

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Резонансное рассеяние электромагнитных волн малыми металлическими частицами: новый взгляд на старую проблему

М.И. Трибельский, А.Е. Мирошниченко

Обзор посвящён обсуждению новых (и часто неожиданных) аспектов старой проблемы упругого рассеяния света малыми металлическими частицами, размер которых меньше толщины скин-слоя или сопоставим с ней. Основное внимание уделяется выяснению физических основ этих новых аспектов. Показано, что в ряде практически важных случаев рассеяние света такими частицами, несмотря на их малость, может не иметь почти ничего общего с рэлеевским. Детально обсуждается так называемое аномальное рассеяние и поглощение, а также резонансы Фано, в том числе направленные, наблюдающиеся только в малом телесном угле. Обзор содержит математическое дополнение, включающее сводку основных результатов теории Ми и обсуждение некоторых общих свойств коэффициентов рассеяния. Помимо чисто академического интереса рассматриваемые явления могут найти широкое применение в биологии, медицине, фармацевтике, генной инженерии, визуализации сверхмалых объектов, спектроскопии сверхвысокого разрешения, системах передачи, записи и обработки информации и многих других приложениях и технологиях.

Ключевые слова: резонансы Ми, резонансы Фано, субволновая оптика, наночастицы

PACS numbers: 42.25.Fx, **42.70. – a**, 78.67. – nDOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.01.038924>

Содержание

1. Введение (45).
2. Плазмонные резонансы (46).
 - 2.1. Рэлеевское рассеяние и область его применимости.
 - 2.2. Аномальное рассеяние.
3. Максимизация поглощения света субволновой частицей. Аномальное поглощение (54).
4. Аномальное поглощение и реальные материалы (56).
5. Резонансы Фано (57).
 - 5.1. История вопроса.
 - 5.2. Суть резонансов Фано и их описание.
 - 5.3. Резонансы Фано и продольные электромагнитные моды.
 - 5.4. Направленные резонансы Фано.
6. Заключение (62).
7. Приложение. Математическое дополнение (63).
 - А. Точное решение Ми для сферы.
 - Б. Общие свойства коэффициентов рассеяния.

Список литературы (66).

М.И. Трибельский^(1,2,a), А.Е. Мирошниченко⁽³⁾

- ⁽¹⁾ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы 1, стр. 2, 119991 Москва, Российская Федерация
- ⁽²⁾ Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Инженерно-физический институт биомедицины, Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Российская Федерация
- ⁽³⁾ School of Engineering and Information Technology, University of New South Wales (UNSW) Canberra, Australia
- E-mail: ^(a) mitribelsky@gmail.com

Статья поступила 17 августа 2020 г.,
после доработки 22 января 2021 г.

1. Введение

Изучение рассеяния света малыми частицами имеет давнюю историю. Однако, несмотря на то что точное решение для пространственно-однородной сферической частицы произвольного размера, обладающей произвольным значением диэлектрической проницаемости, было получено Густавом Ми (а также независимо Лоренцом и Дебаем) более 100 лет назад¹, данная задача ещё весьма далека от своего полного завершения. Дело в том, что в решении Ми поле рассеянной волны представляется в виде бесконечного ряда парциальных волн (дипольной, квадрупольной и т.д.), каждая из которых, в свою очередь, разбивается на сумму так называемых электрических и магнитных компонент [1–4]. При этом соответствующие эффективности (безразмерные величины, равные отношению парциальных сечений к площади геометрического сечения сферы πR^2) связаны с комплексными коэффициентами рассеяния a_n , b_n довольно простыми выражениями (подробнее см. далее).

Однако, как известно, "дьявол в деталях" — явные выражения для самих коэффициентов рассеяния представляют собой громоздкие комбинации специальных функций (так называемые функции Риккати–Бесселя, см. приложение к настоящему обзору). Их зависимость от различных параметров задачи существенно разная при различных характерных значениях этих параметров, что, в свою очередь, приводит к качественному различию свойств рассеянного излучения в различных об-

¹ Прекрасный исторический обзор этой проблемы содержится в книге Керкера [1].

ластях пространства параметров задачи. Выяснение этих областей и соответствующих свойств рассеянного излучения представляет собой физическую (а не формально-математическую, как получение самого точного решения Ми) проблему. И именно данная проблема всё ещё преподносит пытливому исследователю неожиданные и весьма важные результаты.

В последнее время интерес к указанной проблеме особенно возрос в связи с громадным прогрессом в нанотехнологиях и, как следствие, широким применением результатов исследования задачи Ми и её обобщений в самых разных областях — от телекоммуникации до диагностики и лечения онкологических и других заболеваний [5–9]. Соответственно выглядит и число публикаций по данной теме. Поиск в *Google Scholar* по ключевым словам *Mie scattering* даёт 213 000 (!) монографий, статей и программных продуктов.

Разумеется, нет никакой возможности представить в одной статье обзор всей этой массы материала. Авторы настоящей публикации и не ставят перед собой такой невыполнимой задачи. Тем более что по данной теме уже существует большое число как прекрасных монографий (см., например, [1, 3, 4]), так и замечательных обзоров [10–15]. Однако, поскольку развитие указанного направления происходит всё более ускоряющимися темпами, даже наиболее свежие обзорные статьи устаревают уже к моменту их выхода в свет. По этой причине мы решили сконцентрироваться на некоторых последних достижениях в рассматриваемой области, которые ближе всего к нашим собственным исследованиям. Но даже и здесь мы не претендуем на полноту, ограничившись только несколькими, с нашей точки зрения, наиболее интересными вопросами рассеяния и поглощения электромагнитного излучения малыми металлическими частицами и оставляя обсуждение диэлектрических частиц для будущего обзора, если таковой когда-либо будет написан. Мы старались основное внимание уделить физике обсуждаемых явлений, ограничившись минимальным количеством простых формул.

Все более сложные математические выкладки вынесены в приложение. Мы также пренебрегаем анизотропией частицы, полагая, что все три главных значения тензора диэлектрической проницаемости материала частицы равны друг другу. Учёт анизотропии, если только речь не идёт о специально сконструированных наночастицах с большой анизотропией, был бы превышением принятой точности рассмотрения. Обсуждение эксперимента также ограничено самым необходимым минимумом.

Однако когда, следуя означенным принципам, мы приступили к написанию настоящего обзора, выяснилось, что и указанных ограничений всё ещё недостаточно для удержания объёма обзора в разумных пределах. Поэтому их пришлось ужесточить. В частности, из обзора пришлось исключить весьма интересные и важные для приложений проблемы оптических свойств как метаматериалов (искусственных, специальным образом структурированных сред), так и "метамолекул" — нескольких наночастиц, разделённых промежутками, меньшими или сопоставимыми с длиной волны падающего излучения и образующими по отношению к падающей волне определённую пространственную конфигурацию. Читателя, интересующегося такими вопросами, мы адресуем к другой оригинальной и обзорной литературе (см., например, [16–20]). То, что осталось после всех

ограничений — это эффекты, возникающие при рассеянии света уединённой сферической металлической частицей или сферически-симметричной частицей типа ядро — оболочка, каковые и будут обсуждены достаточно подробно.

Поскольку читатели могут иметь различные области интересов, мы, сохраняя единство изложения и его логическую последовательность, постарались сделать каждый раздел обзора самодостаточным. Это позволяет при желании ограничиться чтением только отдельных разделов обзора.

Всюду, где это не оговорено особо, мы рассматриваем рассеяние плоской линейно-поляризованной волны с временной зависимостью полей, пропорциональной $\exp(-i\omega t)$. Поскольку плоские волны являются полной системой функций, по ним можно разложить произвольную падающую волну, поэтому такое рассмотрение не ограничивает общности обсуждаемых результатов.

Мы пользуемся гауссовой системой единиц. Кроме того, все вещества предполагаются немагнитными, так что магнитная проницаемость μ всегда считается равной единице. Рассматривается только пассивное рассеяние. Рассеяние активными частицами, имеющими инверсную населённость, и связанные с ним лазерные эффекты лежат вне рамок данной работы. Подчеркнём, что, хотя всюду в настоящем обзоре мы говорим о рассеянии электромагнитных волн, приведённые результаты легко переносятся на случай рассеяния волн другой природы, например акустических.

2. Плазмонные резонансы

2.1. Рэлеевское рассеяние и область его применимости

То, что субволновая частица рассеивает электромагнитное излучение как электрический диполь, хорошо известно со времени фундаментальных работ лорда Рэля [21, 22], опубликованных 150 лет тому назад! В правильности этих работ мы убеждаемся каждый раз, когда любуемся голубым небом или багровым закатом. Впоследствии их результаты блестяще подтверждались бесчисленными экспериментальными и теоретическими исследованиями. Казалось бы, что вопрос решён раз и навсегда, и ничего нового здесь никогда уже не может быть обнаружено.

Но ... "never say never". Давайте кратко воспроизведём и проанализируем рассуждения, лежащие в основе знаменитой формулы для сечения рэлеевского рассеяния сферой радиуса R [23]:

$$\sigma_{\text{sca}} = \frac{8\pi\epsilon_{\text{out}}^2}{3} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 R^6 \left|\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\right|^2 \equiv \frac{8\pi x^6}{3k^2} \left|\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\right|^2. \quad (1)$$

Здесь $\epsilon \equiv \epsilon_1/\epsilon_{\text{out}}$ — диэлектрическая проницаемость материала сферы ϵ_1 , нормированная на соответствующее значение для окружающей среду ϵ_{out} , а величина x (параметр размера) равна kR , где $k = \omega m_{\text{out}}/c$ — волновое число падающей волны, $m_{\text{out}} \equiv \sqrt{\epsilon_{\text{out}}}$ — коэффициент преломления окружающей среды, а c — скорость света в вакууме. Параметр размера является чисто действительной величиной, так как рассматриваемая постановка задачи (рассеяния электромагнитных волн в неограниченной внешней среде, когда падающая волна приходит из бесконечности, а рассеянное излучение уходит на

бесконечность) возможна только при чисто действительном значении m_{out} . Отметим, что часто наряду с размерной величиной σ_{sca} бывает удобно характеризовать интенсивность рассеяния безразмерной эффективностью рассеяния: $Q_{\text{sca}} = \sigma_{\text{sca}}/(\pi R^2)$.

Если форма рассеивающей свет частицы близка к сферической, а её радиус значительно меньше длины волны излучения, в том числе и в материале сферы, то в каждый момент времени электрическое поле падающей на частицу электромагнитной волны можно считать пространственно-однородным. В этом случае из симметрии задачи следует, что поле внутри частицы также пространственно-однородно, хотя значение вектора напряжённости $\mathbf{E}$ внутри частицы определяется величиной ε и отличается от соответствующего значения в падающей волне [23]. Однородное поле создаёт в частице наведённый дипольный момент, величина которого пропорциональна объёму частицы, т.е. R^3 , и вместе с полем падающей волны осциллирует во времени с частотой ω . Что касается магнитной поляризуемости, то при μ , близком к единице, ей можно пренебречь. Интенсивность излучения электрического диполя пропорциональна квадрату модуля второй производной по времени от величины дипольного момента [24], т.е. $\omega^4 R^6$. Это совпадает с зависимостью $\sigma(\omega, R)$, следующей из формулы (1).

Что не учтено в этих рассуждениях? Помимо $\omega^4 R^6$ в формуле (1) имеется множитель $|\varepsilon - 1|/(\varepsilon + 2)|^2$, описывающий поляризуемость частицы пространственно-однородным электрическим полем [23]. Заметим теперь, что для хороших металлов в оптической области спектра $\varepsilon < 0$, а знаменатель (1) обращается в нуль при $\varepsilon = -2$. Мы приходим к нефизическому результату — расходимости сечения рассеяния. Подчеркнём, во избежание недоразумений, что хотя при $\varepsilon < 0$ поле в металле экспоненциально затухает, это не противоречит нашему предположению о наличии внутри рассеивающей частицы однородного поля: как уже отмечалось, считается, что размер частицы много меньше характерной длины затухания поля (толщины скин-слоя).

Учтёт того, что чисто действительное значение ε есть идеализированный случай полного отсутствия диссипации и что в реальности ε всегда имеет отличную от нуля мнимую часть, которая описывает диссипативные процессы, не спасает положения. Действительно, наличие у ε ненулевой мнимой части приводит к тому, что знаменатель (1) не может обратиться в нуль. Однако не существует никаких фундаментальных ограничений снизу на величину $\text{Im } \varepsilon$, кроме того что для обеспечения диссипации она должна быть положительной, а в силу принципа причинности удовлетворять соотношению Крамерса–Кронига. Последнее представляет собой определённое интегральное соотношение. Что касается значения $\text{Im } \varepsilon$ при какой-то фиксированной частоте ω , то возможны случаи, когда эта величина оказывается чрезвычайно малой. Если область малости $\text{Im } \varepsilon$ совпадает с областью, в которой $\text{Re } \varepsilon \approx -2$, то может оказаться, что согласно формуле (1) шарик радиусом в несколько нанометров имеет сечение рассеяния в квадратный километр, что противоречит элементарному здравому смыслу. Говоря про квадратный километр, мы, конечно, утрируем, но ясно, что в окрестности $\varepsilon = -2$ рэлеевское приближение может приводить к абсурдным результатам, т.е. перестаёт работать, а формула (1) требует корректировки.

Подойдём к этому важному вопросу с другой стороны. Микроскопически колебания дипольного момента связаны с коллективными колебаниями свободных и/или связанных зарядов в веществе рассеиваемой частицы. Как и всякие колебания, они имеют собственные частоты. При отсутствии диссипации, когда частота внешнего воздействия становится равной собственной частоте колебаний, их амплитуда расходится. Очевидно, что обсуждаемая расходимость выражения (1) при $\varepsilon = -2$ как раз и означает такое резонансное возбуждение. Это хорошо согласуется с известным в теории рассеяния фактом расходимости сечения упругого рассеяния в точках резонансов [25].

Поскольку, как уже отмечалось, отрицательные значения ε в видимой области спектра обычно соответствуют металлам, будем, для определённости, говорить о свободных электронах. Отмеченные выше колебания электронной плазмы называются локализованными плазмонами. Таким образом, при рассеянии света малой металлической сферой происходит перекачка энергии из падающей электромагнитной волны в локализованные плазмоны. Однако в отсутствие диссипации все процессы обратимы. Если существует прямой процесс, то должен существовать и обратный — трансформация локализованных плазмонов в распространяющуюся от частицы (т.е. рассеянную) электромагнитную волну.

Процесс этот хорошо известен и носит название радиационного затухания плазмона. При этом, если поток энергии в прямом процессе определяется амплитудой падающей волны, то в обратном процессе он определяется амплитудой плазмона. Обычно радиационное затухание весьма мало. Тем не менее ясно, что как бы ни была мала эффективность обратной трансформации, при неограниченном росте амплитуды плазмона в конце концов она достигает такой величины, когда оба процесса приходят в динамическое равновесие, и дальнейший рост амплитуды плазмона (а следовательно, и мощности рассеянного излучения) прекращается.

Важно, что в силу малости радиационного затухания локализованный плазмон обладает большим временем жизни. Если в какой-то момент времени скачком отключить падающее излучение, то накопленная в локализованном плазмоне энергия не излучится мгновенно, а будет убывать по экспоненциальному закону с показателем, равным времени жизни плазмона. Поэтому при динамическом равновесии поток энергии при прямой трансформации падающей электромагнитной волны в локализованные плазмоны компенсируется обратным потоком, связанным с радиационным затуханием плазмонов, возбуждённых в предыдущие моменты времени. Иными словами, существует определённый эффект запаздывания между прямой и обратной трансформациями.

Теперь становится ясно, что именно не учитывает формула Рэля. Она основана на описании поляризации частицы стационарным электрическим полем. Такое описание в принципе не может учесть эффекты запаздывания, т.е. радиационное затухание. Вдали от плазмонного резонанса этим затуханием действительно можно пренебречь в силу его малости, что и приводит к формуле (1). Однако в окрестности резонанса это пренебрежение становится недопустимым, так как при малой диссипации именно радиационное затухание ограничивает величину сечения рассеяния.

2.2. Аномальное рассеяние

2.2.1. Бездиссипативный предел. Что же нужно сделать, чтобы правильно учесть радиационное затухание? В том-то и дело, что очень мало. У нас есть точное решение задачи [1–3] (см. также приложение). Поскольку оно точное, радиационное затухание включено в это решение автоматически. Единственное, что остаётся предпринять, — выделить эффект радиационного затухания в явном виде. Для этого нужно преобразовать громоздкие формулы Ми, воспользовавшись малостью x .

Рассмотрим сначала бездиссипативный предел ($\text{Im } \varepsilon = 0$). Разумеется, такой предел есть идеализация реальной ситуации и никогда не встречается в природе. Однако он представляет особый интерес, в силу того что, во-первых, наиболее ярко демонстрирует обсуждаемые ниже новые эффекты. Во-вторых, при малой диссипации (конкретные критерии такой малости будут сформулированы далее) эти эффекты для диссипативного и недиссипативного случаев близки не только качественно, но и количественно. Что же касается их анализа, то в недиссипативном случае он существенно упрощается, что делает его особенно важным для понимания сути обсуждаемых явлений.

Напомним основные положения теории Ми (см. также приложение). В этой теории поле рассеянной волны представляется в виде мультипольного разложения — бесконечного ряда по сферическим гармоникам (дипольной, квадрупольной, октупольной и т.д.). Каждая гармоника представляет собой сумму двух независимых компонент — электрической и магнитной, которые мы будем называть электрическими и магнитными парциальными модами. Комплексные амплитуды первой и второй компонент (*коэффициенты рассеяния*) принято обозначать a_n и b_n соответственно, где $n = 1, 2, 3, \dots$ — номер мультиполя.

Значения коэффициентов рассеяния определяются из сшивки через граничные условия на поверхности частицы решения внешней краевой задачи, описывающей поле излучения вне сферы, с решением внутренней задачи, описывающей поле внутри неё. В силу линейности проблемы общие решения этих двух задач не зависят друг от друга. Из такого достаточно тривиального утверждения следует важный вывод: функциональный вид решения внешней краевой задачи не зависит от того, как выглядит координатная зависимость $\varepsilon(r)$ внутри частицы, если такая зависимость имеется. Важно только, чтобы она не нарушала сферической симметрии (аналогичное утверждение, разумеется, справедливо и в цилиндрически-симметричном случае). Конкретный вид $\varepsilon(r)$ определяет только значение коэффициентов рассеяния, но не структуру самого решения.

Как показано далее, это позволяет сделать некоторые весьма общие утверждения о свойствах задачи рассеяния на сфере с произвольной (в том числе и разрывной — слоистая структура) зависимостью её диэлектрической проницаемости от радиуса. Такая возможность особенно важна в силу сложности явной зависимости коэффициентов рассеяния от параметров задачи, которые даже в простейшем случае пространственно-однородной сферы представляют собой довольно громоздкие выражения, записанные через функции Риккати–Бесселя от x и mx , см. приложение, формулы (48), (49). Здесь $m \equiv \sqrt{\varepsilon}$ — относительный коэффициент преломления сферы (вообще говоря, комплексный). В частности, можно показать

([26], см. также приложение), что из общих свойств точного решения следует, что при произвольной зависимости $\varepsilon(r)$

$$a_n = \frac{F_n^{(a)}}{F_n^{(a)} + iG_n^{(a)}}, \quad (2)$$

где конкретный вид F и G определяется данной зависимостью $\varepsilon(r)$ и значением параметра размера x . Аналогичное выражение справедливо для b_n , разумеется, с другими, чем для a_n , значениями F и G .

Что же касается сечения рассеяния, то согласно определению [1–4] оно равно отношению потока энергии, рассеиваемой во всех направлениях, к интенсивности падающей волны. Для вычисления этого потока в рассматриваемой задаче удобно взять поток вектора Пойнтинга через расположенную в дальней волновой зоне сферу, центр которой совпадает с центром рассеивающей частицы. При интегрировании по поверхности такой сферы перекрёстные члены, соответствующие произведению полей разных парциальных мод, обнуляются в силу ортогональности сферических гармоник. В результате интенсивность рассеяния в каждую парциальную моду оказывается независимой от остальных мод, а полное сечение рассеяния представляется в виде бесконечного ряда парциальных сечений $\sigma_{n, \text{sca}}$, каждое из которых связано с коэффициентами рассеяния n -го мультиполя следующими соотношениями [1, 3, 27]:

$$\sigma_{n, \text{sca}} = \sigma_{n, \text{sca}}^{(a)} + \sigma_{n, \text{sca}}^{(b)}, \quad \sigma_{n, \text{sca}}^{(z)} = \frac{2(2n+1)\pi}{k^2} |z_n|^2, \quad (3)$$

где z обозначает либо a , либо b .

При отсутствии диссипации функции F и G являются чисто действительными. Далее там, где это не оговорено особо, мы ограничимся рассмотрением пространственно-однородной сферы, для которой $\varepsilon = \text{const}$. В этом случае, разлагая функции F и G в ряд по малым x , легко убедиться, что при $|mx| \ll 1$ выражение для b_n не имеет резонансного знаменателя, а само b_n оказывается порядка x^{2n+3} . Что же касается a_n , то для него после сокращения общего множителя в числителе и знаменателе выражения (2) получаем:

$$F_n^{(a)} = x^{2n+1} \left\{ \frac{(n+1)(\varepsilon-1)}{[(2n+1)!!]^2} + O(x^2) \right\}, \quad (4)$$

$$G_n^{(a)} = \frac{n}{2n+1} \left(\varepsilon + \frac{n+1}{n} + O(x^2) \right). \quad (5)$$

Казалось бы, поскольку F_n имеет высокий порядок малости по x , а главный член в разложении G_n по степеням x вообще от x не зависит, то либо в знаменателе выражения (2) мы всегда можем пренебречь F_n по сравнению с G_n , либо необходимо учесть в правой части (5) члены до x^{2n+1} включительно. Однако, в силу того что в выражении (2) функция G_n входит с множителем i , этот вопрос оказывается несколько более сложным. Рассмотрим его подробнее.

Если $(\varepsilon + 1 + 1/n) \gg x^{2n+1}$, то F в знаменателе (2) действительно можно пренебречь по сравнению с G . В этом случае все a_n становятся чисто мнимыми (т.е. рассеянное поле сдвинуто по фазе относительно поля падающей волны на $\pm\pi/2$), а их модуль оказывается порядка x^{2n+1} .

Подстановка соответствующих выражений в (3) даёт значение парциального сечения рассеяния, являющегося обобщением формулы (1) на случай произвольного n . В частности, при $n = 1$ получаем в точности (1). При произвольном n соответствующее парциальное сечение оказывается порядка $x^{2(2n+1)}$. Это обстоятельство вместе с отмеченной малостью b_n по сравнению с a_n приводит к тому, что из всего бесконечного ряда парциальных сечений основной вклад в полное сечение рассеяния вносит именно электрический дипольный момент, в полном соответствии с проведённым выше обсуждением формулы (1).

Здесь уместно сделать некоторое общее замечание относительно минимально необходимой в рассматриваемом круге задач точности приближённых вычислений. Помимо σ_{sca} важным параметром, описывающим процесс рассеяния, является сечение экстинкции $\sigma_{\text{ext}} \equiv \sigma_{\text{sca}} + \sigma_{\text{abs}}$, где σ_{abs} — сечение поглощения, характеризующее мощность, поглощённую рассеивающим излучением объектом за счёт необратимых диссипативных процессов. Для сферической частицы парциальное сечение экстинкции определяется следующей формулой [1, 3, 27]:

$$\sigma_{n,\text{ext}} = \sigma_{n,\text{ext}}^{(a)} + \sigma_{n,\text{ext}}^{(b)}, \quad \sigma_{n,\text{ext}}^{(z)} = \frac{2(2n+1)\pi}{k^2} \operatorname{Re} z_n, \quad (6)$$

где, как и раньше, z_n обозначает любой из коэффициентов a_n, b_n .

В недиссипативном пределе $\sigma_{\text{abs}} = 0$, следовательно, $\sigma_{\text{ext}} = \sigma_{\text{sca}}$. Однако если, в соответствии со сказанным ранее, ограничиться в выражении (2) главным приближением по малому F , то реальная часть от получившегося чисто мнимого выражения равна нулю, между тем как его модуль, очевидно, нулю не равняется, и равенство $\sigma_{\text{ext}} = \sigma_{\text{sca}}$ не выполняется. Парадокс легко разрешается, если учесть, что при приближённых вычислениях обращение в нуль главного члена означает только то, что необходимо учесть следующий член разложения. В выражении (3) для парциального сечения рассеяния главный член ненулевой, и члены более высокого порядка можно отбросить. В выражении же (6) главный член обнуляется. Тогда, учитывая следующий член разложения правой части (2) по малому F , получаем $a \approx -i(F/G) + (F/G)^2$, и равенство $\sigma_{\text{ext}} = \sigma_{\text{sca}}$ восстанавливается.

Как отмечалось выше, выражения (3), (6) сохраняют свой вид для произвольной функции $\varepsilon(r)$. Заметим теперь, что, ввиду отмечавшейся независимости рассеяния каждой из парциальных мод, для пассивной, т.е. не обладающей инверсной населённостью, частицы между соответствующими парциальными сечениями экстинкции и рассеяния должно выполняться очевидное неравенство $\sigma_{n,\text{ext}}^{(z)} \geq \sigma_{n,\text{sca}}^{(z)}$. Отсюда и из формул (3), (6) следует, что $\operatorname{Re} z_n \geq |z_n|^2$. Далее, представляя z в виде $z = z_0 \exp(i\phi)$, получаем $\cos \phi \geq z_0$, что приводит к выводу $z_0 \leq 1$. Из данного неравенства следует фундаментальное ограничение для парциальных сечений экстинкции и рассеяния в данную моду:

$$\sigma_{\text{sca},\text{max}}^{(n)} \leq \sigma_{\text{ext},\text{max}}^{(n)} \leq \frac{2(2n+1)\pi}{k^2}. \quad (7)$$

При этом равенство может достигаться только при $\phi = 0$, т.е. для чисто действительного коэффициента рассеяния. С другой стороны, при чисто действительном z имеем $\sigma_{n,\text{ext}}^{(z)} = \sigma_{n,\text{sca}}^{(z)}$, т.е. $\sigma_{n,\text{abs}}^{(z)} = 0$, что соответствует недиссипативному пределу.

Таким образом, путём чрезвычайно простых рассуждений мы приходим к весьма важному фундаментальному выводу. При рассеянии плоской монохроматической линейно поляризованной волны сферой с произвольной, но сферически симметричной зависимостью диэлектрической проницаемости от r парциальные сечения экстинкции и рассеяния в данную моду удовлетворяют неравенствам (7). При этом равенство может достигаться только в недиссипативном пределе (ср. с полученной далее формулой (10)). Разумеется, обратное неверно — не всякое рассеяние при отсутствии диссипации имеет максимальные значения парциальных сечений.

Отметим также, что рэлеевское приближение в общепотребительном смысле означает не только пренебрежение F по сравнению с G в знаменателе выражения для коэффициентов рассеяния, но и пренебрежение вкладами в сечение рассеяния, поглощения или экстинкции всех парциальных мод, за исключением дипольной. Нам, однако, будет удобно пользоваться расширенным толкованием этого термина, означающим пренебрежение F по сравнению с G , но не включающим в себя пренебрежение высшими мультиполями. Это позволяет применять его не только для дипольной моды, но также и для любого парциального сечения при $n > 1$.

Обсудим теперь, что происходит при приближении ε к $-(n+1)/n$ [28, 29]. Обсуждение начнём с недиссипативного предела чисто действительного ε . Поскольку нас интересует малая окрестность точки $\varepsilon = -(n+1)/n$, естественно ввести $\delta\varepsilon \equiv \varepsilon + (n+1)/n$. Тогда в главном по малому $\delta\varepsilon$ приближении выражение для a_n приобретает вид

$$a_n \approx \frac{i\gamma_n/2}{\delta\varepsilon + i(\gamma_n/2)}, \quad \gamma_n = \frac{2(n+1)x^{2n+1}}{[n(2n-1)]!}. \quad (8)$$

При фиксированном x такая зависимость приводит для $|a_n|^2$ как функции $\delta\varepsilon$ к лоренцевскому профилю с шириной линии, равной γ_n , а при $\delta\varepsilon \gg \gamma_n$ — к формуле

$$a_n \approx \frac{i\gamma_n}{2\delta\varepsilon}, \quad (9)$$

что при $n = 1$ (дипольное приближение) сводится к формуле Рэлея (1).

Важно, что конечность γ_n существенно связана с конечностью x . При переходе к внешнему пространственно-однородному полю длина волны падающего излучения стремится к бесконечности, а x (и вместе с ним γ_n) стремится к нулю. Иными словами, при отсутствии диссипации конечная ширина линии возникает только при учёте отклонения поля падающей волны от пространственно-однородного, т.е. при учёте эффектов запаздывания, что полностью соответствует качественным рассуждениям о радиационном затухании, приведённым выше при обсуждении формулы Рэлея.

Следует также подчеркнуть, что при $\delta\varepsilon = 0$ и $\gamma_n = 0$ в выражении (8) для a_n появляется неопределённость типа $0/0$. Эту неопределённость нельзя раскрыть: в точке $\delta\varepsilon = 0$ и $\gamma_n = 0$ правая часть (8) не имеет предела, а сама точка является аналогом существенно особых точек аналитических функций. При наличии конечного диссипативного затухания, рассматриваемого в следующем разделе 2.2.2, особенность "размывается" — вместо сингулярной точки появляется область конечных размеров. Однако при малой диссипации размер области, внутри которой про-

исходит резкое изменение коэффициента рассеяния, также мал. В этом случае исследование недиссипативного предела, как обычно, помогает сделать правильные выводы о поведении задачи при малом диссипативном затухании (см. подробнее далее, а также приложение и работу [30]).

Подчеркнём, что возникновение такой особенности не является каким-то узкоспециальным свойством рассматриваемой задачи рассеяния. Она имеет весьма общую природу и встречается в широком классе резонансных явлений при стремлении соответствующих диссипативных констант к нулю.

Важно отметить, что поскольку F_n и G_n являются функциями двух независимых переменных x и ε , т.е. фактически x и ε , то при чисто действительном ε условие резонанса $G_n^{(a)} = 0$ задаёт на плоскости x, ε определённую резонансную кривую $\varepsilon = \varepsilon^{\text{res}}(x)$. В каждой точке этой кривой $a_n = 1$. Обсуждавшаяся выше точка $x = 0, \varepsilon = -(n+1)/n$ есть всего лишь начальная точка данной кривой, из которой она выходит при $x = 0$.

При малом, но конечном x под $\delta\varepsilon$ в выражении (8) следует понимать разность $\varepsilon - \varepsilon^{\text{res}}(x)$. Аналогично и в выражении (4) следует положить $\varepsilon = \varepsilon^{\text{res}}(x)$. Однако расчёты показывают, что разность между $\varepsilon^{\text{res}}(x)$ и её значением при $x = 0$ оказывается порядка x^2 [29], см. (5), что даёт лишь малые поправки к выражению (8) для γ_n . Таким образом, в главном приближении при малом, но конечном x ни положение точки резонанса на оси ε , ни ширина резонансной линии (по x) не меняются. Это и является оправданием для пренебрежения членами более высокого порядка в выражениях (4), (5).

Для применения этого результата к реальной физической ситуации следует от независимых переменных x, ε перейти к переменным R, ω и рассмотреть форму линии как функцию ω при фиксированном R . Это легко сделать, разлагая $\varepsilon(\omega)$ в ряд в точке $\omega = \omega_n^{\text{res}}$, где $\varepsilon(\omega_n^{\text{res}}) = \varepsilon^{\text{res}}(x)$. При этом $\delta\varepsilon \rightarrow (d\varepsilon/d\omega)_{\omega_n^{\text{res}}} \delta\omega$, где $\delta\omega = \omega - \omega_n^{\text{res}}$. Что же касается самого x , то его в главном приближении можно представить как $k(\omega_n^{\text{res}})R \equiv m_{\text{out}}\omega_n^{\text{res}}R/c$. В результате мы опять приходим к лоренцевскому профилю, но уже для функции $|a_n(\delta\omega)|^2$.

Согласно формуле (3), тот же лоренцевский профиль сохраняется и для парциального сечения. В полном соответствии с изложенными выше общими принципами в точке резонанса, определяемой как точка, в которой данный профиль имеет максимум, $a_n = 1$, а парциальное сечение оказывается равным

$$\sigma_{n, \text{sca}, \text{max}}^{(a)} = \frac{2(2n+1)\pi}{k^2}, \quad (10)$$

ср. с формулой (7).

Другой важной особенностью такого резонансного рассеяния является зависимость компонент напряжённости электрического и магнитного полей парциальной рассеянной волны в непосредственной окрестности поверхности частицы от её размера. В рэлеевском случае они оцениваются выражениями $E_{r, \theta, \phi}^{\text{sca}(n)} \sim x^{n-1}$, $H_{\theta, \phi}^{\text{sca}(n)} \sim x^n$, $H_r^{\text{sca}(n)} \sim x^{n+1}$, т.е. остаются регулярными при $x \rightarrow 0$. В случае резонансного рассеяния при перемещении в плоскости ε, x вдоль резонансной кривой в направлении $x = 0$ эти же величины оцениваются как $E_{r, \theta, \phi}^{\text{sca}(n)} \sim x^{-(n+2)}$, $H_{\theta, \phi}^{\text{sca}(n)} \sim x^{-(n+1)}$, $H_r^{\text{sca}(n)} \sim x^{n+1}$, т.е., за исключением радиальной компоненты магнитного поля, оказываются сингулярными по x и возрастают при уменьшении раз-

мера рассеивающей частицы [29, 31]. Это свойство есть прямое следствие независимости $\sigma_{n, \text{sca}, \text{max}}^{(a)}$ от x : чтобы обеспечить неизменную мощность рассеянного излучения при уменьшении размера излучающей области, требуется увеличение амплитуды поля в этой области.

Говоря о том, что параметр размера стремится к нулю, мы имеем в виду, что при этом задача продолжает описываться в рамках принятых здесь макроскопического приближения и классической механики. Поскольку $x = kR$, то его обнуление может происходить как за счёт увеличения длины волны излучения с последующим выходом в длинноволновый радиодиапазон, так и за счёт уменьшения размеров частицы. Если в первом случае переход к $x \rightarrow 0$ не выводит нас за рамки принятой постановки задачи, то во втором — при уменьшении размеров частицы до нескольких нанометров — описание задачи в рамках принятого подхода теряет применимость и должно быть дополнено учётом ряда новых эффектов, в том числе и квантовых. Это может радикально изменить обсуждающуюся здесь картину взаимодействия частицы с электромагнитным излучением. Однако освещение этих чрезвычайно интересных и важных вопросов лежит вне рамок данного обзора.

Казалось бы, указанная выше независимость $\sigma_{n, \text{sca}, \text{max}}^{(a)}$ от x приводит к парадоксу — частица нулевого размера, т.е. в реальности не существующая, по-прежнему имеет конечное сечение рассеяния, что является очевидной нелепостью. С другой стороны, этот вывод основывается на анализе точного решения задачи, т.е. применим в той же мере, в какой применимы сами уравнения Максвелла, в справедливости которых никто, конечно, не сомневается. Не спасает положение и то, что, как отмечалось, при очень малых R задача может выходить из области её применимости, ибо, как указывалось, переход $x \rightarrow 0$ может происходить за счёт увеличения длины волны излучения, что не нарушает применимость нашего рассмотрения. Поэтому разрешение парадокса следует искать в рамках данной постановки задачи. Мы вернёмся к этому вопросу чуть позже, а пока продолжим наш анализ.

Как было качественно показано при обсуждении формулы (1) и количественно — при обсуждении точного решения Ми, основной вклад в рэлеевское рассеяние вносит дипольная мода. Парциальные сечения высших мультиполей убывают как $x^{2(2n+1)}$, см. (2)–(5). Напротив, при резонансном рассеянии парциальные сечения возрастают с увеличением n как $2(2n+1)$, см. (10), т.е. резонансное значение парциального сечения дипольной моды меньше, чем квадрупольной, которое, в свою очередь, меньше октупольной и т.д. Таким образом, при резонансном рассеянии возникает обратная иерархия резонансов [28, 32]. Нужно подчеркнуть, что поскольку резонансные значения ε для каждого значения n различны ($\varepsilon^{\text{res}} \approx -(n+1)/n$), а резонансные линии узкие, перекрытия резонансов разных порядков не происходит, и этот эффект не влияет на сходимость мультипольного разложения для сферы.

Следует также учитывать, что каждый мультиполь характеризуется своим резонансным значением ε , а следовательно, и своей резонансной частотой. Поэтому, когда мы говорим об обратной иерархии резонансов, мы имеем в виду сравнение сечений при различных значениях ω — своих для каждого из резонансов. При этом пропорциональность парциальных сечений $2(2n+1)$ сохраняется только в том случае, если остаётся неизменным

k , см. (10). Поскольку сравнение происходит на разных частотах, неизменность k можно сохранить, только сравнивая резонансные сечения для сфер с разными размерами. Такое сравнение, мягко говоря, выглядит несколько странным. Поэтому желательно понять, как ведёт себя частотная зависимость сечения рассеяния для одной и той же частицы, когда её размер фиксирован, а единственным изменяющимся параметром является частота падающего излучения.

Как хорошо известно, для рэлеевского рассеяния, если пренебречь дисперсией диэлектрической проницаемости, то при фиксированном R интенсивность сечения рассеяния — непрерывная функция частоты, возрастающая с её ростом как ω^4 , а для более высоких мультиполей — как ω^{4n} , см. (3), (4). Что касается резонансного рассеяния, то в силу узости резонансных линий это рассеяние сосредоточено в малых окрестностях резонансных частот, поэтому зависимость его сечения от частоты дискретная и определяется спектром резонансных частот.

В целом частотная зависимость выглядит следующим образом. Имеется относительно широкая линия дипольного резонанса, крылья которой выходят на рэлеевскую зависимость (1). На этих крыльях, как на пьедестале, располагаются узкие интенсивные пики, соответствующие резонансному рассеянию, ширина которых уменьшается по мере роста n . Детали такой картины определяются конкретным видом дисперсионной зависимости $\varepsilon(\omega)$.

Приведём пример частотной зависимости полного сечения рассеяния $\sigma_{\text{sca}}(\omega) = \sum_n \sigma_{n,\text{sca}}(\omega)$ при фиксированном R , рассчитанной на основании точного решения Ми, для дисперсионного соотношения, описываемого формулой Друде. Для рассматриваемого здесь недиссипативного случая она имеет вид

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p = \text{const}. \quad (11)$$

Однако, поскольку в разделе 2.2.2 мы обсуждаем эффекты конечной диссипации, имеет смысл сразу привести эту формулу в более общем виде, а именно:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + iv)}, \quad \omega_p = \text{const}, \quad v = \text{const}. \quad (12)$$

Здесь ω_p и v обозначают плазменную частоту и частоту столкновений соответственно.

Для зависимости (11) условие $\varepsilon = -2$ (дипольный резонанс при $r \rightarrow 0$) выполняется при $\omega = \omega_0 = \omega_p/\sqrt{3}$. Дальнейшее рассмотрение удобно вести в терминах введённой выше безразмерной эффективности рассеяния $Q_{\text{sca}} = \sigma_{\text{sca}}/(\pi R^2)$, а ω измерять в единицах ω_0 . Что касается параметра размера x , то его можно записать в виде $x = x_0 \omega/\omega_0$, так что $x = x_0$ при $\omega = \omega_0$.

Отметим, что, хотя наш анализ основывается на разложении коэффициентов рассеяния в ряд по малому параметру размера и формально применим только при малых значениях последнего, фактически область его применения простирается до значений $x \sim 1$. Для того чтобы проиллюстрировать это утверждение, проведём расчёты эффективности сечения экстинкции при $x_0 = 0,9$ (рис. 1). Напомним, что при отсутствии диссипации сечения экстинкции и рассеяния совпадают.

Несмотря на то что параметр размера уже не является малой величиной, график $Q_{\text{ext}}(\omega)$ полностью соответствует приведённому выше описанию. Используемый при

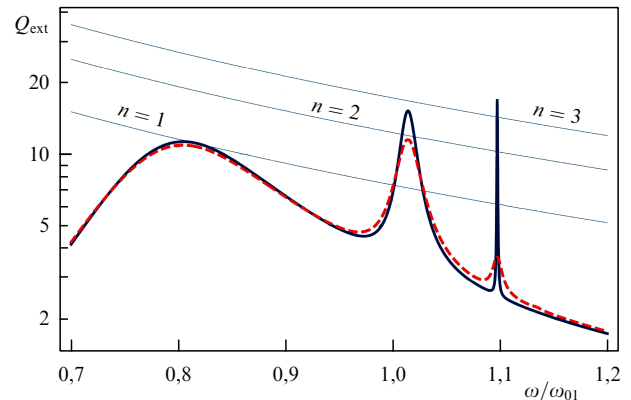


Рис. 1. Сплошная линия — частотная зависимость эффективности экстинкции сферы $Q_{\text{ext}}(\omega)$ в логарифмическом масштабе. Бездиссипативный предел, соответствующий формуле Друде (11). Расчёт на основании точного решения Ми при $x_0 = 0,9$. Тонкие наклонные прямые линии отображают максимальные значения парциальных эффективностей дипольного ($n = 1$), квадрупольного ($n = 2$) и октупольного ($n = 3$) резонансов, рассчитанных по формуле (10), равные $2(2n + 1)\omega_0^2/(x_0\omega)^2$. В точках резонансов максимумы полной эффективности экстинкции $Q_{\text{ext}}(\omega)$ оказываются больше соответствующих максимальных значений парциальных эффективностей за счёт конечного вклада нерезонансных мод. Штриховая линия — та же зависимость $Q_{\text{ext}}(\omega)$, но с учётом диссипативного затухания, когда $\varepsilon(\omega)$ определяется формулой (12) при $v = 0,01\omega_0$. Подробности в тексте.

построении графика интервал частот охватывает три первых резонанса: дипольный ($n = 1$) при $\omega/\omega_0 \approx 0,804$, квадрупольный ($n = 2$) при $\omega/\omega_0 \approx 1,014$ и октупольный ($n = 3$) при $\omega/\omega_0 \approx 1,097$. При этом резонансные линии квадрупольного и октупольного мультиполей располагаются на крыле линии дипольного резонанса. Хорошо видны как обратная иерархия резонансов (обратите внимание на логарифмический масштаб графика), так и резкое сужение резонансных линий по мере возрастания n , ср. с выражениями (8), (10).

То, что параметр размера оказывается порядка единицы, проявляется только в значительном красном смещении резонансных частот по сравнению с их значениями при $R = 0$, так что частота квадрупольного резонанса при $x_0 = 0,9$ почти совпадает с частотой дипольного резонанса (ω_0) при $x_0 = 0$, а также в том, что за счёт вклада крыльев нерезонансных мод, которые при таком значении x спадают достаточно медленно, полная эффективность экстинкции в точке резонанса оказывается заметно больше максимального значения для парциальной эффективности соответствующей резонансной моды, определяемого формулой (10).

Для сравнения на рис. 1 представлена та же зависимость, но рассчитанная с учётом конечной диссипации по формуле (12) со значением частоты столкновений $v = 0,01\omega_0$. Такая величина частоты столкновений при комнатной температуре примерно соответствует ряду металлов, имеющих малую диссипацию в окрестностях резонансов Ми (калий, натрий, алюминий). Отметим, что, как обычно, эффект диссипации сказывается тем больше, чем выше добротность резонанса в недиссипативном пределе, т.е. чем уже его линия. Более подробно зависимость $Q_{\text{ext}}(\omega)$ при наличии диссипации обсуждается в следующем разделе 2.2.2.

Однако, пожалуй, самой интересной характеристикой резонансного рассеяния является топологическая струк-

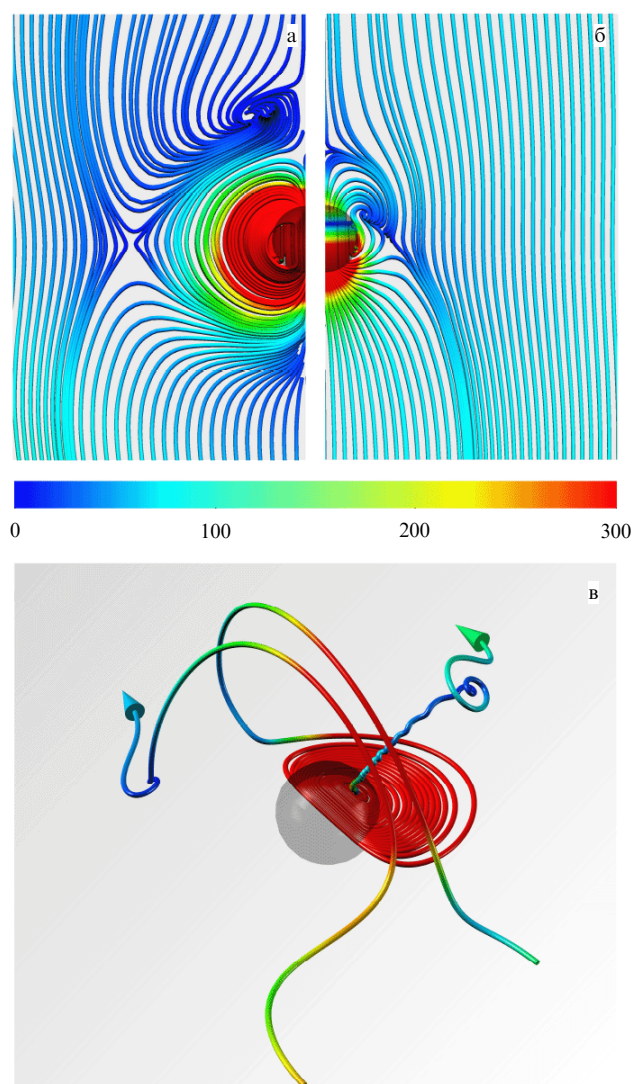


Рис. 2. (В цвете онлайн.) "Линии тока" вектора Пойнтинга в окрестности дипольного резонанса. Величина вектора Пойнтинга в каждой точке линий тока показана цветом. Цветовая шкала нормирована на интенсивность излучения падающей волны и является общей для всех панелей. Рассеивающая сфера изображена полупрозрачной, чтобы показать ход линии внутри частицы; $x = 0,3$; $\text{Re } \epsilon = -2,17$. При данном x точке резонанса соответствует $\text{Re } \epsilon = -2,22$. (а) Бездиссипативный предел: $\text{Im } \epsilon = 0$; левая полуплоскость. Падающая плоская волна распространяется от нижнего края панели к верхнему. Вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости рисунка. Показаны линии, лежащие в тонком плоско-параллельном слое, включающем экваториальное сечение сферы. Слой лежит в плоскости рисунка. Обрыв линий обозначает их выход за горизонтальные границы слоя. Хорошо видны "воронка", а также оптический вихрь (особая точка типа фокус-седло) и циркуляция энергии вокруг центра локализованного плазмона. (б) Правая полуплоскость для того же случая, что и на рис. а, но с учётом диссипации: $\text{Im } \epsilon = 0,18$. При данном наборе параметров это примерно соответствует алюминиевой наносфере с $R = 6,8$ нм. (в) Бездиссипативный предел с теми же значениями параметров, что и в случае, изображённом на рис. а. Две характерные существенно трёхмерные линии тока, начинающиеся несколько выше экваториальной плоскости сферы.

тура поля вектора Пойнтинга, описывающая циркуляцию энергии в окрестности рассеивающей сферы. Поскольку размер сферы мал по сравнению с длиной волны излучения, характерным масштабом, определяющим структуру поля в окрестности частицы, является единственный имеющийся в нашем распоряжении масштаб —

радиус сферы R . Однако в пределах этого масштаба поле имеет сложную структуру, содержащую различные особые точки (что весьма необычно для частицы субволновых размеров), число, тип и пространственное положение которых чрезвычайно чувствительны к малым изменениям частоты падающего излучения и связанным с ними изменениям ϵ [29, 33–36].

В качестве примера на рис. 2 представлены линии тока поля вектора Пойнтинга в окрестности дипольного резонанса, полученные авторами настоящего обзора в результате прямого численного интегрирования уравнений Максвелла с помощью пакета CST Studio Suite. Значения параметров задачи указаны в подписи к рисунку. В каждой точке линий тока вектор Пойнтинга направлен к ним по касательной. На рисунке 2а, б представлена структура поля в плоскости колебаний вектора $\mathbf{E}$ падающей электромагнитной волны. Разумеется, структура поля симметрична относительно перпендикулярной плоскости, проходящей через центр сферы (плоскость колебаний вектора $\mathbf{H}$ падающей электромагнитной волны). По этой причине на рис. 2а изображена только левая часть общей картины, соответствующая недиссипативному пределу. Для сравнения на рис. 2б представлена правая часть аналогичной картины, но с учётом диссипации.

Видно, что в структуре поля образуется "воронка", которая втягивает поле из большой области пространства, находящегося "ниже по течению", и транспортирует его в малую пространственную область, занятую локализованными плазмонами. Эффект воронки и обеспечивает большую концентрацию электромагнитной энергии в частице, необходимую для поддержания высокой интенсивности рассеиваемого излучения (см. масштаб на цветовой панели).

Отметим также особую точку типа центр (рис. 2а), лежащую на поверхности частицы и соответствующую центру локализованного плазмона. В окрестности этой точки линии тока являются замкнутыми кривыми. Это означает, что электромагнитное поле оказывается полностью локализованным в области пространства, заполненной такими линиями, — энергия не может ни поступать в эту область, ни излучаться из неё. Как же она туда попадает? Ведь до того как частица начала облучаться падающей волной, поля в этой области не было. Очевидно, это могло случиться только на начальной стадии процесса облучения, когда задача была существенно нестационарной, а резонансные моды ещё только "раскачивались" падающей волной, и структура поля существенно отличалась от изображённой на рис. 2а. Здесь мы вступаем в новую и чрезвычайно интересную область нестационарных резонансных эффектов при рассеянии света нанообъектами [37–39]. К сожалению, ввиду ограничений, установленных нами для рамок данного обзора, мы не можем позволить себе сколько-нибудь подробное их обсуждение.

Вернёмся к анализу структуры поля, изображённого на рис. 2. Ещё более сложным, чем плоская картина, показанная на рис. 2а, б, оказывается вид линий тока в трёхмерном пространстве, когда эти линии не принадлежат инвариантной экваториальной плоскости, проходящей через центр сферы. Пример таких траекторий приведён на рис. 2в. Видно, что линии тока, "наматывающиеся" на центры локализованных плазмонов, в конечном счёте резко уходят из этой области по трансверсальному направлению, создавая своего рода вихревые про-

Таблица. Сравнительные характеристики рэлеевского и аномального рассеяния

Характеристика	Рэлеевское рассеяние	Аномальное рассеяние
Иерархия резонансов	Нормальная (амплитуды убывают с ростом n)	Обратная (амплитуды возрастают с ростом n)
Зависимость от R	$\sigma_{n, \text{сca}}^{(a)} \sim R^{2(2n+1)}$	$\sigma_{n, \text{сca}}^{(a)}$ не зависит от R
Частотная зависимость	Непрерывная	Дискретная
Амплитуды полей рассеянной волны в окрестности сферы	Е и Н регулярны по R при $R \rightarrow 0$	Е и Н сингулярны по R при $R \rightarrow 0$
Поле вектора Пойнтинга	Имеет простую структуру. Может содержать сингулярности типа сёдел [33]	Имеет сложную структуру. Может содержать различные сингулярности, включая оптические вихри

туберанцы (нанопрожекторы!). Подчеркнём, что при выбранном значении x длина волны падающего излучения более чем в 20 раз превышает радиус сферы, так что вся сложная структура поля, приведённая на рис. 2в, имеет существенно субволновые размеры.

Наличие достаточно малой диссипации не приводит к качественному изменению этой картины, за исключением того, что в силу закона сохранения энергии возникновение замкнутых на самих себя линий тока делается невозможным, и особые точки типа центр превращаются в фокусы (ср. рис. 2а и б). Однако по мере роста диссипации особые точки последовательно исчезают и, в конечном счёте, возникает достаточно простая структура поля, характерная для рэлеевского рассеяния [33].

Столь большое число качественных отличий данного резонансного рассеяния от рэлеевского явилось основанием для присвоения ему термина *аномальное рассеяние* [32]. Для удобства читателя указанные различия сведены в таблицу. При этом подразумевается, что параметры задачи относятся точно к центру соответствующей резонансной линии.

2.2.2. Эффекты конечной диссипации. Обсудим теперь случай конечной, но малой диссипации. При наличии диссипативных потерь диэлектрическая проницаемость становится комплексной величиной: $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$. Если диссипация мала ($0 < \varepsilon'' \ll 1$), то её учёт сводится к тривиальной замене в выражении (8) для a_n действительного $\delta\varepsilon$ на $\delta\varepsilon' + i\varepsilon''$. Это приводит к увеличению ширины линии, что проявляется в замене в знаменателе γ_n на $\gamma_n + 2\varepsilon''$, где первый член описывает недиссипативное радиационное затухание, а второй — обычные диссипативные потери.

Очевидно, что аномальное рассеяние может реализоваться только при условии преобладания радиационного затухания над диссипативным, т.е. при $\gamma_n \gg \varepsilon''$. В обратном предельном случае радиационным затуханием можно пренебречь. Легко видеть, что это эквивалентно пренебрежению F по сравнению с G в (2), т.е. переходу к рэлеевскому приближению. Переход от одного режима к другому происходит при [28]:

$$\varepsilon'' \sim \frac{(n+1)x^{2n+1}}{[n(2n-1)!!]^2}. \quad (13)$$

Отсюда становится ясным, что нет необходимости обобщать наши рассуждения на случай не малых значений ε'' — при переходе к не малой диссипации восстанавливается рэлеевское рассеяние, и вопрос снимается сам собой.

Выражение (13) также разрешает и отмечавшийся выше парадокс о конечном сечении аномального рассея-

ния для частицы нулевого размера в недиссипативном пределе. Бездиссипативный предел — это идеализация, которая никогда не реализуется в природе. Полного отсутствия диссипативных процессов не бывает. В соответствии с этим в реальных случаях мнимая часть диэлектрической проницаемости может быть очень мала, но она всегда конечна. С другой стороны, при любом сколь угодно малом, но фиксированном значении ε'' по мере уменьшения x происходит переход от аномального к рэлеевскому рассеянию, и при $x \rightarrow 0$ сечение рассеяния обращается в нуль, в полном соответствии с формулой (1) и здравым смыслом.

Ещё один независимый механизм связан с резким уменьшением ширины резонансной линии при $x \rightarrow 0$, см. (8). Поскольку любой реальный источник излучения имеет конечную ширину линии, при достаточно малом значении x величина γ_n неизбежно становится меньше этой ширины, так что только часть излучения поглощается резонансно. При $x \rightarrow 0$ эта часть стремится к нулю, что также приводит к обращению в нуль соответствующего сечения [30].

Сказанное хорошо иллюстрируется кривыми, приведёнными на рис. 1. При выбранных значениях параметров задачи радиационное затухание в области дипольного резонанса преобладает над диссипативным, и форма линии в диссипативном случае практически не отличается от недиссипативного предела. В области квадрупольного резонанса эффект диссипации проявляется более заметно, что приводит к снижению добротности резонанса по сравнению с недиссипативным пределом. Наконец, в области октупольного резонанса диссипативное затухание играет определяющую роль, что приводит к радикальному падению добротности.

До сих пор мы обсуждали пространственно-однородную частицу. В последнее время большое внимание уделяется двухслойным частицам типа ядро — оболочка (core-shell) и их более многослойным обобщениям — оболочечным частицам, состоящим из нескольких слоёв с разными оптическими свойствами [40–45]. При концентрическом расположении слоёв задача о рассеянии плоской монохроматической линейно-поляризованной электромагнитной волны такой частицей тоже допускает точное решение тем же методом мультипольного разложения. Достаточно подробное обсуждение данного решения можно найти, например, в работе [41].

Существенно, однако, что и в этом случае рассеянное поле вне частицы представляется в виде того же самого мультипольного разложения, что и в случае однородной сферы, поэтому, как уже отмечалось, выражения (3), (6), связывающие различные парциальные сечения с коэффициентами рассеяния, остаются неизменными. Что же ка-

сается самих коэффициентов рассеяния, то, хотя они по-прежнему сохраняют ту же фундаментальную структуру, определяемую формулой (2), конкретные выражения для функций F_n , G_n становятся тем более сложными, чем больше концентрических слоёв имеет частица (в общем случае произвольного числа слоёв они определяются через некоторое число рекуррентных соотношений).

Важным отличием рассеяния света такой частицей от рассмотренного выше случая является то, что теперь задача приобретает качественно новое свойство: изменяя радиусы ядра и слоёв, а также их диэлектрические проницаемости, можно сдвигать положения различных резонансов и добиваться того, что несколько различных резонансов может возбуждаться на одной и той же частоте (вырождение резонансов).

Как уже отмечалось ранее, в силу линейности задачи и ортогональности собственных мод парциальные сечения различных резонансов складываются. Каждый из резонансов может быть оптимизирован с точки зрения максимизации соответствующего парциального сечения рассеяния. Совмещая требования оптимизации с условиями вырождения определённых резонансов, можно сконструировать суперрассеивающую оболочечную структуру, суммарное сечение рассеяния которой может значительно превосходить максимальное значение этой величины для одной парциальной моды (подробнее см. [46]).

Завершая обсуждение теоретического описания аномального рассеяния, рассмотрим, какие отличия возникают при рассеянии света бесконечным цилиндром кругового сечения. В основном всё сказанное о сфере переносится на рассеяние света цилиндром без существенных изменений [47–49]. Однако между этими двумя случаями имеется одно качественное отличие: если для сферы при $x \rightarrow 0$ резонансные значения ε для различных мультиполей отличаются друг от друга и перекрытия резонансов не происходит, то для цилиндра в том же пределе резонансное ε для всех n , кроме $n = 0$, одно и то же и равно -1 . В такой ситуации возникает вопрос о сходимости мультипольного разложения при $\varepsilon \rightarrow -1$, $x \rightarrow 0$. Этот вопрос подробно изучен в работе [30]. Показано, что для коэффициентов рассеяния точка $\varepsilon \rightarrow -1$, $x \rightarrow 0$ является аналогом существенно особых точек аналитических функций, так что коэффициенты рассеяния не имеют в этой точке определённого предела (см. также приложение). Для устранения возникающей в связи с этим проблемы, как уже отмечалось, требуется выйти за рамки монохроматического приближения и учесть конечность ширины линии источника, после чего в правильной последовательности осуществить ряд предельных переходов. В результате получается вполне определённое выражение для сечения рассеяния, которое обращается в нуль при $x \rightarrow 0$.

Укажем также, что проблема аномального рассеяния цилиндром имеет давнюю и неожиданную для читателя оптику историю в связи с радиозондированием метеорных треков в атмосфере [50–52]. Пролетая с космическими скоростями через земную атмосферу, метеоры создают почти идеальный цилиндрический трек ионизированного воздуха, который в ряде случаев можно рассматривать как бесстолкновительную плазму. Резонансные частоты такого цилиндра лежат в радиодиапазоне. При зондировании на резонансной частоте трек даёт мощный отражённый сигнал, который полностью соответствует рассмотренному здесь аномальному рассеянию. Изучая этот сигнал, можно получить подробную

информацию об исходном метеоре. Детальное обсуждение этих вопросов лежит вне рамок данного обзора.

3. Максимизация поглощения света субволновой частицей. Аномальное поглощение

Другой важный круг вопросов связан с энерговыделением, происходящим в субволновой частице за счёт диссипативных потерь при её облучении электромагнитным излучением. В особенности нас будет интересовать задача максимизации энерговыделения [53], важная для ряда приложений, например, в медицине [54–57], в частности при лечении онкологических заболеваний, когда лазерный нагрев наночастиц, внедрённых в опухолевую ткань, приводит к уничтожению злокачественных новообразований на клеточном уровне, а также в задачах микрохирургии [58], в проблеме высокоплотной записи информации [59] (нагрев наночастицы выше температуры Кюри приводит к локальному размагничиванию магнитных материалов) и др.

Разумеется, коль скоро речь заходит о приложениях, то само по себе энерговыделение интереса не представляет. Важно знать, не сколько энергии выделилось в частице, а до какой температуры эта частица нагрелась. Ответ на этот вопрос даёт совместное решение уравнений Максвелла и уравнений теплопереноса как в самой частице, так и в окружающей её среде. Однако в линейной задаче эти две проблемы разделяются — решение электромагнитной части задачи входит в задачу теплопереноса только в виде источника и не зависит от решения последней. Поскольку задачи теплопереноса лежат вне рамок данного обзора, здесь мы ограничимся только изучением энерговыделения. Что же касается полной версии задачи, включающей теплоперенос, то её обсуждение можно найти, например, в работах [60–62].

На первый взгляд, максимизация поглощения не вызывает никаких проблем. Для рассматриваемых немагнитных материалов плотность энерговыделения за счёт диссипативных потерь пропорциональна $\varepsilon''|E|^2$ — чем больше мнимая часть проницаемости, тем больше поглощение [23].

В действительности всё несколько сложнее: E , которое входит в это выражение, — это поле в той точке пространства, где вычисляется плотность энерговыделения. Энерговыделение происходит внутри частицы, следовательно, E — это поле *внутри* частицы.

При резонансе поле внутри частицы возрастает. Если рассматривать возбуждение резонансных мод внешним полем как вынужденные колебания гармонического осциллятора, то в стационарном состоянии амплитуда колебаний в точке резонанса оказывается обратно пропорциональной диссипативной константе. В нашем случае это означает, что в окрестности резонанса поле внутри частицы по порядку величины оценивается выражением E_0/ε'' , где E_0 — амплитуда поля падающей волны. В результате плотность энерговыделения оказывается пропорциональной $|E_0|^2/\varepsilon''$.

Теперь мы приходим к прямо противоположному выводу: для максимизации энерговыделения мы должны использовать в качестве материала сферы вещество с малыми диссипативными потерями и при этом подбирать частоту излучения так, чтобы она оказалась в окрестности резонансной частоты.

Вспомним теперь результаты предыдущего раздела: при уменьшении ε'' рассеяние в окрестности резонансов неизбежно становится аномальным, см. (13). Поэтому для корректного рассмотрения проблемы максимизации поглощения опять необходимо рассмотреть точное решение задачи.

Это несложно сделать. Согласно точному решению парциальное сечение поглощения для сферы описывается следующим выражением [1, 3]:

$$\sigma_{n, \text{abs}} = \frac{2(2n+1)\pi}{k^2} [(\operatorname{Re} a_n - |a_n|^2) + (\operatorname{Re} b_n - |b_n|^2)]. \quad (14)$$

Имея в виду более широкое применение результатов, не будем пока ограничиваться предположением о малости x . Поскольку электрические и магнитные моды независимы, задача максимизации $\sigma_{n, \text{abs}}$ сводится к поиску максимума выражения $z'_n - z_n'^2 - z_n''^2$, где вместо z_n может фигурировать как a_n , так и b_n . Легко видеть, что максимуму этого выражения соответствует $z_n'' = 0$, $z_n' = 1/2$, а сам максимум равен $1/4$. При этом значение парциального сечения поглощения оказывается равным парциальному сечению рассеяния и равным $\sigma_{n, \text{sca}, \text{max}}^{(z)}/4 \sim 1/k^2$ и не зависит от R , см. (10).

Этот результат эквивалентен хорошо известному в теории антенн критерию максимизации мощности, передаваемой от источника излучения к его приёмнику [63, 64]. Из него, в частности, следует, что эффективная площадь малой резонансной антенны (сечение поглощения) оказывается порядка квадрата длины волны излучения и не зависит от размеров антенны — иначе карманный транзисторный приёмник не мог бы принимать радиопередачи в метровом диапазоне! (Ср. с обсуждавшимся выше результатом для аномального поглощения: $\sigma_{\text{abs}} \sim 1/k^2$).

Полезно также подчеркнуть, что, хотя в общем случае коэффициенты рассеяния комплексны, в максимуме аномального рассеяния (при нулевой диссипации) и в максимуме поглощения (при конечной диссипации) они становятся чисто действительными величинами, равными 1 и $1/2$ соответственно. Это означает, что в таких случаях поля рассеянной и падающей волны оказываются синфазными.

Заметим, что при комплексном ε функции F и G в выражении (2) также становятся комплексными. Записывая их в виде $F = F' + iF''$, $G = G' + iG''$, перепишем выражения для амплитуд рассеяния в виде

$$z_n = \frac{F'_n + iF''_n}{F'_n - G''_n + i(F''_n + G'_n)}. \quad (15)$$

В данном случае после несложных вычислений условия максимума поглощения ($z'_n = 1/2$, $z''_n = 0$) переписываются в виде соотношений взаимности: $F'_n = -G''_n$, $F''_n = G'_n$.

Существенно, что по тем же причинам, которые обсуждались выше в связи с аномальным рассеянием, выражения (14), (15) и все следующие из них выводы остаются справедливыми при произвольной сферически-симметричной координатной зависимости диэлектрической проницаемости рассеивающей сферы от r . Более общие результаты, справедливые для рассеяния и поглощения света частицей произвольной формы, содержатся в работах [65–67].

Воспользуемся теперь малостью x . Как уже отмечалось, в этом случае при любых n для магнитных мод

функции G_n порядка единицы и нигде не обращаются в нуль, а функции F_n малы. В результате поглощение, связанное с возбуждением магнитных мод, тоже мало и не представляет для нас интереса.

Что же касается электрических мод, то, в соответствии с (4), (5) при $\varepsilon'' \ll 1$ в главном приближении F_n можно считать чисто действительной величиной. Тогда в соотношениях взаимности можно положить $F''_n = 0$, откуда немедленно следует, что $G'_n = 0$. Это условие в точности совпадает с условием максимизации аномального рассеяния при отсутствии диссипации. Второе же условие взаимности $F'_n = -G''_n$ с учётом (4), (5) приводит к тому, что максимум поглощения реализуется точно посередине переходной области от аномального рассеяния к рэлеевскому, когда в формуле (13) знак $\sim$ заменяется на знак равенства, и вклады, вносимые в ширину линии радиационным и диссипативным затуханием, оказываются в точности равными друг другу.

Таким образом, для субволновой частицы максимум парциального сечения поглощения связан с резонансным возбуждением электрических мод и достигается при малом значении мнимой части диэлектрической проницаемости. При этом само рассеяние оказывается близко к аномальному и в значительной степени наследует все его особенности (см. таблицу). Такое поглощение также естественно назвать аномальным [31].

Что можно сказать о форме линий при аномальном поглощении? Прежде всего, отметим, что при острых резонансах ширина линии определяется поведением знаменателя выражения (2). Знаменатели у парциальных сечений рассеяния и поглощения одинаковы, см. (3), (14), поэтому обе линии имеют одинаковую форму и отличаются только масштабным множителем. Если, как принято, под формой линии понимать зависимость соответствующего парциального сечения от ω , то ничего необычного здесь нет. Фактически, этот вопрос уже обсуждался в разделе 2.2, где было показано, что линия имеет колоколообразную лоренцевскую форму, и была определена её ширина, в том числе и с учётом диссипации. Данные результаты полностью переносятся и на настоящий случай.

Однако имеет смысл расширить стандартное определение формы линии и рассмотреть $\sigma_{n, \text{abs}}^{(a)}$ как функцию двух независимых переменных, ε' и ε'' , или, что то же самое, как функцию комплексного ε . Воспользовавшись тем, что для субволновой частицы в главном приближении F_n — чисто действительные функции, а $G_n \sim \delta\varepsilon \equiv \delta\varepsilon' + i\varepsilon''$, удобно в окрестности максимума поглощения вместо $\sigma_{n, \text{abs}}^{(a)}$, ε' и ε'' ввести новые безразмерные переменные:

$$\kappa = \frac{x^2 \sigma_{n, \text{abs}}^{(a)}}{2(2n+1)\pi R^2}, \quad \xi = -\frac{G_n^{(a)'}}{F_n^{(a)'}} \quad \zeta = -\frac{G_n^{(a)'}}{F_n^{(a)'}}. \quad (16)$$

Во избежание недоразумений отметим, что в силу условий взаимности и того, что $G''_n \sim \varepsilon'' > 0$ следует, что в максимуме поглощения $F_n^{(a)'} = -G_n^{(a)''} < 0$. По непрерывности те же знаки F и G сохраняются и в окрестности максимума, так что $\zeta > 0$.

Легко видеть, что в этом случае при любом n поверхности $\sigma_{n, \text{abs}}^{(a)}(\varepsilon', \varepsilon'')$ сводятся к единой универсальной поверхности, описываемой уравнением [31]:

$$\kappa = \frac{\zeta}{(1 + \zeta)^2 + \xi^2}, \quad \zeta > 0. \quad (17)$$

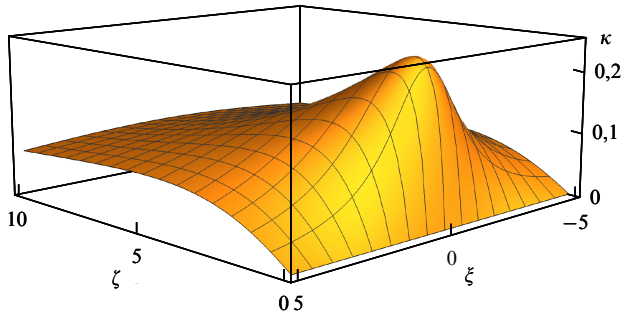


Рис. 3. Универсальная поверхность $\kappa = \kappa(\xi, \zeta)$. Подробности в тексте.

Такая поверхность изображена на рис. 3. Отметим, что если сечение поверхности $\kappa = \kappa(\xi, \zeta)$ плоскостями $\zeta = \text{const}$ даёт симметричный лоренцевский профиль, то сечения плоскостями $\xi = \text{const}$ порождают семейство сильно несимметричных кривых с резким спадом при изменении ζ от точки, соответствующей максимуму профиля, в направлении уменьшения ζ и длинным, медленно спадающим хвостом при изменении ζ в противоположном направлении (см. также [68]).

4. Аномальное поглощение и реальные материалы

Рассуждения, приведённые в предыдущих разделах, молчаливо предполагали, что самое главное — определить надлежащие условия для реализации обсуждаемых там эффектов. После того как это сделано, надо просто выбрать нужный образец для наилучшего наблюдения этих эффектов. Однако беда в том, что если оставить в стороне искусственные метаматериалы, специально изготовленные для того, чтобы иметь заданные свойства, и ограничиться обычными, существующими в природе, то они имеют вполне определённые дисперсионные зависимости $\varepsilon(\omega)$. Поэтому задача состоит не в том, чтобы выбрать нужный образец, а в том, чтобы понять, существует ли вообще материал с необходимой зависимостью $\varepsilon(\omega)$. Проблема эта подробно обсуждалась в наших работах [31, 65], но принятая там манера обсуждения теперь представляется нам неудачной, и ниже мы применим другой, эквивалентный подход.

Как показано в разделе 3, условия аномального поглощения предполагают, что в данном случае $\text{Re } a_n = 1/2$, $\text{Im } a_n = 0$. С другой стороны, коэффициенты рассеяния есть определённые функции параметров задачи, однозначно заданные точным решением Ми, согласно которому $a_n = a_n(x, mx)$, см. приложение. Будем для простоты считать, что рассеивающая излучение частица находится в вакууме, так что $m_{\text{out}} \equiv 1$. Что касается $m = \sqrt{\varepsilon}$, то для данного материала частицы эта величина однозначно определяется его дисперсионной зависимостью, которая в случае наночастицы может дополняться ещё и зависимостью от размера частицы R . В результате условия аномального поглощения приобретают вид

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[a_n \left(\frac{R\omega}{c}, \varepsilon(\omega, R) \right) \right] &= \frac{1}{2}, \\ \text{Im} \left[a_n \left(\frac{R\omega}{c}, \varepsilon(\omega, R) \right) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

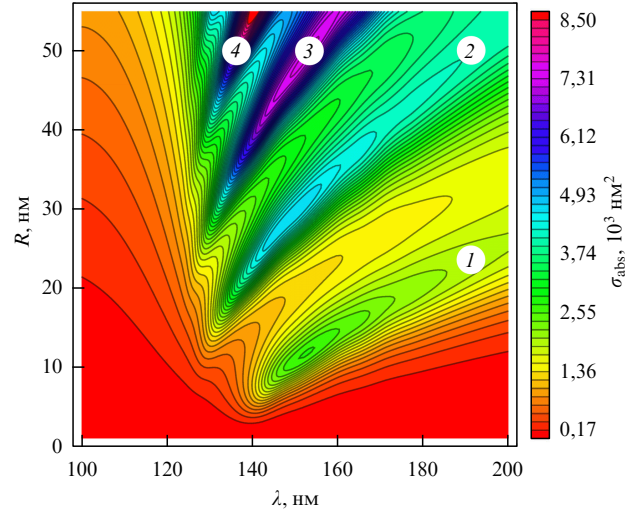


Рис. 4. Сечение поглощения алюминиевой сферы как функция её радиуса и длины волны излучения. Расчёт по формулам Ми с учётом реальных оптических свойств наночастицы алюминия [31] (см. подробнее в тексте). Области с преимущественным вкладом дипольного ($n=1$), квадрупольного ($n=2$), октупольного ($n=3$) и декакспольного ($n=4$) моментов отмечены цифрами 1, 2, 3 и 4 соответственно. Хорошо видна обратная иерархия резонансов.

Эти условия, рассматриваемые как уравнения, должны определять дискретные пары ω и R , для которых реализуется аномальное поглощение. Увы, до сих пор не удалось найти ни одного реального вещества, для которого эти уравнения имели бы решение в оптическом диапазоне частот. Означает ли это, что аномальное поглощение остаётся гипотетическим эффектом, который никогда нельзя наблюдать в реальном эксперименте? Не вполне. Если абсолютная истина недостижима, то к ней, по крайней мере, можно приблизиться! Если уравнения (18) не могут быть решены точно, то надо попытаться найти их приближённое решение.

Предыдущий анализ показывает, что для субволновой частицы это решение нужно искать для таких материалов, у которых в оптическом диапазоне $\varepsilon' \approx -2$ и ε'' мало. Такими свойствами обладает, например, алюминий, который имеет ε' , монотонно убывающее от $-0,51$ при $\lambda = 100$ нм до $-5,28$ при $\lambda = 200$ нм, и ε'' , монотонно возрастающее в том же диапазоне от $0,05$ до $0,56$. В частности, $\varepsilon'' = 0,16$ при $\varepsilon' = -2,00$ [69]. В соответствии с этим в работе [31] были проведены расчёты сечения поглощения алюминиевой сферы при её облучении в вакууме плоской, линейно поляризованной электромагнитной волной с циклической частотой ω . Расчёты проводились на основе точного решения Ми с учётом реальной экспериментальной зависимости диэлектрической проницаемости от частоты [69], в которых также феноменологически учитывалась её зависимость от радиуса сферы R за счёт изменения частоты столкновений электронов при $2R < \tau v_F$, где v_F — фермиевская скорость, а τ — время свободного пробега электронов при электрон-фононных столкновениях. Результаты расчётов представлены на рис. 4, где хорошо видна обратная иерархия резонансов.

Согласно данным, приведённым на рис. 4, максимум дипольного поглощения достигается при $R \approx 11,8$ нм на длине волны $\lambda \approx 152,8$ нм. При этом сечение поглощения оказывается равным $2,74 \times 10^3$ нм². Расчёт по формуле

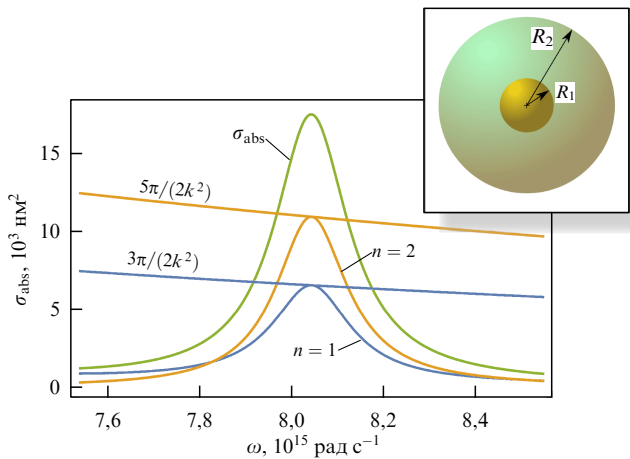


Рис. 5. Форма линий парциальных сечений поглощения для электрических дипольной ($n = 1$) и квадрупольной ($n = 2$) мод, а также полного сечения поглощения частицы σ_{abs} как функции частоты рассеиваемой волны при двойном резонансном поглощении частицей с золотым ядром и непоглощающей диэлектрической оболочкой (схематически изображена на вставке). Остальные параметры задачи фиксированы и равны их резонансным значениям [65, *Supplemental Material*]. Прямые линии соответствуют максимально возможным значениям парциальных сечений поглощения $(2n + 1)\pi/(2k^2)$.

$\sigma_{n, \text{sca}, \text{max}}/4$, определяющий абсолютный максимум парциального сечения при аномальном поглощении, даёт $2,79 \times 10^3 \text{ нм}^2$ — различие между этими величинами только в третьем знаке. Отметим также, что значение геометрического экваториального сечения сферы πR^2 при данном значении R составляет $0,44 \times 10^3 \text{ нм}^2$, т.е. представляет собой величину, в 6,22 раза меньшую её сечения поглощения, что является убедительным доказательством эффекта воронки [27].

Обсудим теперь, что нового вносят в проблему уже упоминавшиеся выше многослойные частицы. Для простоты ограничимся случаем частицы типа ядро — оболочка, в которой вокруг сферического ядра радиуса R_1 располагается концентрическая оболочка с внешним радиусом R_2 (см. вставку на рис. 5). В данном случае условия аномального поглощения по-прежнему гласят, что $\text{Re } a_n = 1/2$, $\text{Im } a_n = 0$. Однако коэффициенты рассеяния теперь зависят от большего числа параметров. Это даёт нам дополнительные степени свободы, которые можно использовать для выполнения указанных условий.

В качестве примера рассмотрим случай ядра, сделанного из материала с сильной дисперсионной зависимостью, и не поглощающей излучение оболочки, для которой зависимостью ε от параметров задачи можно пренебречь. Тогда вместо (18) мы получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[a_n \left(\frac{R_1 \omega}{c}, \frac{R_2 \omega}{c}, \varepsilon_1(\omega, R_1, R_2), \varepsilon_2 \right) \right] &= \frac{1}{2}, \\ \text{Im} \left[a_n \left(\frac{R_1 \omega}{c}, \frac{R_2 \omega}{c}, \varepsilon_1(\omega, R_1, R_2), \varepsilon_2 \right) \right] &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где индекс 1 относится к ядру, 2 — к оболочке и $\varepsilon_2 = \text{const}$ ($\text{Im } \varepsilon_2 = 0$). Теперь мы имеем два условия для четырёх параметров: $R_{1,2}$, ε_2 и ω . Это позволяет либо подбирать значения параметров задачи для наблюдения аномального поглощения в желаемой области, либо потребовать совпадения резонансных значений параметров одновре-

менно для двух различных значений n . При этом частица ведёт себя как "суперпоглощающая", так как её полное сечение поглощения, в которое теперь входят два максимальных парциальных, будет существенно превышать абсолютный верхний предел, существующий для каждой из этих парциальных мод в отдельности. Отметим, что такой механизм конструирования суперпоглощающей частицы вполне аналогичен созданию "суперрассеивающей" частицы, обсуждавшейся в работе [46].

Важно подчеркнуть, что всё поглощение осуществляется в ядре. Диэлектрическая оболочка только заставляет металлическое ядро более эффективно поглощать падающее излучение. Никакого энерговыделения в самой оболочке не происходит.

Конечно, как и в случае с однородной частицей, полученные уравнения не всегда могут быть разрешимы. Однако наличие свободных параметров делает задачу максимизации поглощения для слоистой частицы значительно более гибкой, чем в пространственно-однородном случае. В частности, вычисления, приведённые в *Supplemental Material* к работе [65], показывают, что для частицы с металлическим ядром (золото) и недиссипативной диэлектрической оболочкой полное перекрытие линий, связанных с возбуждением идеального аномального поглощения в дипольной и квадрупольной модах, происходит при следующих значениях параметров задачи: $R_1 = 6,18 \text{ нм}$, $R_2 = 31,04 \text{ нм}$, $\varepsilon_2 = 3,55$ и $\omega = 8,04 \times 10^{15} \text{ рад с}^{-1}$, что соответствует воздействию на наночастицу излучения УФ-диапазона, см. также рис. 5.

Что касается экспериментального подтверждения изложенных здесь результатов, то, несмотря на очевидную важность проблемы как с академической точки зрения, так и для большого числа приложений, достоверные эксперименты в оптическом диапазоне, в которых нашли бы подтверждение (или опровержение) обсуждаемые здесь свойства аномального рассеяния и/или поглощения, авторам неизвестны. Мы надеемся, что данный обзор может послужить стимулом для проведения таких экспериментов.

5. Резонансы Фано

5.1. История вопроса

Перейдём теперь к другому важному типу резонансов — резонансам Фано, названным так в честь Ёго Фано — ученика Энрико Ферми. Сначала остановимся кратко на их истории, поскольку она и занимательна, и поучительна. По-видимому, впервые резонансы Фано наблюдались в 1902 г. Робертом Вудом при исследовании дифракции света на отражающей дифракционной решётке (аномалии Вуда) [70], а их первое объяснение было дано в 1907 г. лордом Рэлеем [71]. При чём здесь Фано? А вот при чём.

В 1935 г. Ганс Бойтлер обнаружил в спектре благородных газов линии поглощения необычной асимметричной формы, которые к тому же наблюдались в области, соответствующей непрерывному спектру, где вообще никаких линий поглощения быть не должно [72]. Энрико Ферми, который тогда был профессором Римского университета Ла Сапиенца, предложил объяснить эти эксперименты своей группе, известной как "Ребята с улицы Панисперна", названной так в честь того, что именно на этой улице в Риме находился Институт физики. Там и сейчас есть отличный кабачок с тем же назва-

нием: "Ragazzi di via Panisperna". Группа состояла из молодых физиков. Все они впоследствии получили мировую известность. Это были Эмилио Джинно Сегре, Бруно Понтекорво, Этторе Майорана и совсем ещё молодой, 23-летний Уго Фано. Именно он блестяще справился с поставленной Ферми задачей.

Не лишне отметить, что в оставшемся после смерти Ферми архиве было найдено её полное решение, сделанное им либо перед постановкой задачи для "ребят с улицы Панисперна", либо непосредственно после того. Однако, когда Фано закончил вычисления и спросил Ферми, можно ли начинать писать совместную статью, Ферми ответил, что писать можно, но не совместную, а за единоличным авторством Фано: "Вы сделали всё сами, достаточно ограничиться мне стандартной благодарностью". Статья Фано [73] была опубликована в том же 1935 г. в итальянском журнале *Nuovo Cimento* на итальянском языке... и осталась незамеченной. На эту оригинальную статью практически никто не ссылался и не ссылается.

Прошло много лет. Судьба занесла обоих учёных в США, где в 1954 г. в возрасте 53 лет Ферми скончался от рака желудка. А в 1961 г. Фано решил вернуться к своей старой работе и опубликовал её расширенную версию, на этот раз на английском языке в журнале *Physical Review* [74]. В этой статье Фано применил формализм дельта-функций, что сделало работу значительно изящнее.

Сегодня это одна из самых цитируемых работ, когда-либо опубликованных во всех сериях *Physical Review*. Чем же вызван столь ошеломляющий успех работы [74] при полном забвении работы [73]? Сам Фано по этому поводу пишет следующее [75]: "The paper appears to owe its success to accidental circumstances, such as the timing of its publication and some successful features of its formulation" (похоже, что эта статья обязана своим успехом случайным обстоятельствам: она была опубликована в нужное время, а обсуждавшаяся в ней проблема была удачно сформулирована).

С нашей точки зрения, первая половина этой фразы не соответствует действительности, зато во второй содержатся ключевые слова — ничего случайного в успехе статьи нет. Мало получить выдающийся результат. Нужно, чтобы этот результат был понят и воспринят коллегами. Для этого он должен быть удачно сформулирован, а также обнародован именно в то время, когда в нём есть потребность. И сделать это нужно в правильном месте и на языке, понятном международному сообществу. Более подробное освещение этой истории можно найти в публикациях [76, 77].

5.2. Суть резонансов Фано и их описание

Однако нам пора вернуться от истории вопроса к обсуждению его сути. В чём же она заключается, и почему работа Фано оказалась невостребованной в 1935 г. и сверхвостребованной в наше время?

Начнём с опытов Бойтлера. Будем для определённости говорить о фотоионизации атома гелия. Соответствующая качественная картинка приведена на рис. 6. Рассеиваемый атомом гелия фотон может быть поглощён одним из валентных электронов. Если энергия фотона больше потенциала ионизации, то этот электрон приобретает энергию, превосходящую энергию связи, и покидает атом. Такой процесс фотоионизации хорошо известен каждому школьнику. Его вероятность довольно слабо зависит от частоты фотона при условии, что эта

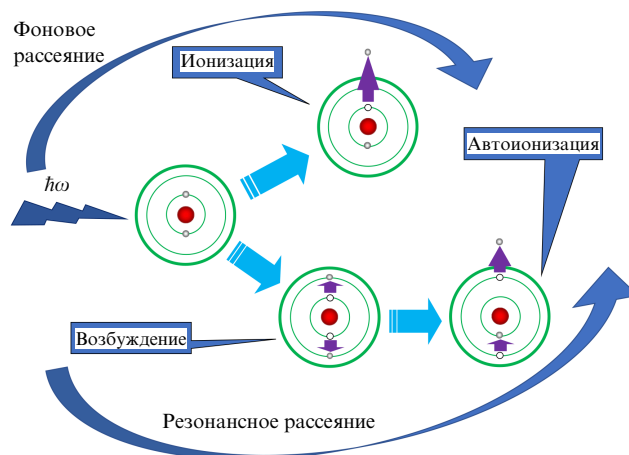


Рис. 6. Две возможности для фотоионизации атома гелия. Подробности в тексте.

частота больше красного предела. Будем называть такое рассеяние фоновым (в англоязычной литературе вместо фонового рассеяния употребляется другой термин — background partition).

Однако есть и другая возможность. Если энергия фотона в точности равна сумме энергий возбуждения обоих валентных электронов, но при этом меньше удвоенного потенциала ионизации, то поглощение фотона может приводить не к выбиванию из атома одного электрона, а к возбуждению сразу двух электронов. При этом оба они остаются в связанном состоянии. Дальше начинается обмен энергией между двумя электронами. Поскольку возбуждённые электроны очень слабо взаимодействуют друг с другом, обмен энергии между ними идёт медленно (разумеется, с точки зрения атомных временных масштабов), и атом долго живёт в таком возбуждённом состоянии. Но вечно в нём он пребывать не может. В конце концов один из электронов отдаёт свою энергию другому и переходит в основное состояние. Другой же электрон приобретает энергию, превышающую потенциал ионизации, и покидает атом. При этом ясно, что вероятность такого процесса (его называют автоионизацией) должна резко убывать при отклонении энергии фотона от значения, в точности равного суммарной энергии возбуждённых электронов. Процесс, при котором амплитуда выходного сигнала при определённой частоте внешнего воздействия имеет резко выраженный максимум, есть процесс резонансный. Поэтому рассеяние, приводящее к автоионизации, естественно также назвать резонансным (resonant partition).

Как известно в квантовой механике, если из данного начального состояния (фотон, рассеивающийся нейтральным атомом) в одно и то же конечное состояние (ионизованный атом и свободный электрон) можно прийти двумя различными путями, то каждый из таких путей характеризуется своей волновой функцией, а полная волновая функция системы есть линейная суперпозиция этих волновых функций. Суперпозиция приводит к интерференции. Интерференция же двух волн, в зависимости от разности их фаз, может давать как взаимное усиление (конструктивная интерференция), так и подавление, вплоть до полной компенсации (деструктивная интерференция).

На этом и основывалось объяснение, данное Фано экспериментам Бойтлера. Конкретные вычисления при-

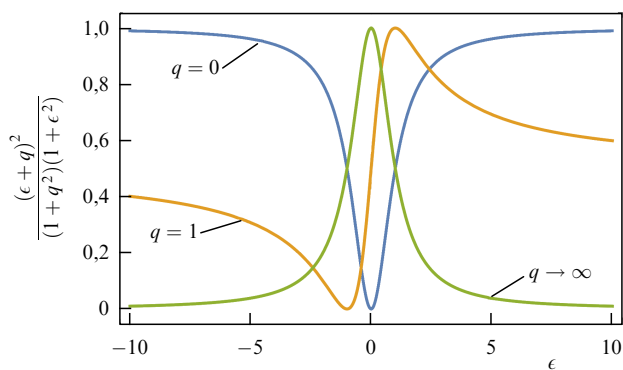


Рис. 7. Профили Фано при различных значениях q (указаны на рисунке). Для приведения всех профилей к одному масштабу нормировочная константа в формуле (20) выбрана равной $1/(1+q^2)$. Обратите внимание на резкое и почти линейное изменение профиля между точками его минимума и максимума при $q = 1$.

вели его к простой формуле, описывающей форму линии в этом случае:

$$\sigma = \text{const} \frac{(\epsilon + q)^2}{\epsilon^2 + 1}. \quad (20)$$

Здесь ϵ — определённым образом нормированная энергия фотона (не путать с диэлектрической проницаемостью ϵ), а $q = \text{const}$ — так называемый параметр Фано, который часто называют параметром асимметрии формы линии.

Казалось бы, выражение (20) лишь незначительно отличается от лоренциана за счёт появления в числителе ϵ . В действительности же это отличие качественное. Помимо того, что оно нарушает зеркальную симметрию формы линии относительно точки $\epsilon = 0$, теперь $\sigma(\epsilon)$ обращается в нуль при $\epsilon = -q$, что, очевидно, является следствием деструктивной интерференции. Линии $\sigma(\epsilon)$ при различных значениях q приведены на рис. 7. При $q \rightarrow \infty$ профиль Фано сводится к обычному лоренциану.

Подведём некоторые итоги. Обобщая изложенное выше, можно сказать, что резонансы Фано обусловлены неоднозначной реакцией системы на внешнее воздействие (входной сигнал), порождающее не один, а два выходных сигнала, интерферирующих друг с другом. При такой формулировке становится ясным, что резонансы Фано — это достаточно общее свойство динамических систем, которое может наблюдаться в широком классе как квантовых, так и классических задач. Более того, даже волновая природа интерферирующих сигналов не является необходимой. Вместо интерференции волн можно рассмотреть сложение колебаний в дискретных системах. Большое количество конкретных примеров резонансов Фано в различных системах и их детальное обсуждение можно найти, например, в обзорах [19, 78] и цитированной в них литературе.

Но не только это объясняет головокружительный успех публикации Фано 1961 г. За время, прошедшее с 1935 г. до 1961 г. (и тем более — с 1961 г. до наших дней), необыкновенно возросла точность измерений. Появилась необходимость в чувствительных сенсорах. И здесь резонансы Фано оказались необычайно полезны. Действительно, из рис. 7 видно, что при q порядка единицы в области значений ϵ , лежащих между точками минимума и максимума профиля Фано, этот профиль почти линеен и к тому же имеет крутой наклон. Это означает, что в

данной области малое изменение входного сигнала (ϵ) приводит к значительному (и практически линейному!) изменению выходного сигнала. Сенсор с такими свойствами — "хрустальная мечта" любого специалиста, занимающегося прецизионными измерениями.

Но и это не всё. Если под σ в формуле (20) понимать сечение рассеяния света, то в точке $\epsilon = -q$ оно обращается в нуль. Следовательно, такая частица ничего не рассеивает, т.е. не искажает поля падающей волны. А раз так, то она становится невидимой для внешнего наблюдателя. Существенно, что при этом поле внутри частицы отнюдь не мало. Напротив, оно может достигать значений, существенно превосходящих поле падающего излучения. Однако такое интенсивное электромагнитное поле "заперто" внутри частицы и не выходит за её поверхность [79].

Складывается удивительная ситуация: внутри материальной частицы возбуждено переменное электромагнитное поле, которое вызывает осцилляции свободных и/или связанных зарядов, а электромагнитного излучения, обусловленного такими осцилляциями, не возникает. Казалось бы, этого быть не может, "потому что не может быть никогда", — а вот есть. Такие возбуждения (их называют анаполи — от греч. *an* — отрицательная приставка и *polos* — полюс, т.е. бесполюсник) были введены в научный обиход Я.Б. Зельдовичем для объяснения нарушения чётности в атомном ядре при слабых взаимодействиях [80]. В задачах о рассеянии света нано-объектами анаполи были рассмотрены в работе [81] и в большом числе более поздних публикаций [37, 38, 82–88].

Существование таких неизлучающих возбуждений открывает широкие возможности для создания сверхточных сенсоров, способных измерять электромагнитные поля, не искажая их своим присутствием; нового поколения систем записи, считывания и обработки информации; новых материалов и пр. Здесь, однако, нас интересуют не применения этого эффекта, а вопрос, какое отношение резонансы Фано имеют к теме настоящего обзора. Попробуем в этом разобраться.

5.3. Резонансы Фано

и продольные электромагнитные моды

Итак, если говорить о резонансах Фано при рассеянии света субволновой металлической частицей, то их отличительной особенностью должно являться обращение в нуль парциального сечения рассеяния, обусловленного деструктивной интерференцией двух парциальных мод с одним и тем же значением n . Одинаковое значение n требуется из-за того, что моды с разным значением n имеют разную угловую зависимость рассеянного излучения. Поэтому интерференция в принципе не может привести к взаимной компенсации их излучения сразу по всем направлениям. Мало того, интерферирующие моды должны иметь одну и ту же природу — обе быть или электрическими, или магнитными, так как моды разной природы даже при одном и том же значении n также имеют разную угловую зависимость рассеянного излучения, см. [1–4] и приложение.

Казалось бы, всё предыдущее рассмотрение говорит о том, что для малых металлических частиц таких пар мод не существует. Действительно, как следует из (2), (4), a_n никогда не обращается в нуль, если только $\epsilon \neq 1$. Случай же $\epsilon = 1$ не представляет для нас интереса, поскольку при выполнении этого условия частица оптически становится тождественной окружающей среде и перестаёт сущест-

водить как рассеивающее волну препятствие. Из всего этого, казалось бы, можно заключить, что резонансы Фано для малых металлических частиц невозможны.

В действительности это не совсем так. Дело в том, что помимо $\varepsilon = 1$ в электродинамике существует ещё одно выделенное значение $\varepsilon = 0$. При таком значении диэлектрической проницаемости вектор электрической индукции $\mathbf{D}$ тождественно обращается в нуль, и становится возможным возбуждение продольных электромагнитных мод, для правильного описания которых необходимо учитывать эффекты пространственной дисперсии [23]. Дисперсионная зависимость для продольных мод имеет вид

$$\varepsilon_{\parallel}(k_{\parallel}, \omega) = 0, \quad (21)$$

в то время как поперечные моды описываются обычным дисперсионным соотношением

$$k_{\perp}^2 = \varepsilon_{\perp}(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (22)$$

Разумеется, колебания поля являются продольными только внутри частицы — там, где диэлектрическая проницаемость вещества близка к нулю. При этом условие $\mathbf{D} = 0$ сводит одно из уравнений Максвелла к условию $[\nabla \times \mathbf{H}] = 0$. Другое уравнение Максвелла гласит, что $(\nabla \mathbf{H}) = 0$. Векторное поле, удовлетворяющее одновременно двум таким уравнениям, есть константа, которая в силу граничных условий на поверхности сферы должна быть равна нулю.

Таким образом, продольные колебания поля являются не электромагнитными, а электрическими — магнитное поле при таких колебаниях не возбуждается. Раз так, то вектор Пойнтинга таких колебаний тождественно равен нулю, и, следовательно, в силу непрерывности потока энергии через границу сферы, продольные моды являются неизлучающими и никакого вклада в интерференцию внести не могут. Однако через граничные условия на поверхности сферы эти моды зацепляются с обычными поперечными колебаниями, что приводит к возникновению определённых поправок к решению Ми.

Исследование задачи с учётом вклада этих поправок проводилось в работах [89, 90], а в применении к резонансам Фано — в работе [79], где было показано, что такой учёт приводит к возникновению в малых металлических частицах каскада резонансов Фано, расположенных в окрестности точки $\varepsilon_{\perp}(\omega) = 0$. К сожалению, эти резонансы едва ли могут представлять практический интерес для оптики нанообъектов, так как они чрезвычайно сильно подавляются диссипативными эффектами, и при значениях параметров задачи, соответствующих реальным металлам, их влияние на процессы рассеяния пренебрежимо мало.

5.4. Направленные резонансы Фано

5.4.1. Теория. Но все ли возможности для возбуждения резонансов Фано при рассеянии света малыми металлическими частицами нами исчерпаны? Вернёмся к обсуждению природы этих резонансов. Для их реализации при рассеянии волн необходимо иметь по крайней мере две интерферирующие рассеянные волны. При этом для возникновения деструктивной интерференции такие волны должны одновременно удовлетворять двум условиям: иметь равные амплитуды и противоположные фазы.

Обратимся опять к выражению для коэффициентов рассеяния (2). Как уже отмечалось, в недиссипативном

пределе функции F_n и G_n чисто действительные. При этом на крыльях резонансной линии, когда $|G_n| \gg |F_n|$, величина $a_n \approx -iF_n/G_n$ и является почти чисто мнимой.

Далее, по определению, в точке резонанса функция G обращается в нуль. Следовательно, при прохождении точки резонанса она меняет знак, см. (5). Иными словами, при прохождении резонанса фаза коэффициента рассеяния изменяется на π — факт, хорошо известный из теории колебаний.

Имея всё это в виду, рассмотрим рис. 1. На нём изображена сравнительно широкая линия дипольного резонанса, на крыле которой располагается интенсивная узкая линия квадрупольного резонанса. При этом в точке квадрупольного резонанса для малой частицы должно выполняться условие $\varepsilon \approx -3/2$. Тогда в указанной области парциальная эффективность дипольного рассеяния порядка $x^2 \ll 1$, а парциальная эффективность квадрупольного резонанса в максимуме порядка $1/x^2 \gg 1$, см. (2)–(5), (10).

Таким образом, эффективности дипольного и квадрупольного рассеяния (а следовательно, и соответствующие поля парциальных волн) оказываются равными в двух точках, лежащих по обе стороны от точки максимума квадрупольного рассеяния. При этом в точках равенства амплитуда каждой из парциальных мод всё ещё намного меньше максимального значения амплитуды квадрупольной моды в точке резонанса. Иными словами, обе точки равенства амплитуд лежат на крыльях линии квадрупольного резонанса. Сама же область квадрупольного резонанса лежит на крыле дипольной линии. Тогда, с учётом сказанного выше в этом разделе, заключаем, что в одной из точек равенства амплитуд фазы коэффициентов рассеяния a_1 и a_2 равны, а в другой — противоположны. Иначе говоря, в окрестности одной из этих точек с неизбежностью должны выполняться оба условия деструктивной интерференции.

Однако такая деструктивная интерференция качественно отличается от обсуждавшегося ранее случая. В традиционных резонансах Фано интерферируют моды, имеющие одну и ту же угловую зависимость рассеянного излучения. Поэтому равенство амплитуд и противоположность фаз этих мод обеспечивают обращение в нуль интенсивности рассеянного излучения сразу во всех направлениях, т.е. обнуление соответствующего интегрального сечения рассеяния. Сейчас же речь идёт об интерференции мод с разными значениями l . Как уже отмечалось, для таких мод рассеянное поле имеет различную угловую зависимость. Поэтому обращение в нуль интенсивности рассеянного излучения сразу во всех направлениях за счёт их деструктивной интерференции принципиально невозможно. Речь может идти только об обнулении интенсивности рассеяния вдоль определённого направления, т.е. дифференциального сечения рассеяния, для которого при данной частоте в точности выполняется равенство амплитуд и противоположность фаз интерферирующих волн. При этом каждое направление будет иметь своё собственное значение частоты деструктивной интерференции.

Таким образом, интерференция полей, создаваемых разными мультиполями, приводит к тому, что интенсивность излучения, рассеянного вдоль данного фиксированного направления, будучи измеренной как функция частоты падающего излучения, имеет асимметричный профиль Фано. В то же время, в соответствии с (3), (8),

интегральное сечение рассеяния будет описываться симметричным лоренцианом [91].

Для того чтобы количественно описать эти эффекты, нам осталось рассмотреть интерференцию полей, создаваемых различными мультиполями. Это легко сделать, воспользовавшись известным представлением интенсивности излучения, рассеянного вдоль данного направления. Если выбрать сферическую систему координат, центр которой совпадает с центром рассеивающей сферы, то для плоской линейно-поляризованной падающей волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси z , с плоскостью колебаний вектора $\mathbf{E}$, совпадающей с плоскостью xz , интенсивность излучения, рассеянного вдоль данного направления, имеет в дальней волновой зоне следующие компоненты вектора $\mathbf{E}$ [4]:

$$|E_{\theta}^{\text{sca}}|^2 = I_{\parallel} \cos^2 \varphi, \quad |E_{\varphi}^{\text{sca}}|^2 = I_{\perp} \sin^2 \varphi, \quad (23)$$

где θ и φ — полярный и азимутальный углы соответственно, а $I_{\parallel}$ и $I_{\perp}$ определяются соответствующим мультипольным разложением. Согласно сказанному, в окрестности квадрупольного резонанса ($\varepsilon = -3/2$) из этого разложения нам достаточно оставить только дипольный и квадрупольный члены. При этом в главном приближении в дипольном члене мы можем положить $\varepsilon = -3/2$, а в квадрупольном — воспользоваться формулой (8).

В результате с точностью до несущественного сейчас общего для $I_{\parallel, \perp}$ множителя получаем [91]:

$$I_{\parallel}^{(s)} \propto \left| ix^3 \cos \theta + \frac{x^5 \cos(2\theta)}{2(x^5 - 12i\delta\varepsilon)} \right|^2, \quad (24)$$

$$I_{\perp}^{(s)} \propto \left| ix^3 + \frac{x^5 \cos \theta}{2(x^5 - 12i\delta\varepsilon)} \right|^2. \quad (25)$$

Отметим, что в полном соответствии с обсуждавшейся выше качественной картиной полученные выражения имеют два характерных масштаба. Один из них описывает узкий резонансный пик, связанный с квадрупольным резонансом. Его ширина определяется формулой (8) для γ_n при $n = 2$ и равна $x^5/6$. Другой, значительно более широкий пик, определяет точку деструктивного резонанса и несколько различен для двух поляризаций рассеянного света: $\delta\varepsilon_{\parallel} = -x^2 \cos(2\theta)/24 \cos \theta$ и $\delta\varepsilon_{\perp} = -x^2 \cos \theta/24$.

Примечательно, что, согласно (24), (25), интенсивности $I_{\parallel, \perp}$ зависят от θ , но не зависят от φ , т.е. остаются постоянными на поверхности конусов с осью, совпадающей с осью z , и при фиксированном угле раствора, но меняются при изменении угла раствора. Подчеркнём также, что, в зависимости от величины θ и поляризации рассеянного излучения, точки деструктивной интерференции могут находиться по разные стороны от точки $\delta\varepsilon = 0$, определяющей положение максимума квадрупольного резонанса. Таким образом, направленные резонансы Фано являются мощным инструментом, позволяющим создавать различные диаграммы направленности рассеянного излучения, существенно подавляя рассеяние вдоль практически любого желаемого направления только за счёт надлежащего выбора частоты падающей волны.

Это в теории. Что в данном случае говорит "его величество эксперимент"? Надо сказать, что, несмотря

на идейную простоту, технически постановка экспериментов по кругу вопросов, обсуждаемых в настоящем обзоре, как правило, представляет весьма сложную задачу, связанную с необходимостью выполнения прецизионных измерений на наномасштабах. По-видимому, по этой причине, несмотря на то что теоретически направленные резонансы Фано обсуждались ещё в 2008 г. [91, 92], их экспериментальное подтверждение было получено только восемь лет спустя [93].

5.4.2. Эксперимент. Перейдём к краткому обсуждению указанных экспериментов. Прежде всего, отметим, что направленные резонансы Фано реализуются при открытии крыла относительно широкой линии мультиполя с одним значением n с узкой резонансной линией моды другой мультиполярности. Причём желательно, чтобы две моды вносили определяющий вклад в значение интегрального сечения рассеяния.

Далее, координатная зависимость излучения каждого мультиполя определяется видом собственных функций задачи. Она зависит от симметрии задачи, но не зависит от материальных свойств рассеивающей частицы. Последние влияют только и исключительно на значения коэффициентов рассеяния.

Из сказанного ясно, что отрицательность действительной части диэлектрической проницаемости рассеивающей частицы вовсе не является обязательным свойством, необходимым для наблюдения направленных резонансов. Диэлектрики, для которых $\text{Re } \varepsilon > 0$, также могут демонстрировать такие резонансы при условии, что спектральная зависимость их резонансных линий удовлетворяет отмеченным выше свойствам.

Другим важным обстоятельством является масштабная инвариантность уравнений Максвелла. Если изменить геометрические размеры задачи одновременно с длиной волны излучения так, что их отношение останется фиксированным, а диэлектрическую проницаемость оставить неизменной, то такая задача рассеяния окажется идентичной исходной. Это позволяет моделировать рассеяние света наночастицей, изучая эквивалентную задачу по рассеянию существенно более длинноволнового излучения макроскопическим объектом той же формы.

Такое моделирование и было использовано авторами работы [93] для экспериментального исследования направленных резонансов Фано. В частности, из специальной керамики, имеющей в сантиметровом диапазоне $\varepsilon \approx 17,2 + 0,2i$, что примерно соответствует диэлектрической проницаемости широко распространённых полупроводниковых материалов (Si, Ge, GaAs, GaP) в оптическом и ближнем ИК-диапазонах, был изготовлен шар диаметром 18 мм. Интегральная эффективность рассеяния такого шара и парциальные эффективности его дипольных и квадрупольных мод представлены на рис. 8 как функции его параметра размера. Видно, что в области $1,25 < x < 1,40$ определяющий вклад в полную эффективность рассеяния вносят электрическая дипольная и квадрупольная моды и что в указанной области выполнены условия для наблюдения направленных резонансов Фано, связанных с интерференцией излучения этих двух парциальных мод.

Для исследования угловой и частотной зависимости рассеянного излучения керамическая сфера помещалась в специальную камеру с безотражательным покрытием

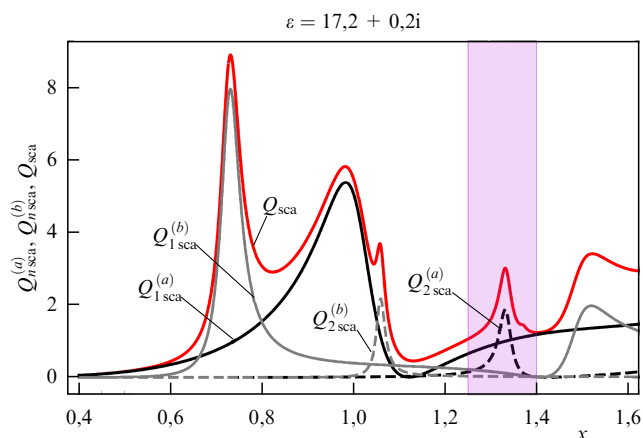


Рис. 8. Интегральная эффективность рассеяния Q_{sca} и парциальные эффективности четырёх первых мультиполей: электрического диполя ($Q_{1\text{sca}}^{(a)}$), магнитного диполя ($Q_{1\text{sca}}^{(b)}$), электрического квадруполь ($Q_{2\text{sca}}^{(a)}$) и магнитного квадруполь ($Q_{2\text{sca}}^{(b)}$) для сферической частицы с $\varepsilon = 17,2 + 0,2i$ как функции её параметра размера. Область, где можно наблюдать направленные резонансы Фано, отмечена заливкой.

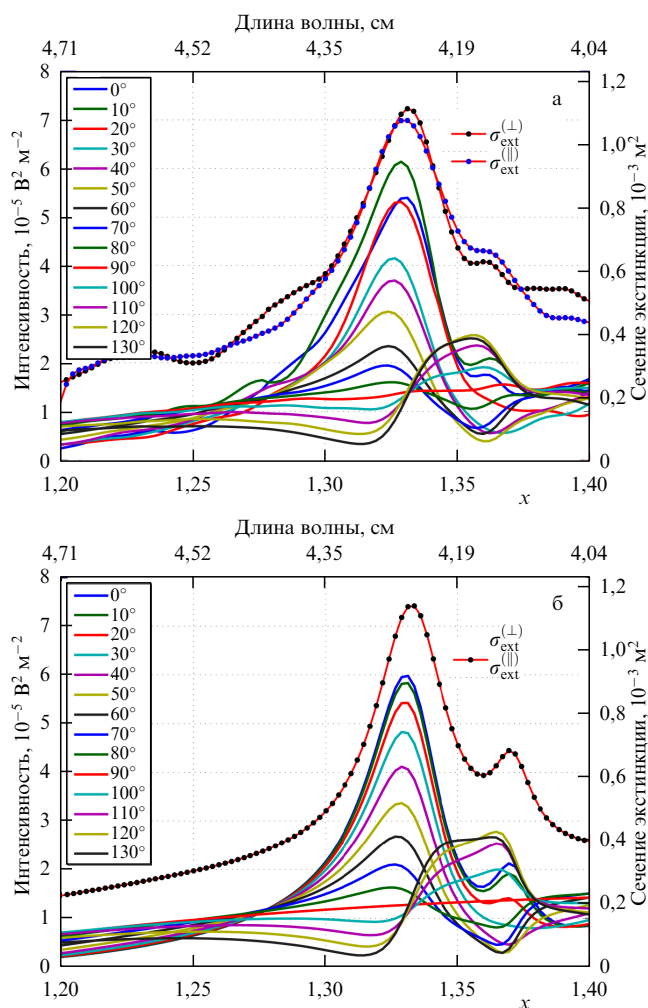


Рис. 9. Интенсивность рассеяния $I_{\perp}$ вдоль различных направлений, определяемых значениями полярного угла θ (см. вставку), как функция длины волны излучения [93]. Керамическая сфера диаметром 18 мм. В указанном диапазоне дисперсионной зависимости $\varepsilon(\omega)$ можно пренебречь и считать $\varepsilon(\omega) \approx 17,2 + 0,2i$. (а) Результаты измерений, (б) расчёт по формулам Ми. Детали в тексте.

её стенок, где она облучалась плоской, линейно-поляризованной волной сантиметрового диапазона. Излучение, рассеянное сферой вдоль данного направления, принималось приёмной антенной. Сечение экстинкции определялось на основании оптической теоремы [3, 4] по измерению амплитуды и фазы рассеянной вперёд волны при двух независимых поляризациях излучения.

Мы не будем здесь останавливаться на деталях эксперимента, достаточно сложных в техническом отношении, отсылая заинтересованного читателя к оригинальной работе [93] и цитированной в ней литературе. В качестве примера приведём взятые из этой работы графики зависимости интенсивности $I_{\perp}$ излучения, рассеянного вдоль данного направления, от его длины волны при различных значениях полярного угла θ (рис. 9а). На рисунке 9б приведены те же зависимости, рассчитанные на основании точного решения Ми. Подчёркнём, что при построении графиков не было использовано ни одного подгоночного параметра. Отметим также, что при переходе значений θ через точку $\theta = 90^\circ$ взаимная последовательность точек минимума и максимума профиля $I_{\perp}(x)$ изменяется на противоположную, см. (25). Обращает на себя внимание тот факт, что при $\theta > 90^\circ$ локальный минимум рассеяния в данном направлении располагается почти при том же значении x , которому соответствует локальный максимум интегрального сечения экстинкции. Этот результат трудно было бы понять вне рамок развитых здесь представлений.

6. Заключение

Подведём некоторые итоги. В данном обзоре мы сумели обсудить только несколько новых и, с нашей точки зрения, достаточно необычных аспектов старой проблемы рассеяния света малыми частицами. Сохраняя объём обзора в разумных пределах, мы пожертвовали рядом важных вопросов и приложений ради возможности более подробно обсудить физику основных процессов и явлений, с которыми связаны эти новые аспекты. К таким исключённым из обсуждения вопросам прежде всего относятся проблемы рассеяния света частицами сложной формы (диски; эллипсоиды, в том числе сильно вытянутые или сильно сплюснутые; частицы тороидальной формы — "бублики", пирамиды и другие многогранники), кластерами из нескольких наночастиц — "метамолекулами", а также метаматериалами и метаповерхностями. Их обсуждению посвящено большое число как оригинальных публикаций (включающих и экспериментальные, и теоретические работы), так и обзоров и монографий (см., например, работы [18, 20, 94–100]), к каковым мы и адресуем заинтересованного читателя.

Мы считаем оправданным такой отбор материала, так как глубокое понимание физики рассмотренных в обзоре относительно простых случаев помогает составить общую картину явления, характерную и для более сложных задач. Мало того, в ряде случаев обсуждаемое в обзоре решение Ми для сферы может быть количественно использовано как базисное приближение для описания таких более сложных случаев (сфера на подложке, метамолекулы и др.).

Остановимся теперь кратко на возможных применениях обсуждаемых эффектов. Область таких применений весьма велика. В частности, резонансное локальное усиление электромагнитного поля позволяет создавать

участки субволнового размера для избирательного мощного электромагнитного воздействия на биологические ткани, что открывает принципиально новые возможности в генной инженерии и нанохирургии на клеточном уровне, для лечения онкологических заболеваний, создания новых лекарственных препаратов и пр.

Эти же свойства, дополненные возможностями сверхбыстрого переключения между различными состояниями и управлением диаграммами рассеяния, могут быть широко использованы в разработке новых методов передачи, записи и хранения информации сверхвысокой плотности, а также её сверхбыстрой обработки, включая создание принципиально новых многофункциональных элементов интегральной оптики со сверхплотной упаковкой. Последние могут быть использованы, например, при проектировании сверхпроизводительных оптических компьютеров, построенных на принципах волоконной оптики. Данные свойства могут также послужить основой для прорыва в области визуализации объектов со сверхвысоким пространственным и временным разрешением, а также в спектроскопии сверхвысокого разрешения.

В обзоре мы совершенно не касались обсуждения различных нелинейных явлений. Однако отмечавшийся эффект воронки указывает на возможность создания областей с громадной плотностью электромагнитной энергии при весьма умеренных значениях плотности потока падающего излучения. Если при этом рассеивающая частица помещена в нелинейную среду (или сама обладает нелинейными свойствами), то наличие таких областей должно приводить к рекордному снижению интенсивности падающего излучения, при которой наблюдается генерация высших гармоник, что в свою очередь открывает перспективы для создания нового поколения биологических и медицинских маркеров. Такие маркеры позволят получить сигнал отклика со сверхвысоким (субклеточным) пространственным разрешением при рекордно низких значениях интенсивности зондирующего импульса и соответственно снижении его действия на исследуемые биологические ткани.

И это только некоторые из примеров. Список легко продолжить. Мы надеемся, что данный обзор может быть полезен при проведении такого рода исследований.

Отметим также, что, хотя ряд обсуждаемых в обзоре эффектов в настоящее время не имеет прямого экспериментального подтверждения в силу трудностей в подборе материалов с необходимыми свойствами в оптическом диапазоне частот, эти трудности в значительной степени снимаются в радиодиапазоне. Кроме того, результаты обзора достаточно легко переносятся на рассеяние волн другой природы, например акустических, где материальные ограничения на свойства как среды, по которой распространяются волны, так и объектов, рассеивающих эти волны, имеют совершенно другие рамки.

Что же касается наблюдения обсуждаемых эффектов именно при рассеянии света, то громадные успехи, достигнутые в последнее время в создании метаматериалов с заранее заданными свойствами, позволяют надеяться, что любые ограничения, налагаемые на свойства вещества и не связанные с проявлением фундаментальных законов физики, могут быть устранены. Это придаёт теоретическим изысканиям, затронутым в данном обзоре, вполне практический смысл.

Авторы благодарны А.С. Сигову за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания, способствующие

её улучшению. Обзор написан при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-12-50016), проекта РНФ № 19-72-30012, в рамках которого выполнены все оригинальные расчёты, приведённые в настоящей публикации, а также проекта РФФИ № 20-02-00086 (визуализация результатов численных расчётов и компьютерная графика).

7. Приложение. Математическое дополнение

А. Точное решение Ми для сферы

Приведём здесь для справок основные результаты теории Ми. Рассмотрим рассеяние плоской линейно-поляризованной электромагнитной волны с циклической частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$, ориентированным вдоль оси z , однородной сферой радиуса R , центр которой помещён в начало сферической системы координат. При сделанных предположениях электрическое поле падающей волны описывается формулой

$$\mathbf{E}^{\text{inc}} = \mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)], \quad (26)$$

где вектор $\mathbf{E}$ колеблется вдоль оси x . Удобно ввести безразмерные поля $\mathcal{E} = E/E_0$ и $\mathcal{H} = H/H_0$. Здесь $H_0 = E_0 \sqrt{\epsilon_{\text{out}}/\mu_{\text{out}}}$ — амплитуда магнитного поля в падающей волне. Для большей общности сейчас не предполагается, что магнитная проницаемость тождественно равна единице. Это позволяет использовать приведённые ниже формулы и для магнитных частиц. Разумеется, в этом случае относительный коэффициент преломления сферы m следует считать равным $m = \sqrt{\epsilon_{\text{in}}\mu_{\text{in}}/(\epsilon_{\text{out}}\mu_{\text{out}})}$.

Разлагая поле падающей волны по сферическим гармоникам, его можно представить в виде бесконечного ряда парциальных волн [1, 3, 4]:

$$\mathcal{E}_{r,\theta,\varphi}^{\text{inc}} = \exp(-i\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{r,\theta,\varphi}^{\text{inc}(n)}, \quad (27)$$

$$\mathcal{H}_{r,\theta,\varphi}^{\text{inc}} = \exp(-i\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_{r,\theta,\varphi}^{\text{inc}(n)},$$

где

$$\mathcal{E}_r^{\text{inc}(n)} = i^{n-1} \frac{2n+1}{(kr)^2} \psi_n(kr) \pi_n(\theta) \sin \theta \cos \varphi, \quad (28)$$

$$\mathcal{E}_\theta^{\text{inc}(n)} = i^n \frac{2n+1}{kr(n+1)n} [\psi_n(kr) \pi_n(\theta) - i\psi_n'(kr) \tau_n(\theta)] \cos \varphi, \quad (29)$$

$$\mathcal{E}_\varphi^{\text{inc}(n)} = -i^n \frac{2n+1}{kr(n+1)n} [\psi_n(kr) \tau_n(\theta) - i\psi_n'(kr) \pi_n(\theta)] \sin \varphi, \quad (30)$$

$$\mathcal{H}_r^{\text{inc}(n)} = i^{n-1} \frac{2n+1}{(kr)^2} \psi_n(kr) \pi_n(\theta) \sin \theta \sin \varphi, \quad (31)$$

$$\mathcal{H}_\theta^{\text{inc}(n)} = i^n \frac{2n+1}{kr(n+1)n} [\psi_n(kr) \pi_n(\theta) - i\psi_n'(kr) \tau_n(\theta)] \sin \varphi, \quad (32)$$

$$\mathcal{H}_\varphi^{\text{inc}(n)} = i^n \frac{2n+1}{kr(n+1)n} [\psi_n(kr) \tau_n(\theta) - i\psi_n'(kr) \pi_n(\theta)] \cos \varphi. \quad (33)$$

Здесь θ — полярный, а φ — азимутальный угол, штрих означает производную по всему аргументу функции, и введены следующие обозначения:

$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} J_{n+1/2}(z), \quad \pi_n(\theta) = \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta}, \quad (34)$$

$$\tau_n(\theta) = \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta}, \quad P_n^m(z) = (1 - z^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(z)}{dz^m}, \quad (35)$$

где $J_{n+1/2}(z)$ — функция Бесселя, $P_n(z)$ — полиномы Лежандра. Функцию $\psi_n(z)$ и введённую ниже $\xi_n(z)$ часто называют функциями Риккати – Бесселя.

При выбранной симметрии задачи рассеяния сферической частицей плоской электромагнитной волны (26) в её разложение по сферическим гармоникам входят только моды с $m = 1$ (здесь m — верхний индекс присоединённых полиномов Лежандра в выражении (35), не путать с коэффициентом преломления, обозначаемым той же буквой). В других случаях, например, при возбуждении сфокусированными или сингулярными пучками, данная симметрия нарушается и нужно учитывать все гармоники [101–103]. Поскольку, однако, в силу полноты системы плоских волн произвольную электромагнитную волну можно представить как их суперпозицию, мы такие случаи обсуждать не будем, сосредоточившись на рассеянии плоской монохроматической волны.

Поле рассеянного излучения (индекс "sca") и поле внутри частицы (индекс "in") представляются рядами, аналогичными (27), где соответствующие парциальные волны определяются выражениями

$$\mathcal{E}_r^{\text{sca}(n)} = -i^{n-1} \frac{2n+1}{(kr)^2} a_n \xi_n(kr) \pi_n(\theta) \sin \theta \cos \varphi, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\theta^{\text{sca}(n)} = & -i^n \frac{2n+1}{kr(n+1)n} \times \\ & \times [b_n \xi_n(kr) \pi_n(\theta) - i a_n \xi'_n(kr) \tau_n(\theta)] \cos \varphi, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\varphi^{\text{sca}(n)} = & i^n \frac{2n+1}{kr(n+1)n} \times \\ & \times [b_n \xi_n(kr) \tau_n(\theta) - i a_n \xi'_n(kr) \pi_n(\theta)] \sin \varphi, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\mathcal{H}_r^{\text{sca}(n)} = -i^{n-1} \frac{2n+1}{(kr)^2} b_n \xi_n(kr) \pi_n(\theta) \sin \theta \sin \varphi, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\theta^{\text{sca}(n)} = & -i^n \frac{2n+1}{kr(n+1)n} \times \\ & \times [a_n \xi_n(kr) \pi_n(\theta) - i b_n \xi'_n(kr) \tau_n(\theta)] \sin \varphi, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varphi^{\text{sca}(n)} = & -i^n \frac{2n+1}{kr(n+1)n} \times \\ & \times [a_n \xi_n(kr) \tau_n(\theta) - i b_n \xi'_n(kr) \pi_n(\theta)] \cos \varphi. \end{aligned} \quad (41)$$

$$\mathcal{E}_r^{\text{in}(n)} = i^{n-1} \frac{2n+1}{(mkr)^2} d_n \psi_n(mkr) \pi_n(\theta) \sin \theta \cos \varphi, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\theta^{\text{in}(n)} = & i^n \frac{2n+1}{mkr(n+1)n} \times \\ & \times [c_n \psi_n(mkr) \pi_n(\theta) - i d_n \psi'_n(mkr) \tau_n(\theta)] \cos \varphi, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\varphi^{\text{in}(n)} = & -i^n \frac{2n+1}{mkr(n+1)n} \times \\ & \times [c_n \psi_n(mkr) \tau_n(\theta) - i d_n \psi'_n(mkr) \pi_n(\theta)] \sin \varphi, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\mathcal{H}_r^{\text{in}(n)} = i^{n-1} \frac{2n+1}{m(kr)^2} c_n \psi_n(mkr) \pi_n(\theta) \sin \theta \sin \varphi, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\theta^{\text{in}(n)} = & i^n \frac{2n+1}{kr(n+1)n} \times \\ & \times [d_n \psi_n(mkr) \pi_n(\theta) - i c_n \psi'_n(mkr) \tau_n(\theta)] \sin \varphi, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varphi^{\text{in}(n)} = & i^n \frac{2n+1}{kr(n+1)n} \times \\ & \times [d_n \psi_n(mkr) \tau_n(\theta) - i c_n \psi'_n(mkr) \pi_n(\theta)] \cos \varphi. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь $\xi(z)$ связана с функцией Ганкеля первого рода $H_v^{(1)}$ соотношением $\xi_n(z) = \sqrt{\pi z/2} H_{n+1/2}^{(1)}(z)$, а коэффициенты рассеяния a_n , b_n , c_n и d_n определяются из условия непрерывности тангенциальных компонент полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на поверхности сферы, что приводит к следующим их значениям:

$$a_n = \frac{m \psi_n(mx) \psi'_n(x) - \psi_n(x) \psi'_n(mx)}{m \psi_n(mx) \xi'_n(x) - \xi_n(x) \psi'_n(mx)}, \quad (48)$$

$$b_n = \frac{m \psi_n(x) \psi'_n(mx) - \psi_n(mx) \psi'_n(x)}{m \xi_n(x) \psi'_n(mx) - \psi_n(mx) \xi'_n(x)}, \quad (49)$$

$$c_n = -\frac{im}{m \xi_n(x) \psi'_n(mx) - \psi_n(mx) \xi'_n(x)}, \quad (50)$$

$$d_n = \frac{im}{m \psi_n(mx) \xi'_n(x) - \xi_n(x) \psi'_n(mx)} \quad (51)$$

(при написании (50), (51) нами использовалось тождество $\psi_n(x) \xi'_n(x) - \psi'_n(x) \xi_n(x) \equiv i$ [104]).

Отметим, что, как следует из приведённых выражений, радиальные компоненты полей рассеянных парциальных сферических волн не равны нулю. Это означает, что такие волны не вполне поперечны. Они становятся поперечными только асимптотически при $r \rightarrow \infty$, так как радиальные компоненты с возрастанием r убывают быстрее, чем тангенциальные.

Зная координатные зависимости всех компонент рассеянного поля и вычисляя векторное произведение $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$, можно получить профиль вектора Пойнтинга, из которого, в частности, следуют выражения (24), (25). Мы не будем здесь этим заниматься.

Укажем также, что аналогичное точное решение может быть получено для задачи о рассеянии плоской линейно-поляризованной волны бесконечным круговым цилиндром. При этом его удаётся получить при произвольной ориентации оси цилиндра относительно волнового вектора падающей волны и плоскости её поляризации. Отличие от задачи для сферы состоит в том, что естественной координатной системой теперь является цилиндрическая и разложение следует проводить не по сферическим, а по цилиндрическим функциям. Однако явный вид такого решения весьма громоздкий и здесь не приводится. Его можно найти, например, в [1, 3].

Б. Общие свойства коэффициентов рассеяния

Из выражений (36)–(41), (48), (49) следует, что вся зависимость рассеянного излучения от индивидуальных свойств рассеивающей частицы определяется коэффициентами рассеяния a_n , b_n ; все остальные входящие в (36)–(41) выражения универсальны для любых сферических частиц. Через эти же коэффициенты рассеяния выражаются и все парциальные сечения, см. (3), (14). Аналогичные утверждения справедливы и при рассеянии света цилиндром. По этой причине коэффициенты рассеяния играют в рассматриваемой задаче принципиальную роль. Покажем, что эти коэффициенты имеют некоторые важные универсальные свойства, следующие из общих свойств задачи рассеяния и скрытые в громоздких выражениях (48), (49) [26, 65].

Для выяснения этих свойств воспользуемся тем, что ортогональные друг другу моды, входящие в мультипольные разложения рассеянного поля, являются собственными функциями соответствующей краевой задачи. Это означает, что каждая из них не имеет проекций ни на какую другую и может возбуждаться независимо. То же справедливо и для электрических и магнитных мод с одним и тем же значением n , так как они не зацеплены друг с другом через граничные условия, а задача рассеяния линейна.

Далее отметим, что формулы (3), (14) для парциальных сечений непосредственно вытекают из ортогональности собственных функций задачи и оптической теоремы. Последняя, в свою очередь, является прямым следствием закона сохранения энергии [1, 3, 4]. Поэтому они имеют общность, значительно большую, чем обсуждаемое сейчас решение задачи Ми для сферы.

Рассмотрим теперь возбуждение такой единственной парциальной моды. Соответствующий коэффициент рассеяния обозначим z_n , где в качестве z_n может фигурировать как a_n , так и b_n . Обсудим сначала бездиссипативный случай ($\text{Im } \varepsilon = 0$). При отсутствии диссипации все парциальные сечения поглощения тождественно равны нулю. Будучи применено к выражению (14), данное условие приводит к равенству $\text{Re } z_n = |z_n|^2$. Представляя комплексный коэффициент рассеяния в виде $z_n = z'_n + iz''_n$, убеждаемся, что это эквивалентно условию $z'_n - z''_n{}^2 = z''_n{}^2 \geq 0$. Отсюда немедленно следует, что $z'_n \geq z''_n{}^2 \geq 0$ и $z'_n \geq z''_n{}^2$; это, в свою очередь, приводит к ограничению $0 \leq z'_n \leq 1$. Наконец, любое положительное число, не превосходящее единицы, без нарушения общности можно представить в виде

$$z'_n = \frac{F_n^2}{F_n^2 + G_n^2}, \quad (52)$$

где F_n и G_n — действительные величины. Воспользовавшись представлением (52) и равенством $z''_n{}^2 = z'_n - z''_n{}^2$, находим, что в этом случае

$$z''_n = \pm \frac{F_n G_n}{F_n^2 + G_n^2}. \quad (53)$$

Поскольку знаки F и G ещё не определены, выбор конкретного знака в правой части (53) не нарушает общности рассмотрения. Для определённости выберем знак минус. Тогда, собирая всё вместе, получаем

$$z_n = \frac{F_n^2}{F_n^2 + G_n^2} - i \frac{F_n G_n}{F_n^2 + G_n^2} \equiv \frac{F_n}{F_n + iG_n}, \quad (54)$$

где действительные F и G , разумеется, являются функциями ε и R (фактически m и x).

Что будет при конечной диссипации, когда $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ и $\varepsilon'' \neq 0$? Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что ни уравнения Максвелла, ни соответствующие граничные условия не содержат членов, в которых величина ε вошла бы в комбинации, отличной от $\varepsilon' + i\varepsilon''$. Это означает, что переход к конечной диссипации сводится к формальной замене действительного ε на комплексное. Такая замена делает функции F и G комплексными, но не меняет структуры выражения (54). Действительно, воспользовавшись известным представлением функции Ганкеля: $H_v^{(1)}(z) \equiv J_v(z) + iY_v(z)$, где $Y_v(z)$ — функция Неймана [104], можно убедиться, что выражения (48), (49) в самом деле соответствуют (54), в том числе и при комплексном ε . При этом F_n равны числителям правых частей выражений (48), (49), а соответствующие G_n определяются выражениями

$$G_n^{\text{sph}(a)} = \psi'_n(mx)\chi_n(x) - m\psi_n(mx)\chi'_n(x), \quad (55)$$

$$G_n^{\text{sph}(b)} = \psi_n(mx)\chi'_n(x) - m\psi'_n(mx)\chi_n(x), \quad (56)$$

где $\chi_n(x) = -\sqrt{\pi x/2} Y_{n+1/2}(x)$.

Запись коэффициентов рассеяния в виде (54) позволяет сделать важный вывод о некоторых их общих свойствах. Как отмечалось в основном тексте обзора, резонансам Ми отвечает условие $G_n = 0$. В этом случае соответствующий коэффициент рассеяния обращается в единицу, а парциальное сечение рассеяния достигает своего максимума. Как было показано, при отсутствии диссипации все F_n и G_n чисто действительные. Тогда выражение (54) можно переписать в виде $z_n(\zeta) = (\text{Re } \zeta)/\zeta$, где $\zeta \equiv F_n + iG_n$.

Существенно, что определённая таким образом функция комплексной переменной $z_n(\zeta)$ не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости ζ . В этом легко убедиться, например, применив к ней условие Коши–Римана. Если бы $z_n(\zeta)$ была аналитической функцией, то согласно этим условиям должно было бы выполняться тождество

$$\frac{\partial z_n}{\partial F_n} + i \frac{\partial z_n}{\partial G_n} \equiv 0. \quad (57)$$

Легко видеть, что в действительности левая часть выражения (57) равна $1/(F_n + iG_n) \neq 0$, и условия Коши–Римана не выполняются.

Точка $\zeta = 0$ является особой точкой этой функции, в которой она не имеет никакого определённого значения — значение $z_n(\zeta)$ в этой точке зависит от траекторий на плоскости ζ , по которой мы к ней приближаемся. Действительно, рассмотрим семейство траекторий вида $|G_n| = A|F_n|^\alpha$, где A и α — положительные числа. Видно, что в этом случае при $\zeta \rightarrow 0$ функция $z_n \rightarrow 0$ при $0 < \alpha < 1$; $z_n \rightarrow 1/(1 \pm iA)$ при $\alpha = 1$, где берётся знак плюс, если F_n и G_n имеют одинаковые знаки, и минус, если противоположные. И, наконец, $z_n \rightarrow 1$ при $\alpha > 1$.

Чтобы понять, почему такая простая функция обладает столь, на первый взгляд, странными свойствами, рассмотрим график $|z_n|^2 = |z_n(\zeta)|^2$, который представляет собой определённую поверхность в трёхмерном пространстве (рис. 10). Видно, что два крыла этой поверхности пересекаются по линии $\zeta = 0$. Хотя различные

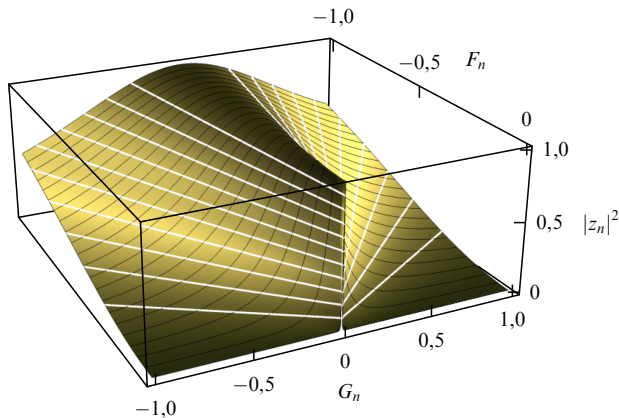


Рис. 10. Поверхность $|z_n(F_n, G_n)|^2$ в соответствии с выражением (54) при чисто действительных F_n и G_n (бездиссипативный предел) и семейство линий $F_n = \text{const}$ на ней (тонкие чёрные линии). Чем ближе F_n к нулю, тем круче максимум линий при $G_n = 0$. В конце концов, два крыла поверхности пересекаются вдоль линии $F_n = G_n = 0$. Хотя различные траектории, лежащие на поверхности, могут пересекать эту линию при различных значениях $|z_n|^2$, все точки пересечения проецируются в одну и ту же точку $F_n = G_n = 0$ на плоскости (F_n, G_n) . Как пример этих траекторий, набор линий уровня $|z_n| = \text{const}$ для разных значений константы показан жирными белыми линиями [30].

траектории, лежащие на поверхности $|z_n|^2 = |z_n(\zeta)|^2$, могут пересекать эту линию при различных значениях $|z_n|^2$, все точки пересечения проецируются в одну и ту же точку $\zeta = 0$ на плоскости комплексной переменной ζ , что и объясняет отмеченные выше свойства. Из сказанного ясно, что особенность такого типа является общим свойством коэффициентов рассеяния и, как будет видно из дальнейшего, играет важную роль в понимании различных резонансных эффектов при рассеянии света субволновыми частицами с малой диссипацией.

В частности, зависимость значения коэффициента рассеяния в точке $\zeta = 0$ от траектории, по которой к этой точке приближаются, делает принципиально важным правильный выбор такой траектории. Если в математическом смысле все возможные траектории эквивалентны, то в соответствующей физической задаче естественным оказывается набор переменных R, ω . При этом физически осмысленной постановкой задачи является изучение рассеяния частицей с данным значением R в зависимости от частоты падающего излучения. Как отмечалось в основном тексте обзора, ширина резонансных линий резко уменьшается с уменьшением размера частицы. Поэтому при таком подходе и достаточно малом R становится необходимым выйти за рамки приближения монохроматической падающей волны и рассмотреть конечную ширину линии источника. Последовательное применение такого подхода снимает математическую неопределённость в значениях коэффициентов рассеяния в точке $\zeta = 0$. Более подробно этот вопрос обсуждается в работе [30].

Учёт сколь угодно малой, но конечной диссипации смещает значения резонансных частот (решения уравнения $G_n = 0$) с действительной оси в комплексную плоскость. В результате G_n не обращается в нуль ни при каких действительных значениях ω , и указанная особенность исчезает. В этом случае при чисто действительных ω функция G_n становится комплексной: $G_n = G'_n + iG''_n$. При малой диссипации ($|G'_n| \gg G''_n$) профиль

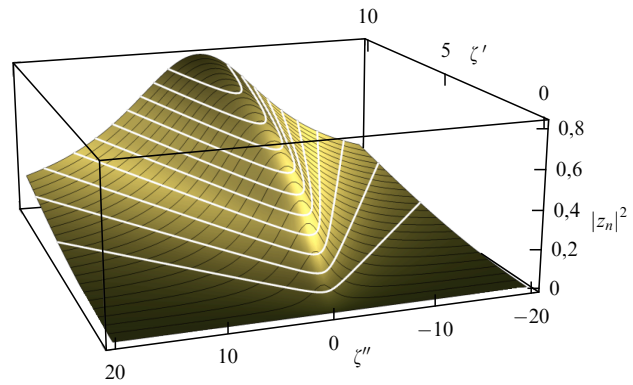


Рис. 11. То же, что на рис. 10, но с учётом малой диссипации (см. (58)).

$|z_n(\zeta)|^2$ после соответствующего перемасштабирования переменных приобретает универсальный вид, аналогичный выражению (17):

$$|z_n|^2 \approx \frac{\zeta'^2}{(\zeta' + 1)^2 + \zeta'^2}, \quad \zeta = -\frac{F'_n}{G'_n} + i\frac{G''_n}{G'_n} \quad (58)$$

(рис. 11). При этом, так же как и при обсуждении аномального поглощения, функцию F_n приближённо можно считать чисто действительной.

Однако, несмотря на устранение особенности, всё сказанное выше относительно резонансного рассеяния в окрестности точки $R = 0$ остаётся справедливым и при конечной диссипации, до тех пор пока радиационное затухание преобладает над диссипативным [30].

В заключение этого обсуждения отметим, что неаналитичность коэффициентов рассеяния в недиссипативном пределе проявляется в представлении их как функции ζ . Если вместо этого рассматривать их как функции комплексного параметра размера x (или комплексного коэффициента преломления m), то в силу представления F_n и G_n через функции Бесселя, см. (48)–(50), (55), (56), и аналитических свойств последних все они оказываются аналитическими функциями x (или m) на всей комплексной плоскости, за исключением счётного множества особых точек.

Список литературы

1. Kerker M *The Scattering of Light and Other Electromagnetic Radiation* (Elsevier Science, 2013)
2. Mie G *Ann. Physik* **25** 1 (1908)
3. Bohren C F, Huffman D R *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* (Wiley-VCH Verlag, 1998)
4. Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1973) § 13.5
5. Eaton N *Vistas Astron.* **27** 111 (1984)
6. Krasnok A E et al. *Opt. Express* **20** 20599 (2012)
7. Chattaraj S, Madhukar A J. *Opt. Soc. Am. B* **33** 2414 (2016)
8. Chaábani W et al. *ACS Nano* **13** 4199 (2019)
9. Staude I, Pertsch T, Kivshar Y S *ACS Photonics* **6** 802 (2019)
10. Wriedt T *Part. Part. Syst. Charact.* **15** 67 (1998)
11. Kerker M *Aerosol Sci. Technol.* **1** 275 (1982), <https://doi.org/10.1080/02786828208958594>
12. Kelly K L et al. *J. Phys. Chem. B* **107** 668 (2003)
13. Wriedt T, in *The Mie Theory: Basics and Applications* (Eds W Hergert, T Wriedt) (Berlin, Heidelberg: Springer, 2012) pp. 53–71
14. Kuznetsov A I et al. *Science* **354** 6314 (2016)

15. Tzarouchis D, Sihvola A *Appl. Sci.* **8** 184 (2018)
16. Agranovich V, Gartsstein Y *Metamaterials* **3** 1 (2009)
17. Merlin R *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **106** 1693 (2009), <https://www.pnas.org/content/106/6/1693.full.pdf>
18. Климов В В *Наноплазмоника* (М.: Физматлит, 2009)
19. Luk'yanchuk B et al. *Nat. Mater.* **9** 707 (2010)
20. Rahmani M *Small* **10** 576 (2013)
21. Rayleigh J W S *Philos. Mag.* **41** 274 (1871)
22. Rayleigh J W S *On the Scattering of Light by Small Particles* (1871)
23. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теоретическая физика* Т. 8 *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982) § 8, § 80, § 84, § 92, § 105
24. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теоретическая физика* Т. 2 *Теория поля* (М.: Литрес, 2018) § 67
25. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теоретическая физика* Т. 3 *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1989) Гл. XXVII
26. Tribelsky M I *Europhys. Lett.* **104** 34002 (2013)
27. Bohren C F *Am. J. Phys.* **51** 323 (1983)
28. Трибельский М И *ЖЭТФ* **86** 915 (1984); Tribel'skii M I *JETP* **59** 534 (1984)
29. Tribelsky M I, Luk'yanchuk B S *Phys. Rev. Lett.* **97** 263902 (2006)
30. Brynkin Y A, Tribelsky M I *Phys. Rev. A* **100** 013834 (2019)
31. Tribelsky M I *Europhys. Lett.* **94** 14004 (2011)
32. Лукьянчук Б С, Трибельский М И "Аномальное рассеяние света малыми частицами и обратная иерархия оптических резонансов", в сб. Раскин Д И, Яковлев Е Б, Шандыбина Г Д (Ред.) *Памяти М.Н. Либенсона. Сборник воспоминаний и статей* (СПб.: ГУ ИТМО, 2005) с. 101–117
33. Wang Z et al. *Phys. Rev. B* **70** 035418 (2004)
34. Bashevoy M, Fedotov V, Zheludev N *Opt. Express* **13** 8372 (2005)
35. Luk'yanchuk B et al., in *2008 IEEE PhotonicsGlobal@ Singapore* (IEEE, 2008) p. 14
36. Tribelsky M I, Luk'yanchuk B S, in *Fundamentals of Laser-Assisted Micro- and Nanotechnologies* (Springer, 2014) pp. 125–146
37. Svyakhovskiy S E, Ternovski V V, Tribelsky M I *Opt. Express* **27** 23894 (2019)
38. Tribelsky M I, Miroshnichenko A E *Phys. Rev. A* **100** 053824 (2019)
39. Canós Valero A et al. *Laser Photonics Rev.* **15** 2100114 (2021)
40. Chen S-W, Li J-H *Opt. Express* **25** 8950 (2017)
41. Shore R A *IEEE Antennas Propag. Mag.* **57** 69 (2015)
42. Garg S, Venkatapathi M J. *Opt.* **19** 075603 (2017)
43. Hasegawa K, Rohde C, Deutsch M *Opt. Lett.* **31** 1136 (2006)
44. Li R et al. *Nanotechnology* **26** 505201 (2015)
45. Fleury R, Soric J, Alu A *Phys. Rev. B* **89** 045122 (2014)
46. Ruan Z, Fan S *Phys. Rev. Lett.* **105** 013901 (2010)
47. Лукьянчук Б С, Трибельский М И, Терновский В В *Онмический журн.* **73** 7 (2006)
48. Luk'yanchuk B et al. *J. Opt. A Pure Appl. Opt.* **9** S294 (2007)
49. Luk'yanchuk B et al. *J. Phys. Conf. Ser.* Vol. 59 (IOP Publishing, 2007) p. 234
50. Herlofson N *Arkiv Fysik* **3** 247 (1951)
51. Kaiser T, Closs R *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.* **43** 1 (1952)
52. Closs R, Clegg J, Kaiser T *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.* **44** 313 (1953)
53. Baffou G, Quidant R, Garcia de Abajo F J *ACS Nano* **4** 709 (2010)
54. Skirtach A G et al. *Nano Lett.* **5** 1371 (2005)
55. Han G et al. *NanoBiotechnology* **3** 40 (2007)
56. Brigger I, Dubernet C, Couvreur P *Adv. Drug Deliv. Rev.* **54** 631 (2002)
57. Huang X et al. *Lasers Med. Sci.* **23** 217 (2007)
58. Anderson R, Parrish J *Science* **220** 524 (1983)
59. Pan L, Bogy D B *Nat. Photon.* **3** 189 (2009)
60. Luk'yanchuk B S et al. *New J. Phys.* **14** 093022 (2012)
61. Tribelsky M I et al. *Phys. Rev. X* **1** 021024 (2011)
62. Tribelsky M I, Fukumoto Y *Biomed. Opt. Express* **7** 2781 (2016)
63. Kraus J D, Marhefka R J *Antennas for All Applications* (New York: Academic Press, 2002)
64. Balanis C A *Antenna Theory: Analysis and Design* (John Wiley & Sons, 2016)
65. Miroshnichenko A E, Tribelsky M I *Phys. Rev. Lett.* **120** 033902 (2018)
66. Miller O D et al. *Opt. Express* **24** 3329 (2016)
67. Ruan Z, Fan S *Phys. Rev. A* **85** 1 (2012)
68. Tretyakov S *Plasmonics* **9** 935 (2014)
69. Palik E D *Handbook of Optical Constants of Solids* (Academic Press, 1998)
70. Wood R W *Proc. Phys. Soc. Lond.* **18** 269 (1902)
71. Rayleigh J W S *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* **79** 399 (1907)
72. Beutler H Z. *Phys.* **93** 177 (1935)
73. Fano U *Nuovo Cimento* **12** 154 (1935), <http://arXiv.org/abs/cond-mat/0502210v1>
74. Fano U *Phys. Rev.* **124** 1866 (1961)
75. Fano U *Current Contents* **27** 8 (1977)
76. Clark C W, in Lide D R (Ed.) *A Century of Excellence in Measurements, Standards, and Technology* (CRC Press, 2001) pp. 116–119, <https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/sp958-lide/116-119.pdf>
77. Berry R S, Inokuti M, Rau A R P *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* **58** 55 (2012), <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rsbm.2012.0030>
78. Miroshnichenko A E, Flach S, Kivshar Y S *Rev. Mod. Phys.* **82** 2257 (2010)
79. Tribelsky M I, Miroshnichenko A E, Kivshar Y S *Europhys. Lett.* **97** 44005 (2012)
80. Зельдович Я Б *ЖЭТФ* **33** 1531 (1958); Zel'dovich Ia B *JETP* **6** 1184 (1958)
81. Miroshnichenko A E et al. *Nat. Commun.* **6** 1 (2015)
82. Ospanova A K, Stenishchev I V, Basharin A A *Laser Photonics Rev.* **12** 1800005 (2018)
83. Yang Y, Bozhevolnyi S I *Nanotechnology* **30** 204001 (2019)
84. Zurita-Sánchez J R *Phys. Rev. Res.* **1** 033064 (2019)
85. Savinov V et al. *Commun. Phys.* **2** 69 (2019)
86. Baryshnikova K V et al. *Adv. Opt. Mater.* **7** 1801350 (2019)
87. Gupta M, Singh R *Rev. Phys.* **5** 100040 (2020)
88. Li Y et al. *Nanophotonics* **9** 3575 (2020)
89. Rupp R *Phys. Rev. B* **11** 2871 (1975)
90. Rupp R *JOSA* **71** 755 (1981)
91. Tribelsky M I et al. *Phys. Rev. Lett.* **100** 043903 (2008)
92. Miroshnichenko A E et al. *Opt. Photonics News* **19** (12) 48 (2008)
93. Tribelsky M I et al. *Phys. Rev. B* **94** 121110 (2016)
94. Mishchenko M *Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory, Measurements, and Applications* (San Diego: Academic Press, 2000)
95. Papasimakis N et al. *Nat. Mater.* **15** 263 (2016)
96. Kildishev A V, Boltasseva A, Shalaev V M *Science* **339** 1232009 (2013)
97. Yu M, Capasso F *Nat. Mater.* **13** 139 (2014)
98. Cui T J et al. *Light Sci. Appl.* **3** e218 (2014)
99. Kabashin A V et al. *Adv. Funct. Mater.* **29** 1902692 (2019)
100. Feng T et al. *Phys. Rev. Appl.* **13** 021002 (2020)

101. Maheu B, Gouesbet G, Grehan G *J. Opt.* **19** 59 (1988)
102. Gouesbet G, Grehan G, Maheu B *J. Opt.* **19** 35 (1988)
103. Nieminen T, Rubinsztein-Dunlop H, Heckenberg N *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* **79–80** 1005 (2003)
104. Abramowitz M, Stegun I A, Romer R H *HandBook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (American Association of Physics Teachers, 1988)

Resonant scattering of electromagnetic waves by small metal particles

M.I. Tribelsky^(1,2,a), A.E. Miroschnichenko⁽³⁾

⁽¹⁾ Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Leninskie gory 1, str. 2, 119991 Moscow, Russian Federation

⁽²⁾ National Engineering Physics Institute MEPhI, Engineering and Physics Institute of Biomedicine, Kashirskoe shosse 31, 115409 Moscow, Russian Federation

⁽³⁾ School of Engineering and Information Technology, University of New South Wales (UNSW), Canberra, Australia

E-mail: ^(a) mitribel@gmail.com

This review is devoted to a discussion of new (and often unexpected) aspects of the old problem of elastic light scattering by small metal particles, whose size is comparable to or smaller than the thickness of the skin layer. The main focus is on elucidating the physical grounds for these new aspects. It is shown that, in many practically important cases, the scattering of light by such particles, despite their smallness, may have almost nothing in common with Rayleigh scattering. So-called anomalous scattering and absorption, as well as Fano resonances, including unconventional (associated with the excitation of longitudinal electromagnetic oscillations) and directional Fano resonances, observed only at a small solid angle, are discussed in detail. The review contains a Mathematical Supplement, which includes a summary of the main results of the Mie theory and a discussion of some general properties of scattering coefficients. In addition to being of purely academic interest, the phenomena considered in this review can find wide applications in biology, medicine, pharmacology, genetic engineering, imaging of ultra-small objects, ultra-high-resolution spectroscopy, information transmission, recording, and processing as well as many other applications and technologies.

Keywords: Mie resonances, Fano resonances, subwavelength optics, nanoparticles

PACS numbers: 42.25.Fx, **42.70. – a**, **78.67. – n**

Bibliography — 104 references

Received 17 August 2020, revised 22 January 2021

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **192** (1) 45–68 (2022)

Physics – Uspekhi **65** (1) (2022)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.01.038924>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2021.01.038924>