (М.: Физматгиз, 1960); Пер. на англ. яз.: Ginzburg V L *Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma* (New York: Gordon and Breach, 1961)
78. Степанов Р А, Соколов Д Д *УФН* **189** 1285 (2019); Stepanov R A, Sokoloff D D *Phys. Usp.* **62** 1208 (2019)
79. Frick P et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **318** 925 (2000)
80. Frick P et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **327** 1145 (2001)
81. Edwards A L *Multiple Regression and the Analysis of Variance and Covariance* (San Francisco, CA: W.H. Freeman, 1979)
82. Tabatabaei F S et al. *Astron. Astrophys.* **557** A129 (2013)
83. Frick P et al. *Astron. Astrophys.* **585** A21 (2016)
84. Patrikeev I et al. *Astron. Astrophys.* **458** 441 (2006)
85. Ossenkopf-Okada V, Stepanov R *Astron. Astrophys.* **621** A5 (2019)
86. Kolesnichenko I et al. *Exp. Fluids* **56** 88 (2015)
87. Khalilov R et al. *Phys. Rev. Fluid* **3** 043503 (2018)
88. Vasiliev A et al. *Int. Commun. Heat Mass Transfer* **108** 104319 (2019)
89. Noskov V et al. *Magnetohydrodynamics* **55** 149 (2019)
90. Frick P et al. *Magnetohydrodynamics* **51** 267 (2015)
91. Mikhailovich B, Shapiro A, Stepanov R *Magnetohydrodynamics* **52** 125 (2016)
92. Noskov V et al. *Phys. Rev. E* **85** 016303 (2012)
93. Frick P et al. *Magnetohydrodynamics* **38** 143 (2002)
94. Noskov V et al. *Phys. Fluids* **21** 045108 (2009)
95. Frick P et al. *Phys. Rev. Lett.* **105** 184502 (2010)
96. Ruzmaikin A A, Shukurov A M, Sokoloff D D *Magnetic Fields of Galaxies* (Astrophysics and Space Science Library, Vol. 133) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1988); Рузмайкин А А, Соколов Д Д, Шукуров А М *Магнитные поля галактик* (М.: Наука, 1988)
97. Brentjens M A, de Bruyn A G *Astron. Astrophys.* **441** 1217 (2005)
98. Burn B J *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **133** 67 (1966)
99. Frick P et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **401** L24 (2010)
100. Frick P et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **414** 2540 (2011)
101. Beck R et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **543** A113 (2012)
102. Sun X H et al. *Astron. J.* **149** 60 (2015)
103. Beck R, Hoernes P *Nature* **379** 47 (1996)
104. Chupin A et al. *Astron. Nachr.* **339** 440 (2018)
105. Sokoloff D et al. *Galaxies* **6** (4) 121 (2018)
106. Stepanov R et al., in *Bioimpedance in Biomedical Applications and Research* (Eds F Simini, P Bertemes-Filho) (Cham: Springer Intern. Publ., 2018) p. 257
107. Podtaev S, Morozov M, Frick P *Cardiovascular Eng.* **8** 185 (2008)
108. Танкананг А В, Чемерис Н К *Биофизика* **54** 537 (2009); Tankanang A V, Chemeris N K *Biophysics* **54** 375 (2009)

109. Mizeva I et al. *J. Biomed. Opt.* **20** 037007 (2015)
110. Frick P, Mizeva I, Podtaev S *Biomed. Signal Process. Control* **21** 1 (2015)
111. Martini R, Bagno A *Clin. Hemorheol. Microcirc.* **70** 213 (2018)
112. Думлер А А и др. *Альманах клинической медицины* **44** 179 (2016)
113. Stepanov R et al. *Biomed. Signal Process. Control* **36** 50 (2017)

Wavelets for the space-time structure analysis of physical fields

P.G. Frick^(1,2,a), **D.D. Sokoloff**^(3,4,5,b), **R.A. Stepanov**^(1,6,c)

⁽¹⁾ *Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. Akademika Koroleva 1, 614013 Perm, Russian Federation*

⁽²⁾ *Perm State National Research University, ul. Bukireva 15, 614068 Perm, Russian Federation*

⁽³⁾ *Lomonosov Moscow State University, Department of Physics, Leninskie gory 1, 119991 Moscow, Russian Federation*

⁽⁴⁾ *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics,*

Leninskie gory 1, 119991 Moscow, Russian Federation

⁽⁵⁾ *Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation, Russian Academy of Sciences, Kaluzhskoe shosse 4, 108840 Troitsk, Moscow, Russian Federation*

⁽⁶⁾ *Perm National Research Polytechnic University, prosp. Komsomol'skii 29, 614990 Perm, Russian Federation*

E-mail: ^(a) frick@icmm.ru, ^(b) sokoloff.dd@gmail.com, ^(c) rodion@icmm.ru

Spectral analysis, based on the Fourier method, is a general tool in physics. Wavelets appeared as a natural generalization of classical spectral analysis to the case of complex nonstationary and spatially inhomogeneous systems, for which a comparison with an infinite sinusoid, which forms the basis of the Fourier method, has to be replaced by a comparison with a finite wave packet, which is known as a wavelet. In this review, the authors, based largely on their own experience of application wavelet analysis in astro- and geophysics, solar-terrestrial relations, as well as climatology, medical physics, and laboratory hydrodynamic experiments, demonstrate the possibilities and discuss the practical aspects of the application of the wavelet apparatus to the interpretation of signals and images of various physical natures.

Keywords: wavelets, spectral analysis, data processing for signals and images, solar and stellar activity, galactic magnetic fields, geophysics, medical physics

PACS numbers: 47.27.er, **95.75.-z**

Bibliography — 113 references

Received 8 August 2020, revised 20 October 2020

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **192** (1) 69–99 (2022)

Physics – Uspekhi **65** (1) (2022)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.10.038859>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2020.10.038859>