

Топологическая сверхпроводимость и майорановские состояния в низкоразмерных системах

В.В. Вальков, М.С. Шустин, С.В. Аксенов, А.О. Злотников,
А.Д. Федосеев, В.А. Мицкан, М.Ю. Каган

Обсуждаются свойства сверхпроводящих фаз с нетривиальной топологией и условия их реализации в конденсированных средах, критерии появления в твёрдых телах элементарных возмущений майорановского типа, а также принципы и основанные на них экспериментальные методы идентификации майорановских связанных состояний (МСС). Наряду с хорошо известными моделями цепочки Китаева и сверхпроводящей нанопроволоки (СП) со спин-орбитальным взаимодействием во внешнем магнитном поле рассмотрены модели квазидвумерных материалов, в которых МСС реализуются при наличии неколлинеарного спинового упорядочения. Для СП конечной длины продемонстрирован каскад квантовых переходов при изменении магнитного поля, сопровождающийся сменой фермионной чётности основного состояния. Возникающее при этом аномальное поведение магнетокалорического эффекта может использоваться как средство идентификации МСС. Значительное внимание уделено анализу транспортных характеристик устройств, включающих в себя материалы с нетривиальной топологией. Подробно представлены результаты изучения проводимости кольца Ааронова–Бома, рукава которого соединены СП. Важная особенность данного устройства заключается в появлении резонансов Фано в зависимости контактанса от магнитного поля, когда СП находится в топологически нетривиальной фазе. Установлена связь между характеристиками таких резонансов и пространственной структурой состояния СП, обладающего наименьшей энергией. В рамках $t-J-V$ -модели на треугольной решётке определены условия возникновения МСС в фазе сосуществования киральной $d + id$ сверхпроводимости и 120-градусного спинового упорядочения. При учёте электрон-электронных взаимодействий рассмотрены топологические инварианты низкоразмерных сверхпроводящих материалов с неколлинеарным спиновым упорядочением. Продemonстрировано формирование майорановских мод в областях с нечётным значением топологического $\mathbb{Z}$ -инварианта. Определена пространственная структура этих возмущений в ансамбле фермионов Хаббарда.

Ключевые слова: низкоразмерные системы, майорановские связанные состояния, спин-орбитальное взаимодействие, топологические инварианты, кулоновские корреляции, неколлинеарный магнетизм, топологическая сверхпроводимость, квантовый транспорт

PACS numbers: 71.20.Nr, 71.20.Ps, 71.23.An, 71.70.Ej, **73.23. – b**,
74.20.Rp, 74.25.F–, **74.90. + n**

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.03.038950>

В.В. Вальков^(1,a), М.С. Шустин^(1,b), С.В. Аксенов^(1,c),
А.О. Злотников^(1,d), А.Д. Федосеев^(1,e), В.А. Мицкан^(1,f),
М.Ю. Каган^(2,3,g)

- ⁽¹⁾ Институт физики им. Л.В. Киренского,
Федеральный исследовательский центр
"Красноярский научный центр СО РАН",
Академгородок 50, стр. 38, 660036 Красноярск,
Российская Федерация
⁽²⁾ Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики",
ул. Мясницкая 20, 101000 Москва, Российская Федерация
⁽³⁾ Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН,
ул. Косыгина 2, 119334 Москва, Российская Федерация
E-mail: ^(a) vvv@iph.krasn.ru, ^(b) mshustin@yandex.ru,
^(c) asv86@iph.krasn.ru, ^(d) zlotn@iph.krasn.ru,
^(e) fad@iph.krasn.ru, ^(f) miцkan@iph.krasn.ru,
^(g) kagan@kapitza.ras.ru

Статья поступила 26 мая 2020 г.,
после доработки 18 декабря 2020 г.

Содержание

1. Введение (4).
2. Майорановские моды в цепочке Китаева (5).
2.1. Общие свойства майорановских мод. 2.2. Условия реализации майорановских мод в одномерных системах. Топологические индексы. 2.3. Квантовые топологические переходы и структура основного состояния. 2.4. Эффекты конечных размеров. 2.5. Серия квантовых переходов и калорические аномалии. 2.6. Эффекты кулоновских взаимодействий. 2.7. Эффекты беспорядка и граничных условий.
3. Майорановские моды при учёте спиновых степеней свободы (16).
3.1. Модель сверхпроводящей нанопроволоки. 3.2. Топологические фазы и майорановские моды в сверхпроводящей нанопроволоке. 3.3. Принципы идентификации майорановских связанных состояний и экспериментальные исследования. 3.4. Особенности когерентного транспорта в кольце Ааронова–Бома с мостиком в фазе топологической сверхпроводимости.

© В.В. Вальков, М.С. Шустин, С.В. Аксенов, А.О. Злотников,
А.Д. Федосеев, В.А. Мицкан, М.Ю. Каган 2022

4. Майорановские моды в системах с неколлинеарным магнитным порядком (33).

4.1. Введение в проблему. 4.2. Представления о фазе сосуществования сверхпроводимости и неколлинеарного спинового упорядочения. 4.3. Майорановские моды в фазе сосуществования сверхпроводимости и неколлинеарного магнетизма.

5. Заключение (40).

Список литературы (41).

1. Введение

Топологическими сверхпроводниками называют материалы, в которых сверхпроводящая фаза характеризуется нетривиальным значением топологического индекса, или топологического инварианта (ТИ). Этот инвариант, хорошо известный из теории квантового эффекта Холла [1–4], описывает нелокальные характеристики многочастичной волновой функции электронного ансамбля.

Рассматриваются как материалы, в которых топологическая сверхпроводимость однородна во всём объёме за счёт внутренних взаимодействий и внешних полей, так и системы, в которых эта фаза может быть индуцирована в ограниченной области твердотельной структуры внешними полями и взаимным влиянием материалов, приведённых в контакт (например, эффектом близости).

В данном обзоре основное внимание будет уделено системам, для которых спектр элементарных возбуждений в случае периодических граничных условий (такой спектр часто называют объёмным) обладает щелью во всей зоне Бриллюэна. Подчёркнём, что существует другой класс материалов, обладающих нодальными точками, линиями или поверхностями в зоне Бриллюэна с бесщелевыми возбуждениями, для которых также находится ТИ (подробнее см. [4]). Нетривиальные значения ТИ свидетельствуют о формировании поверхностных или краевых состояний в системе с открытыми граничными условиями. При этом энергии возбуждений, соответствующие реализации таких состояний, лежат в диапазоне значений, меньших величины объёмной щели, вплоть до нуля.

Полезность применения топологической классификации обусловлена двумя факторами. Первый из них связан с возможностью предсказания краевых состояний в материале исходя из результатов относительно простых расчётов. Во-вторых, что особенно важно, значение ТИ не изменяется при возмущениях и варьировании параметров, если щель в спектре возбуждений не обращается в нуль и симметрия гамильтониана остаётся неизменной. Это приводит к тому, что поверхностные состояния в рассматриваемых материалах являются топологически устойчивыми, а топологические переходы с изменением ТИ реализуются, только если в точке перехода объёмный спектр становится бесщелевым.

Из сказанного следует связь между топологическими сверхпроводниками и топологическими изоляторами [5–8]. В обоих классах материалов реализуются щель в объёмном спектре возбуждений и проводящие поверхностные состояния на границах в отсутствие электрического тока в объёме. Более того, без учёта электрон-электронных взаимодействий все топологические материалы могут быть разделены на 10 классов в соответствии с различными комбинациями трёх симметрий:

симметрии по отношению к инверсии времени, электрон-дырочной симметрии и киральной симметрии [9].

Вместе с тем между отмеченными классами топологических материалов имеются и отличия, связанные, например, с механизмом возникновения щели в спектре возбуждений, с существованием экранирующих сверхпроводящих токов в любых сверхпроводниках, а также со структурой краевых возбуждений. В топологических сверхпроводниках таковыми являются майорановские связанные состояния (МСС), образованные парой майорановских мод (ММ). Данные состояния выделяют их специфические свойства, такие как пространственная нелокальность, квантовая запутанность и неабелева обменная статистика ММ. Эти особенности обуславливают интерес к топологической сверхпроводимости с точки зрения перспективы создания защищённых от локальных возмущений кубитов [10].

Для реализации топологических изоляторов необходимым условием является наличие зонной структуры с инверсией зон и спин-орбитального взаимодействия. Для части топологических сверхпроводников с ММ важную роль играет сверхпроводящее спаривание электронов с одинаковыми проекциями спинового момента, т.е. триплетное спаривание [11, 12]. Поскольку имеется ограниченное количество кандидатов в материалы с триплетными спариваниями, важным оказался поиск условий реализации ММ в материалах с синглетным куперовским спариванием фермионов. Оказалось, что включение взаимодействия, индуцирующего смешивание состояний с различными проекциями спинового момента, в определённых условиях (см. разделы 3, 4) способно инициировать ММ. В таких топологических сверхпроводниках нетривиальная топология может быть обусловлена как внутренними взаимодействиями, так и взаимодействиями, появляющимися в результате выращивания гетероструктур.

Следует отметить, что представления о топологических сверхпроводящих системах в значительной степени были сформированы в более ранних исследованиях в области сверхтекучей квантовой жидкости, таких как исследования сверхтекучих А- и В-фаз ^3He . В них исторически впервые была предсказана возможность триплетного р-спаривания [4, 13]. При этом было обнаружено и существование майорановских мод на границе сверхтекучего ^3He -В [14].

Топологические сверхпроводники можно разделить на следующие группы:

1. Киральные сверхпроводники, в которых возникновение сверхпроводящей фазы сопровождается установлением $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ -типа симметрии параметра порядка [15, 16]. Такая фаза может формироваться в $d_{x^2-y^2}$ -сверхпроводниках при нарушении инверсии времени [17], а также в материалах с треугольными слоями [18] и графене [19–21].

2. Сверхпроводники с р-типом или киральным $p_x + ip_y$ -типом симметрии, к которым относят Sr_2RuO_4 [22, 23] (дискуссия о типе симметрии в этом соединении продолжается [24, 25]) и урановые сверхпроводники UGe_2 , UCoGe , URhGe [26, 27].

3. Гетероструктуры, содержащие топологические изоляторы и обычные (нетопологические) сверхпроводники [28, 29].

4. Нецентросимметричные сверхпроводники, в которых вследствие нарушения симметрии пространственной

инверсии могут индуцироваться триплетные спаривания [30].

5. Допированные топологические изоляторы, в которых возникает сверхпроводимость, такие как $\text{Cu}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$ [31, 32]. К этой группе можно отнести и железосодержащие сверхпроводники, такие как $\text{FeTe}_x\text{Se}_{1-x}$ [33], у которых топологические поверхностные состояния формируются в нормальной несверхпроводящей фазе.

6. Гибридные структуры, содержащие полупроводниковые материалы с сильным спин-орбитальным взаимодействием и обычные сверхпроводники [34–37], такие как нанопроволоки InAs или InSb в контакте с нитридом ниобия-титана или алюминием [38, 39].

7. Сверхпроводящие системы с неоднородным (неколлинearным или геликоидальным) магнитным упорядочением, включающие в себя цепочку магнитных наночастиц или атомов на сверхпроводящей подложке [40] и магнитные сверхпроводники [41].

Во всех представленных группах топологических сверхпроводников, кроме первой, возможно формирование ММ. Существует несколько работ, подробно описывающих основные идеи и результаты по топологической сверхпроводимости и ММ в конденсированных средах [42–45].

Данный обзор посвящён детальному описанию условий формирования ММ, а также анализу таких свойств этих краевых состояний в квазиодномерных и двумерных системах, которые можно исследовать в современных экспериментах. Обсуждаются нацеленные на идентификацию ММ методы, основанные на использовании транспортных характеристик устройств с материалами в фазе топологической сверхпроводимости. Большое внимание уделяется наиболее интересным случаям, когда ММ обусловлены спин-орбитальным взаимодействием (см. выше пункт 6) и неоднородным магнитным упорядочением (см. пункт 7). В частности, продемонстрировано, что важным проявлением топологически нетривиальной фазы в различных сверхпроводящих материалах являются осцилляции фермионной чётности основного состояния, которые могут быть обнаружены экспериментально. Также будут рассмотрены текущие проблемы в теории и эксперименте по ММ в топологических сверхпроводниках.

Обзор организован следующим образом. В разделе 2 рассмотрена минимальная модель для описания ММ в топологических сверхпроводниках — модель цепочки Китаева. В разделе 3 описаны свойства ММ и наблюдаемые эффекты в полупроводниковых нанопроволоках с наведённой сверхпроводимостью, а также рассмотрен квантовый транспорт через различные устройства с нанопроволоками в фазе топологической сверхпроводимости. Раздел 4 посвящён обсуждению сверхпроводящих систем с неоднородным магнитным упорядочением, которые имеют глубокую связь с материалами со спин-орбитальным взаимодействием в однородном поле.

2. Майорановские моды в цепочке Китаева

2.1. Общие свойства майорановских мод

Одной из наиболее изученных моделей, предсказывающих существование майорановских мод в твердотельных системах, является модель цепочки Китаева. Её популяр-

ность обусловлена простотой, позволяющей описывать многие эффекты аналитически или в максимально наглядной форме. В этой модели рассматривается ансамбль бесспиновых фермионов на цепочке, способных посредством перескоков между ближайшими узлами осуществлять одномерное движение. Кроме того, считается, что цепочка приведена в контакт с массивным сверхпроводником. Из-за эффекта близости в ней индуцируется межузельное куперовское спаривание р-типа симметрии. Такой тип симметрии соответствует неприводимому представлению, по которому преобразуется сверхпроводящий параметр порядка при преобразованиях из группы поворотов вокруг оси, перпендикулярной цепочке. Поскольку цепочка находится в материальном контакте с термостатом, при описании статистических свойств системы используется большой канонический ансамбль. Поэтому в качестве дополнительного независимого параметра входит химический потенциал.

Гамильтониан модели цепочки Китаева имеет вид

$$H_K = \sum_{l=1}^N (\epsilon - \mu) a_l^\dagger a_l - t \sum_{l=1}^{N-1} (a_l^\dagger a_{l+1} + a_{l+1}^\dagger a_l) + \sum_{l=1}^{N-1} (\Delta a_l a_{l+1} + \Delta^* a_{l+1}^\dagger a_l^\dagger). \quad (1)$$

Первые два слагаемых гамильтониана учитывают одноузельную энергию фермионов ϵ , отсчитанную от химического потенциала μ , и перескоки фермионов между ближайшими узлами цепочки. Интенсивность перескоков определяется параметром t . Сверхпроводящий параметр порядка обозначен посредством $\Delta = |\Delta| \exp(i\theta)$. Следуя работе [12], перейдём в гамильтониане (1) к майорановским операторам:

$$\begin{aligned} \gamma_{lA} &= \exp\left(\frac{i\theta}{2}\right) a_l + \exp\left(-\frac{i\theta}{2}\right) a_l^\dagger, \\ \gamma_{lB} &= i \left[\exp\left(-\frac{i\theta}{2}\right) a_l^\dagger - \exp\left(\frac{i\theta}{2}\right) a_l \right], \end{aligned} \quad (2)$$

с антикоммутиационными соотношениями

$$\{\gamma_{lA}, \gamma_{l'B}\} = 0, \quad \{\gamma_{lA}, \gamma_{l'A}\} = \{\gamma_{lB}, \gamma_{l'B}\} = 2\delta_{ll'}. \quad (3)$$

В представлении майорановских операторов гамильтониан (1) с точностью до постоянных членов определяется выражением

$$H_K = \frac{i}{2} (\epsilon - \mu) \sum_{l=1}^N \gamma_{lA} \gamma_{lB} + \frac{i}{2} \sum_{l=1}^{N-1} [(t + |\Delta|) \gamma_{lB} \gamma_{l+1A} - (t - |\Delta|) \gamma_{lA} \gamma_{l+1B}]. \quad (4)$$

На рисунке 1 приведена иллюстрация одноузельных и межузельных связей между майорановскими операторами. При выборе параметров $\epsilon - \mu = 0$, $|t| = |\Delta|$ отличным от нуля остаётся только одно из двух слагаемых в квадратных скобках под знаком второй суммы в выражении (4): первое при $t > 0$, второе при $t < 0$.

В этом разделе ограничимся рассмотрением случая $t > 0$, в котором гамильтониан (4) принимает простой вид:

$$H_K = it \sum_{l=1}^{N-1} \gamma_{lB} \gamma_{l+1A}. \quad (5)$$

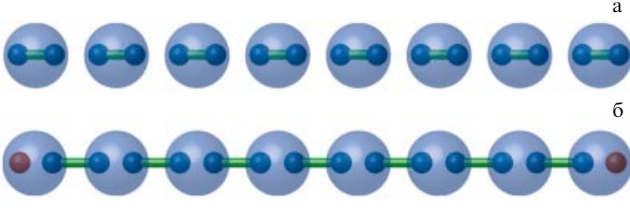


Рис. 1. (В цвете онлайн.) Схематическое изображение слагаемых гамильтониана (4) при (а) $t = |A| = 0$, $\mu \neq 0$ (тривиальный случай) и (б) $\mu = 0$, $t = |A|$ (нетривиальный случай). Большие кружки отвечают узлам l , малые — операторам γ_{lA} , γ_{lB} . Пары операторов, входящих в (4) с ненулевыми коэффициентами, связаны горизонтальными отрезками.

Существенно, что в данную форму не входят операторы γ_{lA} и γ_{lB} . Введение фермиевских операторов

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2}(\gamma_{NB} + i\gamma_{lA}), \\ \alpha_m &= \frac{1}{2}(\gamma_{mB} + i\gamma_{m+1A}), \quad m = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (6)$$

позволяет получить диагональную форму гамильтониана цепочки:

$$H_K = -t(N-1) + \varepsilon_0 \alpha_0^\dagger \alpha_0 + 2t \sum_{m=1}^{N-1} \alpha_m^\dagger \alpha_m, \quad \varepsilon_0 = 0. \quad (7)$$

Отсюда следует, что N возбуждённых состояний цепочки с одной квазичастицей описываются векторами гильбертова пространства

$$|\tilde{0}\rangle = \alpha_0^\dagger |0\rangle, \quad |m\rangle = \alpha_m^\dagger |0\rangle, \quad m = 1, 2, \dots, N-1. \quad (8)$$

В выражениях (8) вектор $|0\rangle$ соответствует многочастичной функции основного состояния цепочки ($\alpha_0 |0\rangle = 0 |0\rangle$, $\alpha_m |0\rangle = 0 |0\rangle$). Операторы $\alpha_m^\dagger$ порождают квазичастицы с энергией $2t$. Отсутствие зависимости энергии таких квазичастиц от их номера связано с локализацией возбуждений на паре соседних узлов цепочки.

Особого внимания заслуживает состояние $|\tilde{0}\rangle$, энергия которого совпадает с энергией основного состояния ($E_{\tilde{0}} = E_0$), поскольку $\varepsilon_0 = 0$. Отщеплённость значения энергии $\varepsilon_0 = 0$ от энергетического спектра других квазичастиц связана с особой структурой состояния $|\tilde{0}\rangle$. Для демонстрации этого утверждения введём структурные характеристики $F_\pm(l)$ состояния $|\tilde{0}\rangle$, определяемые как зависящие от номера узла суперпозиции амплитуд вероятностей рождения электрона и дырки при переходе системы из основного состояния в рассматриваемое возбуждённое состояние,

$$F_\pm(l) = \langle \tilde{0} | (a_l^\dagger \pm a_l) | 0 \rangle. \quad (9)$$

Принимая во внимание представление $\gamma_{NB} = \alpha_0^\dagger + \alpha_0$, $\gamma_{lA} = i(\alpha_0^\dagger - \alpha_0)$, получаем, что введённые структурные характеристики обладают дельтаобразной зависимостью от номера узла:

$$F_+(l) = i\delta_{l1}, \quad F_-(l) = -i\delta_{lN}. \quad (10)$$

Такая зависимость говорит о том, что при формировании состояния $|\tilde{0}\rangle$ изменения в структуре многочастичной функции основного состояния $|0\rangle$ происходят только на

первом и последнем узлах цепочки. Заметим, что эта локализованная трансформация порождается майорановскими операторами γ_{lA} и γ_{lB} .

Ввиду этого говорят, что рассмотренное возбуждённое состояние можно ассоциировать с майорановскими модами, волновые функции которых локализованы на краях цепочки. Поскольку эти моды реализуются одновременно, для состояния, описываемого вектором $|\tilde{0}\rangle$, говорят о возникновении майорановского связанного состояния (МСС). Остановимся на данном вопросе подробнее.

Для представления возбуждений фермиевского типа в терминах майорановских мод, а также МСС введём самосопряжённые операторы $b'_m = (b'_m)^\dagger$, $b''_m = (b''_m)^\dagger$ и запишем их в виде разложения по майорановским операторам γ_{lA} и γ_{lB} :

$$b'_m = \alpha_m^\dagger + \alpha_m = \sum_{l=1}^N w_{lm} \gamma_{lA}, \quad b''_m = i(\alpha_m^\dagger - \alpha_m) = \sum_{l=1}^N z_{lm} \gamma_{lB}. \quad (11)$$

Нетрудно установить связь коэффициентов разложения w_{lm} и z_{lm} с коэффициентами u - v -преобразования Боголюбова:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \sum_{l=1}^N (u_{lm} a_l + v_{lm} a_l^\dagger), \\ w_{lm} &= |u_{lm}| + |v_{lm}|, \quad z_{lm} = |u_{lm}| - |v_{lm}|. \end{aligned} \quad (12)$$

В представлении операторов b'_m и b''_m гамильтониан выражается в виде

$$H_K = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \varepsilon_m + \frac{i}{2} \sum_{m=1}^N \varepsilon_m b'_m b''_m. \quad (13)$$

Поскольку коэффициенты u_{lm} и v_{lm} описывают пространственное поведение электроно- и дырочноподобных волновых функций фермиевских квазичастиц, по аналогии можно считать, что коэффициенты w_{lm} и z_{lm} характеризуют распределение в пространстве волновых функций мод, ассоциированных с операторами b'_m и b''_m соответственно. Указанные коэффициенты определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} -\mu z_{lm} - (t + |A|) z_{l-1,m} - (t - |A|) z_{l+1,m} &= \varepsilon_m w_{lm}, \\ \mu w_{lm} + (t - |A|) w_{l-1,m} + (t + |A|) w_{l+1,m} &= \varepsilon_m z_{lm}. \end{aligned} \quad (14)$$

Проанализируем важный случай, в котором фермиевское возбуждение, порождаемое оператором $\alpha_0 = b'_0 + i b''_0$, характеризуется пространственно непрерывными распределениями w_{l0} и z_{l0} , локализованными вблизи левого и правого краёв цепочки соответственно. Иными словами, предположим, что имеются множества узлов $\{l_L\}$ ($\{l_R\}$) вблизи левого (правого) краёв цепочки, такие что $\{l_L: w_{l_L,0} \neq 0, z_{l_L,0} = 0\}$ и $\{l_R: z_{l_R,0} \neq 0, w_{l_R,0} = 0\}$. Отсюда, в частности, следует, что $w_{l0} z_{l0} = 0$ для каждого узла l . В этом случае говорят, что фермиевский оператор $\alpha_0 = b'_0 + i b''_0$ описывает майорановское связанное состояние, состоящее из пары майорановских мод, описываемых операторами b'_0 и b''_0 , волновые функции которых не перекрываются. Из рассмотрения системы (14) видно, что такое решение может реализоваться только для моды с нулевой энергией возбуждения, $\varepsilon_0 = 0$. В частности, при параметрах $\mu = 0$, $t = A$, сравнивая (7) и (11), для нулевой моды получаем

$w_{l0} = \delta_{l,1}$, $z_{l0} = \delta_{l,N}$. Последнее является математическим выражением факта локализации ММ строго на крайних узлах цепочки. Ввиду предельного характера локализации такую точку пространства параметров цепочки Китаева будем называть "особой". Для неё ММ со строго нулевой энергией возбуждения реализуются для открытой цепочки произвольной длины. При незначительном изменении параметров относительно особой точки в системе по-прежнему будут реализовываться краевые моды. Их энергия возбуждения, вообще говоря, отличная от нуля, экспоненциально убывает при увеличении длины цепочки, $\varepsilon_0 \sim \exp(-N)$. При увеличении числа узлов N степень перекрытия распределений w_{l0} и z_{l0} экспоненциально уменьшается, исчезая в пределе $N \rightarrow \infty$, приводя к формированию пары ММ и одного МСС. Критерий реализации таких возбуждений обсуждается в разделе 2.2.

Таким образом, локализация волновых функций ММ на противоположных краях цепочки автоматически приводит к тому, что энергия МСС стремится к нулю. Это обуславливает тенденцию вырождения энергий многочастичных состояний системы, относящихся к секторам гильбертова пространства с различной фермионной чётностью. Здесь и далее собственные значения P оператора фермионной чётности $\mathbf{P}$ многочастичного состояния считаются положительными (отрицательными), $P = 1(-1)$, если это состояние описывается суперпозицией парциальных вкладов с чётным (нечётным) числом фермионов. С точки зрения квантовых вычислений важно, что условие $w_{l0}z_{l0} = 0$ гарантирует устойчивость волновой функции кубита, построенного на таких состояниях,

$$|\Psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle, \quad \mathbf{P}|0\rangle = |0\rangle, \quad \mathbf{P}|1\rangle = -|1\rangle,$$

к локальным внешним возмущениям, описываемым одночастичным оператором $f = \sum_{l=1}^N f_l a_l^+ a_l$. Так, условие того, что локальные возмущения не изменяют относительную фазу состояния кубита, может быть представлено в виде

$$\delta f = \langle 0|f|0\rangle - \langle 1|f|1\rangle = \sum_{l=1}^N f_l w_{l0} z_{l0} = 0.$$

Видно, что условие пространственной разнесённости майорановских мод автоматически приводит к реализации в системе устойчивого к декогеренции кубита. Такая особенность является важным фактором рассмотрения нанопроволок с ММ в качестве перспективных объектов элементной базы квантовых вычислений. Отметим, что в случае $f_l = \text{const}$ условие устойчивости относительной фазы $\delta f = 0$ совпадает с условием электронейтральности МСС.

Часто встречаются утверждения, что ММ описываются самосопряжёнными операторами b' и b'' с майорановскими антикоммутационными соотношениями, тогда как фермиевский оператор $\alpha_0 = b' + ib''$ описывает майорановское связанное состояние. Для МСС $\varepsilon_0 = 0$, $[H, \alpha_0] = 0$ и, поскольку операторы b' и b'' находятся из системы (14) независимо, каждый из них коммутирует с гамильтонианом. Более того, вследствие одночастичного характера майорановских мод операторы последних антикоммутируют с оператором фермионной чётности $\mathbf{P}$.

Сказанное выше определяет свойства майорановских операторов b' и b'' :

$$b^2 = 1, \quad [b, H] = 0, \quad \{b, \mathbf{P}\} = 0, \quad \{b', b''\} = 0, \quad (15)$$

которые часто закладываются в качестве базовых при описании ММ в фермиевских системах с электрон-электронным взаимодействием, когда структура элементарных возбуждений приобретает более сложный характер [46–49] (см. также раздел 2.5).

Для систем, описываемых квадратичными по фермиевским операторам гамильтонианами, задача о поиске МСС сводится к нахождению нулевого собственного значения матрицы Боголюбова–де Жена, связанной с гамильтонианом системы выражением

$$H = \Psi^+ \hat{H}_{\text{BG}} \Psi, \quad \Psi = (a_1, a_2, \dots, a_{\tilde{N}}, a_1^+, a_2^+, \dots, a_{\tilde{N}}^+)^T, \quad (16)$$

$$\hat{H}_{\text{BG}} = \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ -\hat{B}^* & -\hat{A}^* \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \hat{A}^+, \quad \hat{B} = -\hat{B}^T.$$

Условимся обозначать буквами с надстрочным знаком $\hat{}$ матрицы операторов, определённых в пространстве одночастичных состояний, а также матрицы функций Грина. В (16) размерности матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$ равны $\tilde{N} = Nn_0$, где N — число узлов в цепочке, n_0 — число внутренних степеней свободы, связанных с одним узлом.

Для модели цепочки Китаева фермионы — бесспиновые, поэтому $\tilde{N} = N$. Ненулевые элементы матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеют вид

$$\hat{A}_{n,n} = \epsilon - \mu, \quad \hat{A}_{n,n+1} = -t, \quad \hat{B}_{n,n+1} = -\Delta. \quad (17)$$

Матрица Боголюбова–де Жена $\hat{H}_{\text{BG}}$ обладает свойством

$$\{\hat{H}_{\text{BG}}, \hat{C}\} = 0, \quad \hat{C} = \hat{A}K, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{I} \\ \hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где $\hat{I}$ — единичная матрица размерностью $\tilde{N} \times \tilde{N}$, K — оператор комплексного сопряжения. Прямым следствием свойства (18) является то, что если вектор $\psi_m = (u, v)_m^T$ — собственный вектор матрицы $\hat{H}_{\text{BG}}$ с собственным значением ε_m , то сопряжённый вектор $\bar{\psi}_m = \hat{C}\psi_m = (v^*, u^*)_m^T$ также будет собственным вектором $\hat{H}_{\text{BG}}$, но отвечающим собственному значению $-\varepsilon_m$. Компоненты векторов ψ_m совпадают с $u-v$ -коэффициентами Боголюбова (12):

$$(\psi_m)_n = u_{nm}, \quad n = 1, \dots, \tilde{N}, \quad (19)$$

$$(\psi_m)_n = v_{nm}, \quad n = \tilde{N} + 1, \dots, 2\tilde{N},$$

которые описывают электро- и дырочноподобные свойства фермиевского возбуждения. При этом положительные собственные значения матрицы $\hat{H}_{\text{BG}}$ определяют энергии ε_m фермиевских возбуждений. В соответствии со сказанным свойство (18) определяет *электрон-дырочную симметрию* гамильтониана (16).

Модель цепочки Китаева (1) обладает эффективной симметрией относительно обращения времени и относится к классу BDI известной симметричной классификации. Такой класс симметрий допускает реализацию в системе нескольких пар ММ: описываемых оператором $\alpha_j = b'_j + ib''_j$ квазичастичных возбуждений, для которых

операторы b'_j и b''_j соответствуют ММ с неперекрывающимися волновыми функциями. В работах [50–52] показано, что для реализации нескольких пар ММ необходимо учитывать в модели цепочки Китаева перескоки и сверхпроводящее спаривание не только между ближайшими узлами. Вместе с тем установлено, что обобщение системы для случая степенного закона убывания амплитуд перескоков и аномальных спариваний может привести к нарушению топологической классификации, ослаблению соответствия между свойствами объёмных и краевых состояний ("bulk-boundary correspondence") (см. раздел 2.2), а также к индуцированию новых квазичастиц, называемых в литературе дираковскими фермионами [53–55].

2.2. Условия реализации майорановских мод в одномерных системах. Топологические индексы

Анализ условий формирования ММ в открытой цепочке на основе решения задачи на собственные значения матрицы Боголюбова–де Жена (16) из-за её большой размерности приводит к математическим затруднениям. В связи с этим полезным является предложенный в работе [12] критерий, согласно которому устанавливается соответствие между условиями реализации ММ в открытых цепочках и характеристиками цепочек в замкнутой геометрии (bulk-boundary correspondence), для которых намного проще проводить не только численные, но и аналитические вычисления.

Идея предложенного критерия, раскрывающая его физический смысл, следующая: рассмотрим открытую цепочку длиной $N = N_1 + N_2$, достаточно большую, чтобы в ней могла реализоваться пара ММ, локализованных на противоположных концах. Затем наложим на эту цепочку периодические граничные условия и вычислим индекс фермионной чётности (ФЧ) её основного состояния, который мы условно обозначим как $P = P(H(N_1 + N_2))$. Далее разделим эту цепочку на две замкнутые цепочки длиной N_1 и N_2 и вычислим индекс ФЧ основного состояния новой системы, который факторизуется по индексам ФЧ отдельных цепочек: $P = P(H(N_1))P(H(N_2))$. Тогда, если в изначальной цепочке реализовывались ММ, то ФЧ основного состояния изменится, а в случае отсутствия ММ в изначальной системе останется той же самой. Математически этот критерий формулируется с помощью введения числа Майорана $\mathcal{M}$, принимающего значения $\mathcal{M} = \pm 1$:

$$P(H(N_1 + N_2)) = \mathcal{M} P(H(N_1)) P(H(N_2)). \quad (20)$$

Если $\mathcal{M} = -1$, то в длинных проволоках реализуются ММ. Из представленного определения следует, что для цепочки с чётным числом узлов число Майорана и индекс ФЧ замкнутой нанопроволоки совпадают. Отметим, что при выводе (20) предполагалось, что длины N_1 и N_2 открытых цепочек, полученных при разрезании исходной, достаточно велики, чтобы в них могли реализовываться ММ с неперекрывающимися волновыми функциями. Однако, как показано ниже, при конкретных вычислениях $\mathcal{M}$ величины N_1 и N_2 не фигурируют.

Фактически число Майорана $\mathcal{M}$ представляет собой $\mathbb{Z}_2$ -топологический инвариант одномерных сверхпроводящих систем с нарушенной инвариантностью относительно обращения времени (квадратичные гамильтонианы класса симметрии D). При наличии такой симметрии,

описываемой антиунитарным оператором (класс BDI, случай модели (1)), в качестве топологического инварианта выступает первое число Черна $\mathcal{C}$, принимающее целочисленные значения и являющееся $\mathbb{Z}$ -инвариантом. Индекс $\mathcal{M}$ позволяет предсказать существование ММ в открытой системе симметричного класса D на основе её анализа в замкнутой геометрии. Аналогично индекс $\mathcal{C}$ позволяет определить существование и число МСС в системах класса симметрии BDI. При этом в последнем случае $\mathcal{M} = (-1)^{\mathcal{C}}$ [56–58].

Для вычисления числа Майорана (20) и демонстрации последнего соотношения целесообразно перейти в гамильтониане Боголюбова–де Жена (16) от координатного представления в энергетическое. Это можно сделать посредством унитарного преобразования, задаваемого матрицей $\hat{U}$, в пространстве одночастичных состояний:

$$\begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^+ \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} a \\ a^+ \end{pmatrix}, \quad \hat{U} \hat{H} \hat{U}^+ = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{\varepsilon} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Здесь $\hat{\varepsilon}$ — диагональная матрица размерностью $\tilde{N} \times \tilde{N}$, положительные элементы которой определяют энергии фермиевских возбуждений $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{\tilde{N}-1}$. Векторами-строками матрицы унитарного преобразования $\hat{U}$, отвечающими энергиям ε_m , являются векторы ψ_m (19). Аналогичный переход следует осуществить в представлении майорановских операторов:

$$\begin{aligned} \gamma_{nA} &= \exp\left(-\frac{i\theta}{2}\right) a_n^+ + \exp\left(\frac{i\theta}{2}\right) a_n, \\ \gamma_{nB} &= i \left[\exp\left(-\frac{i\theta}{2}\right) a_n^+ - \exp\left(\frac{i\theta}{2}\right) a_n \right], \\ b'_m &= \alpha_m^+ + \alpha_m, \quad b''_m = i(\alpha_m^+ - \alpha_m), \end{aligned}$$

определённых в узельном и энергетическом представлениях соответственно:

$$\begin{pmatrix} \gamma_A \\ \gamma_B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b' \\ b'' \end{pmatrix} = \hat{W} \begin{pmatrix} \gamma_A \\ \gamma_B \end{pmatrix}, \quad \hat{W} = \hat{R}^+(\theta=0) \hat{U} \hat{R}(\theta), \quad (22)$$

$$\hat{R}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{I} \exp\left(-\frac{i\theta}{2}\right) & i\hat{I} \exp\left(-\frac{i\theta}{2}\right) \\ \hat{I} \exp\left(\frac{i\theta}{2}\right) & -i\hat{I} \exp\left(\frac{i\theta}{2}\right) \end{pmatrix},$$

где по-прежнему $\hat{I}$ — единичная матрица размерностью $\tilde{N} \times \tilde{N}$, матрица $\hat{W}$ является действительной и ортогональной, $\hat{W}^{-1} = \hat{W}^T$. Тогда индекс ФЧ P основного состояния многочастичной системы может быть вычислен как [12]

$$P = \text{sign}(\det \hat{W}) = \text{sign}(\det \hat{U}). \quad (23)$$

Отметим, что формула (23) применима для расчёта индекса ФЧ цепочек с произвольными граничными условиями. В определении $\mathcal{M}$ (20) фигурируют периодические граничные условия, поэтому для его вычисления целесообразно перейти в представление квазиимпульсов:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^N a_l \exp(-ikl), \quad k = \frac{2\pi s}{N}, \quad s = 0, \dots, N-1, \quad (24)$$

$$H = \sum_k H(k), \quad H(k) = \frac{1}{2} (a_k^+, a_{-k}) \hat{H}_{\text{BG}}(k) \begin{pmatrix} a_k \\ a_{-k}^+ \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\hat{H}_{\text{BG}}(k) = \begin{pmatrix} \hat{A}_k & \hat{B}_k \\ -\hat{B}_k^* & -\hat{A}_k^* \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_k = \hat{A}_k^+, \quad \hat{B}_k = -\hat{B}_{-k}^*.$$

Отметим ряд общих свойств одночастичных гамильтонианов, а их проявления в конкретных моделях рассмотрим в дальнейшем. Матрица Боголюбова–де Жена в квазиимпульсном представлении $\hat{H}_{\text{BG}}(k)$ обладает свойством

$$\hat{\Lambda} \hat{H}_{\text{BG}}(k) \hat{\Lambda} = -\hat{H}_{\text{BG}}^*(-k), \quad (26)$$

где формальный вид матрицы $\hat{\Lambda}$ тот же, что в (18). Поэтому диагонализующие $\hat{H}_{\text{BG}}(k)$ матрицы $\hat{U}_k$ могут быть представлены в виде

$$\hat{U}_k^+ \hat{H}_{\text{BG}}(k) \hat{U}_k = \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_k & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{\epsilon}_{-k} \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_k = \begin{pmatrix} \hat{u}_k & \hat{v}_{-k}^* \\ \hat{v}_k & \hat{u}_{-k}^* \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Из (27) следует, что $\hat{U}_k = \hat{\Lambda} \hat{U}_{-k}^* \hat{\Lambda}$, поэтому $\det \hat{U}_k = (\det \hat{U}_{-k})^*$. Следовательно, фигурирующее в (23) выражение (при чётном числе узлов в цепочке)

$$\det \hat{U} = \prod_{-\pi < k \leq \pi} \det \hat{U}_k, \quad (28)$$

можно разбить на две части. Первая часть представляет собой произведение множителей $\det \hat{U}_k$, для которых $k \neq -k$, вторая часть определяется произведением сомножителей для тех значений квазиимпульса (симметричные точки зоны Бриллюэна), для которых $k = -k \doteq K$.

Для отмеченных цепочек с чётным числом узлов имеется пара симметричных точек $K = 0, \pi$. Поэтому с учётом равенства $\det \hat{U}_k = (\det \hat{U}_{-k})^*$ произведение $\prod_{k \neq -k} \det \hat{U}_k$ будет действительным и положительным. Таким образом, число Майорана можно определить следующим образом:

$$\mathcal{M} = \text{sign} \frac{\det \hat{U}_0}{\det \hat{U}_\pi} = \frac{\det \hat{U}_0}{\det \hat{U}_\pi}. \quad (29)$$

Такой вид позволяет установить связь числа Майорана квантовой проволоки с фазой Зака–Берри [59, 60] для зонных состояний, которая имеет топологическую природу. С этой целью рассмотрим известное соотношение:

$$\frac{d}{dk} \ln (\det U_k) = -i \text{Tr} \hat{O}_k, \quad (30)$$

$$\hat{O}_k = \hat{U}_k^{-1} \frac{d\hat{U}_k}{dk} \Rightarrow \frac{\det \hat{U}_0}{\det \hat{U}_\pi} = \exp \left(-i \int_0^\pi \text{Tr} \hat{O}_k dk \right).$$

Из определения матрицы U_k в (27), учитывая свойство $U_k^{-1} = U_k^+$ и применяя несколько простых преобразований, выражение для формы $\text{Tr} \hat{O}_k$ можно представить в виде

$$\text{Tr} \hat{O}_k = \sum_m i \left[\left(\phi_m^*(k), \frac{d\phi_m(k)}{dk} \right) + (k \rightarrow -k) \right]. \quad (31)$$

Здесь $\phi_m(k)$ представляет собой собственный вектор матрицы U_k , отвечающий квазичастичной ветви спектра

возбуждений с энергией $\varepsilon_m(k) \geq 0$. В сумме по m в (31) фигурируют все такие функции $\phi_m(k)$, которые не могут быть переведены друг в друга операцией электрондырочной симметрии.

Сопоставляя соотношения (29)–(31), получаем искомым вид выражения для числа Майорана:

$$\mathcal{M} = \exp \left[i \int_{-\pi}^{\pi} dk \sum_m \left(\phi_m^*(k), \frac{d\phi_m(k)}{dk} \right) \right] \doteq \exp (i\pi \mathcal{C}). \quad (32)$$

Точки $k = -\pi$ и $k = \pi$ отождествлены, поэтому интегрирование в показателе экспоненты осуществляется по замкнутой кривой от дифференциальной 1-формы, которая представляет собой известную форму связности Берри (Berry connection). Таким образом устанавливается топологическая природа числа Майорана. В дальнейшем набор параметров, отвечающих условиям реализации отрицательного значения $\mathcal{M}$ (а следовательно, условиям реализации ММ в открытых проволоках), мы будем называть топологически нетривиальной областью параметров (ТНОП). При этом будем говорить, что система находится в топологически нетривиальной фазе.

В заключение этого раздела приведём также другую формулу для числа Майорана, более удобную в некоторых случаях при конкретных расчётах [12]:

$$\mathcal{M} = \text{sign} \left[\text{Pf} (\hat{X}(k=0)) \text{Pf} (\hat{X}(k=\pi)) \right]. \quad (33)$$

Здесь $\text{Pf} \hat{X}(K)$ обозначает пфаффиан от кососимметричной матрицы $\hat{X}(k)$, $\hat{X}(k)$ — матрица гамильтониана Боголюбова–де Жена, записанная в представлении майорановских операторов: $a_k = \gamma_{kA} + i\gamma_{kB}$, $a_k^+ = \gamma_{-k,A} - i\gamma_{-k,B}$:

$$\hat{X}(k) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{A}_{k+} + \hat{B}_{k-} & \hat{A}_{k+} - \hat{B}_{k+} \\ \hat{A}_{k+} + \hat{B}_{k+} & \hat{A}_{k-} - \hat{B}_{k-} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$\hat{A}_{k\pm} = \hat{A}_k \pm \hat{A}_{-k}^*, \quad \hat{B}_{k\pm} = \hat{B}_k \pm \hat{B}_{-k}^*.$$

Учитывая свойства $\hat{A}_k$ и $\hat{B}_k$, нетрудно убедиться в том, что матрица $\hat{X}(k)$ является действительной и антисимметричной для точек зоны Бриллюэна $k = K = 0, \pi$.

2.3. Квантовые топологические переходы и структура основного состояния

Воспользуемся формулами (29)–(33) и вычислим число Майорана в модели Китаева. С этой целью применим выражение (32) и найдём фазу Зака–Берри в замкнутой геометрии. Матрица Боголюбова–де Жена $\hat{H}_{\text{BG}}(k)$ в квазиимпульсном представлении (25) имеет вид

$$\hat{H}_{\text{BG}}(k) = \begin{pmatrix} \xi_k & \Delta_k \exp(i\theta') \\ \Delta_k \exp(-i\theta') & -\xi_k \end{pmatrix}, \quad (35)$$

$$\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}, \quad \xi_k = -\mu - 2t \cos k, \quad \Delta_k = 2|\Delta| \sin k.$$

Перейдём к новому представлению через матрицу $\hat{R}$:

$$\hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{i\theta'}{2}\right) & i \exp\left(\frac{i\theta'}{2}\right) \\ \exp\left(-\frac{i\theta'}{2}\right) & -i \exp\left(\frac{i\theta'}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{BG}}(k) &\rightarrow \hat{\tilde{H}}_{\text{BG}}(k) = \hat{R} \hat{H}_{\text{BG}}(k) \hat{R}^+ = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \xi_k + i\Delta_k \\ \xi_k - i\Delta_k & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (36)$$

Электронные и дырочные компоненты блоховских амплитуд $\phi_+(k)$, отвечающих положительной ветви спектра боголюбовских квазичастиц с энергией $\varepsilon_k = (\xi_k^2 + \Delta_k^2)^{1/2}$, в таком представлении имеют вид

$$\phi_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon_k} \begin{pmatrix} \xi_k + i\Delta_k \\ \varepsilon_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \exp(i\beta_k) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

В выражении (37) введён угол β_k между эффективным вектором $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$ и единичным ортом двумерной декартовой системы координат:

$$\begin{aligned}\beta_k &= \arctan \frac{h_y}{h_x}, \quad h_x = \frac{\xi_k}{2t} = -\frac{\mu}{2t} - \cos k, \\ h_y &= \frac{\Delta_k}{2t} = \frac{|\Delta|}{t} \sin k. \end{aligned} \quad (38)$$

Набег фазы Зака–Берри $\Delta\Phi_{\text{ЗБ}}$ при адиабатической эволюции системы (такой, что квазиимпульс изменяется вдоль замкнутого контура в первой зоне Бриллюэна) определяется изменением данного угла:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_{\text{ЗБ}} &= i \int_{-\pi}^{\pi} dk \left(\phi_+^*(k), \frac{d\phi_+(k)}{dk} \right) = \frac{1}{2} \oint d\beta_k = \\ &= \frac{1}{2|h|^2} \int_{-\pi}^{\pi} dk \left(h_y \frac{dh_x}{dk} - h_x \frac{dh_y}{dk} \right) = \frac{\nu}{2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь для полноты введено число кручений ν (winding number). Из рассмотрения выражений (38) и (39) легко понять условия, при которых набег фазы $\Delta\Phi_{\text{ЗБ}}$ при адиабатической эволюции не будет равняться нулю, т.е. условия реализации топологически нетривиальной фазы. Действительно, компоненты вектора $\mathbf{h}$ задают уравнение эллипса:

$$\left(h_x + \frac{\mu}{2t} \right)^2 + \left(\frac{t}{|\Delta|} h_y \right)^2 = 1, \quad (40)$$

имеющего единичную полуось вдоль оси x . Центр эллипса смещён на величину $-\mu/(2t)$ вдоль оси x (рис. 2). Видно, что $\Delta\Phi_{\text{ЗБ}} = \pi$, если начало координат находится в области, ограниченной эллипсом, и $\Delta\Phi_{\text{ЗБ}} = 0$ в противном случае. Первая ситуация реализуется при условии $|\mu| < 2t$. Подставляя результат данного вычисления в (32), получаем условия реализации топологически нетривиальной фазы в модели цепочки Китаева:

$$\mathcal{M} = \begin{cases} \exp(i\pi) = -1, & |\mu| < 2t, \\ \exp(i0) = 1, & |\mu| > 2t. \end{cases} \quad (41)$$

Оба равенства имеют место в случае $|\Delta| \neq 0$. При $|\Delta| = 0$ эллипс вырождается в прямую линию и индекс кручений становится неопределённым. Отметим, что индекс ν определяет хорошо известную в математике степень отображения двумерной плоскости $\{h_x(k), h_y(k)\}$ с выколотым началом координат (при $h_x = h_y = 0$ объёмный спектр бесщелевой) на одномерную сферу: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1$. Гомотопические классы такого отображения характери-

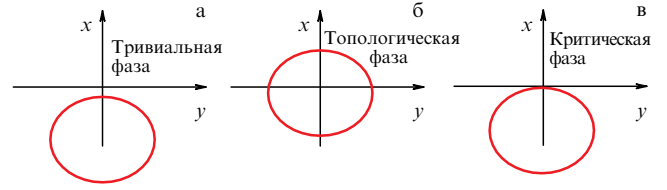


Рис. 2. Схематическое изображение набега фазы Зака–Берри в разных ситуациях: (а) $\nu = 0$ отвечает тривиальной фазе цепочки Китаева, (б) $\nu = 1$ — топологической фазе, (в) ν не определено и отвечает точке топологического квантового фазового перехода.

зуются набором целых чисел $\mathbb{Z}$, которые могут быть соотнесены со значениями $\nu/(2\pi) = \mathcal{C}$. При этом число Майорана определяется чётностью значения $\nu/(2\pi)$, а поэтому является $\mathbb{Z}_2$ -инвариантом.

Таким образом, в цепочке Китаева топологически нетривиальная фаза реализуется при значениях параметров $-2t < \mu < 2t$, $|\Delta| \neq 0$. В этой области параметров в очень длинной открытой цепочке существуют ММ. Из выражения для спектра элементарных возбуждений:

$$\varepsilon_k = \sqrt{(-2t \cos k - \mu)^2 + 4|\Delta|^2 \sin^2 k}, \quad (42)$$

видно, что в точках $\{|\mu| = 2t; k = 0, \pi\}$ закрывается щель в спектре замкнутой цепочки. Поэтому переход из топологически нетривиальной фазы в тривиальную, и наоборот, является квантовым переходом с изменением $\mathbb{Z}_2$ -топологического индекса $\mathcal{M}$. Как отмечалось, при таком переходе меняется ФЧ основного состояния системы.

Для рассмотрения структуры основного состояния и его изменения при топологических квантовых переходах выпишем гамильтониан системы в квазиимпульсном представлении, выделив отдельно слагаемые, отвечающие симметричным значениям квазиимпульса $k = 0, \pi$:

$$\begin{aligned}H_{\text{K}} &= (-2t - \mu)a_0^+ a_0 + (2t - \mu)a_{\pi}^+ a_{\pi} + \\ &+ \sum_{-\pi < k < \pi} \left[\xi_k a_k^+ a_k + \left(\frac{\Delta_k}{2} \exp(i\theta') a_k^+ a_{-k}^+ + \text{h.c.} \right) \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Выделение слагаемых, отвечающих симметричным относительно операции электрон-дырочной симметрии точкам зоны Бриллюэна, связано с тем, что такие слагаемые имеют изначально диагональную форму. Для диагонализации оставшихся слагаемых введём унитарный оператор U :

$$\begin{aligned}U &= \exp \left[\sum_{-\pi < k < \pi} \frac{\beta_k}{2} (\exp(-i\tilde{\theta}) a_{-k}^+ a_k^+ - \exp(i\tilde{\theta}) a_k a_{-k}) \right] = \\ &= \prod_{-\pi < k < \pi} \left[1 + \sin \frac{\beta_k}{2} (\exp(-i\tilde{\theta}) a_{-k}^+ a_k^+ - \exp(i\tilde{\theta}) a_k a_{-k}) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \frac{\beta_k}{2} - 1 \right) (1 - n_k - n_{-k} + n_k n_{-k}) \right], \end{aligned} \quad (44)$$

где $\tilde{\theta} = \theta + (\pi/2)(2 - \text{sign } \Delta_k)$. Тогда гамильтониан H может быть приведён к виду

$$\begin{aligned}H_{\text{K}} &\rightarrow U H_{\text{K}} U^+ = (-2t - \mu)a_0^+ a_0 + (2t - \mu)a_{\pi}^+ a_{\pi} + \\ &+ \sum_{0 < k < \pi} \varepsilon_k \alpha_k^+ \alpha_k + E_0, \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$\alpha_k = Ua_k U^+ = \cos \frac{\beta_k}{2} a_k + \exp(-i\tilde{\theta}) \sin \frac{\beta_k}{2} a_{-k}^+, \quad (46)$$

$$\cos \frac{\beta_k}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{\varepsilon_k}\right)}, \quad \sin \frac{\beta_k}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{\varepsilon_k}\right)}.$$

В подпространстве состояний, имеющих квазиимпульсы $0 < k < \pi$, основное состояние $|\Psi_0\rangle$ гамильтониана (43) может быть получено действием оператора U на состояние квазичастичного вакуума $|0\rangle$:

$$|\Psi_0\rangle = \prod_{-\pi < k < \pi} \left(\cos \frac{\beta_k}{2} + \exp(-i\tilde{\theta}) \sin \frac{\beta_k}{2} a_{-k}^+ a_k^+ \right) |0\rangle. \quad (47)$$

Для определения структуры основного состояния системы в гильбертовом пространстве, содержащем одночастичные состояния с квазиимпульсами $k = 0, \pi$, надо рассмотреть выделенные в (43) слагаемые, отвечающие таким значениям k . Если $\mu < -2t$, то моды с квазиимпульсами $k = 0, \pi$ являются незаполненными. В интервале значений химического потенциала $-2t < \mu < 2t$ заполняется мода с квазиимпульсом $k = 0$. При $\mu > 2t$ оба энергетических состояния с выделенными значениями квазиимпульса заполняются фермионами.

В результате проведённого анализа получаем, что структура основного состояния $|\Psi_{GS}\rangle$ замкнутой цепочки Китаева с чётным числом узлов разделяется на три качественно различных типа, каждый из которых реализуется в своей параметрической области:

$$\begin{aligned} \text{I. } |\mu| < 2t: \quad \Delta\Phi_{ZB} &= \pi, \quad \mathcal{M} = -1, \quad |\Psi_{GS}\rangle = a_0^+ |\Psi_0\rangle. \\ \text{II. } \mu > 2t: \quad \Delta\Phi_{ZB} &= 0, \quad \mathcal{M} = 1, \quad |\Psi_{GS}\rangle = a_\pi^+ a_0^+ |\Psi_0\rangle. \\ \text{III. } \mu < -2t: \quad \Delta\Phi_{ZB} &= 0, \quad \mathcal{M} = 1, \quad |\Psi_{GS}\rangle = |\Psi_0\rangle. \end{aligned} \quad (48)$$

Область I реализации отрицательной ФЧ основного состояния совпадает с ТНОП, для которой в длинной нанопроволоке реализуются ММ.

2.4. Эффекты конечных размеров

Рассмотрим зависимость свойств ММ от размеров цепочки. Так, в работах [12, 61] отмечалось, что в контексте изучения МСС цепочки с открытыми границами и очень большим, но конечным числом узлов принципиально отличаются от бесконечной или полубесконечной цепочки ввиду необходимости одновременного рассмотрения как минимум двух майорановских мод. При рассмотрении конечных открытых цепочек ММ, локализованные на противоположных краях системы, имеют тенденцию к гибридизации, что в большинстве случаев приводит к исчезновению бесщелевых возбуждений. Количественной характеристикой степени перекрытия волновых функций ММ может служить майорановская поляризация $\mathcal{P}$, введённая в работах [93, 94]:

$$\mathcal{P} = \frac{2 \left| \sum_l' u_{l0}^* v_{l0} \right|}{\sum_l' (u_{l0}^2 + v_{l0}^2)} = \frac{\left| \sum_l' (w_{l0}^2 - z_{l0}^2) \right|}{\sum_l' (w_{l0}^2 + z_{l0}^2)}, \quad (49)$$

где w_{l0} и z_{l0} определены в (12). Здесь суммирование ведётся по номерам узлов l , относящихся только к левой

(или только к правой) половине цепочки, что отражено штрихом у знака суммы. Если $\mathcal{P} \simeq 1$, то волновые функции ММ не перекрываются, приводя к формированию квазичастиц с экспоненциально малой энергией возбуждения. В случае $\mathcal{P} < 1$ волновые функции ММ существенно перекрываются. В случае длинных цепочек $\mathcal{P} \rightarrow 1$ во всей ТНОП. При уменьшении N область параметров, для которой $\mathcal{P} \simeq 1$, уменьшается, но лежит в пределах ТНОП. При этом $\varepsilon_0 \sim 1 - \mathcal{P}$. Квазичастичные возбуждения, для которых $\mathcal{P} \simeq 1$, отвечают общепринятым представлениям о МСС, описанным в разделе 2.1.

В работах [61–67] проводилось аналитическое рассмотрение характеристик краевых состояний модели открытой и конечной цепочки Китаева, которое недавно озаглаивалось получением полного аналитического решения задачи на собственные векторы и собственные значения гамильтониана Боголюбова–де Жена (16), (17) такой системы. Показано, что учёт открытой геометрии приводит к осцилляционной зависимости минимальной энергии одночастичных возбуждений от параметров системы и длины цепочки. Данный эффект проявляется в топологически нетривиальной области параметров рассматриваемых систем, и он связан с гибридизацией волновых функций майорановских мод. Также с использованием аналитических методов в работах [61–67] получены условия реализации деструктивной интерференции ММ, согласно которым энергия фермиевского возбуждения строго обращается в нуль в случае конечной цепочки. При этом показано, что обращение в нуль энергии возбуждения сопровождается квантовым фазовым переходом с изменением фермионной чётности основного состояния. Данный эффект может проявляться в измеряемых характеристиках, о чём будет говориться в разделе 2.5. Демонстрировалось, что осцилляции ФЧ являются устойчивыми по отношению к беспорядку и могут проявлять себя в динамических особенностях майорановских связанных состояний. Впоследствии было показано, что гибридизация майорановских мод может реализовываться не только посредством их прямого перекрытия, но и в результате виртуальных процессов туннелирования квазичастиц в массивный сверхпроводник, приведённый в контакт с проволокой [68].

Рассмотрим более подробно одночастичные возбуждения, энергия которых строго обращается в нуль вследствие гибридизации ММ. По аналогии с МСС будем называть майорановскими гибридизационными состояниями краевые моды (в их обобщённом смысле, излагаемом ниже) со строго нулевой энергией возбуждения. Последние реализуются в параметрическом множестве меры нуль, и случае длинных цепочек майорановские гибридизационные состояния вырождаются в МСС. Однако в случае коротких цепочек условия их реализации могут отличаться. К задаче о поиске майорановских гибридизационных состояний в цепочке Китаева удобно подойти, рассмотрев систему уравнений (14) при условии $\varepsilon_0 = 0$:

$$\begin{aligned} -\mu z_{l0} - (t + |A|)z_{l-1,0} - (t - |A|)z_{l+1,0} &= 0, \\ \mu w_{l0} + (t - |A|)w_{l-1,0} + (t + |A|)w_{l+1,0} &= 0, \\ z_{00} = w_{N+1,0} = z_{N+1,0} &= 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Система (50) распадается на две независимые подсистемы для коэффициентов w_{l0} и z_{l0} . При этом симметрия уравнений такова, что $w_{l0} = Cz_{N-l+1,0}$. Решая эту сис-

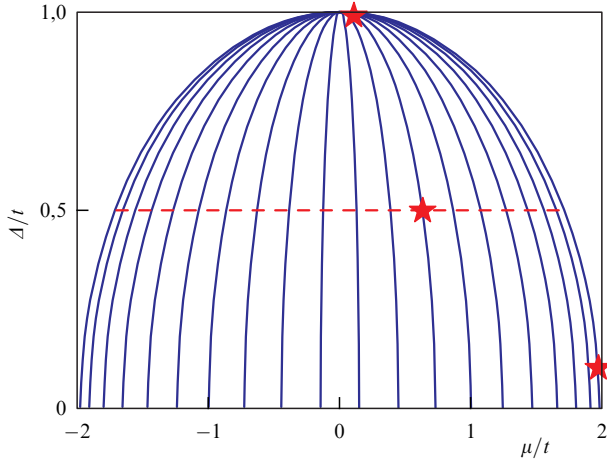


Рис. 3. Линии, определяющие значения химического потенциала и сверхпроводящей щели, при которых существует майорановская мода, для цепочки Китаева с числом узлов $N = 20$.

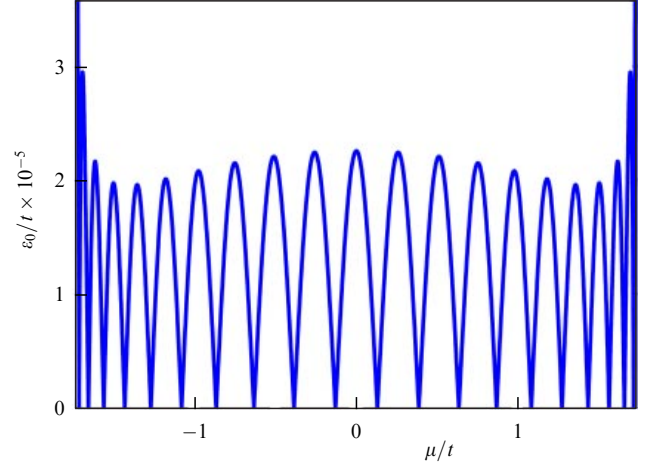


Рис. 4. Зависимость минимальной энергии элементарного возбуждения ε_0 в цепочке Китаева от химического потенциала μ при $N = 20$ и $|\Delta|/t = 0,5$ (штриховая линия на рис. 3).

тему, получим, что возбуждения с нулевой энергией существуют на линиях (рис. 3):

$$\mu = 2\sqrt{t^2 - |\Delta|^2} \cos \phi_m, \quad \phi_m = \frac{\pi m}{N+1}, \quad m = 1, \dots, N. \quad (51)$$

Причём нетривиальные решения будут существовать во всей области параметров $|\Delta|/t > 0$, $\mu = 0$ при нечётном N . Выражение для фермиевского оператора α_0 , отвечающего нулевой моде на линии m , примет вид

$$\alpha_{0,m} = \frac{1}{S_m} \sum_{l=1}^N [r^{l-1} \sin(\phi_m l) (\gamma_{lA} + i\gamma_{N+1-l,B})], \quad (52)$$

где $r = \sqrt{(t - |\Delta|)/(t + |\Delta|)}$, S_m — нормировочный множитель.

Таким образом, в модели Китаева в параметрическом пространстве имеется N линий, в точках которых существуют возбуждения фермиевского типа с нулевой энергией. Все такие линии сходятся в особой точке $\mu = 0$, $t = |\Delta|$. На рисунке 4 приведена зависимость минимальной энергии возбуждения при параметрах, отвечающих штриховой линии на рис. 3. Видно, что при пересечении указанных линий параметров в 20 точках значение ε_0 строго равно нулю, тогда как между такими точками величина ε_0 экспоненциально мала, $\varepsilon_0 \sim r^{-N}$, но конечна.

При движении по особым линиям в параметрическом пространстве (51) тенденция к локализации решений на

краях цепочки сохраняется (рис. 5а), поскольку главную роль в выражении (52) играет экспоненциальный член r^{l-1} . Однако чем меньше становится отношение $|\Delta|/t$, тем меньше степень локализации решения (рис. 5б). При $|\Delta|/t \ll 1$ решение является делокализованным. Наиболее наглядно это видно на крайней кривой $m = 1$, когда максимум суммы модулей коэффициентов $w_{0l}^2 + z_{0l}^2$ приходится на середину цепочки (рис. 5в). Следует отметить, что возникновение делокализованных состояний с нулевой энергией возбуждения также обусловлено краевыми эффектами, так как в замкнутой цепочке при $|\Delta| > 0$ спектр возбуждений имеет щель.

Вообще говоря, здесь мы воспользовались критерием реализации краевых состояний в одномерных системах, предложенным в [69]. Так, состояние, описываемое квазичастичным оператором α_m , является краевым, если для соответствующих u - v -коэффициентов Боголюбова (12),

$$\begin{aligned} u_{lm} &= A_m \exp(-\lambda_m l) + B_m \exp(\lambda_m l), \\ v_{lm} &= C_m \exp(-\chi_m l) + D_m \exp(\chi_m l) \end{aligned} \quad (53)$$

(A_m, B_m, C_m, D_m — постоянные коэффициенты), действительные части показателей экспонент отличны от нуля, $\text{Re } \lambda_m, \text{Re } \chi_m \neq 0$. В противном случае это состояние является некраевым (объёмным). Данный критерий естественным образом обобщается при учёте проекции спина и многозонности системы. Он применим для одномерных (1D) систем любых размеров и при рассмотрении

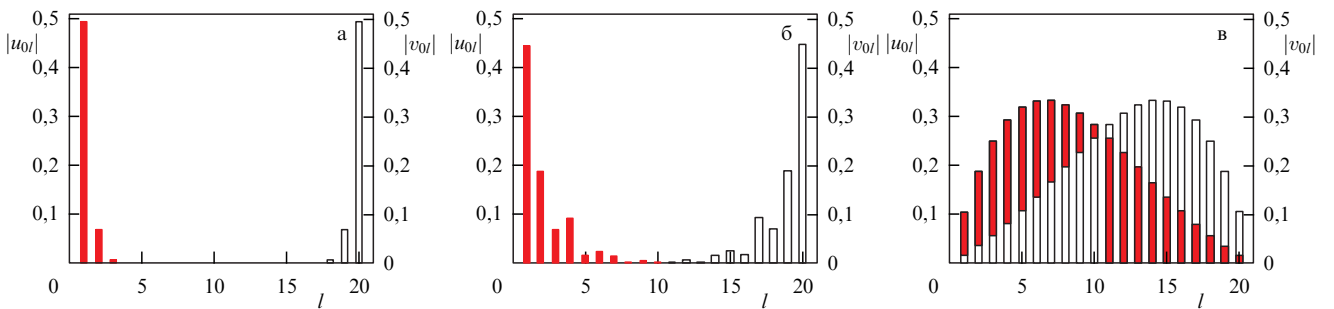


Рис. 5. Пространственные распределения волновых функций майорановских мод при $N = 20$ для значений параметров, отмеченных на рис. 3 звёздами: (а) $|\Delta| = 0,99t$, (б) $|\Delta| = 0,5t$, (в) $|\Delta| = 0,1t$.

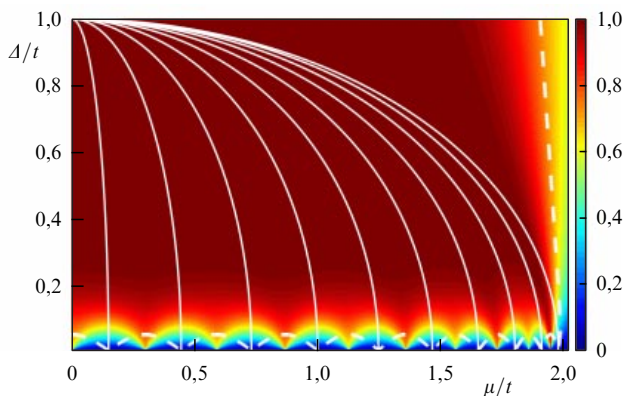


Рис. 6. (В цвете онлайн.) Карта майорановской поляризации $\mathcal{P}$ цепочки Китаева с числом узлов $N = 20$. Тонкие сплошные кривые — линии нулевых мод и смены фермионной чётности P . Штриховые жирные линии ограничивают области реализации краевых состояний в обобщённом смысле, предложенном в [69].

полубесконечных цепочек совпадает с классическим критерием краевых состояний (однозначно и строго определённым): $\lim_{l \rightarrow \infty} |u_{lm}|^2 = 0$, $\lim_{l \rightarrow \infty} |v_{lm}|^2 = 0$. Кроме того, для 1D-систем представленный критерий реализации краевых состояний однозначно коррелирует с необходимостью нахождения энергии состояния в щели объёмного спектра.

Для модели Китаева границы параметров, разделяющие условия реализации краевых и некраевых состояний, представлены на рис. 6. Конечные размеры системы приводят, помимо отмеченной ранее реализации майорановской моды только на особых линиях, к двум эффектам. Во-первых, границы реализации краевых состояний, определяемые в бесконечно длинной цепочке выражением $|\mu| = \pm 2|t|$, становятся зависящими от сверхпроводящей щели $|\Delta|$. Во-вторых, при малых значениях $|\Delta|$ внутри области возникают участки, в которых краевое состояние не возникает. Эти участки располагаются между линиями майорановских гибридных мод. Существование таких параметрических зон обусловлено тем, что достаточно сильное перекрытие краевых возбуждений, стремящихся к локализации на противоположных краях цепочки, приводит к попаданию энергии возбуждения в объёмную зону и изменению характера данного возбуждения на некраевой. Из рисунка 5 также видно, что области реализации традиционных МСС, для которых $\mathcal{P} \simeq 1$, и майорановских гибридных состояний могут различаться (случаи $|\Delta| \ll 1$). Более того, последние могут реализовываться при условиях, для которых $\mathcal{P} \ll 1$. Поэтому, в частности, майорановские гибридные состояния не представляют интереса в качестве объектов квантовых вычислений. Однако их идентификация может указать условия реализации ТНОП, что обсуждается в разделе 2.5.

2.5. Серия квантовых переходов и калорические аномалии

Помимо анализа фундаментальных особенностей МСС в модели цепочки Китаева активно исследовались вопросы возможности детектирования таких состояний на практике. Так, в работах [70–72, 74, 75] рассматривались различные экспериментальные возможности идентификации топологических фаз и топологических квантовых переходов в рамках модели цепочки Китаева. Обсуждались два типа критериев. Первый из них осно-

вывался на использовании характеристик спектра и собственных состояний многочастичной системы: исследовались вырождение многочастичной энергии основного состояния (для секторов гильбертова пространства с различной ФЧ), вырождение спектра редуцированной многочастичной матрицы плотности и асимптотическое поведение свойств одночастичной матрицы плотности на больших расстояниях [71–73]. Формулировка критериев второго типа связывалась с экспериментально наблюдаемыми характеристиками: возникновением пика дифференциальной проводимости при нулевом напряжении [70], аномальным поведением сжимаемости и восприимчивости [71, 72], магнито- и электрокалорическими аномалиями [74], возникновением резонансов Фано в системах с нетривиальной геометрией контактов [75]. Транспортные свойства квантовых проволок с майорановскими модами подробно обсуждаются в разделах 3.3, 3.4 в рамках модели, учитывающей спиновые степени свободы.

Здесь мы кратко остановимся на особенностях калорических эффектов в ТНОП модели цепочки Китаева, поскольку возникновение таких эффектов непосредственно связано с реализацией нулевых мод на специальных параметрических линиях, которые обсуждались в разделе 2.4.

Возникновение нулевой моды на специальных параметрических линиях свидетельствует о вырождении основного многочастичного состояния. При этом существенно, что прохождение таких параметрических точек означает, что два состояния с различной ФЧ сменяют друг друга в качестве основного и в системе реализуются квантовые переходы. Таким образом, параметрические линии реализации майорановских гибридных состояний в настоящей системе являются параметрическими линиями квантовых критических точек. Для открытой цепочки Китаева результат вычисления индекса ФЧ и майорановской поляризации по формулам (23) и (49) позволяет построить фазовую диаграмму, приведённую на рис. 6. Как видно из (51), при увеличении числа узлов N число линий смены ФЧ увеличивается, и в пределе $N \rightarrow \infty$ они формируют квазиконтинуум (множественной меры нуль) в ТНОП.

Таким образом, ТНОП в цепочке Китаева допускает в ней каскады квантовых переходов при изменении внешних параметров. Такие каскады могут быть обнаружены с помощью наблюдаемых характеристик. В частности, будет происходить перераспределение электронной плотности,

$$\delta n_l = \langle 1 | a_l^\dagger a_l | 1 \rangle - \langle 0 | a_l^\dagger a_l | 0 \rangle = |u_{l0}|^2 - |v_{l0}|^2 = w_{l0} z_{l0}, \quad (54)$$

при переходе сверхпроводящей нанопроволоки из основного состояния $|0\rangle$ в состояние с заполненной майорановской модой $|1\rangle = \alpha_0^+ |0\rangle$. Аналогичные рассуждения можно провести для спиновой плотности при рассмотрении одномерных систем со спиновыми степенями свободы. Однако нам представляется, что наиболее эффективное детектирование ТНОП может быть осуществлено измерением калорических эффектов, поскольку известно, что последние имеют особенности при прохождении системой квантовых критических точек.

Калорические эффекты (электрический и магнитный) проявляют себя в изменении температуры системы при адиабатическом изменении внешних параметров (в случае цепочки Китаева таким параметром является элект-

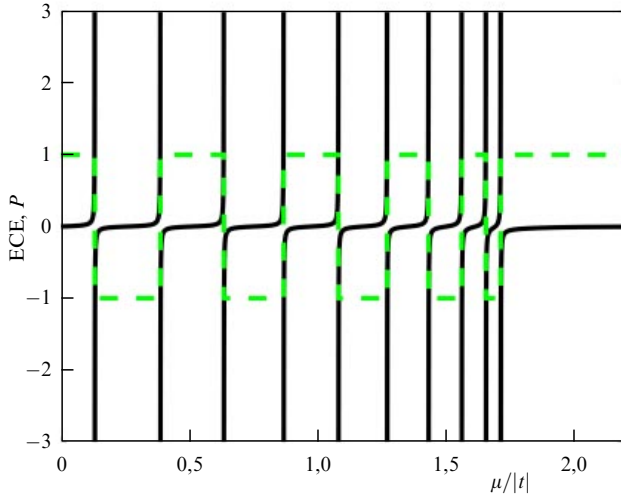


Рис. 7. (В цвете онлайн.) Зависимость величины электрокалорического эффекта (ECE) (сплошная кривая) и индекса фермионной чётности P (штриховая линия по формуле (23)) цепочки Китаева при $\Delta/|t| = 0,5$, $T/|t| = 10^{-3}$ и $N = 20$.

рохимический потенциал, а для проволок со спиновыми степенями свободы — например, внешнее магнитное поле) и определяются как

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_{S,\mu} &= -T \left(\frac{\partial \langle M \rangle / \partial T}{C(T)} \right)_{\mu,h}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \mu}\right)_{S,h} &= -T \left(\frac{\partial \langle N \rangle / \partial T}{C(T)} \right)_{\mu,h}, \end{aligned} \quad (55)$$

где $\langle N \rangle$, $\langle M \rangle$ и $C(T)$ — концентрация электронов, удельная намагничённость и удельная теплоёмкость соответственно, S , μ , h — энтропия, химический потенциал и величина магнитного поля.

В работе [74] показано, что для систем, описываемых квадратичными формами по ферми-операторам, калорические эффекты должны испытывать расходимость в квантовой критической точке и иметь практически нулевое значение вдали от неё. Такое поведение представлено на рис. 7. Штриховой линией показано поведение индекса фермионной чётности основного состояния нанопроволоки P . Сплошными линиями приведены зависимости электрокалорического эффекта, демонстрирующие аномальное поведение в точках смены знака чётности P . Идентификация этих особенностей может служить критерием для обнаружения ТНОП, дополнительным к уже предложенным в литературе (см., например, работы [75–78]).

2.6. Эффекты кулоновских взаимодействий

Остановимся кратко на эффектах влияния двухчастичного кулоновского взаимодействия на фазовую диаграмму модели цепочки Китаева. Гамильтониан такой минимальной модели учитывает межузельное взаимодействие фермионов (одноузельное взаимодействие отсутствует, поскольку фермионы бесспиновые) с амплитудой V и описывается выражением:

$$\begin{aligned} H_K &= \sum_l \left[(\epsilon - \mu) a_l^\dagger a_l - t(a_l^\dagger a_{l+1} + a_{l+1}^\dagger a_l) + \right. \\ &\quad \left. + \Delta a_l a_{l+1} + \Delta^* a_{l+1}^\dagger a_l^\dagger + V n_l n_{l+1} \right], \end{aligned} \quad (56)$$

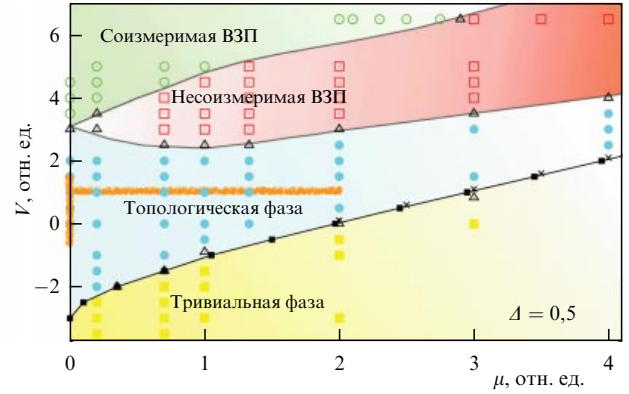


Рис. 8. (В цвете онлайн.) Фазовая диаграмма цепочки Китаева с кулоновским взаимодействием на соседних узлах в переменных химический потенциал–интенсивность кулоновского взаимодействия по формуле (56) с $\Delta = 0,5$ [70].

где $n_l = a_l^\dagger a_l$. В настоящее время установлено, что влияние кулоновского взаимодействия может приводить к нарушению топологической классификации или разрушению топологических фаз [79]. Более того, во многих случаях топологические инварианты, вводимые для изучения системы невзаимодействующих фермионов, становятся неприменимыми для описания систем со взаимодействием. Однако для одномерных ферми-систем в работах [80–82] приведена строгая топологическая классификация и определены характеристики, позволяющие идентифицировать топологически нетривиальные фазы. Одной из таких характеристик является кратность вырождения спектра квантовой запутанности (entanglement spectrum). На основе такого подхода в работах [70, 73] с использованием метода ренормгруппы для матрицы плотности построена фазовая диаграмма цепочки Китаева со взаимодействием, представленная на рис. 8.

Критерием реализации топологически нетривиальной фазы ("топологическая фаза" на рис. 8) являлось вырождение энергии многочастичных состояний для секторов гильбертова пространства с различной фермионной чётностью. Тривиальная фаза, представленная на рис. 8, характеризуется невырожденным основным состоянием. Также результатом влияния кулоновского отталкивания является возникновение двух различных фаз: соизмеримой и несоизмеримой волны зарядовой плотности (ВЗП) (см. рис. 8), топология которых тривиальна. Видно, что электронные корреляции существенно изменяют область параметров реализации топологически нетривиальных фаз, а изменение интенсивности кулоновских взаимодействий может приводить к последовательности топологических фазовых переходов.

Как отмечено в разделе 2.1, учёт перескоков и сверхпроводящего спаривания для следующих за ближайшими соседей может приводить к реализации топологически нетривиальной фазы с двумя и более парами ММ. Исследование влияния кулоновских взаимодействий на структуру фазовой диаграммы для таких систем пока не проводилось. Однако следует ожидать, что рассмотренные выше эффекты для таких систем на качественном уровне сохраняются для не слишком сильных взаимодействий.

Кроме исследования фазовой диаграммы в работах [46–48, 83, 84] рассматривались вопросы влияния фер-

мионных взаимодействий на структуру основного состояния и спектральные свойства цепочки Китаева. В частности, получены аналитические выражения для энергии и волновой функции основного состояния в выделенных областях параметров: на специальной линии [83] и в особой точке [84], подробно обсуждавшейся в разделе 2.1. В первом случае были продемонстрированы уникальность основного состояния (с точностью до двукратного вырождения, связанного с существованием ММ) и его адиабатическая связь с основным состоянием невзаимодействующей цепочки Китаева в топологически нетривиальной фазе. Таким образом была построена волновая функция основного состояния взаимодействующей системы в нетривиальной фазе.

В работе [84] для особой точки $\mu = 0$, $t = 1$ получены аналитические выражения для многочастичных собственных функций и собственных значений гамильтониана и продемонстрирован топологический квантовый переход при изменении параметра взаимодействия. Кроме этого, в работах [46–48, 83] проведено обобщение понятия ММ для случая учёта многочастичных возбуждений. Многочастичные майорановские операторы при этом определялись, аналогично одночастичным операторам, как обладающие свойством самосопряжённости, способностью коммутировать с гамильтонианом и связывать сектора гильбертова пространства с различной ФЧ. Показано, что в режиме сильных электронных корреляций вклад многочастичных майорановских операторов в структуру обобщённой ММ может быть существенным [48].

Стоит отметить, что помимо модели цепочки Китаева с четырёхфермионными членами вводились и рассматривались другие модели одномерных систем со взаимодействием, в которых возможно существование топологических фаз. Такие модели подробно изучались как аналитическими, так и численными методами [85, 86].

Отметим также работу [87], в которой утверждалось, что модель цепочки Китаева с сильным межузельным взаимодействием может быть эффективно реализована посредством создания массива джозефсоновских контактов и варьирования их электрических ёмкостей. Последнее может открыть дополнительные возможности для проверки теоретических предсказаний о влиянии фермионных взаимодействий на топологические фазы. В частности, в недавней экспериментальной работе [88] проводилась симуляция гамильтониана цепочки Китаева при учёте ближайших и следующих за ними соседей (при условии $t = 1$ в обоих случаях) с помощью кубита на основе сверхпроводящего кольца. При вариации магнитного поля эффективно изменялись значения квазиимпульса исследуемого гамильтониана и измерялось число кручений ν (см. выражение (39)) последнего. При таком рассмотрении обнаружены режимы топологически тривиальных и нетривиальных фаз в полном соответствии с теоретическими предсказаниями.

2.7. Эффекты беспорядка и граничных условий

Проблемный вопрос реализации МСС связан с влиянием дефектов и неоднородностей. Под дефектами и неоднородностями подразумеваются случайные [72, 89] и регулярные [66, 90, 91] неоднородности, а также различный характер граничных условий с проявлениями эффектов конечных размеров [61–65]. Для цепочки Китаева показано, что относительно слабый беспорядок не разрушает

ММ, сохраняя её энергию возбуждения экспоненциально малой. При этом может понижаться энергия возбуждения других одночастичных состояний, не относящихся к майорановскому типу [72, 89]. Этот эффект обладает линейной малостью по отношению к интенсивности случайного беспорядка.

Вместе с тем показано, что присутствие беспорядка может существенно осложнить описанные в разделах 2.2–2.5 подходы к идентификации топологических фаз. Это проявляется особенно ярко в случае, если наряду с беспорядком в системе имеется взаимодействие фермионов [72, 77]. Физическая причина такого усложнения обусловлена реализацией низкоэнергетических локализованных состояний, имеющих сходство с МСС.

Наиболее существенной проблемой идентификации МСС в неоднородных одномерных системах является возникновение устойчивых андреевских состояний, обладающих сходствами экспериментального проявления с МСС. Возникновение таких возбуждений и связанных с ними проблем экспериментальной идентификации более подробно обсуждается в разделах 3.3, 3.4 при рассмотрении сверхпроводящей нанопроволоки с сильным спин-орбитальным взаимодействием Рашбы.

Актуальным является изучение гетероструктуры квантовая точка – сверхпроводящая нанопроволока, поскольку такая гетероструктура реализуется в экспериментах по баллистическому транспорту с полупроводниковыми нанопроволоками InAs или InSb. В случае, когда сверхпроводящая нанопроволока моделируется цепочкой Китаева, аналитическое рассмотрение задачи проведено в недавней работе [66]. Отметим также, что в [51] рассматривались свойства цепочки Китаева в условиях беспорядка и приложенного периодического и квазипериодического потенциалов. Авторы [51] продемонстрировали зависимость между длиной локализации краевых состояний в системе без сверхпроводящего параметра порядка и величиной сверхпроводящей щели, необходимой для того, чтобы система перешла в топологически нетривиальное состояние.

Влияние граничных условий на формирование ММ изучалось также в работах [65, 90–92], где вводился параметр, позволяющий плавно изменять тип граничных условий в системе. При этом в [65] для модели Китаева одна из амплитуд перескока и сверхпроводящих спариваний (t и Δ в формуле (1)) нормировалась на комплексное число b , модуль которого изменялся от 0 до 1. Значению $b = 0$ ($b = 1$) соответствовали открытые (периодические) граничные условия, а изменение фазы позволяло рассматривать и антипериодические граничные условия. Было показано, что можно подобрать отличное от нуля значение b так, чтобы реализовывались ММ. Такие эффекты являются устойчивыми по отношению к слабому межузельному кулоновскому взаимодействию фермионов. В работах [90, 91] рассматривалась бесконечная и замкнутая цепочки Китаева с одиночной примесью. В пределе, когда примесь создаёт на узле потенциальный барьер бесконечной высоты, модель сводится к открытой цепочке Китаева.

В отмеченных работах демонстрировалось существование майорановских состояний, локализованных вблизи примеси, в аналитическом виде найдены волновые функции этих нулевых мод. Показано, что возбуждения такого типа могут реализовываться в топологически тривиальной фазе однородной системы и являются

устойчивыми по отношению к слабому беспорядку. Однако численный анализ, проведённый в работе [92], показал, что локализованные вблизи примеси ММ существенно не изменяют транспортных особенностей системы. Отметим также, что при исследовании одномерных и квазиодномерных топологических сверхпроводников конечных размеров было введено понятие майорановской поляризации [93, 94]. Последняя величина позволяет идентифицировать МСС в открытых системах отмеченного типа.

Заметим также, что модель Китаева может быть сведена к анизотропной модели изинговской цепочки посредством преобразования Йордана – Вигнера [12, 50, 95]. При этом топологические фазы с определённым количеством нелокальных майорановских состояний отображаются в различные магнитоупорядоченные фазы, а тривиальная фаза фермионной модели соответствует фазе спиновой системы без ближних корреляций. Такой изоморфизм часто используется при исследовании модельных спиновых систем для получения сведений о свойствах топологических сверхпроводников.

В частности, в работе [50] исследовалась изинговская цепочка в поперечном магнитном поле с трёхспиновыми взаимодействиями, которая сводится к модели Китаева с дальними перескоками и сверхпроводящим спариванием. Для такой системы построена фазовая диаграмма и показана возможность индуцирования нескольких ММ. Это согласуется с приведёнными выше результатами. Показано, что в фазе с чётным числом ММ существуют линии в пространстве параметров, при прохождении которых осцилляционное убывание волновых функций ММ меняется на монотонное. Аналогичное рассмотрение расширенной 1D-модели Изинга проводилось в работе [95], где изучались топологическая фазовая диаграмма изоморфной ей модели и структура спиновой волновой функции в различных областях фазовой диаграммы.

3. Майорановские моды при учёте спиновых степеней свободы

Простота гамильтониана цепочки Китаева позволяет наглядно продемонстрировать принципиальные особенности элементарных возбуждений майорановского типа в конденсированных средах. Одной из характерных черт модели Китаева является отсутствие спиновой переменной. Это не является существенным ограничением, если рассматриваются системы с р-типом сверхпроводящего спаривания. Однако с практической точки зрения более распространёнными конденсированными средами являются материалы с s- и d-типами симметрии или киральным d + id-типом симметрии параметров порядка. Для таких систем предложено несколько сценариев реализации майорановских мод, а также методов их экспериментальной идентификации.

В разделах 3.1–3.4 и 4 приведены результаты исследований условий реализации ММ в моделях, учитывающих спиновые переменные. Рассмотрены различные методики обнаружения этих состояний, связанные с изучением транспортных свойств систем, в том числе сверхпроводящих нанопроволок со спин-орбитальным взаимодействием. Основная идея таких методов заключается в детектировании уникальных свойств МСС: нулевой энергии и пространственной нелокальности.

3.1. Модель сверхпроводящей нанопроволоки

Физическим примером топологического сверхпроводника с s-типом симметрии параметра порядка может служить полупроводниковая нанопроволока InSb или InAs, в которой реализуется сильная спин-орбитальная связь. На проволоку эпитаксиальным образом напылён слой алюминия толщиной 3–5 нм. При низких температурах алюминиевая оболочка переходит в сверхпроводящее состояние и за счёт эффекта близости в нанопроволоке наводится потенциал сверхпроводящего спаривания. О такой структуре говорят как о сверхпроводящей проволоке (СП). Важные изменения свойств СП возникают в магнитном поле [35, 36]. В методе сильной связи гамильтониан СП записывается в виде

$$H_W = \sum_{l,\sigma} \left[\xi_\sigma a_{l\sigma}^\dagger a_{l\sigma} - \frac{t}{2} (a_{l\sigma}^\dagger a_{l+1\sigma} + a_{l+1\sigma}^\dagger a_{l\sigma}) \right] + \sum_l \left[\Delta a_{l\uparrow} a_{l\downarrow} - \frac{\alpha}{2} (a_{l\uparrow}^\dagger a_{l+1\downarrow} - a_{l\downarrow}^\dagger a_{l+1\uparrow}) + \text{h.c.} \right] + \sum_l (U n_{l\uparrow} n_{l\downarrow} + V n_l n_{l+1}), \quad (57)$$

где слагаемые первой суммы соответствуют одномерной системе фермионов с интегралом перескоков $t/2$, зависящей от проекции спина энергии фермиона на одном узле, отсчитанной от химического потенциала μ , $\xi_\sigma = \epsilon_0 - \mu + \eta_\sigma h$, $h = (1/2)g\mu_B H$, g — фактор Ланде, μ_B — магнетон Бора, H — внешнее магнитное поле, $a_{l\sigma} (a_{l\sigma}^\dagger)$ — оператор уничтожения (рождения) фермиона на узле с номером l и проекцией спина $\sigma = \uparrow, \downarrow$, $\eta_\uparrow = 1$, $\eta_\downarrow = -1$. Под знаком второй суммы представлены слагаемые, связанные с потенциалом сверхпроводящего спаривания Δ , а также слагаемые, обусловленные спин-орбитальным взаимодействием Рашбы с параметром α .

Для общности рассмотрения в гамильтониан добавлены слагаемые, соответствующие учёту одноузельного (U) и межузельного (V) кулоновского взаимодействия фермионов; $n_l = n_{l\uparrow} + n_{l\downarrow}$ — оператор числа электронов на узле, $n_{l\sigma} = a_{l\sigma}^\dagger a_{l\sigma}$. Следует подчеркнуть, что для реализации ММ необходимо большое значение g -фактора ($|g| \simeq 50$). В этом случае в магнитном поле до $H \sim 1$ Тл сверхпроводимость не разрушается и нанопроволока может находиться в топологически нетривиальной фазе.

Проанализируем условия, при которых для $U = V = 0$ модель СП (57) может быть сведена к модели Китаева [35, 36]. С этой целью запишем гамильтониан (57) в импульсном представлении:

$$H_W = \sum_{k\sigma} \xi_{k\sigma} a_{k\sigma}^\dagger a_{k\sigma} + \sum_k (i\alpha_k a_{k\downarrow}^\dagger a_{k\uparrow} + \Delta a_{k\uparrow} a_{-k\downarrow} + \text{h.c.}), \quad (58)$$

где $\xi_{k\sigma} = \epsilon_{k\sigma} - \mu$, $\epsilon_{k\sigma} = \epsilon_0 + \eta_\sigma h - t \cos k$, $\alpha_k = \alpha \sin k$.

Введём новые операторы:

$$\begin{aligned} d_k &= \cos \phi_k a_{k\downarrow} - i \operatorname{sign} \alpha_k \sin \phi_k a_{k\uparrow}, \\ p_k &= \sin \phi_k a_{k\downarrow} + i \operatorname{sign} \alpha_k \cos \phi_k a_{k\uparrow}, \\ \cos \phi_k &= \sqrt{\frac{1+r_k}{2}}, \quad \sin \phi_k = \sqrt{\frac{1-r_k}{2}}, \quad r_k = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \alpha_k^2}}, \end{aligned} \quad (59)$$

и выразим через них H_W :

$$H_W = \sum_k \left[(\varepsilon_-(k) - \mu) d_k^+ d_k + \frac{1}{2} (A_k d_k^+ d_{-k}^+ + A_k^* d_{-k} d_k) \right] + \sum_k \left[(\varepsilon_+(k) - \mu) p_k^+ p_k - \frac{1}{2} (A_k p_k^+ p_{-k}^+ + A_k^* p_{-k} p_k) \right] + \sum_k (A_k d_{-k} p_k + A_k^* p_k^+ d_{-k}^+). \quad (60)$$

Здесь использованы обозначения:

$$\varepsilon_{\mp}(k) = \varepsilon(k) \mp (h^2 + \alpha_k^2)^{1/2}, \quad A_k = \frac{i\Delta \alpha_k}{(h^2 + \alpha_k^2)^{1/2}},$$

$$A_k = i \operatorname{sign} \alpha_k \Delta r_k.$$

Видно, что в новых переменных гамильтониан СП описывает две фермиевские подсистемы, взаимодействие между которыми определяется параметром A_k .

Если $h > t$, $t \gg |\alpha|$, то $|\Delta|$ -расщепление зон таково, что дно верхней зоны находится выше потолка нижней зоны. В этом случае при значении $\mu < t - h$ свойства СП определяются нижней зоной. Поэтому в главном приближении по параметру $|\Delta|/t \ll 1$ рассматриваемая нанопроволока описывается гамильтонианом цепочки Китаева

$$H_W = \sum_k \left[(\varepsilon_-(k) - \mu) d_k^+ d_k + \frac{1}{2} (A_k d_k^+ d_{-k}^+ + A_k^* d_{-k} d_k) \right]. \quad (61)$$

Нетрудно убедиться в том, что в области $-t - h < \mu < t - h$ основное состояние системы обладает отрицательной ФЧ и СП находится в топологически нетривиальной фазе. В этом случае при открытой геометрии в СП будут реализовываться майорановские связанные состояния.

Качественно такое же поведение будет и при относительно слабом магнитном поле, $h < t$, когда происходит перекрытие по энергии нижних состояний р-подзоны и верхних состояний d-подзоны. В этом случае при значениях $\mu < h - t$, когда концентрация электронов $n < 1$, а верхняя зона практически не заполнена, СП по-прежнему будет эффективно описываться нижней зоной.

Если концентрация электронов превышает единицу, а $\mu > t - h$, то нижняя зона будет целиком заполнена (с точностью до поправок, обусловленных вкладами, пропорциональными $|\Delta_k|^2, |A_k|^2$). Тогда эффективным гамильтонианом СП будет служить гамильтониан цепочки Китаева для верхней зоны

$$H_W = \sum_k \left[(\varepsilon_+(k) - \mu) p_k^+ p_k - \frac{1}{2} (A_k p_k^+ p_{-k}^+ + A_k^* p_{-k} p_k) \right], \quad (62)$$

описывающий электронный ансамбль с концентрацией электронов $n_p = n - 1$.

Таким образом, свойства СП в достаточно сильных магнитных полях в широкой области параметров могут быть описаны моделью Китаева. Вместе с тем подчеркнём, что при $h < t$ и $h - t < \mu < t - h$ существенным является учёт двухзонной структуры. В дальнейшем транспортные свойства сверхпроводящей нанопроволоки будут рассматриваться в рамках как исходной модели (57), так и модели Китаева.

3.2. Топологические фазы и майорановские моды в сверхпроводящей нанопроволоке

Гамильтониан СП обладает электрон-дырочной симметрией и характеризуется нарушенной инвариантностью по отношению к вращению в спиновом пространстве. По классификации топологических изоляторов и сверхпроводников [9] это соответствует симметричному классу BDI, характеризуемому $\mathbb{Z}$ -инвариантом, чётность значения которого выражается через ФЧ основного состояния замкнутой СП с чётным числом узлов и периодическими граничными условиями.

При решении задачи о ФЧ достаточно рассмотреть операторную структуру гамильтониана в симметричных точках зоны Бриллюэна [96, 97]. Такие точки (в дальнейшем обозначаемые через K) удовлетворяют условию $-K + G = K$, где G — вектор обратной решётки. Как обычно, точки зоны Бриллюэна считаются совпадающими, если они различаются на вектор G . Для СП имеются две симметричные точки: $K = 0$ и $K = \pi$.

Для подтверждения высказанного выделим в (58) слагаемые, относящиеся к симметричным точкам:

$$\mathcal{H} = \sum_K h(K) + \sum_{k \neq 0, \pi} h(k), \quad (63)$$

где

$$h(K) = \sum_{\sigma} \xi_{K\sigma} n_{K\sigma} + (\Delta a_{K\uparrow} a_{K\downarrow} + \text{h.c.}), \quad K = 0, \pi, \quad (64)$$

$$h(k) = \sum_{\sigma} \xi_{k\sigma} \hat{n}_{k\sigma} + (i\alpha_k a_{k\downarrow}^+ a_{k\uparrow} + \Delta a_{k\uparrow} a_{-k\downarrow} + \text{h.c.}).$$

Отсутствие в $h(K)$ члена, соответствующего спин-орбитальному взаимодействию, обусловлено обращением α_K в нуль в симметричных точках.

Из структуры квадратичных форм (64) следует, что для разных значений магнитного поля функция основного состояния представима в следующем виде (здесь и далее полагаем $\epsilon_0 = 0$):

$$|\Psi_0\rangle = \begin{cases} |\Psi_0^I\rangle = L_0 L_{\pi} |\Phi\rangle, & h < H^-, \quad h < H^+, \\ |\Psi_0^{II}\rangle = L_0 a_{\pi\downarrow}^+ |\Phi\rangle, & H^- < h < H^+, \\ |\Psi_0^{III}\rangle = a_{0\downarrow}^+ L_{\pi} |\Phi\rangle, & H^+ < h < H^-, \\ |\Psi_0^{IV}\rangle = a_{0\downarrow}^+ a_{\pi\downarrow}^+ |\Phi\rangle, & h > H^-, \quad h > H^+, \end{cases} \quad (65)$$

где характерные значения магнитных полей определяются выражениями

$$H^- = \sqrt{(\mu - t)^2 + |\Delta|^2}, \quad H^+ = \sqrt{(\mu + t)^2 + |\Delta|^2}, \quad (66)$$

а L_K задаётся хорошо известной из теории Бардина – Купера – Шриффера (БКШ) операторной формой:

$$L_K = u_K - v_K a_{K\downarrow}^+ a_{K\uparrow}^+, \quad u_K = \sqrt{\frac{1 + x_K}{2}}, \quad (67)$$

$$v_K = \frac{|\Delta|}{\Delta} \sqrt{\frac{1 - x_K}{2}}, \quad x_K = \frac{\xi_K}{\sqrt{\xi_K^2 + |\Delta|^2}}.$$

Вектор $|\Phi\rangle$ в (65) может быть представлен следующим образом:

$$|\Phi\rangle = U^+ |0\rangle, \quad U^+ = \prod_{0 < k < \pi} U_k^+, \quad (68)$$

$$U_k^+ = A_k + B_k a_{-k\downarrow}^+ a_{k\uparrow}^+ + C_k a_{k\downarrow}^+ a_{-k\uparrow}^+ + D_k a_{-k\downarrow}^+ a_{k\uparrow}^+ + F_k a_{-k\downarrow}^+ a_{k\downarrow}^+ + G_k a_{-k\downarrow}^+ a_{k\uparrow}^+ a_{k\downarrow}^+ a_{-k\uparrow}^+.$$

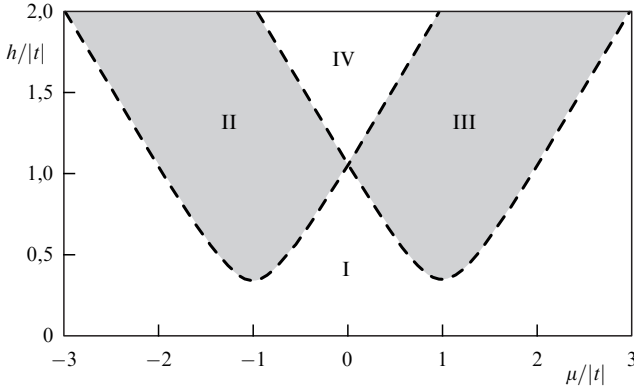


Рис. 9. Диаграмма топологически нетривиальных фаз замкнутой нанопроволоки в переменных химический потенциал – внешнее магнитное поле. Области параметров со значениями $\mathcal{M} = \pm 1$ отвечают тривиальной/нетривиальной топологической фазе. При этом число Майорана $\mathcal{M} = (-1)^{N_-}$, где N_- — чётность числа фермионных мод, имеющих импульсы $k = 0, \pi$ и отрицательную энергию. Выбраны следующие значения параметров: $\Delta = 0,35t$, $\alpha = 0,22t$.

Вакуумное состояние СП обозначено как $|0\rangle$. Коэффициенты, входящие в определение оператора U_k^+ , нетрудно найти из решения уравнения Шрёдингера. Однако для нахождения ФЧ основного состояния этого не потребуется, поскольку $|\Phi\rangle$ при всех параметрах системы имеет вид суперпозиции состояний с чётным числом фермионов. Поэтому ФЧ состояния $|\Phi\rangle$ является положительной и не меняется при изменении параметров.

По аналогичной причине квадратичные формы L_K , действуя на $|\Phi\rangle$ и изменяя состояние системы, сохраняют его положительную ФЧ. Следовательно, фермионная чётность $|\Psi_0^I\rangle$ положительна. Очевидно также, что $|\Psi_0^{IV}\rangle$ имеет положительную ФЧ. Состояния $|\Psi_0^{II}\rangle$ и $|\Psi_0^{III}\rangle$ характеризуются отрицательной ФЧ, поскольку стоящий в определении этих функций оператор рождения фермиона при действии на $|\Phi\rangle$ и на $L_K|\Phi\rangle$ порождает суперпозицию состояний с нечётным числом электронов. Из сказанного следует, что условия реализации состояний с отрицательной ФЧ могут быть представлены неравенствами

$$\begin{aligned} \sqrt{(\mu - t)^2 + |\Delta|^2} < h < \sqrt{(\mu + t)^2 + |\Delta|^2}, \quad \mu > 0, \\ \sqrt{(\mu + t)^2 + |\Delta|^2} < h < \sqrt{(\mu - t)^2 + |\Delta|^2}, \quad \mu < 0, \end{aligned} \quad (69)$$

которые определяют область существования топологически нетривиальной фазы СП. На рисунке 9 эта область выделена тёмным цветом.

В диагональном по квазичастичным операторам представлении гамильтониан записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} H_W = E_G + \sum_K [E_K - h|\alpha_K^+ \alpha_K + (E_K + h) \beta_K^+ \beta_K] + \\ + \sum_{k \neq K} [E_-(k) \alpha_k^+ \alpha_k + E_+(k) \beta_k^+ \beta_k], \end{aligned} \quad (70)$$

где E_G — энергия основного состояния СП, $E_K = (\xi_K^2 + |\Delta|^2)^{1/2}$, а энергии квазичастиц $E_{\pm}(k)$ в несиммет-

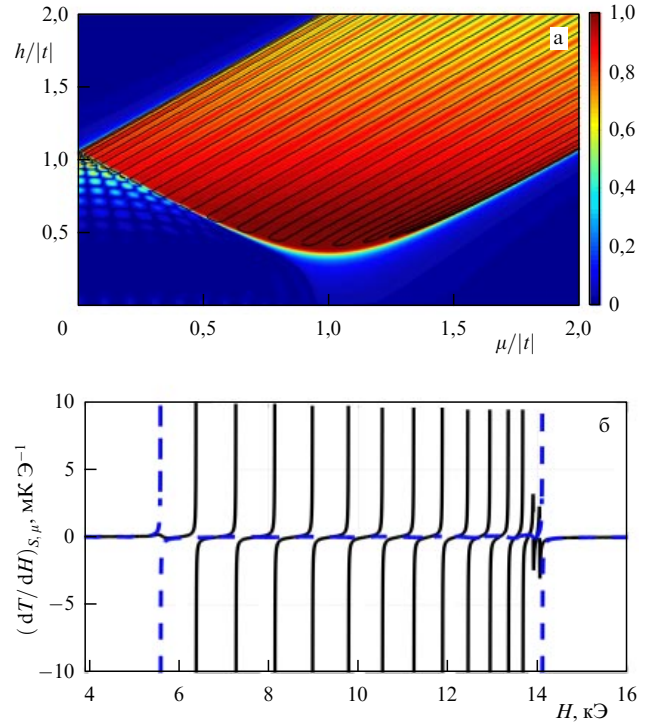


Рис. 10. (В цвете онлайн.) (а) Зависимость майорановской поляризации $\mathcal{P}$ от магнитного поля h и химического потенциала μ для открытой цепочки при $N = 30$, $\Delta = 0,35|t|$, $\alpha = 0,22|t|$. Чёрными линиями обозначены нулевые моды. (б) Зависимость магнитокалорического эффекта от величины внешнего магнитного поля при $T = 10^{-3}|t|$; $\mu/|t| = 0,5$, $T = 57$ мК.

ричных точках определяются выражениями

$$\begin{aligned} E_{\pm}(k) &= \sqrt{\xi_k^2 + \alpha_k^2 + h^2 + |\Delta|^2 \pm 2B_k}, \\ B_k &= \sqrt{\xi_k^2(\alpha_k^2 + h^2) + h^2|\Delta|^2}. \end{aligned} \quad (71)$$

В длинных СП с параметрами, удовлетворяющими условиям (69), при открытой геометрии будут реализовываться майорановские связанные состояния с экспоненциально малыми энергиями ММ и перекрытием волновых функций этих мод. В частности, для таких МСС майорановская поляризация будет близка к своему максимальному значению $\mathcal{P} \simeq 1$. При уменьшении длины цепочки область реализации МСС с поляризацией $\mathcal{P} \simeq 1$ будет уменьшаться вследствие гибридизации волновых функций ММ. По той же причине в нанопроволоке будут иметь место майорановские гибридизационные состояния, реализуемые на особых параметрических линиях. При прохождении в фазовом пространстве точек, отвечающих реализации таких майорановских гибридизационных состояний, в системе будут происходить квантовые переходы с изменением ФЧ основного состояния, которые проявляются при изучении калорических аномалий. Для короткой цепочки такая ситуация изображена на рис. 10. Вычисления проводились с использованием матрицы Боголюбова – де Жена (см. (16) и разделы 2.2, 2.3), для которой

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{\uparrow\uparrow} & \hat{A}_{\uparrow\downarrow} \\ \hat{A}_{\downarrow\uparrow}^+ & \hat{A}_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{B}_{\uparrow\uparrow} & \hat{B}_{\uparrow\downarrow} \\ -\hat{B}_{\uparrow\downarrow}^T & \hat{B}_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (72)$$

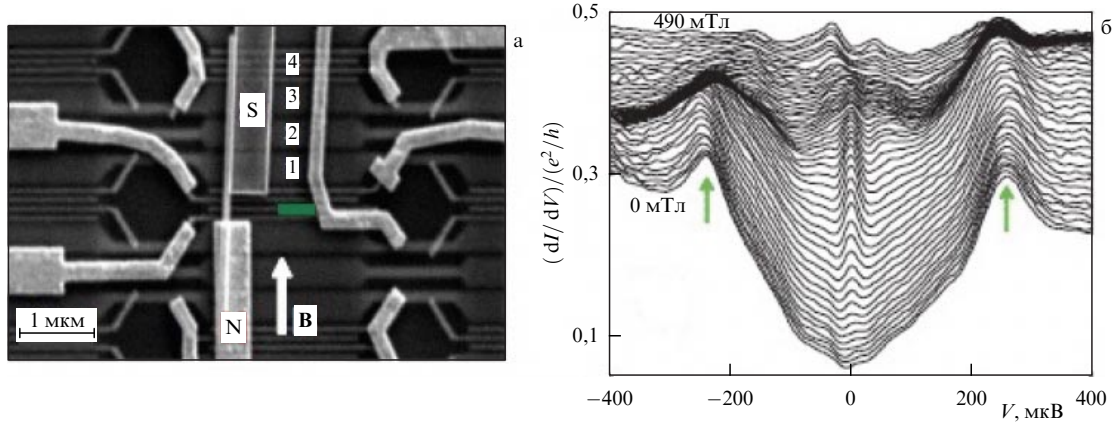


Рис. 11. (а) Изображение InSb-проволоки, которая частично находится в областях нормального, N, и сверхпроводящего, S, контактов в магнитном поле **B**. 1–4 — затворные электроды. (б) Возникновение пика кондактанса при нулевом напряжении с возрастанием магнитного поля [38].

где

$$\begin{aligned} (\hat{A}_{\uparrow\downarrow})_{l,l+1} &= -(\hat{A}_{\uparrow\downarrow})_{l+1,l} = -\frac{\alpha}{2}, \quad (\hat{B}_{\uparrow\downarrow})_{l,l} = -\Delta, \\ (\hat{A}_{\sigma\sigma})_{l,l} &= -\mu + \eta_{\sigma} h, \quad (\hat{A}_{\sigma\sigma})_{l,l+1} = -\frac{t}{2}. \end{aligned} \quad (73)$$

При этом выражение для майорановской поляризации (49) естественным образом обобщается для случая зависимости $u-v$ - и $w-z$ -коэффициентов от спиновых переменных. Калорические характеристики СП рассматривались при $\alpha/|t| \simeq 0,2$, $\Delta/|t| \simeq 0,3$.

3.3. Принципы идентификации майорановских связанных состояний и экспериментальные исследования

Одна из центральных задач майорановской проблематики связана с надёжным экспериментальным подтверждением реализации MCC в конденсированных средах. Решение задачи идентификации осуществляется на основе использования характерных особенностей состояний, содержащих элементарные возбуждения майорановского типа. В этом разделе остановимся на изложении современных подходов к детектированию таких состояний. Большинство методик основано на рассмотрении особенностей квантового транспорта в структурах со сверхпроводящей нанопроволокой.

3.3.1. Измерение пика кондактанса при нулевом напряжении. После обнаружения (при определённых условиях) изоморфизма между 1D-моделью СП, рассмотренной в разделе 3.1, и цепочкой Китаева [35, 36] были получены экспериментальные результаты по туннельной спектроскопии, интерпретация которых связывалась с реализацией MCC в полупроводниковых проволоках InAs, InSb [38, 39, 98]. В отмеченных работах изучалась дифференциальная проводимость (кондактанс) $G = dI/dV$ контакта парамагнитный металл–гибридная полупроводниковая проволока с сильным спин-орбитальным взаимодействием (рис. 11а). Под термином "гибридная" подразумевается композитная структура с потенциалом сверхпроводящего спаривания в полупроводниковой проволоке, наведённым за счёт эффекта близости благодаря контакту с массивным сверхпроводником. Такую

структуру в дальнейшем будем называть сверхпроводящей нанопроволокой (СП).

Для пояснения особенностей кондактанса, которые были обнаружены в отмеченных экспериментальных работах, остановимся подробнее на контакте металл/сверхпроводник. При малых напряжениях смещения и низких температурах ток определяется только состояниями электронов с энергией ε вблизи уровня Ферми и $\varepsilon \ll \Delta$ (где Δ — интенсивность сверхпроводящего спаривания). В этом случае, поскольку основное состояние сверхпроводника описывается волновой функцией, которая является суперпозицией состояний с чётным или нечётным числом частиц, для транспортируемого электрона существует ненулевая вероятность оказаться в сверхпроводнике только в виде куперовской пары. Такой процесс называется андреевским отражением [99]. В этом случае электрон отражается от интерфейса в область нормального металла в виде дырки с противоположной проекцией спина. При наличии потенциального барьера в области контакта имеется также ненулевая вероятность обычного рассеяния электрона назад. Вероятность андреевского отражения обратно пропорциональна высоте потенциального барьера между подсистемами [100].

В случае реализации топологически нетривиальной фазы основное состояние сверхпроводника становится двукратно вырожденным, т.е. имеются две многочастичные волновые функции с одинаковой энергией, но с разной чётностью. Другими словами, электрон с энергией Ферми всё так же может оказаться в сверхпроводнике только в результате андреевского отражения. Однако теперь этот процесс проходит через майорановское возбуждение, обладающее нулевой энергией. В результате андреевское отражение приобретает резонансный характер, т.е. соответствующая вероятность равна единице независимо от величины интеграла перескока между подсистемами. Данный эффект объясняется тем, что вследствие самоэрмитовости майорановского оператора величина туннельного взаимодействия майорановской моды, локализованной в области интерфейса, с электронным и дырочным резервуарами нормального металла одинакова [101].

Как следствие, кондактанс при нулевом напряжении имеет максимум высотой $2G_0$ ($G_0 = e^2/h$ — квант кон-

дактанса). При этом множитель 2 указывает на величину заряда $2e$, переносимую в описанном процессе андреевского отражения [101, 102]. Кроме того, отмеченный пик должен быть устойчивым по отношению к флуктуациям химического потенциала и магнитного поля [103–105].

В первых экспериментах по туннельной спектроскопии СП [38, 39, 98] также регистрировался пик кондактанса при нулевом напряжении, который возникал с возрастанием магнитного поля, сохранялся только при одновременном присутствии спин-орбитального взаимодействия и сверхпроводящего s -спаривания и объяснялся резонансным прохождением через МСС (рис. 116). Однако полученные данные демонстрировали отсутствие стабильного квантования кондактанса, значения которого часто оказывались существенно меньше $2G_0$ [38, 39, 98, 106, 107].

Такое расхождение вызвало широкую дискуссию относительно возможных причин слабой проводимости и различных альтернативных механизмов, приводящих к резонансной особенности без привлечения топологически нетривиальных состояний. В частности, существенной проблемой для наблюдения устойчивого пика $2G_0$ стало индуцирование недостаточно сильного сверхпроводящего спаривания в полупроводниковой проволоке. Следствием этого явилась ненулевая проводимость при энергиях электрического поля исток – сток, меньших ширины наведённой сверхпроводящей щели. Такой эффект может объясняться несколькими причинами: беспорядком в проволоке, тепловыми флуктуациями, шероховатостями интерфейса электрод/проволока, флуктуациями туннельного барьера, электрон-электронным и электрон-фононным взаимодействием [108, 109]. Дополнительно было показано, что квазичастичные внутрищелевые состояния не только усложняют интерпретацию экспериментальных данных, но и могут негативно влиять на топологическую защищённость МСС, поскольку способны участвовать в так называемом брейдинге ("переплетении" мировых линий квазичастиц) и тем самым вносить ошибки в итоговое квантовое состояние [110, 111].

Следует отметить, что после появления первых экспериментов по туннельной спектроскопии полупроводниковых проволок было продемонстрировано, что резонанс кондактанса при нулевом напряжении может быть следствием возникновения низкоэнергетических состояний в проволоках с несколькими подзонами как при наличии, так и в отсутствие беспорядка. Важно, что эти низкоэнергетические состояния никак не связаны с топологическим фазовым переходом в системе [112–115]. Такие состояния могут возникать, если зеемановская энергия превышает расщепление между подзонами [116]. Другими сценариями возникновения резонанса являются эффект Кондо, который может сосуществовать со сверхпроводящим спариванием при ненулевых магнитных полях [117], а также слабая антилокализация [118].

Дальнейшее развитие технологии эпитаксиального роста гибридных СП позволило реализовать более качественное наведённое спаривание, исключить факторы беспорядка и шероховатости интерфейсов [119–121] и выйти на режим баллистического транспорта [122, 123]. Это сделало возможным наблюдение устойчивого $2G_0$ -квантования кондактанса при нулевом напряжении в топологически нетривиальной области параметров [78, 124].

Однако даже достигнутый прогресс не избавляет полностью от неоднозначности интерпретации последних результатов [125]. В частности, остаются другие сценарии, согласно которым локальные измерения проводимости дают $2G_0$ -резонанс при нулевом напряжении. В СП низкоэнергетические андреевские связанные состояния (АСС) могут образовываться: 1) за счёт гладкого электростатического потенциала на конце проволоки [127]; 2) вследствие квазиодномерности [128]; 3) в ситуации, когда волновые функции ММ значительно перекрываются [129]; 4) в случае сильно неоднородного потенциала по всей длине многозонной гибридной структуры [130, 131].

Во многих экспериментах, посвящённых детектированию МСС, между металлическим электродом и СП имеется область полупроводника, в которой наведённое сверхпроводящее спаривание либо является существенно подавленным, либо вовсе отсутствует, а потенциальный профиль в этой области может значительно отличаться от имеющегося в проволоке за счёт влияния электродов затвора. В результате в отмеченной области реализуется квантовая точка (КТ). На рисунке 11а отмеченный участок находится между N- и S-областями прямоугольной формы.

В ряде исследований обнаружено, что два АСС, которые возникают в подобной КТ, при возрастании химического потенциала или магнитного поля могут сливаться и образовывать нулевую моду. На рисунке 12а, б возникновение и поведение таких состояний в магнитных полях, меньших критического поля B_c , показаны красными кривыми. Как видно, подобные АСС сохраняются в некотором диапазоне параметров в топологически тривиальной фазе. При последующем топологическом фазовом переходе эти АСС переходят в МСС (см. эволюцию плотности вероятности майорановских волновых функций на рис. 12б) [126, 132, 133].

Таким образом, квантованный резонанс кондактанса может возникать как в топологически тривиальной, так и в топологически нетривиальной фазах. При этом в обоих случаях его одинаковые свойства, такие как пиннинг при нулевом напряжении и осцилляции при изменении магнитного поля, дополнительно затрудняют детектирование МСС методом локальной туннельной спектроскопии, поскольку в условиях эксперимента определение точных значений химического потенциала и наведённой сверхпроводящей щели представляется затруднительным [126, 129, 132–136].

Из сказанного следует, что пик кондактанса при нулевом напряжении является необходимым, но не достаточным условием для однозначного детектирования МСС в СП. Следовательно, актуальным является поиск альтернативных путей обнаружения этих возбуждений.

3.3.2. Детектирование нелокальности майорановского связанного состояния. Одна из новых методик идентификации МСС связана с использованием отмечавшейся выше нелокальности этого состояния. Так, для обнаружения двух разнесённых майорановских мод предлагалось исследовать корреляции кондактанса на противоположных концах проволоки в двухконтактной схеме [133]. Однако в недавно поставленном эксперименте не было обнаружено согласованного поведения этих величин [138]. Кроме того, полезным является анализ кван-

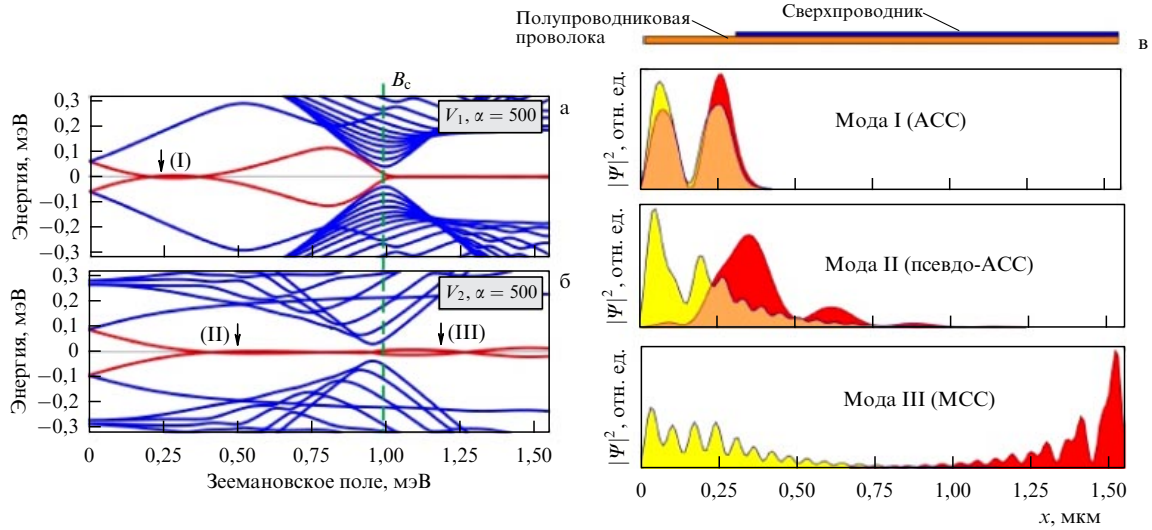


Рис. 12. (В цвете онлайн.) Андреевские и майорановские связанные состояния в системе квантовая точка/сверхпроводящая нанопроволока. Спектры для потенциальных профилей V_1 (а) и V_2 (б). (в) Пространственное распределение плотностей вероятностей майорановских волновых функций для возбуждения с наименьшей энергией (красная кривая на рис. а, б) для различных значений магнитного поля, показанных стрелками на рис. а, б [133].

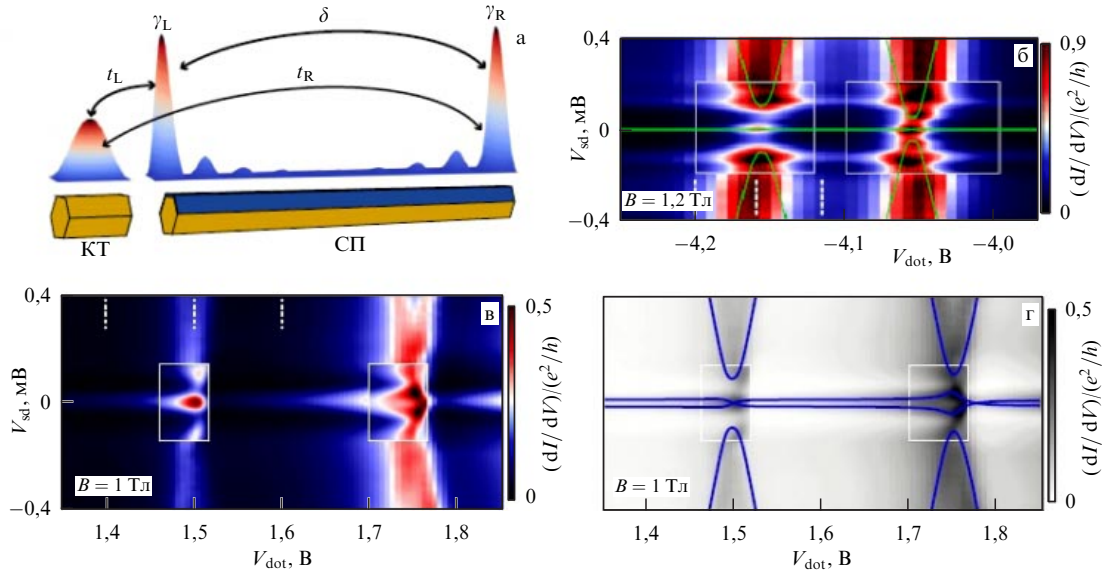


Рис. 13. (В цвете онлайн.) Изучение нелокальности майорановских связанных состояний средствами локальной туннельной спектроскопии структуры квантовая точка/сверхпроводящая нанопроволока. (а) Схема взаимодействия энергетических уровней квантовой точки с каждой из майорановских мод, γ_L и γ_R . (б) Зависимость кондактанса от напряжений исток–сток V_{sd} и затвора V_{dot} (карта кондактанса) в ситуации, когда майорановские фермионы не взаимодействуют ($\delta \approx 0$). Зелёными кривыми показаны результаты модельных расчётов. (в) Карта проводимости в случае ненулевой гибридизации волновых функций майорановских фермионов ($\delta \neq 0$). (г) Результаты численных расчётов, соответствующих случаю, представленному на рис. в [137].

товой запутанности и диссонанса состояния двух КТ, взаимодействующих с разными ММ [139].

Несмотря на отмеченные недостатки локальных транспортных измерений в системе КТ/СП, пространственная нелокальность МСС может изучаться и в таком случае [137, 140, 141]. Как отмечалось в разделе 2.1, боглюбовское возбуждение майорановского типа может быть представлено в виде суперпозиции операторов ММ, волновые функции которых локализованы на противоположных концах СП. С учётом этого КТ взаимодействует с каждой ММ в отдельности, как видно из рис. 13а.

В свою очередь величина гибридизации с правой майорановской волновой функцией в действительности

должна быть много меньше, чем с левой, т.е. $t_R \ll t_L$. Если имеет место истинное МСС с хорошо удалёнными друг от друга нулевыми модами, то его уровень энергии не сдвигается при совпадении со спин-зависающими уровнями энергии КТ (см. на рис. 13б зелёную прямую $V_{sd} = 0$, совпадающую с экспериментальными данными). Это свойство является непосредственным проявлением топологической защищённости МСС.

Если же существует перекрытие волновых функций ММ, то гибридизация состояния электрона или дырки в КТ и МСС приводит к значительным расщеплениям (антикроссингам) уровней энергии последнего в точках пересечения с уровнями энергии КТ (см. антикроссинг

при $V_{\text{dot}} \approx 1,75$ В на рис. 13в, г). Величина этого расщепления зависит от спиновой поляризации внешней ММ, находящейся дальше от КТ. Кроме того, отмечалось, что уменьшение нелокальности МСС приводит к зависимости пика в плотности состояний КТ на нулевой частоте от значения проекции спина [142]. Также нелокальность МСС можно детектировать, если КТ находится в режиме Кондо [143].

3.3.3. Анализ флуктуационных характеристик транспортного тока. Другим инструментом, который может служить дополнительным доказательством существования МСС, является анализ флуктуаций тока. Изучение автокорреляций в системе, где две ММ соединены с противоположными контактами, показывает, что отношение дробового шума контакта к току в нём (фактор Фано контакта) в режиме слабой проводимости равно единице [101, 103, 144, 145]. В этой ситуации основной вклад в ток вносят процессы перекрёстного андреевского отражения на МСС или прямого переноса заряда через МСС, что является непосредственным следствием нелокальности этого квазичастичного возбуждения. Кроме того, в режиме слабой проводимости кросскорреляции токов в противоположных контактах положительны и максимальны при $\varepsilon_0 \gg eV$, где ε_0 — энергия МСС [144]. В противоположном пределе, $\varepsilon_0 \ll eV$, кросскорреляции стремятся к нулю, что свидетельствует о доминировании процессов резонансного локального андреевского отражения на МСС [145, 146]. Аналогичное поведение кросскорреляций наблюдается и в топологически тривиальной фазе. Когда только одна из двух ММ связана с контактом в одноконтантной геометрии, его фактор Фано в режиме слабой проводимости равен 2, поскольку в данном случае снова превалируют процессы локального андреевского отражения на МСС [103].

В ряде работ особенности флуктуаций тока изучались в системе, где оба контакта связывались с КТ, которая в свою очередь взаимодействовала благодаря туннелированию с одной из двух ММ [129, 147–151]. В такой ситуации было продемонстрировано универсальное поведение шума в контакте как при малых напряжениях, так и в существенно неравновесном режиме [147, 150, 151]. В противоположность кросскорреляциям токов в контактах, связанных с разными ММ, в данном случае эта характеристика оказывается отрицательной и стремится к нулю в пределе больших напряжений [129, 148, 149]. Такое поведение также позволяет отличить существование ММ от других сценариев возникновения пика кондактанса при нулевом напряжении (эффект Кондо, АСС).

3.3.4. Изучение спиновой поляризации майорановского связанного состояния. Ещё одной характеристикой МСС является его спиновая поляризация [152–154]. В работе [153] показано, что если магнитное поле $\mathbf{B}$ направлено вдоль оси z , а вектор эффективного поля Рашбы $\mathbf{B}_{\text{SO}}$ коллинеарен оси y , то спиновая поляризация на концах СП изменяется в xz -плоскости. Эта характеристика может быть использована в качестве локального (зависящего от координаты) параметра порядка при описании топологического фазового перехода [153, 155, 156]. Величина и направление вектора спиновой поляризации могут зависеть как от природы спин-орбитальной связи [153], так и от величины и направления внешнего магнитного поля [140, 157, 158]. При больших магнит-

ных полях и значениях спин-орбитального взаимодействия, соответствующих экспериментально наблюдаемому, z -компонента является доминирующей, в то время как x -компонента имеет порядок малости $O(\Delta/B, \alpha/B)$ и определяет величину скоса спиновой поляризации. Стоит заметить, что эта компонента спиновой поляризации пропорциональна аналогичной составляющей локальной майорановской поляризации, если $\mathbf{B} \parallel z$ и $\mathbf{B}_{\text{SO}} \parallel y$ [153, 155]. В общем случае соотношение между x - и z -компонентами можно определять, например, исходя из величин антикроссинга уровней энергии КТ и МСС в условиях резонанса этих подсистем (рис. 13а, г) [137, 140].

Следствием ненулевой спиновой поляризации МСС в процессах транспорта является андреевское рассеяние без изменения проекции спина [159, 160] и неколлинеарное андреевское отражение [161]. Таким образом, существование МСС может быть проверено средствами спин-поляризованной туннельной спектроскопии. В работе [76] показано нарушение симметрии спин-поляризованных токов в СП за счёт отмеченной спиновой поляризации МСС. На основе этого эффекта возможно реализовать переключатель тока, в котором контроль за направлением последнего осуществляется с помощью магнитного поля затвора.

3.3.5. Методика, основанная на эффекте кулоновской блокады. Обсуждавшиеся в разделах 3.3.1–3.3.4 результаты относятся к ситуации, когда СП заземляется напрямую. Однако ряд эффектов, перспективных с точки зрения детектирования МСС и приложений, имеют место и при учёте зарядовой энергии E_c в процессах туннелирования между проволокой и контактами или, другими словами, в режиме кулоновской блокады. Такая зависимость может возникать, когда изучаемая гибридная проволока имеет достаточно небольшие размеры. Тогда, если энергия АСС E_0 на рис. 14а больше E_c , то пики кондактанса при нулевом напряжении, связанные с вырождением состояний с $2N$ и $2N+2$ электронами, отстоят друг от друга на величину поля затвора, пропорциональную $2e$, т.е. транспорт осуществляется за счёт куперовских пар (см. синие параболы и синюю кривую на рис. 14а сверху и снизу соответственно) [162–164].

С возрастанием магнитного поля квазичастичная энергия понижается вследствие эффекта Зеемана. Таким образом, при $E_0 < E_c$ состояние с нечётным числом частиц может стать основным при изменении напряжения на затворе и пики кондактанса расщепляются (см. зелёные параболы и зелёную кривую на рис. 14а сверху и снизу соответственно). Если реализуется МСС ($E_0 = 0$), то расстояние между максимумами кондактанса становится пропорциональным $1e$ (см. красные параболы и красную кривую на рис. 14а сверху и снизу соответственно). Поскольку в этом случае добавление заряда $2e$ в проволоку, находящуюся в топологически нетривиальной фазе, становится менее энергетически выгодным, чем добавление заряда e , процессы локального андреевского отражения на МСС подавляются. В результате основной вклад в ток начинают вносить процессы одноэлектронного туннелирования и, следовательно, в режиме сильной кулоновской блокады максимальное значение кондактанса равно G_0 вместо $2G_0$ [165–167]. Причём двукратное уменьшение пика проводимости наблюдается и при ненулевых температурах [168]. Поскольку в данной

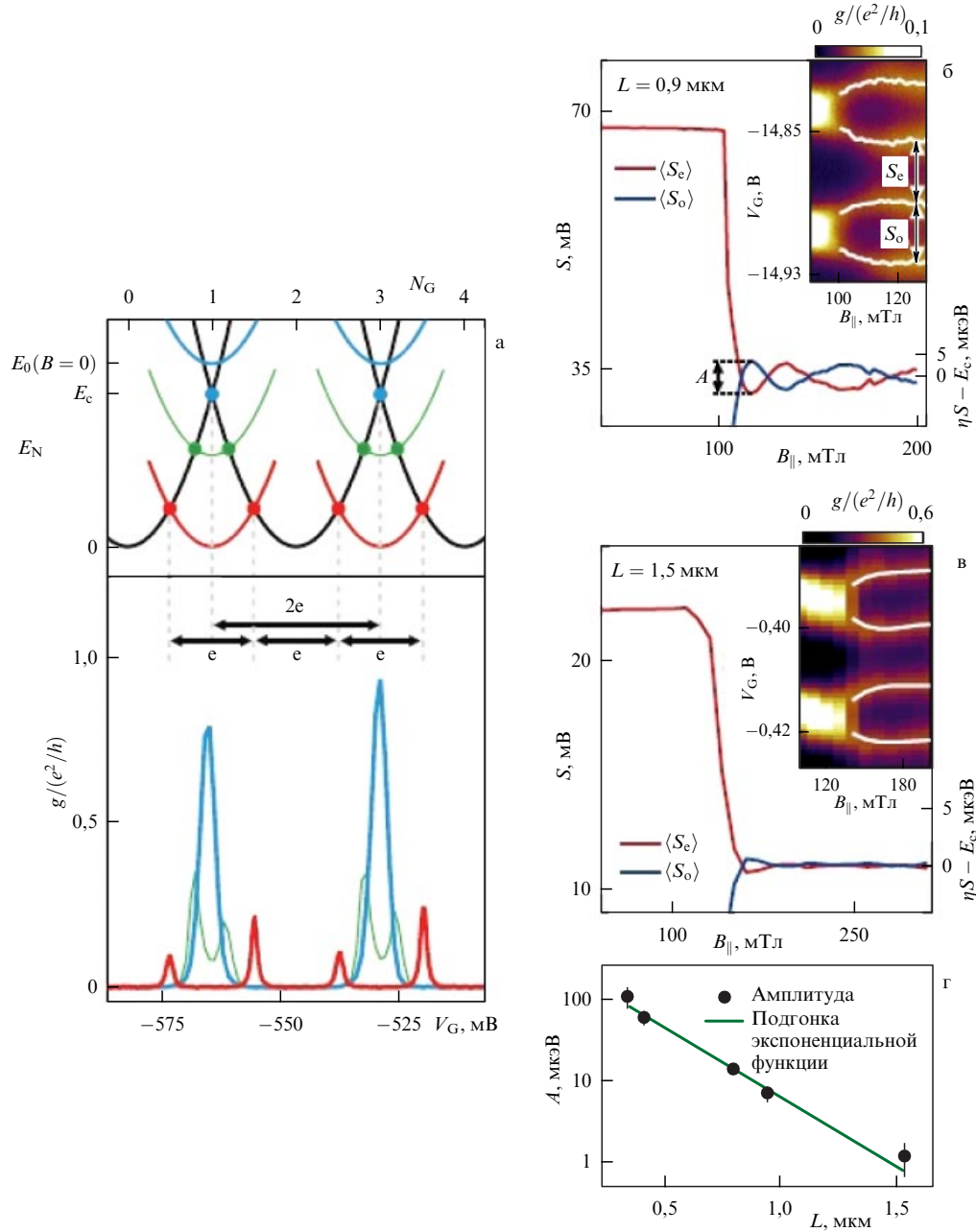


Рис. 14. (В цвете онлайн.) Проявление топологической защищённости майорановского связанного состояния при электронном транспорте через сверхпроводящую нанопроволоку в режиме кулоновской блокады. (а) Сверху: спектр устройства как функция нормированного напряжения на затворе N_G . Снизу: контактанс при нулевом напряжении исток–сток как функция напряжения на затворе V_G для различных значений магнитного поля. (б, в) Зависимости усреднённых расстояний между пиками контактанса $\langle S_{e,o} \rangle$ от магнитного поля $B_{||}$ для проволоки длиной $L = 0,9$ мкм и $L = 1,5$ мкм соответственно. На вставках: карты контактанса в координатах $(B_{||}, V_G)$. (г) Зависимость амплитуды осцилляций $\langle S_{e,o} \rangle$ от длины проволоки [162].

ситуации когерентный транспорт между противоположными контактами осуществляется через две разнесённые невзаимодействующие ММ (эквивалентно прохождению через одиночную КТ), подобные процессы можно интерпретировать как квантовую телепортацию [166]. Если волновые функции ММ перекрываются, то время транспорта между ними становится отличным от нуля и обратно пропорциональным величине этой гибридации [169].

В эксперименте [162] СП в режиме кулоновской блокады была использована для демонстрации топологической защищённости МСС [12, 104]. С этой целью измерялись усреднённые значения расстояний между

пиками контактанса, возникающими вследствие вырождения состояний с чётным и нечётным числом частиц $\langle S_{e,o} \rangle$. Из рисунка 14б, в видно, что эти величины осциллируют с амплитудой A при изменении зеемановского поля. Причём, как видно из вставок на рис. 14, $S_{e,o}$ для $B_{||} \approx 120$ мТл в два раза меньше, чем S_e для $B_{||} \approx 90$ мТл, что указывает на $1e$ -периодичность резонансов проводимости и одноэлектронный транспорт в больших полях. Однако наиболее существенно, что амплитуда A экспоненциально затухает с увеличением длины проволоки, как видно из рис. 14г.

Стоит заметить, что в работе [162] другой эффект возрастания амплитуды колебаний с увеличением маг-

нитного поля, характерный для МСС, обнаружен не был. Это может объясняться совместным влиянием температурного фактора, многозонности и присутствия АСС, локализованных в областях с КТ, которые расположены между контактами и гибридной структурой [170].

3.3.6. Обнаружение майорановского связанного состояния в интерференционных структурах. Начиная с классической работы Ааронова и Бомы [171] влияние электромагнитного потенциала на движение квантовой частицы применялось во многих исследованиях для анализа особенностей когерентного транспорта в мезоскопических структурах (см., например, [172–174]). Этот эффект был также исследован в системах с МСС. Можно выделить несколько вариантов интерферометров Ааронова–Бомы, включающих в себя топологический сверхпроводник.

В стандартной геометрии СП находится в одном из рукавов кольца. Тогда топологический фазовый переход в такой структуре можно определить по удвоению периода осцилляций Ааронова–Бомы в кондактансе, которое не зависит от степени беспорядка и объясняется возможностью транспорта отдельных фермиевских квазичастиц, а не куперовских пар [175, 176] (по той же причине реализуется 4π -периодический эффект Джозефсона в контакте двух топологических сверхпроводников [12, 177, 178]). При рассмотрении незатухающего тока в таком кольце нетривиальная фаза характеризуется появлением h/e -гармоники, которая остаётся конечной в нулевом магнитном потоке со знаком, определяемым ФЧ основного состояния СП [179]. При этом фиксация чётности осуществляется переводом проволоки в режим кулоновской блокады. Такая же система рассматривалась при определении различий интерференционных картин в случае МСС и АСС для структур с нулевой [180] и ненулевой зарядовой энергией [181, 182].

Одной из нестандартных геометрий является схема ММ/КТ/ММ, в которой топологический сверхпроводник имеет форму кольца, а между двумя ММ, локализованными на противоположных концах проволоки, располагается КТ. Данная система была предложена в качестве топологического кубита, в котором операция неабелева поворота в пространстве вырожденных основных состояний может быть осуществлена посредством одноэлектронного туннелирования в КТ в режиме кулоновской блокады. Магнитный поток сквозь такое кольцо позволяет перевести его в желаемую точку вырождения энергий [183, 184].

Описанная конфигурация ММ/КТ/ММ использовалась для анализа отличий топологической h/e -периодичности кондактанса от нетопологической, наблюдаемой в случае нормального, а не сверхпроводящего кольца [185]. В работе [181] КТ между ММ была заменена протяжённым 1D-электродом, соединённым с контактом. Показано, что в топологически нетривиальной фазе наблюдаются осцилляции проводимости с периодом 4π (если квант потока определён как $\phi_0 = h/(2e)$) благодаря процессам нелокального туннелирования через МСС, тогда как в тривиальной фазе осцилляции не наблюдаются.

Результатом деструктивной интерференции при когерентном транспорте в кольце Ааронова–Бомы является резонанс Фано [186]. Предложено несколько способов детектирования МСС на основе этого эффекта. В работе [187] изучалась модификация резонанса Фано в проводимости

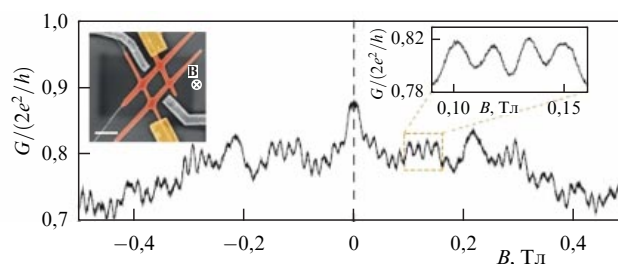


Рис. 15. (В цвете онлайн.) Осцилляции Ааронова–Бомы в кондактансе кольца, изготовленного из проволок InSb (показаны оранжевым цветом на вставке в левой части рисунка) [122].

мости кольца, состоящего из двух КТ, параллельно связанных с контактами. При этом одна из точек взаимодействует с цепочкой Китаева. Шанг и др. [188] рассмотрели такую цепочку между КТ. В работах [189, 190] СП служит одним из контактов в двухконтактной схеме. Кроме того, резонанс Фано и его свойства рассматривались в режиме локального транспорта [191]. Дополнительно анализировались вклады процессов локального и перекрёстного андреевского отражения в эффект Фано для различных геометрий интерферометра с МСС [192].

В большинстве случаев при теоретическом изучении транспортных характеристик кольца Ааронова–Бомы, включающего два рукава, предполагается, что в одном из рукавов контакты связаны между собой туннелированием напрямую. Взаимодействие СП, находящейся в другом рукаве, также описывается процессами прямого перескока в левый и правый контакты. Таким образом, наличие подводящих проволок в нормальной фазе (далее нормальные проволоки, или НП), которые связывают СП с контактами или контакты между собой, не учитывается. С другой стороны, в последнее время продемонстрирована возможность создания таких квантовых устройств, в том числе кольца Ааронова–Бомы, на основе полупроводниковых проволок, в которых сами эти объекты как в нормальной, так и сверхпроводящей фазе выступают в роли рукавов (см. вставку в левой части рис. 15) [122].

Принимая во внимания указанные обстоятельства, ниже мы рассмотрим интерферометр (или кольцо), состоящий из четырёх НП: две из них составляют верхний рукав, две другие — нижний (рис. 16). СП отделяет левые верхнюю и нижнюю НП от правых верхней и нижней НП и в то же время связывает верхний и нижний рукава, играя роль мостика. Кольцо находится во внешнем магнитном поле B , приложенном параллельно СП (компонента магнитного поля, перпендикулярная плоскости кольца, отвечает за возникновение фазы Ааронова–Бомы). Магнитное поле индуцирует топологический фазовый переход в мостике и позволяет получить топологически тривиальные низкоэнергетические возбуждения в НП. В результате интерференционное взаимодействие носителей, распространяющихся в транспортных каналах НП и мостика, приводит к эффекту Фано. С использованием метода неравновесных функций Грина [194–196] будет изучено влияние магнитного поля, интенсивности сверхпроводящего спаривания и других факторов на отмеченные резонансы Фано.

Отметим, что аналогичная геометрия исследовалась также в работе [188]. Однако авторы [188] не использовали микроскопического описания СП, а вместо НП

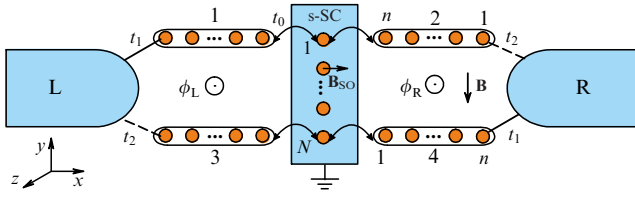


Рис. 16. Кольцо Аарона–Бома, образованное сверхпроводящей нанопроволокой (сверхпроводник s-типа, s-SC), концы которой параллельно связаны с металлическими контактами с помощью подводящих проволок в нормальной фазе [75, 217].

рассматривали КТ. Раинис и др. [193] в рамках метода сильной связи изучали кольцо с мостиком, содержащим дробные фермионы, не анализируя взаимодействие этих состояний с низкоэнергетическими модами НП.

3.4. Особенности когерентного транспорта в кольце Аарона–Бома с мостиком в фазе топологической сверхпроводимости

3.4.1. Ток в интерференционном устройстве в терминах неравновесных функций Грина. Особенности когерентного квантового транспорта, которые обсуждаются ниже, связаны с присутствием СП. Чтобы воспользоваться её гамильтонианом (57) H_W при $U = V = 0$, введённым в разделе 3.2, выберем оси так, как показано на рис. 16. НП, которые составляют рукава кольца (см. рис. 16), полагаются одинаковыми. Гамильтонианы НП, H_{1-4} , получаются из (57) при $\Delta = \alpha = 0$. Туннельное взаимодействие между СП и НП описывается гамильтонианом

$$H_T = -t_0 \sum_{\sigma} [(b_{L1\sigma}^+ + b_{R1\sigma}^+)a_{1\sigma} + (d_{L1\sigma}^+ + d_{R1\sigma}^+)a_{N\sigma}] + \text{h.c.}, \quad (74)$$

где t_0 — параметр перескока между крайними узлами СП и НП; $b_{L(R)n\sigma}^+$ — оператор рождения электрона со спином σ на n -м узле левой (правой) верхней НП; $d_{L(R)1\sigma}^+$ — оператор рождения электрона со спином σ на первом узле левой (правой) нижней НП. В свою очередь связь устройства (СП + НП) с контактами также описывается гамильтонианом, который одновременно является оператором взаимодействия при применении диаграммной техники для неравновесных функций Грина,

$$H_V = - \sum_{k\sigma} \left\{ c_{Lk\sigma}^+ \left[t_1 \exp\left(-i \frac{\Phi_L}{2}\right) b_{L1\sigma} + t_2 \exp\left(i \frac{\Phi_L}{2}\right) d_{L1\sigma} \right] + c_{Rk\sigma}^+ \left[t_2 \exp\left(i \frac{\Phi_R}{2}\right) b_{R1\sigma} + t_1 \exp\left(-i \frac{\Phi_R}{2}\right) d_{R1\sigma} \right] \right\} + \text{h.c.}, \quad (75)$$

где $c_{L(R)k\sigma}^+$ — оператор рождения электрона с волновым вектором k и спином σ в левом (правом) контакте, $t_{1,2}$ — параметры перескока между контактами и устройством, $\Phi_{L(R)} = \phi_{L(R)}/\phi_0$, $\phi_{L(R)}$ — магнитный поток сквозь левое (правое) полукольцо, $\phi_0 = \hbar/e$ — квант потока (далее полагаем $\hbar = 1$). Гамильтониан i -го контакта ($i = L, R$) имеет вид $\hat{H}_i = \sum_k (\epsilon_k - \mu_i) c_{ik\sigma}^+ c_{ik\sigma}$, где $\mu_{L,R} = \mu \pm eV/2$ — электрохимический потенциал контактов, учитывающий приложенное напряжение смещения.

Транспортные свойства интерференционного устройства будут анализироваться на основе метода неравновесных функций Грина, когда последние определяются из уравнений в узельном представлении. Чтобы рассчитать стационарный ток в рамках этого подхода, диагонализуем гамильтониан кольца, $H_D = H_W + \sum_{i=1}^4 H_i + H_T$, используя операторы Намбу $\hat{f}_i = (f_{i\uparrow} f_{i\uparrow}^+ f_{i\downarrow} f_{i\downarrow}^+)^T$, где $f_{i\sigma}$ — оператор уничтожения электрона со спином σ на i -м узле НП или СП [75]. Тогда матричная неравновесная функция Грина устройства определяется как

$$\hat{G}^{ab}(\tau, \tau') = -i \langle T_C \hat{\Psi}(\tau_a) \otimes \hat{\Psi}^+(\tau_b') \rangle, \quad (76)$$

где T_C — оператор упорядочения на контуре Келдыша, включающем в себя нижнюю (индекс $+$) и верхнюю (индекс $-$) ветви [194], $a, b = +, -$, $\hat{\Psi}$ содержит операторы Намбу СП и всех НП,

$$\hat{\Psi} = (\hat{b}_{L1} \dots \hat{b}_{Ln} \hat{d}_{L1} \dots \hat{d}_{Ln} \hat{a}_1 \dots \hat{a}_N \hat{b}_{R1} \dots \hat{b}_{Rn} \hat{d}_{R1} \dots \hat{d}_{Rn})^T. \quad (77)$$

Электронный ток в левом контакте $I = e \langle \dot{N}_L \rangle$ ($N_L = \sum_{k\sigma} c_{Lk\sigma}^+ c_{Lk\sigma}$ — оператор числа частиц в левом контакте) в терминах введённых функций Грина представляется следующим образом:

$$I = 2e \sum_k \text{Tr} \left[\hat{\sigma} \text{Re} \left\{ \hat{t}_{L1}^+(t) \hat{G}_{k,L1}^{+-}(t, t) + \hat{t}_{Ln}^+(t) \hat{G}_{k,Ln}^{+-}(t, t) \right\} \right], \quad (78)$$

где $\hat{\sigma} = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$. В результате унитарного преобразования [197, 198] зависимость от напряжения исток–сток переносится в оператор H_V , вследствие чего матрицы $\hat{t}_{L1(n)}(t)$ становятся функциями времени:

$$\hat{t}_{L1} = \frac{t_1}{2} \hat{\sigma} \hat{T} \hat{\Phi}_L, \quad \hat{t}_{Ln} = \frac{t_2}{2} \hat{\sigma} \hat{T} \hat{\Phi}_L^+, \quad (79)$$

$$\hat{T} = \text{diag} \left[\exp\left(-i \frac{eV}{2} t\right), \exp\left(i \frac{eV}{2} t\right), \exp\left(-i \frac{eV}{2} t\right), \exp\left(i \frac{eV}{2} t\right) \right],$$

$$\hat{\Phi}_L = \text{diag} \left[\exp\left(-i \frac{\Phi_L}{2}\right), \exp\left(i \frac{\Phi_L}{2}\right), \exp\left(-i \frac{\Phi_L}{2}\right), \exp\left(i \frac{\Phi_L}{2}\right) \right].$$

В формуле (78) смешанные функции Грина имеют вид $\hat{G}_{k,L1}^{+-} = i \langle \hat{b}_{L1}^+ \otimes \hat{c}_{Lk} \rangle$, $\hat{G}_{k,Ln}^{+-} = i \langle \hat{d}_{Ln}^+ \otimes \hat{c}_{Lk} \rangle$. Поскольку $\hat{H}_D$ в пространстве операторов Намбу имеет вид гамильтониана свободных частиц, при раскрытии средних в $\hat{G}_{k,L1}^{+-}$ и $\hat{G}_{k,Ln}^{+-}$ используются те же принципы, что и для средних от T_C -упорядоченного произведения операторов вторичного квантования [195, 199]. В результате выражение (78) при $t \rightarrow 0$ переходит в

$$I = 2e \int_C d\tau_1 \text{Tr} \left\{ \hat{\sigma} \text{Re} \left[\hat{\Sigma}_{L1,L1}^{+a}(-\tau_1) \hat{G}_{L1,L1}^{a-}(\tau_1) + \hat{\Sigma}_{Ln,Ln}^{+a}(-\tau_1) \hat{G}_{Ln,Ln}^{a-}(\tau_1) + \hat{\Sigma}_{L1,Ln}^{+a}(-\tau_1) \hat{G}_{L1,Ln}^{a-}(\tau_1) + \hat{\Sigma}_{Ln,L1}^{+a}(-\tau_1) \hat{G}_{Ln,L1}^{a-}(\tau_1) \right] \right\}, \quad (80)$$

где $\hat{\Sigma}_{Li,Lj}^{+a}(-\tau_1) = \hat{t}_{Li}^+(0)\hat{g}_{Lk}^{+a}(-\tau_1)\hat{t}_{Lj}(\tau_1)$ — ij -й блок матрицы собственнo-энергетической функции, описывающей влияние левого контакта на кольцо ($i, j = 1, n$); $\hat{g}_{Lk}^{+a}(-\tau_1) = -i\langle T_C \hat{c}_{Lk}(0) \otimes \hat{c}_{Lk}^+(\tau_1) \rangle_0$ — матричная затравочная функция Грина левого контакта.

Интегрируя по времени τ_1 и применяя преобразование Фурье, находим

$$I = e \sum_{i,j=1,n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} \text{Tr} \left\{ \hat{\sigma} \text{Re} \left[\hat{\Sigma}_{Li,Lj}^r(\omega) \hat{G}_{Lj,Li}^{+-}(\omega) + \hat{\Sigma}_{Li,Lj}^{+-}(\omega) \hat{G}_{Lj,Li}^a(\omega) \right] \right\}. \quad (81)$$

Поскольку в системе отсутствуют многочастичные взаимодействия, функции Грина в подынтегральном выражении (81) определяются с учётом всех процессов туннелирования между устройством и контактами [195]. В частности, $\hat{G}_{Lj,Li}^a$ — блок матрицы опережающей функции Грина устройства $\hat{G}^a$ — находится из уравнения Дайсона,

$$\hat{G}^a = \left[(\omega - \hat{H}_D - \hat{\Sigma}^r(\omega))^{-1} \right]^+, \quad (82)$$

где $\hat{\Sigma}^r(\omega) = \hat{\Sigma}_L^r(\omega) + \hat{\Sigma}_R^r(\omega)$ — матрица запаздывающей собственнo-энергетической функции, отражающей влияние обоих контактов на интерферометр. В дальнейшем воспользуемся приближением широкозонных контактов, в соответствии с которым можно пренебречь действительными частями собственнo-энергетических функций, а мнимые части рассматривать постоянными. Тогда имеем следующие ненулевые блоки $\hat{\Sigma}^r$:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{L1,L1}^r &= \hat{\Sigma}_{Rn,Rn}^r = -\frac{i}{2} \hat{I}_{11}, \quad \hat{\Sigma}_{R1,R1}^r = \hat{\Sigma}_{Ln,Ln}^r = -\frac{i}{2} \hat{I}_{22}, \\ \hat{\Sigma}_{L1,Ln}^r &= -\frac{i}{2} \hat{I}_{12}(\hat{\Phi}_L^2)^+, \quad \hat{\Sigma}_{Ln,L1}^r = -\frac{i}{2} \hat{I}_{12} \hat{\Phi}_L^2, \\ \hat{\Sigma}_{R1,Rn}^r &= -\frac{i}{2} \hat{I}_{12}(\hat{\Phi}_R^2)^+, \quad \hat{\Sigma}_{Rn,R1}^r = -\frac{i}{2} \hat{I}_{12} \hat{\Phi}_R^2, \end{aligned} \quad (83)$$

где $\hat{I}_{ii} = \Gamma_{ii} \hat{I}_4$, $\Gamma_{ii} = 2\pi t_i^2 \rho$ — функции уширения уровней устройства за счёт взаимодействия с контактом ($i = 1, 2$), ρ — плотность состояний контакта, $\Gamma_{12} = \sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}$, $\hat{I}_4$ — единичная матрица 4×4 ,

$$\hat{\Phi}_R = \text{diag} \left[\exp\left(i \frac{\Phi_R}{2}\right), \exp\left(-i \frac{\Phi_R}{2}\right), \exp\left(i \frac{\Phi_R}{2}\right), \exp\left(-i \frac{\Phi_R}{2}\right) \right].$$

При непосредственном рассмотрении асимметричного (симметричного) кольца будем полагать, что $\Gamma_{22} = \Gamma_{11}/2 = 0,01$ ($\Gamma_{22} = \Gamma_{11} = 0,01$). Значения $\Gamma_{11,22}$ приведены в единицах t .

Блоки $\hat{\Sigma}_{Li,Lj}^{+-}$ в (81) получаются из решения уравнения Келдыша, $\hat{G}^{+-} = \hat{G}^r \hat{\Sigma}^{+-} \hat{G}^a$. При этом ненулевые блоки $\hat{\Sigma}^{+-}$ имеют вид

$$\hat{\Sigma}_{\alpha i, \alpha j}^{+-} = -2\hat{\Sigma}_{\alpha i, \alpha j}^r \hat{F}_\alpha, \quad \alpha = L, R, \quad i, j = 1, n, \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_{L(R)} &= \text{diag} \left[f\left(\omega \pm \frac{eV}{2}\right), f\left(\omega \mp \frac{eV}{2}\right), \right. \\ &\quad \left. f\left(\omega \pm \frac{eV}{2}\right), f\left(\omega \mp \frac{eV}{2}\right) \right], \end{aligned}$$

где $f(\omega \pm eV/2)$ — функции Ферми–Дирака.

3.4.2. Резонансы Брейта–Вигнера и Фано в кондактансе кольца, когда мостик находится в топологически нетривиальной фазе. Как следует из рассмотрения в разделе 3.3, главными чертами МСС, на обнаружение которых нацелены современные эксперименты, являются его нулевая энергия и нелокальность. Таким образом, при рассмотрении транспортных свойств интерференционного устройства, изображённого на рис. 16, нас будут интересовать только те из них, которые определяются присутствием низкоэнергетических возбуждений и в НП, и в СП, а также характером пространственного распределения возбуждений с нулевой или близкой к нулю энергией в СП. Следовательно, непосредственные численные расчёты осуществляются в режиме линейного отклика, когда $eV \rightarrow 0$.

В дальнейшем предполагается, что СП и НП являются относительно короткими, т.е. $N = 30$, $n = 20$, что значительно уменьшает объём вычислений. Однако это приводит к тому, что для рассмотрения топологически нетривиальной фазы в рамках параметров, соответствующих экспериментам ($L = 250$ мкэВ, $\alpha_R = 0,2$ эВ $\text{\AA}$, $g = 50$, $B \sim 0,1-1$ Тл) [38], необходимо использовать неестественно большое значение постоянной решётки, $a = 50$ нм [105]. Учитывая эффективную массу носителей в полупроводниковых проволоках $m^* = 0,015m_0$ [38], имеем параметр перескока $t = \hbar^2/(m^*a^2)$, который рассматривается в дальнейшем в качестве единицы измерения. Тогда основные параметры СП, использованные при построении большей части графиков раздела 3.4, составляют: $\alpha = 0,195$, $L = 0,243$. Значения других величин: $k_B T \approx 0$, $\mu = 0$, $t_0 = 0,1$.

Начнём со случая, в котором межчастичные взаимодействия в СП отсутствуют, $U = V = 0$ [75]. При этом обратимся к зависимости кондактанса от энергии магнитного поля в плоскости устройства h . Транспорт в системе определяется одночастичными возбуждениями в окрестности уровня Ферми. Соответствующие энергии ε_{11} (синяя пунктирная кривая) отдельной НП и энергии ε_{w1} и ε_{w2} (красная сплошная и зелёная штриховая кривые) СП как функции h изображены на рис. 17а. Видно, что энергия ε_{11} осциллирует, периодически обращаясь в нуль при $h \lesssim 2$. В свою очередь у СП в топологически нетривиальной области параметров, определяемой неравенством (69) при $\epsilon_0 = t$ [35, 36], энергия ε_{w1} отщепляется от ε_{w2} и также периодически принимает нулевые значения. Таким образом, нули МСС ε_{w1} сосуществуют с нулями ε_{11} , имеющими топологически тривиальную природу.

Зависимость кондактанса от энергии магнитного поля в случае симметричного кольца представлена на рис. 17б. В слабых полях, $h \lesssim 0,25$, пики $G(h = \varepsilon_{11})$ значительно подавлены, так как $\varepsilon_{w1} \gg 0$ (рис. 17а). Резонансы в этой области, при которых $G(h = \varepsilon_{11}) \rightarrow 1$, могут возникать, если, например, $\Phi_i \neq 0$. Далее, мостику в фазе топологической сверхпроводимости соответствует набор резонансов двух типов (область $0,25 \lesssim h \lesssim 2$). К первому относятся симметричные резонансы брейт-вигнеровского типа, ко второму — асимметричные резонансы или резонансы Фано. В сильных магнитных полях, $h \gtrsim 2$, проводимость близка к нулю, так как $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{w1} \gg 0$.

Чтобы лучше понять причины появления отмеченных резонансных особенностей при $0,25 \lesssim h \lesssim 2$, обратимся к наиболее простой ситуации, когда каждая НП включает в себя только один узел, а СП — два. В результате име-

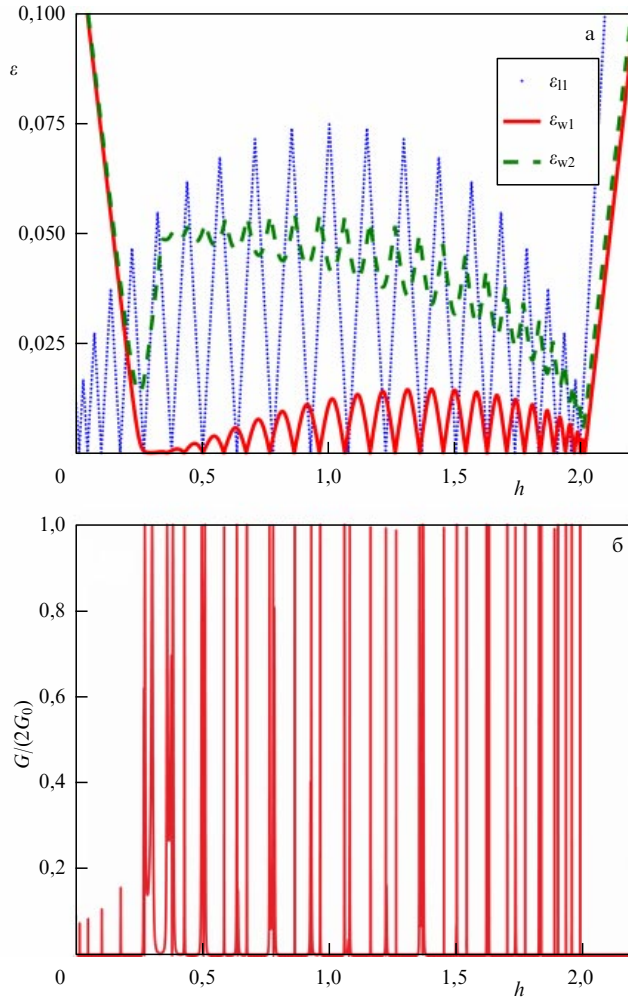


Рис. 17. (В цвете онлайн.) Зависимость (а) энергий одноэлектронных возбуждений проволок рукавов, ε_{11} , и мостика, $\varepsilon_{w1, w2}$, и (б) контактанса кольца от энергии магнитного поля, приложенного в плоскости устройства. Параметры: $U = V = 0$, $\Phi = 0$.

ется структура из шести КТ, верхний и нижний рукава которой параллельно соединены с контактами. Поскольку магнитное поле приближённо приводит к спин-поляризованному транспорту в кольце, для шеститочечной системы будем анализировать бесспиновый случай. Энергетический спектр такой структуры при $\alpha = \Delta = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2} &= \xi_{\downarrow} \equiv \varepsilon, \\ \varepsilon_{3,4} &= \varepsilon + \frac{1}{4} \sqrt{t^2 + 8t_0^2} \pm \frac{t}{4}, \\ \varepsilon_{5,6} &= \varepsilon - \frac{1}{4} \sqrt{t^2 + 8t_0^2} \pm \frac{t}{4}. \end{aligned} \quad (85)$$

Из (85) видно, что в закрытой системе имеется пара вырожденных ($\varepsilon_{1,2}$), а также две пары связанных и анти-связанных состояний ($\varepsilon_{3,4}$ и $\varepsilon_{5,6}$). Присутствие таких решений создаёт условия для реализации связанных состояний в континууме (ССК) [200], т.е. состояний дискретного спектра, не взаимодействующих с контактами в случае открытой системы, когда $\Gamma \neq 0$ [201, 202]. Возникновение состояний такого рода является естественным следствием неоднородности рассматриваемой структуры [203, 204].

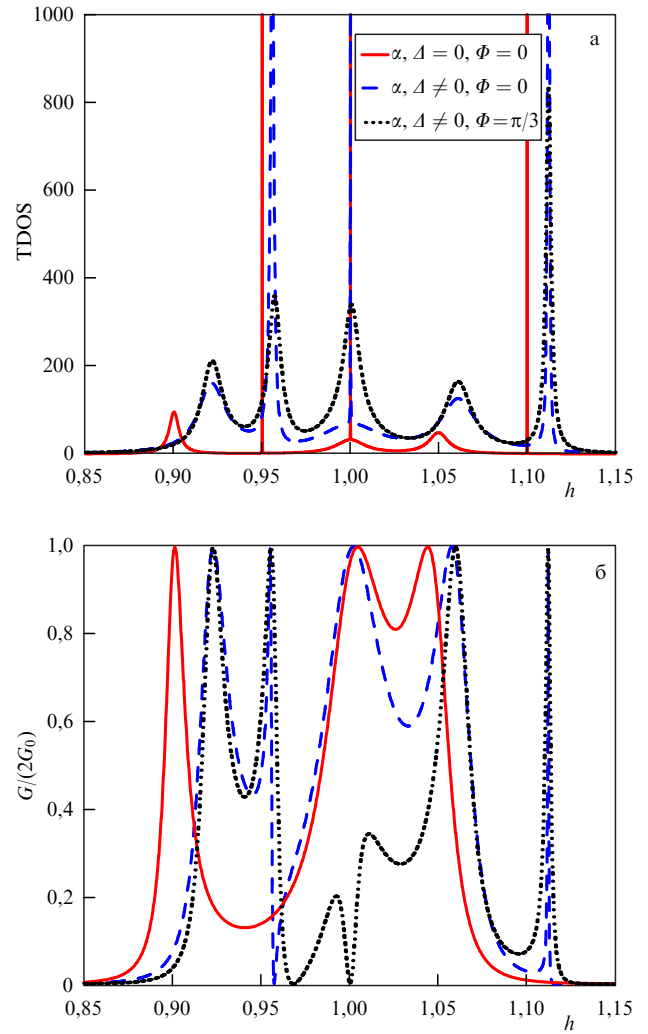


Рис. 18. (В цвете онлайн.) Зависимости плотности состояний (а) и контактанса (б) структуры из шести квантовых точек от энергии магнитного поля при $t = 0,1$.

Существование ССК в структуре из шести КТ проиллюстрировано на рис. 18а, где показана зависимость полной плотности состояний (Total Density Of States — TDOS) от зеемановской энергии,

$$\text{TDOS}(\omega = 0; h) = -\frac{\text{Tr}[\text{Im}\{\hat{G}^r(\omega = 0; h)\}]}{\pi}, \quad (86)$$

где ω — энергия частицы. Ситуации с $\alpha = \Delta = 0$ соответствует красная кривая. В случае вырожденных состояний широкий максимум TDOS при $h = 1$, который относится к состоянию с энергией ε_1 , совпадает с узким пиком, обусловленным ССК с энергией ε_2 (ширина этого пика пропорциональна δ^2 , где δ — инфинитезимальный параметр, отвечающий за аналитическое продолжение $\hat{G}^r(\omega)$). Кроме того, у двух пар из связанного и анти-связанного состояний с энергиями $\varepsilon_{3,4}$ и $\varepsilon_{5,6}$ широкий максимум и узкий пик ССК разнесены. На рисунке 18а в соответствии с (85) они располагаются слева и справа от $h = 1$. Все три широких максимума в плотности состояний проявляются в виде симметричных резонансов в контактансе (см. красную сплошную кривую на рис. 18б). В свою очередь наличие ССК никак не отражается на транспортных свойствах.

При $\alpha, \Delta \neq 0$ возникает ненулевое уширение уровней ССК, близких к $\varepsilon_{4,6}$, поскольку спин-орбитальное взаимодействие приводит к нарушению пространственной симметрии собственных состояний кольца (см. синюю штриховую кривую на рис. 18а) [205]. Как следствие, в кондактансе появляются резонансы Фано при тех же значениях h , что и уширенные пики в плотности состояний. Далее, время жизни ССК, связанного с парой вырожденных состояний, можно сделать конечным, вводя фазу Ааронова – Бома [206, 207]. Тогда все три пика ССК в плотности состояний приобретают ненулевую ширину, а кондактанс имеет три асимметричных пика Фано (см. чёрные пунктирные кривые на рис. 18а, б). Из (85) следует, что расщепление энергий пары связанного и антисвязанного состояний определяется параметром t . В частности, если $t = 1$, т.е. $t \gg t_0$, то в окрестности $h = 1$ в плотности состояний будут два широких максимума и два пика ССК. Дополнительно один широкий максимум (пик ССК) возникнет на удалении слева (справа) от этой точки.

При увеличении числа узлов в системе и возвращении к кольцу количество максимумов и пиков ССК возрастает. При этом существенно, что время жизни ССК становится конечным, только если наименьшая энергия возбуждения СП ε_{w1} близка к нулю, что в рассматриваемом случае означает реализацию топологически нетривиальной фазы (рис. 17а).

Типичная структура резонансов кондактанса в ТНОП продемонстрирована на рис. 19а. Эта зависимость модифицирована по сравнению с описанной выше картиной транспорта через структуру из шести КТ. В частности, один из резонансов Фано на рис. 18б трансформируется в набор брейт-вигнеровских пиков в случае кольца. В результате остаются только резонансы Фано вблизи минимумов $\varepsilon_{11}(h)$ (один из них показан на рис. 19а). Одновременно с этим положения резонансов Брейта – Вигнера определяются нулями $\varepsilon_{w1}(h)$. При фиксированных h, Δ, α ширины симметричного и асимметричного резонансов зависят от ε_{11} и ε_{w1} соответственно: чем выше $\varepsilon_{11, w1}$, тем уже резонансы.

Как отмечено выше, ненулевая фаза Ааронова – Бома делает соответствующие ССК доступными для наблюдения в транспортных характеристиках. На рисунке 19б показан новый очень узкий резонанс Фано, возникающий при $\Phi_L = \Phi_R = \Phi \neq 0$, положение которого совпадает с нулём $\varepsilon_{11}(h)$.

Таким образом, наличие двух типов резонансов в кондактансе может быть на качественном уровне объяснено присутствием в устройстве нескольких взаимодействующих каналов для транспорта носителей. Действительно, если основной вклад создаётся каналом, относящимся к СП ($\mu = \varepsilon_{w1}$), то реализуется резонанс Брейта – Вигнера. Если, наоборот, в транспорте главным образом участвует канал НП ($\mu = \varepsilon_{11}$), то имеет место интерференция по сценарию Фано. Здесь можно проследить сходство с двойными квантовыми точками, проводящие свойства которых подробно изучались ранее [207, 210, 211]. В частности, отмечалась аналогичная реализация широкого резонанса Брейта – Вигнера и узкого резонанса Фано, что трактовалось как проявление известного из оптики эффекта Дикке [208, 209, 211], который выражается в возникновении широкого и узкого пиков в спектре люминесценции пары атомов [212]. Причём первый из пиков ассоциируется с короткоживущим коллек-

тивным возбуждением (superradiant state), а второй — с долгоживущим (subradiant state). Реализация симметричных и асимметричных резонансов при транспорте отмечается и в других низкоразмерных структурах [213]. В нашем случае при определённом выборе параметров схожее поведение кондактанса можно интерпретировать как топологический эффект Дикке, поскольку резонансы двух типов возникают именно в ТНОП.

3.4.3. Влияние кулоновских взаимодействий и беспорядка.

Для описания влияния кулоновского отталкивания в СП на полученные резонансные особенности кондактанса интерферометра воспользуемся обобщённым приближением среднего поля, область применения которого характеризуется неравенством $U, V \ll t$. В рамках данного подхода четырёхоператорные слагаемые в гамильтониане СП (57) записываются как [74]

$$\begin{aligned} Un_{l1}n_{l1} &= U[\langle n_{l1} \rangle n_{l1} + \langle n_{l1} \rangle n_{l1} - \langle a_{l1}^+ a_{l1} \rangle a_{l1}^+ a_{l1} - \\ &\quad - \langle a_{l1}^+ a_{l1} \rangle a_{l1}^+ a_{l1} - \langle a_{l1}^+ a_{l1}^+ \rangle a_{l1} a_{l1} - \langle a_{l1} a_{l1} \rangle a_{l1}^+ a_{l1}^+], \\ V \sum_{\sigma\sigma'} n_{l\sigma} n_{l+1, \sigma'} &= V \sum_{\sigma\sigma'} [\langle n_{l\sigma} \rangle n_{l+1, \sigma'} + \langle n_{l+1, \sigma'} \rangle n_{l\sigma} - \\ &\quad - \langle a_{l+1, \sigma}^+ a_{l\sigma} \rangle a_{l\sigma}^+ a_{l+1, \sigma} - \langle a_{l\sigma}^+ a_{l+1, \sigma'} \rangle a_{l+1, \sigma'}^+ a_{l\sigma} - \\ &\quad - \langle a_{l\sigma}^+ a_{l+1, \sigma'}^+ \rangle a_{l\sigma} a_{l+1, \sigma'} - \langle a_{l\sigma} a_{l+1, \sigma'} \rangle a_{l\sigma}^+ a_{l+1, \sigma'}^+]. \quad (87) \end{aligned}$$

Важно, что при включении даже слабого хаббардовского отталкивания из-за возрастания эффективного зеемановского расщепления и уменьшения интенсивности потенциала сверхпроводящего спаривания происходит смещение границ областей существования топологических фаз проволоки со спин-орбитальной связью [214]. Эти эффекты, пропорциональные $\langle a_{l\sigma}^+ a_{l\sigma} \rangle$ и $\langle a_{l\sigma} a_{l\sigma} \rangle$ соответственно, должны учитываться при рассмотрении транспорта, поскольку имеют тот же самый порядок малости, что и величины h и Δ .

Нормальные и аномальные средние из (87) находятся самосогласованно с помощью спин-зависящих коэффициентов преобразования Боголюбова $u_{ml\sigma}, v_{mj\sigma'}$:

$$\begin{aligned} \langle a_{l\sigma}^+ a_{j\sigma'} \rangle &= \sum_{m=1}^{2N} [f_m u_{ml\sigma} u_{mj\sigma'}^* + (1 - f_m) v_{ml\sigma}^* v_{mj\sigma'}], \\ \langle a_{l\sigma} a_{j\sigma'} \rangle &= \sum_{m=1}^{2N} [f_m v_{ml\sigma} u_{mj\sigma'}^* + (1 - f_m) u_{ml\sigma}^* v_{mj\sigma'}], \end{aligned} \quad (88)$$

где f_m — функция Ферми при значении энергии, равной энергии квазичастичного возбуждения с номером m . При учёте кулоновских взаимодействий в приближении (87) в матрице гамильтониана $\hat{H}_W$ происходят перенормировка и возникновение новых матричных элементов.

Влияние кулоновских взаимодействий на особенности кондактанса кольца в ТНОП представлено на рис. 20. Видно, что одноузельные корреляции немного смещают максимум асимметричного пика Фано, тогда как его минимум (или антирезонанс) сохраняет своё положение (ср. красную пунктирную и синюю штриховую кривые). Одновременно с этим брейт-вигнеровский пик сдвигается влево, так как соответствующий сдвиг приобретает и нулевая энергия МСС при $U \neq 0$. При $V \neq 0$ резонанс Брейта – Вигнера смещается в противоположном направлении (см. чёрную сплошную кривую). В свою очередь резонанс Фано остаётся на том же месте, а его ширина практически не изменяется. Заметим, что анало-

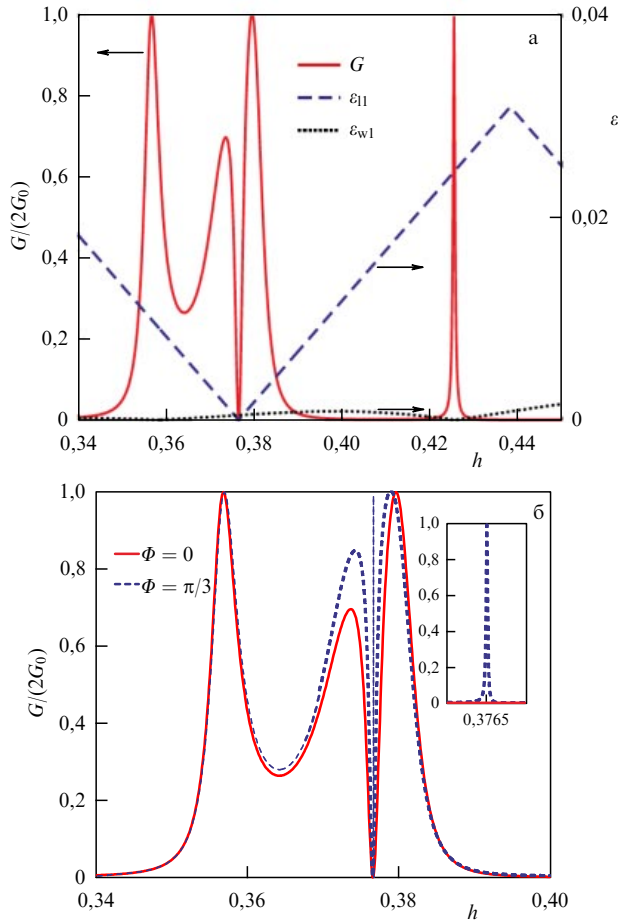


Рис. 19. (В цвете онлайн.) (а) Резонансы Брейта–Вигнера и Фано в контактансе кольца в случае, когда сверхпроводящий мостик находится в топологически нетривиальной фазе. Положение резонанса Брейта–Вигнера/Фано в контактансе (левая ось ординат) совпадает с минимумом энергии $\varepsilon_{w1}/\varepsilon_{l1}$ (правая ось ординат). (б) Влияние фазы Ааронова–Бома на контактанс. На вставке: индуцирование резонанса Фано при $\Phi_L = \Phi_R = \Phi \neq 0$.

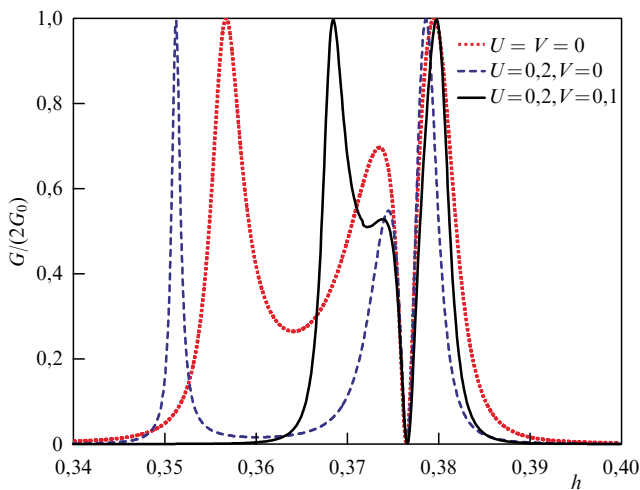


Рис. 20. (В цвете онлайн.) Влияние кулоновских взаимодействий на симметричный и асимметричный резонансы контактанса.

гичные эффекты наблюдаются и при учёте диагонального беспорядка в СП, $\xi_\sigma + \delta\xi_l$, $l = 1, \dots, N$ (где $\delta\xi_l$ — случайная добавка к одночастичной энергии на узле l , принимающая значения из интервала $[-1/2, 1/2]$).

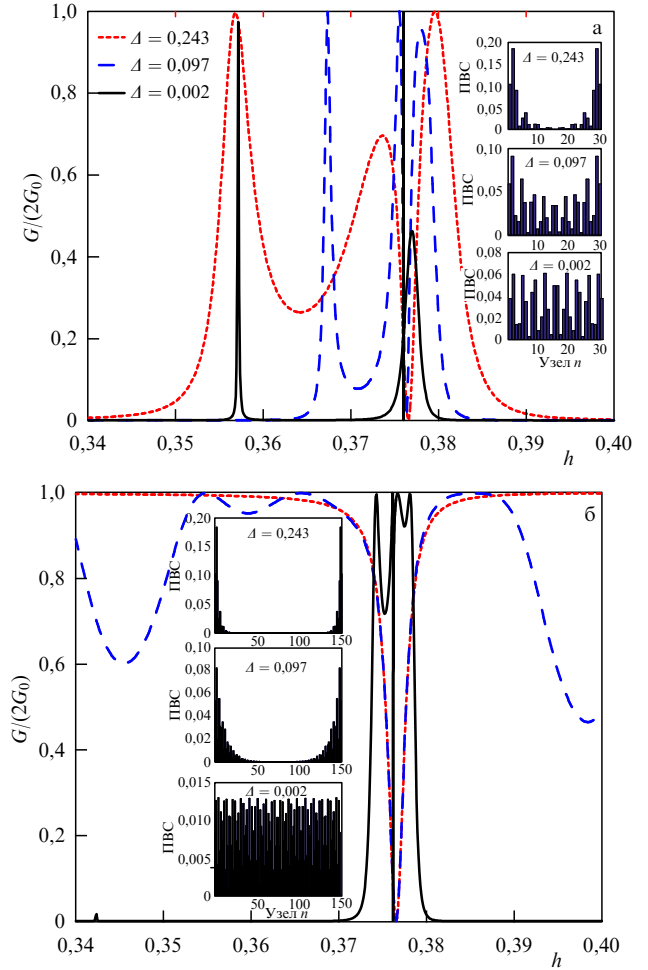


Рис. 21. (В цвете онлайн.) Зависимость резонанса Фано от величины сверхпроводящей щели проволоки для $N = 30$ (а) и $N = 150$ (б). На вставках: пространственное распределение плотности вероятности состояния (ПВС) с энергией ε_{w1} при различных Δ и $h = 0,375$.

3.4.4. Зависимость свойств резонанса Фано от типа низкоэнергетического возбуждения мостика. Из результатов, представленных в разделе 3.4.2, следует, что независимо от длины сверхпроводящего мостика резонансы Фано появляются при любых ненулевых α , Δ и μ , если магнитное поле удовлетворяет условию (69). Другими словами, данный резонанс присутствует независимо от пространственного распределения плотности вероятности состояния с энергией ε_{w1} , изменяющегося с краевого (майорановского) на объёмное (андреевское) при уменьшении ширины щели в спектре возбуждений СП [129]. Однако свойства резонанса Фано существенно зависят от типа этого состояния, которым можно управлять с помощью магнитного поля или варьированием величины сверхпроводящей щели. Последний случай представлен на рис. 21, где красной пунктирной и синей штриховой кривыми изображены зависимости $G(h)$, отвечающие $\Delta = 0,243$ и $\Delta = 0,097$. Видно, что ширина асимметричного пика существенно уменьшается, если реализуется АСС при $\Delta = 0,097$ (ср. верхнюю и центральную вставки на рис. 21а).

Состояние с энергией ε_{w1} при $\Delta = 0,097$ можно сделать майорановским, рассмотрев более длинную проволоку (см. центральную вставку на рис. 21б). В результате ширина резонанса Фано восстанавливается и не меня-

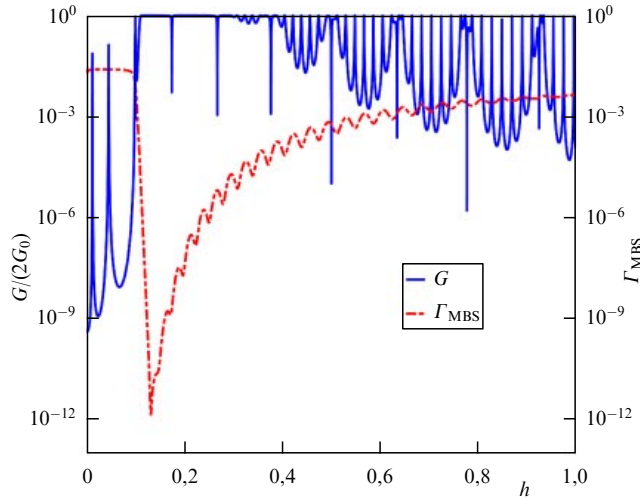


Рис. 22. (В цвете онлайн.) Зависимость кондактанса (левая ось ординат) и перекрытия Γ_{MBS} майорановских волновых функций (правая ось ординат) от зеемановской энергии при $\Delta = 0,097$ и $N = 150$.

ется до тех пор, пока перекрытие волновых функций двух ММ стремится к нулю (см. красную пунктирную и синюю штриховую кривые на рис. 21б). Если далее $\Delta \rightarrow 0$, то резонанс Фано коллапсирует (его ширина становится бесконечно малой), несмотря на то что $\varepsilon_{\text{wl}} \approx 0$, т.е. возникает ССК [215, 216]. Этой ситуации соответствуют чёрные сплошные кривые на рис. 21а, б.

Как обсуждалось, переход от МСС к АСС может наблюдаться при увеличении магнитного поля. Эту эволюцию нетрудно проследить, используя, например, введённую ранее майорановскую поляризацию. Для наглядности ограничимся более простой и интуитивно понятной величиной, характеризующей перекрытие волновых функций майорановских мод как сумму плотности вероятности первого боголюбовского возбуждения на двух центральных узлах СП,

$$\Gamma_{\text{MBS}} = \sum_{\sigma; l=N/2}^{N/2+1} (|u_{l\sigma}|^2 + |v_{l\sigma}|^2), \quad (89)$$

где $u_{l\sigma}$, $v_{l\sigma}$ — спин-зависящие коэффициенты преобразования Боголюбова для возбуждения с энергией ε_{wl} на узле l . Поведение этой характеристики как функции энергии магнитного поля изображено красной штрихпунктирной кривой на рис. 22 в логарифмическом масштабе. В топологически тривиальной фазе ($h < \Delta$) Γ_{MBS} практически не изменяется, а кондактанс содержит пики малой амплитуды (см. синюю сплошную кривую на рис. 22). При топологическом квантовом фазовом переходе Γ_{MBS} резко убывает (в 10^{10} раз) вследствие изменения типа возбуждения с объёмного на краевое. В топологически нетривиальной фазе ($h > \Delta$) выделяются две области. При $h \approx 0,1-0,3$ перекрытие ММ возрастает, но всё ещё остаётся незначительным. В этом диапазоне зеемановских энергий доминирует режим высокого пропускания, $G = 1$, с периодически возникающими антирезонансами Фано, где $G = 0$. Наоборот, при $h > 0,3$ устанавливается режим слабого пропускания, $G \ll 1$, с периодически возникающими резонансами Брейта–Вигнера, где $G = 1$. В этой области при больших магнитных полях гибридизация майорановских волновых функций становится существенной.

Из выражений (85) следует, что положения максимумов в плотности состояний и соответствующих резонансов кондактанса непосредственно зависят от параметров перескока. Численные расчёты показывают, что после увеличения размеров системы влияние параметра t_0 на резонансы Фано во многом определяется типом пространственного распределения состояния с энергией ε_{wl} . А именно, с возрастанием t_0 асимметричный пик не изменяет своего положения в случае МСС. Если состояние трансформируется в АСС, то увеличение t_0 сопровождается сдвигом резонанса Фано.

3.4.5. Асимметричное кольцо. Дополнительные особенности транспорта, связанные с нелокальностью МСС, имеют место при рассмотрении асимметричного кольца [217]. Напомним, что под асимметрией подразумевается отличие параметров уширения по диагонали, $\Gamma_{11} = 2\Gamma_{22}$, при сохранении симметрии туннельных процессов между НП и СП. В этом случае возникает дополнительный узкий резонанс Фано (ср. сплошную и штриховую кривые на рис. 23), который идентичен резонансу, индуцируемому ненулевой фазой Ааронова–Бома, на рис. 19б. На рисунке 23 этот резонанс реализуется при $h \approx 1,2225$. С увеличением длины мостика к нему смещается широкий антирезонанс Фано, расположенный в области $h \approx 1,222$ при $N = 30$ (см. штриховую кривую). Вместе с тем индуцированный асимметрией резонанс Фано коллапсирует при увеличении N , что хорошо видно на вставке рис. 23, и появляется ССК. Другими словами, можно говорить о своеобразной топологической блокаде отмеченного эффекта Фано, поскольку резонанс Фано исчезает, только если реализуется истинное МСС с двумя невзаимодействующими ММ.

Чтобы объяснить механизм, приводящий к коллапсу резонанса Фано, важно напомнить, что этот асимметричный пик соответствует ССК, которое возникает из-за вырождения собственных состояний закрытой системы с нулевой энергией. Следовательно, исчезновение резонанса Фано может указывать на увеличение кратности вырождения этого состояния, если перекрытие майора-

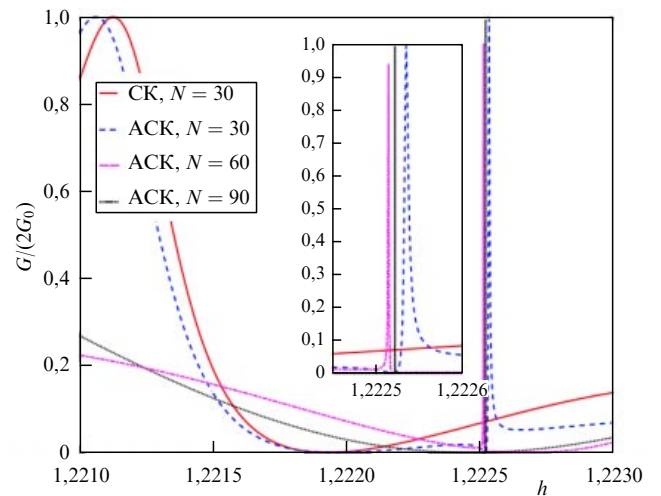


Рис. 23. (В цвете онлайн.) Коллапс резонанса Фано, индуцированного асимметрией туннельных процессов в кольце, с возрастанием нелокальности майорановского связанного состояния. СК — симметричное кольцо, АСК — асимметричное кольцо. На вставке: коллапс при большем разрешении по h .

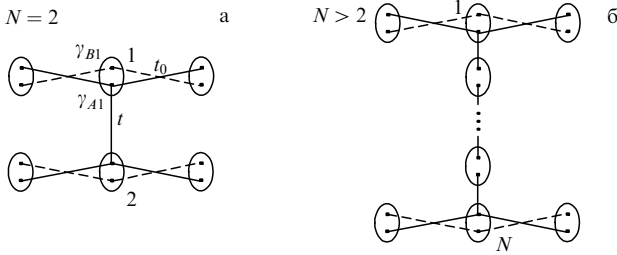


Рис. 24. Кольцо с $n = 1$ в представлении операторов Майорана для $N = 2$ (а) и $N > 2$ (б) при $\Delta = t$ и $\xi_j = \xi = 0$.

новских волновых функций становится пренебрежимо малым. Для проверки этой гипотезы обратимся к бесспиновой модели кольца с $n = 1$. В данной ситуации в роли мостика, соединяющего четыре КТ с энергиями ξ_j ($j = 1, \dots, 4$), рассмотрим цепочку Китаева с чётным числом узлов [12]. Диагонализуя гамильтониан устройства в таком случае при $\xi_j = \xi = \varepsilon - \mu = 0$, получим следующее уравнение для спектра:

$$\varepsilon^4 (\varepsilon P_1 - 2t_0^2 \delta_1^{N/2-1}) (\varepsilon P_2 + 2t_0^2 \delta_1^{N/2-1}) \times \\ \times (\varepsilon P_3 - 2t_0^2 \delta_2^{N/2-1}) (\varepsilon P_4 + 2t_0^2 \delta_2^{N/2-1}) = 0,$$

где $\delta_{1,2} = t \mp \Delta$; P_i — i -й полином $N/2$ -й степени, причём вследствие электрон-дырочной симметрии $P_{2,4} = P_{1,3}(\varepsilon \rightarrow -\varepsilon)$. Из данного уравнения вытекает, что в особых точках модели Китаева, $\Delta = \pm t$, когда волновые функции ММ не перекрываются, кратность вырождения состояния с нулевой энергией, действительно, возрастает при $N > 2$, что и приводит к подавлению узкого резонанса Фано на рис. 23.

Для большей наглядности обратимся к рассмотрению системы в представлении самосопряжённых операторов Майорана, $\gamma_{jl} = \gamma_{jl}^+$ ($j = A, B$): $a_l = (\gamma_{Al} + i\gamma_{Bl})/2$. На рисунке 24 схематически изображены устройства в рамках такого описания в особой точке модели Китаева, $\Delta = t$, с $N = 2$ и $N > 2$ соответственно (прямыми линиями обозначается взаимодействие между майорановскими операторами разного сорта). Видно, что в первом случае верхний и нижний рукава остаются связанными. Собственные энергии изображённых штриховыми прямыми цепочек, имеющих только две связи в горизонтальном направлении, равны $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_{2,3} = \pm t_0/\sqrt{2}$. В свою очередь энергии цепочки, включающей перескок между рукавами (она показана сплошными прямыми), имеют вид $\varepsilon_{4,5} = 0$, $\varepsilon_{6,7} = [(t^2 + 2t_0^2)^{1/2} \pm t]/2$, $\varepsilon_{8,9} = -[(t^2 + 2t_0^2)^{1/2} \pm t]/2$. В результате состояние с нулевой энергией вырождено четырёхкратно.

Во втором случае, $N > 2$, устройство распадается на верхнюю и нижнюю идентичные подсистемы, которые не связаны между собой, поскольку при $\xi = 0$ майорановские операторы, принадлежащие одному узлу, не взаимодействуют. Каждая из подсистем включает в себя две цепочки. При этом энергии изображённой сплошными прямыми второй цепочки, содержащей структурный элемент в вертикальном направлении (аналогично модели Фано–Андерсона [218]), имеют вид $\varepsilon_{1,2} = 0$, $\varepsilon_{3,4} = \pm(t^2 + t_0^2/2)^{1/2}$. В результате в данном случае возникает шестикратное вырождение уровня с нулевой энергией.

Таким образом, именно возникновение Т-образных структур майорановских операторов приводит к подав-

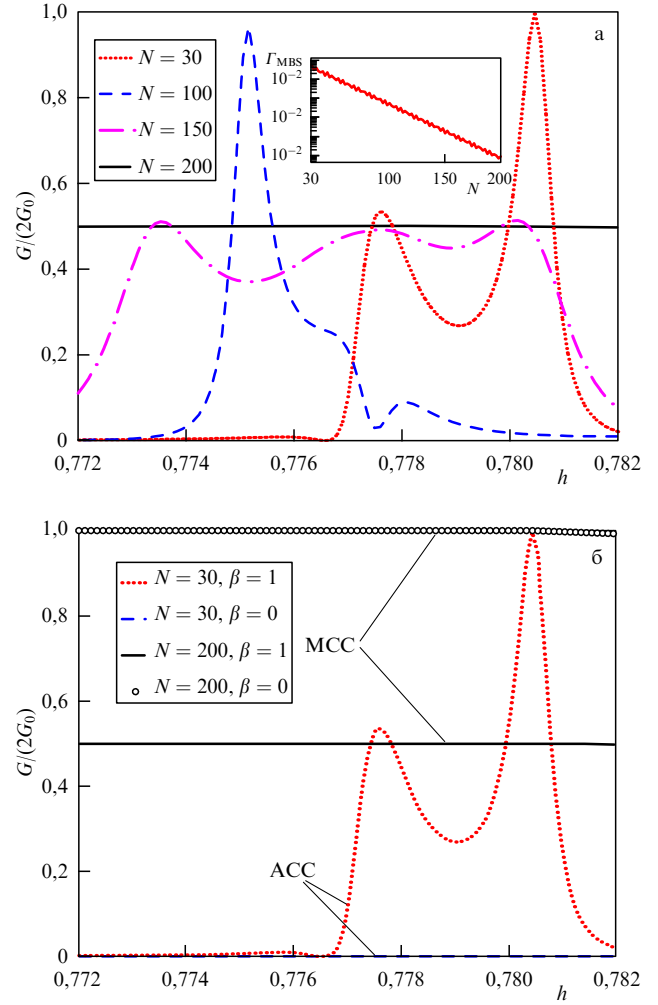


Рис. 25. (В цвете онлайн.) Зависимость кондактанса устройства от зеемановской энергии для случая Т-образной геометрии. (а) Влияние пространственного распределения состояния с энергией ε_{w1} на резонанс Фано в режиме нелокального транспорта. На вставке: перекрытие майорановских волновых функций (89) как функция длины сверхпроводящей нанопроволоки при $h = 0,777$. (б) Сравнение проводимости в нелокальном ($\beta = 1$) и локальном ($\beta = 0$) режимах транспорта.

лению резонанса Фано в асимметричном кольце. Подчеркнём, что этот эффект, поскольку он связан только с нелокальностью МСС, имеет универсальный характер, возникая и в наиболее общей ситуации, характерной для эксперимента, когда различаются все параметры туннелирования между разными подсистемами. Кроме того, из рис. 24 становится очевидным, что в наиболее простом случае при $t = 0$, т.е. в случае двух несвязанных рукавов, резонанс Фано не подавляется.

3.4.6. Т-образная геометрия. Принципиальное отличие квантового транспорта через МСС и АСС можно наглядно продемонстрировать, рассмотрев один из предельных случаев асимметричного кольца, а именно Т-образную геометрию, когда связь между нижними НП и контактами отсутствует. На рисунке 25а приведены зависимости кондактанса кольца от зеемановской энергии, когда СП находится в нетривиальной фазе, при нескольких значениях N (N — число узлов мостика) для такого случая. При этом экспоненциальное уменьшение перекрытия волновых функций ММ с увеличением

длины проволоки показано на вставке рис. 25. Видно, что Γ_{MBS} уменьшается на два порядка, если число узлов в проволоке увеличивается от $N = 30$ до $N = 100$. При этом состояние с энергией ε_{w1} из андреевского становится майорановским и антирезонанс в окрестности $h = 0,777$ повышается, т.е. в этом случае $G \neq 0$ (ср. красную пунктирную и синюю штриховую кривые на рис. 25а). При дальнейшем удлинении СП Γ_{MBS} уменьшается ещё на несколько порядков. В результате возникает плато проводимости высотой G_0 (см. фиолетовую штрихпунктирную и чёрную сплошную кривые).

Такое поведение вызвано тем, что в Т-образной схеме транспорта взаимодействие нижней левой и правой НП с проводящим каналом (или контактами) непосредственно зависит от типа низкоэнергетического состояния в мостике. В случае МСС ($N \gtrsim 100$) связь этих структурных элементов с контактами отсутствует и резонанс Фано исчезает. Если реализуется АСС ($N < 100$), то отмеченные НП являются боковыми, как в случае модели Фано–Андерсона [218]. При этом реализуется резонанс Фано.

Дополнительные существенные отличия имеют место, если обратиться к особенностям локального транспорта через МСС и АСС. В частности, в случае МСС высота плато кондактанса удваивается при переходе от нелокального, $\beta = 1$ (где β — параметр асимметрии (см. гамильтониан (90))), к локальному, $\beta = 0$, режиму. Соответствующие зависимости $G(h)$ показаны сплошной кривой и чёрными кружками на рис. 25б. В ситуации с АСС кондактанс локальной конфигурации подавляется (см. штриховую кривую на рис. 25б).

Обнаруженные в рамках численных расчётов особенности кондактанса Т-образной структуры могут быть описаны аналитически. Для этого следует уточнить, что транспорт через МСС, по существу, подразумевает взаимодействие контактов только с одним майорановским оператором. В свою очередь туннелирование через АСС, которому соответствует боголюбовский оператор α^+ , фактически означает связь с обоими ММ, γ_A и γ_B , поскольку $\alpha^+ = (\gamma_A + i\gamma_B)/2$.

Рассмотрим последовательно транспортные свойства Т-образной структуры, в которой реализуется либо МСС, либо АСС. Для анализа транспорта в случае МСС воспользуемся эффективным низкоэнергетическим гамильтонианом СП, который описывает взаимодействие пары ММ с интенсивностью ε_0 , т.е. $H_W = i\varepsilon_0\gamma_A\gamma_B/2$ [12]. Далее в целях упрощения мы заменим НП одноуровневыми КТ с энергиями ξ_j ($j = 1, \dots, 4$) и обратимся к бесспиновому случаю, тогда

$$\begin{aligned} H_T &= -t_0[b_1^+ - b_1 + \beta(b_2^+ - b_2)]\gamma_A - \\ &\quad - t_0[d_3^+ - d_3 + d_4^+ - d_4]\gamma_B, \\ H_V &= -\sum_k (t_1 c_{Lk}^+ b_1 + t_2 c_{Rk}^+ b_2 + \text{h.c.}). \end{aligned} \quad (90)$$

Применение формулы (81) к симметричной Т-образной системе ($t_1 = t_2$) приводит к следующему выражению для кондактанса левого контакта в режиме линейного отклика:

$$\hat{G}_L = \hat{G}_0 \frac{\Gamma^2}{2} [2|\hat{F}_{11e}^r(0)|^2 + |\hat{G}_{12e}^r(0)|^2 + |\hat{G}_{12h}^r(0)|^2], \quad (91)$$

где $\hat{F}_{11e}^r(\omega)$, $\hat{G}_{12e}^r(\omega)$, $\hat{G}_{12h}^r(\omega)$ — фурье-образы аномальной и нормальной гриновских функций,

$$\begin{aligned} \hat{F}_{11e}^r(t-t') &= -i\Theta(t-t')\langle\{b_1^+(t), b_1^+(t')\}\rangle, \\ \hat{G}_{12e}^r(t-t') &= -i\Theta(t-t')\langle\{b_1(t), b_2^+(t')\}\rangle, \\ \hat{G}_{12h}^r(t-t') &= -i\Theta(t-t')\langle\{b_1^+(t), b_2(t')\}\rangle, \end{aligned}$$

где Θ — функция Хевисайда. Отметим, что в (91) член, пропорциональный $\hat{F}_{11e}^r$, описывает вклад от процессов локального андреевского отражения. Два последующих слагаемых отвечают за процессы прямого переноса заряда. При этом вклады от процессов перекрёстного андреевского отражения отсутствуют, поскольку $\mu_{L(R)} = \mu \pm eV/2$ [161].

Используя метод уравнений движения [219], получим необходимые функции Грина,

$$\begin{aligned} \hat{F}_{11e}^r &= -\frac{2t_0^2 z Z_B C_2}{z Z_T Z_B - \varepsilon_0^2 C_T C_B}, \\ \hat{G}_{12e(h)}^r &= \frac{2\beta t_0^2 z Z_B C_{1h(e)} C_{2h(e)}}{z Z_T Z_B - \varepsilon_0^2 C_T C_B}, \end{aligned} \quad (92)$$

где

$$\begin{aligned} z &= \omega + i\delta, \quad C_{je(h)} = z \mp \xi_j + \frac{i\delta_{jT}\Gamma}{2}, \quad j_T = 1, 2, \\ C_j &= C_{je} C_{jh}, \quad C_{T(B)} = C_{1(3)} C_{2(4)}, \\ Z_T &= z C_T - 2t_0^2 (C_{1e} + C_{1h}) (\beta^2 C_1 + C_2), \\ Z_B &= C_B - 4t_0^2 (C_3 + C_4). \end{aligned}$$

Тогда, если $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$, то

$$\hat{G}_{12e}^r = \hat{G}_{12h}^r = -\beta \hat{F}_{11e}^r = \frac{2\beta t_0^2 (z^2 - 8t_1^2)}{C_{1e} Z_1}, \quad (93)$$

где $Z_1 = (z^2 - 8t_0^2)[z C_{1e} - 4t_0^2(1 + \beta^2)] - \varepsilon_0^2 z C_{1e}$.

Таким образом, при $\beta = 1$ проводимость становится равной $G_0/2$. Полученную величину кондактанса можно качественно объяснить, если рассмотреть всю систему целиком в представлении майорановских операторов. Из вида оператора взаимодействия между точками и МСС (90) следует, что левый и правый контакты соединены только содержащей вертикальную связь цепочкой, изображённой сплошными прямыми на рис. 24а.

В общем случае, как и для обычных фермионов и электромагнитных полей [220], наличие резонанса или антирезонанса кондактанса при $\omega = 0$ зависит как от количества взаимодействующих операторов Майорана в нижней ветке, так и от того, какой из них непосредственно связан с γ_A . В рассматриваемой ситуации нижняя цепочка включает три оператора: γ_{3B} , γ_B , γ_{4B} . При этом, поскольку её собственный вектор, описывающий состояние с нулевой энергией, пропорционален $\sin(\pi/2)$ (где $l = 1, 2, 3$) и $H_W = i\varepsilon_0\gamma_A\gamma_B/2$, верхняя и нижняя цепочки эффективно не взаимодействуют. Другими словами, эффект Фано отсутствует, и наблюдается резонансное прохождение.

Заметим, что при рассмотрении Т-образной геометрии ситуация, когда в нижней цепочке есть только один оператор Майорана, также возможна. Она имеет место, если в качестве СП рассмотреть цепочку Китаева в

особой точке и $\xi_1 = \xi_2 = 0$. В представлении операторов Майорана такая система приведена на рис. 24б. Тогда, аналогично тому, как это показано в работе [184], полный кондактанс равен сумме вкладов от цепочек с двумя и тремя связями соответственно. В первом случае это $G_0/2$, а во втором — 0 (за счёт эффекта Фано).

В режиме локального транспорта, $\beta = 0$, имеем $G_L = G_0$. Такие же результаты могут быть получены для $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 \neq 0$ и $\varepsilon_0 = 0$ (см. рис. 25). В общем случае, когда $\xi_j, \varepsilon_0 \neq 0$, кондактанс (91) стремится к нулю.

Перейдём к транспорту в Т-образной структуре с АСС, имеющим энергию ξ . Соответствующий низкоэнергетический гамильтониан СП имеет вид $H_W = \xi \alpha^+ \alpha$. Поскольку АСС и исходные операторы вторичного квантования связаны преобразованием Боголюбова, $a_{1(N)} \approx u\alpha \pm v\alpha^+$, представим гамильтониан туннелирования между КТ и АСС в следующем виде [180]:

$$H_T = -t_{0e}(b_1^+ + \beta b_2^+ + d_3^+ + d_4^+) \alpha - \\ - t_{0h}(b_1 + \beta b_2 + d_3 + d_4) \alpha + \text{h.c.},$$

где $t_{0e(h)}$ — амплитуда туннелирования электрона (дырки).

Решение уравнений движения для функций Грина при $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$ даёт

$$\hat{F}_{11e}^r = -\frac{2t_{0e}t_{0h}z^3}{Z_2}, \quad (94)$$

$$\hat{G}_{12e(h)}^r = \frac{\beta z}{C_{1e}Z_2} \left\{ zC_{1e}(t_{0e}^2 C_{h(e)} + t_{0h}^2 C_{e(h)}) - \right. \\ \left. - (t_{0e}^2 - t_{0h}^2)^2 [z(1 + \beta^2) + 2C_{1e}] \right\},$$

где $C_{e(h)} = z \mp \xi$,

$$Z_2 = z^2 C_{1e}^2 C_e C_h + (t_{0e}^2 - t_{0h}^2)^2 [z(1 + \beta^2) + 2C_{1e}]^2 - \\ - 2z^2 C_{1e}(t_{0e}^2 + t_{0h}^2) [z(1 + \beta^2) + 2C_{1e}].$$

Из (94) видно, что кондактанс в приближении линейного отклика обращается в нуль и в локальном, и в нелокальном режимах. Как и в случае с МСС, полученный результат можно качественно объяснить, переходя к представлению операторов Майорана. Тогда при $\xi = 0$ гамильтониан системы АСС + четыре КТ выражается как

$$H = i \frac{t_{0e} + t_{0h}}{2} (\gamma_{1A} + \beta \gamma_{2A} + \gamma_{3A} + \gamma_{4A}) \gamma_B - \\ - i \frac{t_{0e} - t_{0h}}{2} (\gamma_{1B} + \beta \gamma_{2B} + \gamma_{3B} + \gamma_{4B}) \gamma_A. \quad (95)$$

Таким образом, имеются две цепочки, в каждой из которых центральный оператор, $\gamma_{A(B)}$, взаимодействует сбоку с двумя другими, $\gamma_{3B(3A)}$ и $\gamma_{4B(4A)}$ (не связанными между собой). Таким образом, при $\omega = 0$ в обеих цепочках $G = 0$ вследствие эффекта Фано.

Выражения для функций Грина в общем случае, $\xi_j \neq 0$, имеют достаточно громоздкий вид и здесь не приводятся. Однако необходимо подчеркнуть, что в этой ситуации $F_{11e}^r(0) = 0$ при $\beta = 0, 1$, тогда как $G_{12e(h)}^r(0) \neq 0$ при $\beta = 1$. Такое поведение качественно согласуется с результатами численных расчётов, представленными на рис. 25.

Таким образом, рассмотренное кольцо Ааронова – Бома со сверхпроводящим мостиком делает возможным

детектирование топологического фазового перехода в системе благодаря возникновению резонансов Фано. Кроме того, анализ свойств этих асимметричных особенностей кондактанса позволяет отличить истинное МСС, имеющее краевой характер, от низкоэнергетического возбуждения объёмного типа, т.е. АСС.

4. Майорановские моды в системах с неколлинеарным магнитным порядком

4.1. Введение в проблему

В последнее время активизировалась работа по обнаружению топологически нетривиальных сверхпроводящих фаз и майорановских мод не только в системах со спин-орбитальным взаимодействием, но и в широком классе структур и материалов с магнитным упорядочением. Интерес к топологическим свойствам таких систем значительно возрос после установления связи [221] между гамильтонианами, описывающими материалы с неколлинеарным или спиральным спиновым упорядочением, и гамильтонианами систем, рассмотренных в разделе 3.

Для демонстрации отмеченной связи применим к гамильтониану (57) унитарное преобразование, соответствующее последовательному повороту системы координат в спиновом пространстве на угол $\pi/2$ вокруг осей y и x :

$$H_W \rightarrow \tilde{H}_W = U H U^\dagger, \quad (96)$$

где оператор унитарного преобразования имеет вид

$$U = \prod_l \left[\exp \left(-i \frac{\pi}{2} \sigma_l^x \right) \exp \left(-i \frac{\pi}{2} \sigma_l^y \right) \right]. \quad (97)$$

Обозначения $\sigma_l^{x,y,z}$ введены для спиновых операторов коллективизированных электронов на узле l . Принимая во внимание закон преобразования фермиевских операторов

$$a_{l\sigma} \rightarrow \tilde{a}_{l\sigma} = U a_{l\sigma} U^\dagger = \frac{1 + i\eta_\sigma}{2} a_{l\sigma} + i \frac{1 - i\eta_\sigma}{2} a_{l\bar{\sigma}}, \quad (98)$$

получаем преобразованный гамильтониан (57) ($U = 0$, $V = 0$):

$$\tilde{H}_W = \sum_{l,\sigma} \left[(\varepsilon_0 - \mu) a_{l\sigma}^\dagger a_{l\sigma} - \frac{t}{2} (a_{l\sigma}^\dagger a_{l+1\sigma} + \text{h.c.}) \right] - \\ - \frac{i\alpha}{2} \sum_l [(a_{l1}^\dagger a_{l+1\uparrow} - a_{l1}^\dagger a_{l+1\downarrow}) - \text{h.c.}] - \\ - h \sum_l (a_{l1}^\dagger a_{l\downarrow} + a_{l1}^\dagger a_{l\uparrow}) + \sum_l (\Delta a_{l1} a_{l\downarrow} + \text{h.c.}), \quad (99)$$

где α — константа спин-орбитального взаимодействия. Структура гамильтониана соответствует ситуации [221], когда магнитное поле направлено вдоль оси x , а вектор спин-орбитального взаимодействия $\mathbf{B}_{SO}$ параллелен оси квантования z .

Следуя [221], проведём преобразование $U_2 = \prod_l \exp(-iQl\sigma_l^z)$, при котором

$$a_{l\sigma} \rightarrow a'_{l\sigma} = U_2 a_{l\sigma} U_2^\dagger = a_{l\sigma} \exp \left(-\frac{i\eta_\sigma Ql}{2} \right). \quad (100)$$

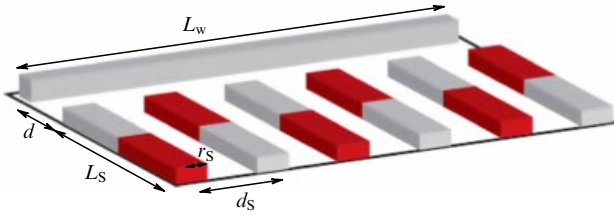


Рис. 26. (В цвете онлайн.) Схематическое изображение квантовой нанопроволоки, помещённой в неоднородное магнитное поле [222].

Параметр преобразования Q свяжем с параметрами перескока и спин-орбитальной связи посредством выражения $Qa = 2 \arccos(1 + \alpha^2/t^2)^{-1/2}$, где a — постоянная решётки. Тогда гамильтониан в узельном представлении принимает вид

$$H'_W = \sum_{l,\sigma} \left[(\epsilon_0 - \mu) a_{l\sigma}^+ a_{l\sigma} - \frac{\tilde{t}}{2} (a_{l\sigma}^+ a_{l+1\sigma} + \text{h.c.}) \right] - \sum_{l,\sigma,\sigma'} a_{l\sigma}^+ (\mathbf{h}_l \boldsymbol{\sigma})_{\sigma\sigma'} a_{l\sigma'} + \sum_l (\Delta a_l^\uparrow a_l^\downarrow + \text{h.c.}), \quad (101)$$

где $\tilde{t} = t\sqrt{1 + \alpha^2/t^2}$, $\boldsymbol{\sigma}$ — вектор, составленный из матриц Паули. Преобразованный гамильтониан соответствует ансамблю фермионов со сверхпроводящей щелью Δ в магнитном поле геликоидальной структуры $\mathbf{h}_l = h(\cos(Ql), -\sin(Ql), 0)$. Видно, что параметр α спин-орбитальной связи определяет перенормировку интеграла перескока и структуру геликоидального спинового упорядочения через волновое число Q .

На основе этого соответствия и учёта результатов о предсказании ММ в сверхпроводящих системах со спин-орбитальным взаимодействием в однородном магнитном поле [30, 34, 35] был предложен новый класс топологически нетривиальных систем без спин-орбитальной связи, но с неоднородным магнитным упорядочением.

В работе [40] показано, что топологически нетривиальные фазы существуют в цепочках магнитных наночастиц (или атомов) с произвольными направлениями намагниченности, помещённых на сверхпроводящую подложку. Предполагалось, что расстояние между наночастицами меньше, чем длина когерентности сверхпроводника. Утверждалось, что неоднородное внешнее магнитное поле может индуцировать ММ в нанопроволоке с наведённой сверхпроводимостью без явно выраженной спин-орбитальной связи [222–224]. Такое поле может быть создано при расположении магнитов субмикрометровых размеров вблизи нанопроволоки, как показано на рис. 26. Впоследствии было предложено использовать квазиодномерные проводники, в которых требуемая магнитная структура локализованных магнитных моментов устанавливается благодаря взаимодействию Рудермана – Киттеля – Касуи – Иосиды (РККИ) [225–227]. В этом случае период магнитного геликоида определяется импульсом Ферми электронов проводимости.

Известно, что при внесении изолированной магнитной примеси в сверхпроводник возникают состояния Ю – Шiba – Русинова [228–230] с энергиями, лежащими внутри сверхпроводящей щели. В разрежённых цепочках магнитных атомов возможно перекрытие различных примесных состояний, вследствие чего возникают примесные зоны. Такие режимы подробно рассмотрены в

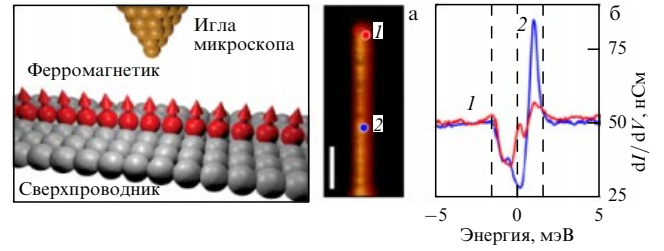


Рис. 27. (В цвете онлайн.) (а) Схема эксперимента по методу сканирующей туннельной спектроскопии со спиновой цепочкой для наблюдения майорановских мод. (б) Зависимость кондактанса от энергии для различных положений иглы микроскопа (1 и 2). Пик при нулевой энергии для зависимости 1 связывается с майорановской модой. Вертикальные штриховые линии, пересекающие ось абсцисс при ненулевых значениях энергии, определяют величину сверхпроводящей щели на свинцовой подложке [233].

недавнем обзоре [231]. Здесь мы кратко приведём основные результаты для цепочек в случае, когда магнитные атомы настолько близки, что их атомные орбитали перекрываются.

Впервые экспериментальные исследования цепочки атомов Fe на сверхпроводящем свинце методами сканирующей туннельной микроскопии проводились в работах [232, 233]. Длина цепочек достигала нескольких сотен ангстрем. Было обнаружено наличие пика кондактанса при нулевом напряжении, когда игла микроскопа располагалась вблизи края магнитной цепочки, что могло быть связано с наличием ММ (рис. 27). В том же эксперименте при отличных от нуля, но не превышающих величину сверхпроводящей щели энергиях наблюдалось появление примесных состояний Ю – Шiba – Русинова.

Аналогичная система исследовалась в работах [234, 235] с помощью туннельного микроскопа со сверхпроводящей иглой и атомно-силовой микроскопии соответственно. В обеих работах был обнаружен пик кондактанса, однако он наблюдался не для всех синтезированных магнитных цепочек. При этом были найдены дополнительные резонансы вблизи нуля энергии (для энергий порядка 80 мкэВ). Следует иметь в виду, что эти резонансы из-за их энергетической близости могли модифицировать майорановские связанные состояния. С учётом высказанных затруднений в интерпретации отмеченных экспериментальных данных необходимо подчеркнуть, что идентификация МСС на фоне топологически тривиальных низкоэнергетических состояний по-прежнему остаётся экспериментальной проблемой, далёкой от решения.

Резонанс при нулевом напряжении наблюдался и в ферромагнитно-упорядоченной цепочке, состоящей из атомов Co, на монокристалле свинца [236]. Однако он обнаруживался при прохождении иглы вдоль всей цепочки, что указывало на его делокализованный характер. Поэтому такой пик не мог быть связан с ММ. Считалось, что в цепочке с Co реализовалось чётное число ферми-точек, когда уровень Ферми пересекал электронные зоны, в отличие от нечётного числа точек в случае цепочки из Fe, поэтому кобальтовая цепочка находилась в топологически тривиальной фазе, а пик кондактанса определялся другими механизмами.

Результаты экспериментальных исследований отмеченных выше работ не позволяли однозначно интерпретировать наблюдаемый пик кондактанса на основе су-

существования в цепочке МСС по следующим причинам: 1) пик не являлся квантованным; 2) был несимметричным по отношению к смене знака напряжения; 3) наблюдался только для некоторых цепочек.

В более точных экспериментах, проведённых при температуре 20 мК [237], удалось отделить предполагаемые МСС от примесных состояний Ю–Шибана–Русинова и продемонстрировать симметричный майорановский пик. Его величина возросла, однако по-прежнему осталась на порядок меньше предсказываемой величины кондактанса $2G_0 = 2e^2/h$. Дополнительные трудности в интерпретации возникали также из-за того, что влияние дефектов в цепочке на реализацию резонанса при нулевом напряжении оставалось недостаточно изученным.

Следует отметить, что на практике по ряду причин затруднена и идентификация геликоидального упорядочения спиновых моментов в атомных цепочках. Так, в работе [233] предполагалось, что в цепочке атомов Fe реализуется ферромагнитное упорядочение. При этом наличие МСС связывалось со спин-орбитальным взаимодействием в свинце. Однако, как отмечалось в [235], формирование спинового геликоида даже с небольшим углом в цепочке может быть достаточным для того, чтобы ММ частично порождалось этим механизмом.

Позднее 120-градусное упорядочение спиновых моментов атомов Fe было реализовано при их помещении на сверхпроводящую подложку из рения Re (0001) [238]. Однако эксперимент с использованием сканирующей туннельной спектроскопии не подтвердил наличие майорановских мод в такой структуре. В частности, при исследовании дифференциальной проводимости для нулевого напряжения и расположении иглы вблизи границ цепочки было продемонстрировано наличие только локальных максимумов, а не пиков. Экспериментальные исследования монослоя Mn на Re (0001) [239] привели к обнаружению сложной спиновой структуры (так называемого $3Q$ -состояния). Такое спиновое упорядочение также может индуцировать топологическую сверхпроводимость и ММ [240]. Следует отметить, что в последнее время предложено несколько гибридных сверхпроводящих структур с магнитным упорядочением, допускающих реализацию МСС [241, 242].

Отметим, что реализация МСС может осуществляться в цепочках с антиферромагнитным упорядочением магнитных атомов, приведённых в контакт со сверхпроводником. В этом случае в качестве механизма выступает модификация исходных примесных состояний, индуцированная внешним магнитным полем, ориентированным в плоскости сверхпроводника, и сверхтоком, текущим вдоль оси цепочки [243]. Дополнительные сведения о возможности реализации МСС в спиновых цепочках содержатся в недавних обзорах [231, 244].

Преобразование, аналогичное (98), (100), может иметь место и в двумерных (2D) системах. Как показано в [41], в этом случае геликоидальное спиновое упорядочение соответствует некоторой комбинации спин-орбитальных взаимодействий типа Рашбы и Дрессельхауза. Такое магнитное упорядочение устанавливается не за счёт внешних условий, а индуцируется внутренними механизмами. Таким образом, в спин-синглетных сверхпроводниках с неколлинеарным магнитным порядком можно ожидать реализации ММ.

Свидетельства о формировании фазы сосуществования сверхпроводимости и геликоидального или неколли-

неарного магнитного порядка (СП + НКМ) были обнаружены в тройных редкоземельных боридах и халькогенидах, например HoMo_6S_8 и ErRh_4B_4 [245], и недавно в $\text{EuRbFe}_4\text{As}_4$ [246–248]. В HoMo_6S_8 и ErRh_4B_4 при уменьшении температуры сначала возникает сверхпроводимость, а затем появляется тенденция к ферромагнитному упорядочению. Однако из-за сверхпроводимости в узком интервале температур формируется неоднородное магнитное упорядочение [245]. При дальнейшем уменьшении температуры тройные соединения переходят в нормальное состояние с ферромагнитным упорядочением.

К перспективным материалам с возможной реализацией фазы СП + НКМ относятся сверхпроводники с треугольной решёткой, такие как, например, $\text{Na}_x\text{CoO}_2 \times y\text{H}_2\text{O}$ [249], $\text{Ir}_{1-x}\text{Pt}_x\text{Te}_2$ [250], $\kappa\text{-(BEDT-TTF)}_2\text{X}$ [251]. Их предрасположенность к фазе СП + НКМ обусловлена тем, что свойство фрустрированности треугольной решётки способствует реализации неколлинеарной структуры при формировании магнитного упорядочения [252–257]. Следует отметить, что к геликоидальному магнитному упорядочению может приводить также конкуренция ближайшего и следующих за ним обменов [258].

В работе [259] показано, что если в треугольной решётке с киральной $d_1 + id_2$ -сверхпроводимостью формируется страйповый магнитный порядок, то в такой системе возникнут и ММ. Необходимо подчеркнуть, что в [259] существование магнитного упорядочения и куперовской неустойчивости задавалось добавлением в квадратичный гамильтониан среднеполевых слагаемых, инициирующих соответствующие средние. Интерес к кобальтатам натрия вызван также тем, что недавно в них были обнаружены поверхностные топологически нетривиальные состояния для нормальной фазы при больших уровнях допирования x [260].

Для большинства соединений, в которых на фазовых диаграммах есть области сосуществования сверхпроводимости и антиферромагнетизма [261–263], условия для формирования ММ не выполняются. В то же время во многих теоретических работах, в которых рассматривались ММ в системах с антиферромагнитным упорядочением, механизм реализации таких мод не связывался непосредственно с магнетизмом. Так, в работе [264] продемонстрировано наличие нулевых мод в состоянии с антиферромагнитным упорядочением и триплетной сверхпроводимостью применительно к слабо допированным купратам. В этом случае нулевые моды обусловлены исключительно триплетной сверхпроводимостью. В пниктидах и халькогенидах железа возможная реализация топологически нетривиальных поверхностных состояний обусловлена многоорбитальной электронной структурой этих соединений и проявляется уже в нормальной фазе [265]. В сверхпроводящей фазе такие состояния могут сосуществовать [266] с андеевскими связанными состояниями, индуцированными $s_{\pm}$ -типом симметрии сверхпроводящего параметра порядка [267]. В фазе сосуществования сверхпроводимости и волны спиновой плотности, экспериментально наблюдаемой в пниктидах, на границе материала за счёт наличия магнитного упорядочения и нарушения трансляционной симметрии возможно формирование сверхпроводимости, характеризующейся триплетным по спину, чётным по орбитальному моменту (p -чётным, s -типа) и нечётным по частоте (T -нечётным) параметром порядка [268], и эта

сверхпроводимость может сопровождаться формированием ММ [269–271].

4.2. Представления о фазе сосуществования сверхпроводимости и неколлинеарного спинового упорядочения

В этом разделе рассмотрим формирование ММ в материалах с треугольной решёткой при реализации в них фазы СП + НКМ. Для конкретности будем иметь в виду соединение $\text{Na}_x\text{CoO}_2 \times y\text{H}_2\text{O}$, для которого минимальной моделью является t – J – V -модель [18, 272]. В этой модели электронные состояния соответствуют верхней хаббардовской подзоне. С учётом данного обстоятельства гамильтониан в атомном представлении имеет вид

$$H_{tJV} = \sum_{f\sigma} (\varepsilon - \mu) X_f^{\sigma\sigma} + \sum_f (2\varepsilon + U - 2\mu) X_f^{22} + \sum_{fms} t_{fm} X_f^{2\bar{\sigma}} X_m^{\bar{\sigma}2} + \frac{V}{2} \sum_{f\delta} n_f n_{f+\delta} + \sum_{fm} J_{fm} (X_f^{\uparrow\downarrow} X_m^{\downarrow\uparrow} - X_f^{\uparrow\uparrow} X_m^{\downarrow\downarrow}), \quad (102)$$

где ε — затравочная одноузельная энергия электрона, μ — химический потенциал, U — величина хаббардовского отталкивания на узле, t_{fm} — интенсивность перескоков электронов, $n_f = X_f^{\uparrow\uparrow} + X_f^{\downarrow\downarrow} + 2X_f^{22}$ — оператор числа электронов на узле, J_{fm} — параметр обменного взаимодействия. Межузельное кулоновское взаимодействие учитывается слагаемым с параметром V . Операторы Хаббарда определяются в стандартном виде [273]: $X_f^{np} = |f, n\rangle\langle f, p|$, где $|f, n\rangle$ — базисные электронные состояния на узле f , n — индекс одноузельного состояния: значение $n = \sigma$ соответствует состоянию с одним электроном, обладающим проекцией спина σ , $n = 2$ — состоянию с двумя электронами. Отметим, что гамильтониан (102) определён на гильбертовом подпространстве, в котором исключены состояния, не содержащие электронов. Действие операторов Хаббарда на базисные

состояния задаётся следующим образом: $X_f^{np}|m, q\rangle = \delta_{fm}\delta_{pq}|f, n\rangle$, где δ_{fm}, δ_{pq} — символы Кронекера.

Как отмечалось во введении и разделе 2.2, возможность реализации краевых состояний тесно связана с нетривиальным значением топологического инварианта для энергетической структуры материала при периодических граничных условиях. Наиболее просто вычисление такого инварианта осуществляется для случая, когда рассматриваемая система описывается квадратичной формой по операторам в представлении вторичного квантования. К сожалению, для систем с сильными электронными корреляциями такой подход оказывается неэффективным.

Более общий метод нахождения топологического инварианта связан с его вычислением через функции Грина. При этом наиболее удобный подход основан на применении топологического инварианта (ТИ) $\tilde{N}_3$. Останемся на этом вопросе подробнее.

Топологический инвариант $\tilde{N}_3$ впервые был предложен в работе [274] при исследовании проводимости в квантовом эффекте Холла и в дальнейшем применялся для различных фаз сверхтекучего ^3He [4, 14]. Согласно [4, 274] инвариант $\tilde{N}_3$ применим для пространственно двумерных систем (так называемые системы $(2+1)$ -размерности, когда дополнительным измерением является время), в которых спектр возмущений обладает щелью на всей зоне Бриллюэна. Существование, что данный инвариант сохраняет свой вид и для систем со взаимодействием.

Вычисление топологического инварианта $\tilde{N}_3$ осуществляется на основе его связи с функциями Грина и их производными:

$$\tilde{N}_3 = \frac{\varepsilon_{\mu\nu\lambda}}{24\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\pi}^{\pi} dp_1 dp_2 \text{Sp} (\hat{G}\partial_{\mu}\hat{G}^{-1}\hat{G}\partial_{\nu}\hat{G}^{-1}\hat{G}\partial_{\lambda}\hat{G}^{-1}),$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ — символ Леви-Чивиты, $\partial_1 \equiv \partial/\partial p_1$, $\partial_2 \equiv \partial/\partial p_2$, $\partial_3 \equiv \partial/\partial \omega$. Обозначение $\hat{G}(p, i\omega)$ введено для матрицы, составленной из пропагаторных частей фермиевских нормальных и аномальных функций Грина в фазе СП + НКМ:

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} G_{12,12}(p, i\omega) & G_{12,2\uparrow}(p, i\omega) & G_{12,12}(p, p-Q; i\omega) & G_{12,2\downarrow}(p, p-Q; i\omega) \\ G_{2\uparrow,12}(p, i\omega) & G_{2\uparrow,2\uparrow}(p, i\omega) & G_{2\uparrow,12}(p, p-Q; i\omega) & G_{2\uparrow,2\downarrow}(p, p-Q; i\omega) \\ G_{1\downarrow,12}(p-Q, p; i\omega) & G_{1\downarrow,2\uparrow}(p-Q, p; i\omega) & G_{1\downarrow,12}(p-Q, i\omega) & G_{1\downarrow,2\downarrow}(p-Q, i\omega) \\ G_{2\downarrow,12}(p-Q, p; i\omega) & G_{2\downarrow,2\uparrow}(p-Q, p; i\omega) & G_{2\downarrow,12}(p-Q, i\omega) & G_{2\downarrow,2\downarrow}(p-Q, i\omega) \end{bmatrix}. \quad (103)$$

Как известно, полную матричную функцию Грина в атомном представлении можно выразить в виде произведения: $\hat{D} = \hat{G}\hat{P}$, где $\hat{P}$ — матрица силового оператора. При этом матрица $\hat{D}$ составлена из фурье-образов функций Грина в мацубаровском представлении:

$$D_{v,\mu}(f\tau; f'\tau') = -\langle T_{\tau} \tilde{X}_f^v(\tau) \tilde{X}_{f'}^{\mu}(\tau') \rangle, \quad (104)$$

где v, μ — индексы, обозначающие пары одноузельных состояний. Для расчёта топологического инварианта $\tilde{N}_3$ необходимо перейти от дискретных мацубаровских частот $i\omega_n$ к непрерывной частоте $i\omega$.

Для невзаимодействующих систем функции Грина могут быть вычислены точно. Однако для систем с

сильными корреляциями эти функции находятся только в некотором приближении. При описании куперовской неустойчивости в материалах с неколлинеарным спиновым упорядочением часто используется беспетлевое приближение. В этом случае из равенства нулю определителя обратной матрицы $\hat{G}^{-1}$ следует выражение для спектра элементарных фермиевских возмущений системы в фазе СП + НКМ:

$$\varepsilon_{1,2p} = \left[\frac{1}{2} (\xi_p^2 + \xi_{p-Q}^2 + |A_p|^2 + |A_{-p+Q}|^2) + R_p R_{p-Q} \mp \lambda_p \right]^{1/2}, \quad (105)$$

в котором

$$\lambda_p = \left\{ \frac{1}{4} (\xi_p^2 - \xi_{p-Q}^2 + |A_p|^2 - |A_{-p+Q}|^2)^2 + R_p R_{p-Q} [(\xi_p + \xi_{p-Q})^2 + |A_p + A_{-p+Q}|^2] \right\}^{1/2}.$$

В (105) использованы следующие обозначения:

$$\xi_p = \varepsilon + U - \mu + J_0 \left(1 - \frac{n}{2} \right) + V_0 n + \frac{nt_p}{2},$$

$n = \langle n_f \rangle$ — концентрация электронов на узле, J_0 , J_Q — значения фурье-образа обменного интеграла для вектора $(0, 0)$ и вектора $\mathbf{Q}$ магнитной структуры, $V_0 = 6V$, $R_p = M(t_p - J_Q)$, $R_{p-Q} = M(t_{p-Q} - J_Q)$, M — амплитуда неоднородного магнитного параметра порядка, через которую определяется спиновая структура: $\langle \mathbf{S}_f \rangle = M(\cos(\mathbf{Q}\mathbf{f}), -\sin(\mathbf{Q}\mathbf{f}), 0)$, A_p — сверхпроводящий параметр порядка.

В большинстве случаев изучение ММ проводится по упрощённой схеме, когда существенные параметры модели варьируются произвольно. Имеется небольшое число работ, в которых проводится самосогласованный расчёт эффекта близости в топологически нетривиальных гетероструктурах или параметрах порядка, когда нетривиальная топология обусловлена внутренними взаимодействиями (см., например, [37, 277–280]).

В противоположность отмеченным упрощённым подходам, обсудим результаты решения в рамках t – J – V -модели задачи по нахождению топологически нетривиальных областей и топологических переходов в фазе СП + НКМ, когда параметры порядка определяются из системы интегральных уравнений самосогласования.

Для дальнейшего существенно, что вблизи заполнения $n \simeq 1$ более выгодным является 120-градусное спиновое упорядочение ($\mathbf{Q} = (2\pi/3, 2\pi/3)$) [256, 257, 281, 282]. В гейзенберговском режиме, когда $n = 1$, такой порядок стабилен вплоть до $J_2 \approx J_1/10$ [255]. Оказывается, что в фазе СП + НКМ симметрия сверхпроводящего параметра порядка коррелирует со структурой спинового упорядочения. Так, например, для страйповой структуры, предложенной в [259] в случае $J_2/J_1 \rightarrow \infty$, киральная симметрия сверхпроводящего параметра порядка становится невыгодной по сравнению с модифицированной $d_{x^2-y^2}$ -симметрией либо d_{xy} -симметрией [275]. В то же время 120-градусный магнитный порядок сохраняет киральный тип симметрии сверхпроводимости в фазе СП + НКМ. Важные наблюдения связаны с тем, что в $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ -сверхпроводящей фазе без магнитного упорядочения реализуются топологически защищённые краевые состояния [16], не являющиеся майорановскими, тогда как в сверхпроводящих $d_{x^2-y^2}$ - или d_{xy} -фазах таких состояний нет. Ввиду этого актуальным представляется поиск ММ в фазе сосуществования сверхпроводимости и 120-градусного магнитного упорядочения (СП + 120).

Для краткости выкладок здесь будем рассматривать только обменное взаимодействие между хаббардовскими фермионами на ближайших узлах. В результате квазиимпульсная зависимость сверхпроводящего параметра порядка в фазе СП + 120 имеет вид

$$A_p = 2A\varphi_{21}(p), \quad \varphi_{21}(p) = \cos p_2 + \exp\left(\frac{i2\pi}{3}\right) \cos p_1 +$$

$$+ \exp\left(\frac{i4\pi}{3}\right) \cos(p_1 + p_2). \quad (106)$$

Более общий случай с учётом обменного взаимодействия во второй координационной сфере и межузельного кулоновского отталкивания рассмотрен в [276].

На основе найденных функций Грина при рассмотрении периодических граничных условий получены уравнения самосогласования для магнитного параметра порядка M и амплитуды A сверхпроводящего параметра порядка [276, 277]. Уравнение для M имеет компактный вид:

$$M = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \sum_q \frac{A_q/2 - J_Q}{2\gamma_q} - \frac{1}{2} \sum_p (f_{1p} + f_{2p}) - M \sum_p \frac{J_Q - (t_p + t_{p-Q})/2}{\varepsilon_{2p}^{(0)} - \varepsilon_{1p}^{(0)}} (f_{1p} - f_{2p}), \quad (107)$$

где $A_q = J_q + (J_{q-Q} + J_{q+Q})/2$, J_q , как и прежде, — фурье-образ обменного интеграла, а величина γ_q связана с затравочным спектром спин-волновых возбуждений,

$$\omega_{0q} = 2M\gamma_q = 2M\sqrt{(J_q - J_Q)\left(\frac{J_{q-Q} + J_{q+Q}}{2} - J_Q\right)}, \quad (108)$$

$f_{jp} \equiv f(\varepsilon_{jp}^{(0)}/T)$ — функции Ферми–Дирака. При выводе данного уравнения пренебрегалось влиянием сверхпроводящих спариваний на спиновое упорядочение.

Использование этого приближения обусловлено следующими соображениями. Во-первых, оба типа дальнего порядка индуцированы одним и тем же обменным взаимодействием. В результате формирование магнитного упорядочения происходит при температурах $T_N \sim J$, часто превышающих температуры T_c куперовской неустойчивости. Во-вторых, в дальнейшем будет видно, что фаза СП + 120 реализуется преимущественно в недодопированной области фазовой диаграммы, вдали от оптимального допирования, для которой заведомо выполняется условие $T_N \gg T_c$. Для описания квантовых топологических переходов достаточно ограничиться областью низких температур, поэтому уравнение (107) записано при $T \ll T_N$. В результате ветви фермиевского спектра (105) без учёта поправок от сверхпроводящего параметра порядка определяются выражениями для спектра в нормальной магнитной фазе со 120-градусным упорядочением:

$$\varepsilon_{1,2p}^{(0)} = \frac{\xi_p + \xi_{p-Q}}{2} \mp \sqrt{\frac{\xi_p - \xi_{p-Q}}{2} + R_p R_{p-Q}}. \quad (109)$$

Уравнение самосогласования для A_{21} выражается как

$$1 - \frac{J_1}{N} \sum_{qj} \frac{(-1)^j \phi_{21}(q) \tanh(\varepsilon_{jq}/2T)}{\varepsilon_{jq} \lambda_q} \times \\ \times \left\{ \cos q_2 \left[\varepsilon_{jq}^2 - \xi_{q-Q}^2 - |A(-q+Q)|^2 \right] + \right. \\ \left. + \cos(q_2 - Q_2) R_q R_{q-Q} \right\} = 0, \quad (110)$$

где $j = 1, 2$.

На рисунке 28б показаны полученные из решения уравнений (107), (110) концентрационные зависимости

параметров порядка, в том числе в фазе СП + 120, для параметра обмена на соседних узлах $J_1 = 0,5t_1$. Соответствующая этим параметрам зависимость ТИ $\tilde{N}_3$ от концентрации электронов представлена на рис. 28а. Видно, что в системе при возрастании концентрации электронов реализуется серия квантовых топологических переходов с изменением значения $\tilde{N}_3$. Области с ненулевым значением $\tilde{N}_3$ соответствуют топологически нетривиальным фазам. При этом чётное значение $\tilde{N}_3$ свидетельствует о возможной реализации краевых состояний в системе с открытыми граничными условиями, а нечётное — о возможности формирования МСС с нулевой энергией возбуждения [57, 285].

В рассмотренной сильно коррелированной 2D-системе с треугольной решёткой при возрастании n возникновение фазы сосуществования сверхпроводимости и 120-градусного спинового упорядочения сопровождается переходом из топологически тривиальной фазы в топологически нетривиальную фазу. При дальнейшем увеличении концентрации электронов реализуются ещё два топологических квантовых перехода, разделяющих топологически нетривиальные фазы с разными значениями $\tilde{N}_3$. Критические электронные концентрации таких переходов отмечены штриховыми вертикальными линиями.

При критических электронных концентрациях энергетический спектр системы в фазе СП + 120 с периодическими граничными условиями становится бесщелевым. При этом для первого и третьего переходов щель закрывается в точке K' гексагональной зоны Бриллюэна, для второго — в точках K, Γ . Как видно из рис. 28, зависимость намагниченности M от электронной концентрации имеет изломы в точках топологических переходов, что обусловлено перестройкой электронной структуры и реализацией бесщелевых возбуждений в фазе СП + 120 [277]. Несмотря на малую величину эффектов и трудности их экспериментального обнаружения, они представляют фундаментальный интерес, указывая на принципиальную возможность реализации серии топологических квантовых переходов в сверхпроводниках с неколлинеарным спиновым порядком.

Следует отметить, что в рассмотренном подходе увеличение межузельного кулоновского отталкивания практически не изменяет характеристики магнитного упорядочения, но сильно подавляет сверхпроводимость. Это приводит, в частности, к тому, что при учёте кулоновского взаимодействия куперовская неустойчивость возникает при более высоких значениях электронной концентрации. В результате число топологических переходов может уменьшиться [277]. Другой важный эффект межузельного кулоновского отталкивания в фазе СП + 120 связан с примешиванием потенциалов сверхпроводящего спаривания, обладающих триплетным характером [276], в ядро интегрального уравнения само-

согласования, определяющего сверхпроводящий параметр порядка.

Отметим также, что возможность реализации фазы СП + 120 исследовалась ранее в рамках $t-J$ -модели вариационным методом Монте-Карло [283]. Использованный нами метод рассмотрения системы при сильных электронных корреляциях на качественном уровне приводит к близким результатам. Формирование ММ в фазе СП + 120 для квадратичного гамильтониана без взаимодействия описано в работах [284, 285].

4.3. Майорановские моды в фазе сосуществования сверхпроводимости и неколлинеарного магнетизма

При нахождении ММ будем считать, что узлы треугольной решётки вдоль направления вектора трансляции $\mathbf{a}_1$ занимают N_1 положений и соответствуют открытой геометрии, тогда как вдоль направления $\mathbf{a}_2$ реализуются периодические граничные условия (геометрия цилиндра).

Для данной геометрии замкнутая система уравнений для функций Грина представляется в блочном виде:

$$\begin{pmatrix} i\omega_n \hat{I}_{N_1} - \hat{\xi}_{k_2} & \hat{h}_{k_2-Q_2}(Q) & \hat{0}_{N_1} & \hat{D}_{k_2} \\ \hat{h}_{k_2}(-Q) & i\omega_n \hat{I}_{N_1} - \hat{\xi}_{k_2-Q_2} & -\hat{D}_{k_2-Q_2} & \hat{0}_{N_1} \\ \hat{0}_{N_1} & -\hat{D}_{k_2-Q_2}^\dagger & i\omega_n \hat{I}_{N_1} + \hat{\xi}_{k_2-Q_2} & -\hat{h}_{k_2}(-Q) \\ \hat{D}_{k_2}^\dagger & \hat{0}_{N_1} & -\hat{h}_{k_2-Q_2}(Q) & i\omega_n \hat{I}_{N_1} + \hat{\xi}_{k_2} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} \hat{G}_{12,12}(k_2, k_2; l'; i\omega_n) \\ \hat{G}_{12,12}(k_2 - Q_2, k_2; l'; i\omega_n) \\ \hat{G}_{21,12}(k_2 - Q_2, k_2; l'; i\omega_n) \\ \hat{G}_{21,12}(k_2, k_2; l'; i\omega_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{l'} \\ \hat{0} \\ \hat{0} \\ \hat{0} \end{bmatrix}, \quad (111)$$

где $\hat{I}_{N_1}$, $\hat{0}_{N_1}$ — соответственно единичная и нулевая матрицы размерностью $N_1 \times N_1$. Матрицы $\hat{\xi}_{k_2}$, $\hat{D}_{k_2}$ и $\hat{h}_{k_2}(Q)$ обладают той же размерностью. В приближении, когда средние от операторов не зависят от номера узла и вычисляются из задачи с периодическими граничными условиями, выражения для $\hat{\xi}_{k_2}$, $\hat{D}_{k_2}$ и $\hat{h}_{k_2}(Q)$ принимают вид:

$$\hat{\xi}_{k_2} = \begin{pmatrix} \xi_0 + Ft_{k_2} & FT_{k_2} & 0 & 0 \\ FT_{-k_2} & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & FT_{k_2} \\ 0 & 0 & FT_{-k_2} & \xi_0 + Ft_{k_2} \end{pmatrix}, \quad (112)$$

$$\hat{D}_{k_2} = - \begin{pmatrix} \Delta_{k_2}^* & \psi_{-k_2}^* & 0 & 0 \\ \psi_{k_2}^* & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \psi_{-k_2}^* \\ 0 & 0 & \psi_{k_2}^* & \Delta_{k_2}^* \end{pmatrix},$$

$$\hat{h}_{k_2}(Q) = -M \begin{pmatrix} (t_{k_2} - J_Q) \exp(iQ_1) & T_{k_2} \exp(iQ_1) & 0 & 0 \\ T_{-k_2} \exp(i2Q_1) & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & T_{k_2} \exp[i(N_1 - 1)Q_1] \\ 0 & 0 & T_{-k_2} \exp(iN_1 Q_1) & (t_{k_2} - J_Q) \exp(iN_1 Q_1) \end{pmatrix}.$$

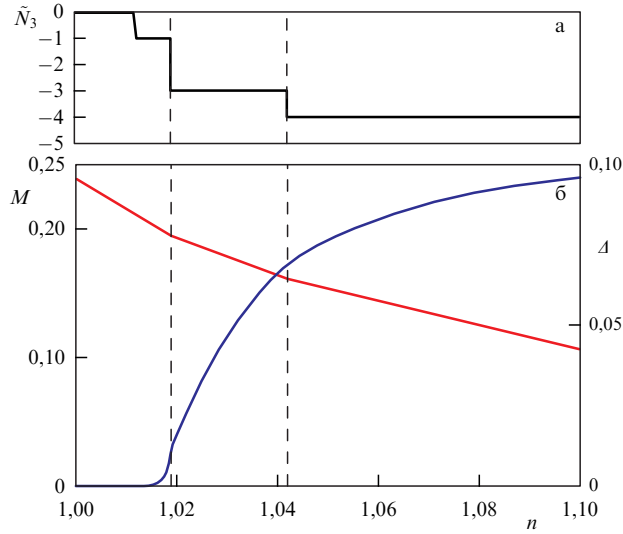


Рис. 28. (В цвете онлайн.) (а) Зависимость топологического индекса $\tilde{N}_3$ от концентрации электронов n для значений параметров обмена и кулоновского взаимодействия на соседних узлах $J_1 = 0,5t_1$, $V = 0$. (б) Концентрационные зависимости амплитуд магнитного и сверхпроводящего параметров порядка (M и Δ) для тех же параметров.

Для хаббардовских перенормировок в фазе с неколлинеарным упорядочением введены обозначения $F = \langle n_{l_2} \rangle / 2$, $M = \langle S_{l_2}^+ \rangle \exp[i(Q_1 l + Q_2 l_2)]$, где $\langle n_{l_2} \rangle$ — концентрация электронов на узле. Координата узла решётки здесь задаётся в двухпараметрическом виде: l для координаты вдоль направления $\mathbf{a}_1$ и l_2 вдоль направления $\mathbf{a}_2$. Остальные обозначения: $t_{k_2} = 2t_1 \cos k_2$, $\Delta_{k_2} = 2\Delta \cos k_2$, $T_{k_2} = t_1[1 + \exp(ik_2)]$,

$$\psi_{k_2} = \Delta \exp\left(\frac{i2\pi}{3}\right) \left[1 + \exp\left(\frac{i2\pi}{3} + ik_2\right)\right]. \quad (113)$$

Обозначение $\hat{G}_{v,\mu}(k_2, k_2; l'; i\omega_n)$ введено для вектора-столбца, l -элемент которого — $G_{v,\mu}(k_2, k_2; l, l'; i\omega_n)$, где l — номер узла вдоль направления $\mathbf{a}_1$ для первого хаббардовского оператора в определении (104), l' — номер узла вдоль того же направления для второго хаббардовского оператора. Квазиимпульсная зависимость от компоненты k_2 появилась после учёта периодических граничных условий вдоль $\mathbf{a}_2$. Ненулевой элемент правой части системы уравнений (112) можно представить через символы Кронекера: $\hat{\delta} = [\delta_{1l'}, \delta_{2l'}, \dots, \delta_{N_1 l'}]$.

Представим систему уравнений (111) в компактном виде:

$$[i\omega_n \hat{I}_{4N_1} - \hat{M}] \hat{V}_G = \hat{C}. \quad (114)$$

Домножим слева данное уравнение на матрицу $\hat{S}^\dagger$, такую что $\hat{S}^\dagger \hat{M} \hat{S} = \hat{M}_D$, где $\hat{M}_D$ — диагональная матрица, составленная из положительных энергий возбуждения ε_{jk_2} ($j = 1, 2, \dots, 2N_1$) и соответствующих им отрицательных энергий. Для определённости будем считать, что элементы на диагонали $\hat{M}_D$ упорядочены следующим образом: первые $2N_1$ элементов — энергии ε_{jk_2} по возрастанию, остальные $2N_1$ элементов — энергии $-\varepsilon_{jk_2}$ по убыванию. В результате получаем выражение

$$[i\omega_n \hat{I}_{4N_1} - \hat{M}_D] \hat{S}^\dagger \hat{V}_G = \hat{S}^\dagger \hat{C}. \quad (115)$$

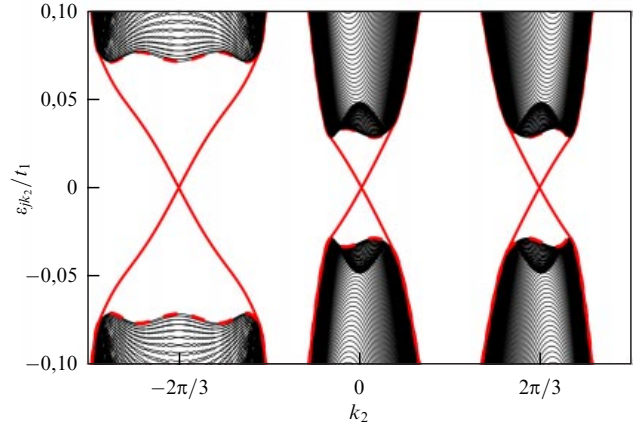


Рис. 29. (В цвете онлайн.) Спектр фермиовских возбуждений в фазе сосуществования сверхпроводимости и неколлинеарного магнетизма при электронной концентрации $n = 1,025$, соответствующей значению топологического инварианта $\tilde{N}_3 = -3$, для геометрии цилиндра.

Введём новые "квазичастичные" функции Грина:

$$\begin{bmatrix} \hat{G}_{\alpha, \downarrow 2}(k_2; l'; i\omega_n) \\ \hat{G}_{\beta, \downarrow 2}(k_2; l'; i\omega_n) \\ \hat{G}_{\alpha, \uparrow 2}(k_2; l'; i\omega_n) \\ \hat{G}_{\beta, \uparrow 2}(k_2; l'; i\omega_n) \end{bmatrix} = \hat{S}^\dagger \begin{bmatrix} \hat{G}_{\downarrow 2, \downarrow 2}(k_2, k_2; l'; i\omega_n) \\ \hat{G}_{\uparrow 2, \downarrow 2}(k_2 - Q_2, k_2; l'; i\omega_n) \\ \hat{G}_{\downarrow 2, \uparrow 2}(k_2 - Q_2, k_2; l'; i\omega_n) \\ \hat{G}_{\uparrow 2, \uparrow 2}(k_2, k_2; l'; i\omega_n) \end{bmatrix}. \quad (116)$$

В результате легко найти функцию Грина низкоэнергетических квазичастиц с j -й энергией ($j = 1, 2, \dots, N_1$):

$$G_{\alpha, \downarrow 2}(k_2; l'; i\omega_n) = \frac{(\hat{S}^\dagger)_{jl'}}{i\omega_n - \varepsilon_{jk_2}}. \quad (117)$$

Связь (116) между найденной в (117) функцией Грина и исходными функциями Грина позволяет определить фермиовские операторы элементарных возбуждений для фазы СП + 120 через линейную комбинацию хаббардовских операторов:

$$\alpha_{jk_2} = \sum_{l=1}^{N_1} (u_{jl} X_{k_2, l, \uparrow} + w_{jl} X_{k_2 - Q_2, l, \downarrow} + z_{jl} X_{-k_2 + Q_2, l, \uparrow}^{\dagger} + v_{jl} X_{-k_2, l, \downarrow}^{\dagger}), \quad (118)$$

где коэффициенты u_{jl} , w_{jl} , z_{jl} и v_{jl} — элементы j -й строки матрицы $\hat{S}^\dagger$. Из этого определения и симметричных соображений [285] следует, что ММ в геометрии цилиндра реализуются в точке импульсного пространства, соответствующей симметрии между частицами и дырками, точке PHIM (Particle-Hole Invariant Momentum), $K_2 = -K_2 + Q_2 + G$, где $Q_2 = 2\pi/3$, G — вектор обратной решётки, т.е. именно в точке $K_2 = -2\pi/3$, для которой, как видно из рис. 29, энергия возбуждения равна нулю.

Зависимость спектра возбуждений рассматриваемой системы от квазиимпульса k_2 для электронной концентрации $n = 1,025$ и $V = 0$ приведена на рис. 29. Штриховой линией показаны границы объёмного спектра возбуждений при периодических граничных условиях вдоль обоих направлений треугольной решётки. Видно, что при выбранных значениях параметров в спектре возбуждений

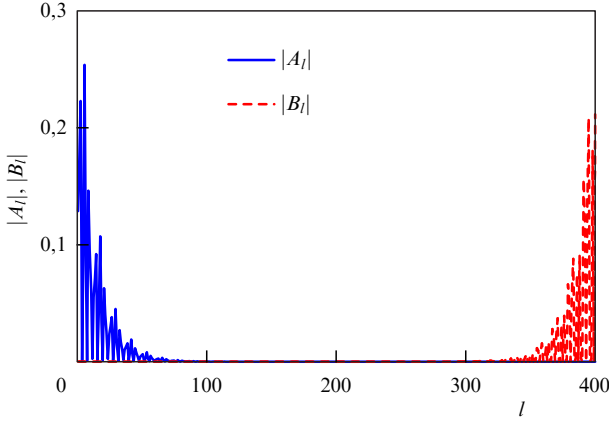


Рис. 30. (В цвете онлайн.) Пространственная структура майорановских мод в точке $K_2 = -2\pi/3$ в фазе сосуществования сверхпроводимости и магнетизма со значением топологического инварианта $\tilde{N}_3 = -3$. Параметры те же, что и на рис. 29.

реализуется сверхпроводящая щель. Для геометрии цилиндра внутри щели спектра появляются краевые состояния (жирная сплошная линия). Тонкими линиями представлены ветви возбуждений, лежащие в области объёмного спектра.

Для того чтобы показать пространственную структуру ММ при $K_2 = -2\pi/3$, воспользуемся подходом, изложенным в работе [12]. С этой целью введём два самосопряжённых оператора: $b'_0 = \alpha_1 + \alpha_1^\dagger$ и $b''_0 = i(\alpha_1^\dagger - \alpha_1)$. Затем на основе разложения (118) выразим эти операторы через майорановские операторы в атомном представлении:

$$\gamma_{A\sigma} = X_{l\sigma} + X_{l\sigma}^\dagger, \quad \gamma_{B\sigma} = i(X_{l\sigma}^\dagger - X_{l\sigma}). \quad (119)$$

В результате таких преобразований находим

$$\begin{aligned} b'_0 &= \sum_{l=1}^{N_1} \{ \text{Re}(u_{1l} + z_{1l})\gamma_{A\uparrow} + \text{Re}(w_{1l} + v_{1l})\gamma_{A\downarrow} \} - \\ &\quad - \sum_{l=1}^{N_1} \{ \text{Im}(u_{1l} - z_{1l})\gamma_{B\uparrow} + \text{Im}(w_{1l} - v_{1l})\gamma_{B\downarrow} \}, \\ b''_0 &= \sum_{l=1}^{N_1} \{ \text{Im}(u_{1l} + z_{1l})\gamma_{A\uparrow} + \text{Im}(w_{1l} + v_{1l})\gamma_{A\downarrow} \} + \\ &\quad + \sum_{l=1}^{N_1} \{ \text{Re}(u_{1l} - z_{1l})\gamma_{B\uparrow} + \text{Re}(w_{1l} - v_{1l})\gamma_{B\downarrow} \}. \end{aligned} \quad (120)$$

Зависимость от номера узла коэффициентов $A_l = \text{Re}(u_{1l} + z_{1l})$ и $B_l = \text{Im}(u_{1l} + z_{1l})$ разложений операторов b'_0 и b''_0 по операторам Майорана $\gamma_{A\sigma}, \gamma_{B\sigma}$ в атомном представлении показана на рис. 30. Видно, что зависимость этих коэффициентов от номера узла носит характер локализации вблизи противоположных краёв. Аналогичной локализацией обладают и другие коэффициенты разложения, поэтому они не приводятся на рис. 30.

В области со значением топологического инварианта $\tilde{N}_3 = -4$, после третьего топологического квантового перехода, спектр возбуждений в геометрии цилиндра представлен на рис. 31. Из рисунка 31 видно, что, хотя экспоненциально близкие к нулю энергии возбуждения реализуются для четырёх значений k_2 , в симметричной точке $K_2 = -2\pi/3$ ММ нет. Положение четырёх точек с

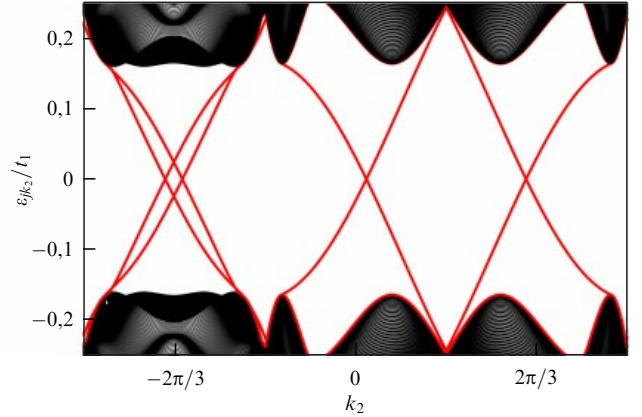


Рис. 31. (В цвете онлайн.) Спектр фермионных возбуждений в фазе сосуществования сверхпроводимости и магнетизма при электронной концентрации $n = 1.08$, соответствующей значению топологического инварианта $\tilde{N}_3 = -4$, для геометрии цилиндра.

импульсами k_2 и нулевой энергией может изменяться, поэтому такие нулевые моды чувствительны к параметрам системы и представляют меньший интерес. Распределение коэффициентов A_l, B_l для этих нулевых мод локализовано на одном и том же краю, в отличие от представленного на рис. 30.

В узкой области электронных концентраций фазы СП+120 со значением ТИ $\tilde{N}_3 = -1$ также возможно формирование ММ при $K_2 = -2\pi/3$. В данной области ветвь краевых состояний, в отличие от таковой в области со значением $\tilde{N}_3 = -3$, формируется только вблизи $K_2 = -2\pi/3$. Однако такая топологически нетривиальная фаза представляет малый практический интерес в связи с чрезвычайно малыми значениями сверхпроводящей щели даже без учёта межузельного кулоновского взаимодействия V .

Таким образом, на основе самосогласованного расчёта параметров порядка и топологического инварианта показаны реализация серии квантовых топологических переходов между областями с различной нетривиальной топологией в фазе сосуществования сверхпроводимости и неколлинеарного 120-градусного магнитного упорядочения, а также формирование ММ в одной из областей. Существенно, что реализация майорановских состояний индуцирована именно неколлинеарным спиновым порядком при наличии сверхпроводимости. Представленные результаты расширяют список вероятных кандидатов для экспериментального обнаружения майорановских фермионных мод.

5. Заключение

В обзоре проанализировано становление и развитие проблемы реализации и идентификации майорановских мод в низкоразмерных конденсированных средах, допускающих существование сверхпроводящих фаз с нетривиальной топологией. В качестве объектов существования ММ рассмотрены системы, в которых потенциал сверхпроводящего спаривания возникает в результате либо эффекта близости, либо куперовской неустойчивости, инициируемой внутренними взаимодействиями в системе.

На примере цепочки Китаева продемонстрированы принципы реализации элементарных возбуждений, соот-

ветствующих ММ. Для наглядности рассмотрены частные случаи, допускающие простые аналитические выражения, которые отражают структуру таких мод. Показано соответствие между условиями реализации ММ при открытой геометрии системы и условиями формирования топологически нетривиального состояния, определяемого по значению фазы Зака – Берри для замкнутой цепочки. Установлено, что анализ особенностей гамилтониана Китаева в квазиимпульсном представлении и его основного состояния позволяет получить простой способ определения фермионной чётности этого состояния для различных параметров модели и найти на фазовой диаграмме области реализации топологически нетривиальной фазы.

Продemonстрировано, что обусловленная эффектами конечных размеров цепочки гибридизация волновых функций ММ приводит к реализации в открытой системе каскада квантовых переходов с изменением фермионной чётности основного состояния. При этом квантовые критические точки появляются в той области параметров, для которой в замкнутой системе реализуется топологически нетривиальная фаза. Важным для экспериментального применения представляется тот факт, что указанные квантовые переходы могут быть идентифицированы на основе анализа электрокалорических аномалий.

Отмеченная возможность обнаружения квантовых переходов имеется не только в цепочке Китаева, но и в более реальных в практическом отношении системах. Это продемонстрировано для полупроводниковой нанопроволоки со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы и наведённой сверхпроводимостью (сверхпроводящая нанопроволока), помещённой во внешнее магнитное поле. Важное значение имеет результат о сохранении магнито- и электрокалорических аномалий при учёте электрон-электронных взаимодействий. Поэтому обнаружение калорических аномалий может не только выступать в качестве теста на проявление квантовых переходов, но и служить основанием для утверждения о реализации состояний с майорановскими модами.

Выполнен обзор экспериментальных результатов, связанных с реализацией пика кондактанса при нулевом напряжении смещения в ограниченной области магнитных полей. Проанализированы аргументы, позволяющие расценивать возникновение этой особенности как свидетельство реализации ММ в гибридной структуре сверхпроводник – полупроводниковая нанопроволока. Здесь же приведены альтернативные сценарии появления пика кондактанса, не связанные с топологическим фазовым переходом.

Рассмотрены свойства ММ, а также кинетические и статические характеристики систем, которые в последнее время используются для идентификации майорановских связанных состояний. Показано, что современные принципы обнаружения майорановских мод основаны на исследовании нелокальности таких возбуждений и их спиновой поляризации. Кроме того, обсуждены особенности флуктуационных характеристик тока (дробовой шум), транспорта в режиме кулоновской блокады и интерференционных процессов.

В рамках последнего направления проведён теоретический анализ проводящих характеристик устройства в виде кольца Ааронова – Бома, рукава которого соединены сверхпроводящей проволокой (СП, мостиком).

Обсуждение транспортных свойств такого устройства проведено при учёте взаимодействия между низкоэнергетическими состояниями проволок в нормальной фазе, составляющих рукава и мостика.

В приближении линейного отклика и низких температур показано, что в кондактансе кольца возникает ряд симметричных и асимметричных резонансов (резонансы Брейта – Вигнера и Фано соответственно), когда проволока переводится магнитным полем в топологически нетривиальную фазу. Проанализирована зависимость свойств резонансов Фано от пространственного распределения низкоэнергетического состояния в СП (состояние майорановского или андреевского типа). Важно, что тип этого состояния может быть эффективно протестирован в рамках частного случая кольца — Т-образной схемы транспорта.

Предсказанный эффект Фано и его особенности представляют значительный интерес для установления различий в транспортных свойствах майорановских и андреевских состояний. Полученные результаты могут способствовать дальнейшему развитию экспериментальных методов обнаружения МСС при когерентном квантовом транспорте.

Продemonстрирована перспективность использования сверхпроводящих систем с неоднородным магнитным упорядочением для обнаружения ММ. В таких системах плотная магнитная наноструктура наносится на сверхпроводник или сверхпроводник помещается в неоднородное магнитное поле либо рассматривается сверхпроводник в фазе сосуществования с неколлинеарным магнитным упорядочением. Для таких магнитных сверхпроводников показано, что даже в режиме сильных электронных корреляций может сохраняться нетривиальная топология основного состояния и возможно возникновение ММ. Продemonстрирована принципиальная возможность влияния топологических квантовых переходов на характеристики магнитного упорядочения таких сверхпроводников. Однако экспериментальное обнаружение топологически нетривиальных поверхностных состояний в таких системах является актуальной задачей для будущих экспериментов.

Следует отметить, что влияние сильных электронных корреляций на топологически нетривиальные фазы может быть существенным и приводить к индуцированию новых топологических переходов и даже к смене топологической классификации этих фаз.

Благодарности. Обзор подготовлен в рамках гранта Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) № 19-12-50087 по конкурсу "Экспансия". Часть представленных результатов получена в рамках проектов РФФИ №№ 19-02-00348, 20-32-70059, 20-02-00015. С.В.А. выражает благодарность гранту Президента РФ МК-1641.2020.2 за оказанную поддержку. А.О.З. и М.С.Ш. выражают благодарность Фонду развития теоретической физики и математики "Базис". М.Ю.К. благодарит Программу фундаментальных исследований Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики" за поддержку.

Список литературы

1. Haldane F D M *Phys. Rev. Lett.* **47** 1840 (1981)
2. Haldane F D M *J. Phys. C* **14** 2585 (1981)

3. Niu Q, Thouless D J, Wu Y-S *Phys. Rev. B* **31** 3372 (1985)
4. Volovik G E *The Universe in a Helium Droplet* (Intern. Ser. of Monographs on Physics, Vol. 117) (New York: Oxford Univ. Press, 2009) <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199564842.001.0001>
5. Hasan M Z, Kane C L *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045 (2010)
6. Лозовик Ю Е *УФН* **182** 1111 (2012); Lozovik Yu E *Phys. Usp.* **55** 1035 (2012)
7. Тарасенко С А *УФН* **188** 1129 (2018); Tarasenko S A *Phys. Usp.* **61** 1026 (2018)
8. Панкратов О А *УФН* **188** 1226 (2018); Pankratov O A *Phys. Usp.* **61** 1116 (2018)
9. Schnyder A P et al. *Phys. Rev. B* **78** 195125 (2008)
10. Nayak Ch et al. *Rev. Mod. Phys.* **80** 1083 (2008)
11. Read N, Green D *Phys. Rev. B* **61** 10267 (2000)
12. Kitaev A Yu *УФН* **171** (Suppl. 10) 131 (2001); Kitaev A Yu *Phys. Usp.* **44** (10S) 131 (2001)
13. Каган М Ю, Турлапов А В *УФН* **189** 225 (2019); Kagan M Yu, Turlapov A V *Phys. Usp.* **62** 215 (2019)
14. Volovik G E *Письма в ЖЭТФ* **90** 440 (2009); Volovik G E *JETP Lett.* **90** 398 (2009)
15. Laughlin R B *Physica C* **234** 280 (1994)
16. Volovik G E *Письма в ЖЭТФ* **66** 492 (1997); Volovik G E *JETP Lett.* **66** 522 (1997)
17. Balatsky A V *Phys. Rev. Lett.* **80** 1972 (1998)
18. Baskaran G *Phys. Rev. Lett.* **91** 097003 (2003)
19. Nandkishore R, Levitov L S, Chubukov A V *Nat. Phys.* **8** 158 (2012)
20. Nandkishore R, Thomale R, Chubukov A V *Phys. Rev. B* **89** 144501 (2014)
21. Каган М Ю, Мицкан В А, Коровушкин М М *УФН* **185** 785 (2015); Kagan M Yu, Mitskan V A, Korovushkin M M *Phys. Usp.* **58** 733 (2015)
22. Mackenzie A P, Maeno Y *Rev. Mod. Phys.* **75** 657 (2003)
23. Das Sarma S, Nayak C, Tewari S *Phys. Rev. B* **73** 220502 (2006)
24. Pustogow A et al. *Nature* **574** 72 (2019)
25. Suzuki S-I, Sato M, Tanaka Y *Phys. Rev. B* **101** 054505 (2020)
26. Sau J D, Tewari S *Phys. Rev. B* **86** 104509 (2012)
27. Минеев В П *УФН* **187** 129 (2017); Mineev V P *Phys. Usp.* **60** 121 (2017)
28. Fu L, Kane C L *Phys. Rev. Lett.* **100** 096407 (2008)
29. Snelder M et al. *J. Phys. Condens. Matter* **27** 315701 (2015)
30. Sato M, Fujimoto S *Phys. Rev. B* **79** 094504 (2009)
31. Hor Y S et al. *Phys. Rev. Lett.* **104** 057001 (2010)
32. Sasaki S, Mizushima T *Physica C* **514** 206 (2015)
33. Zhang P et al. *Science* **360** 182 (2018)
34. Sau J D et al. *Phys. Rev. Lett.* **104** 040502 (2010)
35. Lutchyn R M, Sau J D, Das Sarma S *Phys. Rev. Lett.* **105** 077001 (2010)
36. Oreg Y, Refael G, von Oppen F *Phys. Rev. Lett.* **105** 177002 (2010)
37. Stanescu T D, Lutchyn R M, Das Sarma S *Phys. Rev. B* **84** 144522 (2011)
38. Mourik V et al. *Science* **336** 1003 (2012)
39. Deng M T et al. *Nano Lett.* **12** 6414 (2012)
40. Choy T-P et al. *Phys. Rev. B* **84** 195442 (2011)
41. Martin I, Morpurgo A F *Phys. Rev. B* **85** 144505 (2012)
42. Alicea J *Rep. Prog. Phys.* **75** 076501 (2012)
43. Beenakker C W J *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **4** 113 (2013)
44. Elliot S R, Franz M *Rev. Mod. Phys.* **87** 137 (2015)
45. Sato M, Ando Y *Rep. Prog. Phys.* **80** 076501 (2017)
46. Goldstein G, Chamon C *Phys. Rev. B* **86** 115122 (2012)
47. Kells G *Phys. Rev. B* **92** 081401 (2015)
48. Kells G *Phys. Rev. B* **92** 155434 (2015)
49. Monthus C J *Phys. A* **51** 265303 (2018)
50. Niu Y et al. *Phys. Rev. B* **85** 035110 (2012)
51. DeGottardi W et al. *Phys. Rev. B* **88** 165111 (2013)
52. Tong Q-J et al. *Phys. Rev. B* **87** 201109 (2013)
53. Viyuela O et al. *Phys. Rev. B* **94** 125121 (2016)
54. Lepori L, Dell'Anna L *New J. Phys.* **19** 103030 (2017)
55. Alecce A, Dell'Anna L *Phys. Rev. B* **95** 195160 (2017)
56. Kitaev A *Ann. Physics* **321** 2 (2006)
57. Ghosh P et al. *Phys. Rev. B* **82** 184525 (2010)
58. Budich J C, Ardonne E *Phys. Rev. B* **88** 075419 (2013)
59. Berry M V *Proc. R. Soc. Lond. A* **392** 45 (1984)
60. Zak J *Phys. Rev. Lett.* **62** 2747 (1989)
61. Као Н *Phys. Rev. B* **90** 245435 (2014)
62. Звягин А А *Физика низких температур* **41** 806 (2015); Zvyagin A A *Low Temp. Phys.* **41** 625 (2015)
63. Hegde S et al. *New J. Phys.* **17** 053036 (2015)
64. Hegde S, Vishveshwara S *Phys. Rev. B* **94** 115166 (2016)
65. Kawabata K et al. *Phys. Rev. B* **95** 195140 (2017)
66. Zeng C et al. *Phys. Rev. B* **99** 094523 (2019)
67. Leumer N et al. *J. Phys. Condens. Matter* **32** 445502 (2020)
68. Zyuzin A A et al. *Phys. Rev. Lett.* **111** 056802 (2013)
69. Федосеев А Д *ЖЭТФ* **155** 138 (2019); Fedoseev A D *J. Exp. Theor. Phys.* **128** 125 (2019)
70. Thomale R, Rachel S, Schmitteckert P *Phys. Rev. B* **88** 161103 (2013)
71. Chan Y-H, Chiu C-K, Sun K *Phys. Rev. B* **92** 104514 (2015)
72. Gergs M, Fritz L, Schuricht D *Phys. Rev. B* **93** 075129 (2016)
73. Miao J-J et al. *Sci. Rep.* **8** 488 (2018)
74. Вальков В В, Мицкан В А, Шустин М С *Письма в ЖЭТФ* **106** 762 (2017); Val'kov V V, Mitskan V A, Shustin M S *JETP Lett.* **106** 798 (2017)
75. Val'kov V V, Kagan M Yu, Aksenov S V *J. Phys. Condens. Matter* **31** 225301 (2019)
76. Val'kov V V, Aksenov S V *J. Magn. Magn. Mater.* **465** 88 (2018)
77. Karcher J F, Sonner M, Mirlin A D *Phys. Rev. B* **100** 134207 (2019)
78. Zhang H et al. *Nature* **556** 74 (2018)
79. Gangadharaiah S et al. *Phys. Rev. Lett.* **107** 036801 (2011)
80. Fidkowski L, Kitaev A *Phys. Rev. B* **81** 134509 (2010)
81. Fidkowski L, Kitaev A *Phys. Rev. B* **83** 075103 (2011)
82. Turner A M, Pollmann F, Berg E *Phys. Rev. B* **83** 075102 (2011)
83. Katsura H, Schuricht D, Takahashi M *Phys. Rev. B* **92** 115137 (2015)
84. Miao F-C et al. *Phys. Rev. Lett.* **118** 267701 (2017)
85. Iemini F et al. *Phys. Rev. Lett.* **115** 156402 (2015)
86. Rahmani A et al. *Phys. Rev. B* **92** 235123 (2015)
87. Hassler F, Schuricht D *New J. Phys.* **14** 125018 (2012)
88. Tao Z et al. *Phys. Rev. B* **101** 035109 (2020)
89. Brouwer P W et al. *Phys. Rev. Lett.* **107** 196804 (2011)
90. Kaladzhyan V, Bena C *Phys. Rev. B* **100** 081106 (2019)
91. Тинюкова Т С, Чубурин Ю П *ТМФ* **200** 137 (2019); Tinyukova T S, Chuburin Yu P *Theor. Math. Phys.* **200** 1043 (2019)
92. Thakurathi M, Deb O, Sen D *J. Phys. Condens. Matter* **27** 275702 (2015)
93. Sedlmayr N, Bena C *Phys. Rev. B* **92** 115115 (2015)
94. Sedlmayr N, Aguiar-Hualde J M, Bena C *Phys. Rev. B* **93** 155425 (2016)
95. Zhang G, Song Z *Phys. Rev. Lett.* **115** 177204 (2015)
96. Вальков В В, Мицкан В А, Шустин М С *ЖЭТФ* **157** 281 (2019); Val'kov V V, Mitskan V A, Shustin M S *J. Exp. Theor. Phys.* **130** 235 (2019)
97. Вальков В В и др. *Письма в ЖЭТФ* **126** 126 (2019); Val'kov V V et al. *JETP Lett.* **110** 140 (2019)
98. Das A et al. *Nat. Phys.* **8** 887 (2012)
99. Андреев А Ф *ЖЭТФ* **46** 1823 (1964); Andreev A F *Sov. Phys. JETP* **19** 1228 (1964)
100. Blonder G E, Tinkham M, Klapwijk T M *Phys. Rev. B* **25** 4515 (1982)
101. Law K T, Lee P A, Ng T K *Phys. Rev. Lett.* **103** 237001 (2009)
102. Flensberg K *Phys. Rev. B* **82** 180516 (2010)
103. Wu B H, Cao J C *Phys. Rev. B* **85** 085415 (2012)
104. Das Sarma S, Sau J D, Stanescu T D *Phys. Rev. B* **86** 220506 (2012)
105. Rainis D et al. *Phys. Rev. B* **87** 024515 (2013)
106. Deng M T et al. *Science* **354** 1557 (2016)
107. Nichele F et al. *Phys. Rev. Lett.* **119** 136803 (2017)
108. Takei S et al. *Phys. Rev. Lett.* **110** 186803 (2013)
109. Liu C-X et al. *Phys. Rev. B* **96** 054520 (2017)
110. Cheng M, Lutchyn R M, Das Sarma S *Phys. Rev. B* **85** 165124 (2012)
111. Rainis D, Loss D *Phys. Rev. B* **85** 174533 (2012)
112. Liu J et al. *Phys. Rev. Lett.* **109** 267002 (2012)
113. Bagrets D, Altland A *Phys. Rev. Lett.* **109** 227005 (2012)
114. Rieder M-T et al. *Phys. Rev. B* **86** 125423 (2012)
115. Pan H et al. *Phys. Rev. B* **101** 024506 (2020)
116. Kells G, Meidan D, Brouwer P W *Phys. Rev. B* **85** 060507 (2012)
117. Lee E J H et al. *Phys. Rev. Lett.* **109** 186802 (2012)
118. Pikulin D I et al. *New J. Phys.* **14** 125011 (2012)

119. Krogstrup P et al. *Nat. Mater.* **14** 400 (2015)
120. Chang W et al. *Nat. Nanotechnol.* **10** 232 (2015)
121. Gül Ö et al. *Nano Lett.* **17** 2690 (2017)
122. Gazibegovic S et al. *Nature* **548** 434 (2017)
123. Zhang H et al. *Nat. Commun.* **8** 16025 (2017)
124. Franz M, Pikulin D I *Nat. Phys.* **14** 334 (2018)
125. Zhang H et al. *Nature* **581** E4 (2020)
126. Moore C, Stanescu T D, Tewari S *Phys. Rev. B* **97** 165302 (2018)
127. Kells G, Meidan D, Brouwer P *Phys. Rev. B* **86** 100503 (2012)
128. Stanescu T D, Lutchyn R M, Das Sarma S *Phys. Rev. B* **87** 094518 (2013)
129. Haim A et al. *Phys. Rev. Lett.* **114** 166406 (2015)
130. Chen J et al. *Phys. Rev. Lett.* **123** 107703 (2019)
131. Woods B D et al. *Phys. Rev. B* **100** 125407 (2019)
132. Liu C-X et al. *Phys. Rev. B* **96** 075161 (2017)
133. Moore C et al. *Phys. Rev. B* **98** 155314 (2018)
134. Lee E J H et al. *Nat. Nanotechnol.* **9** 79 (2014)
135. Liu C-X, Sau J D, Das Sarma S *Phys. Rev. B* **97** 214502 (2018)
136. Reeg C et al. *Phys. Rev. B* **98** 245407 (2018)
137. Deng M-T et al. *Phys. Rev. B* **98** 085125 (2018)
138. Yu P et al. *Nat. Phys.* **17** 482 (2021)
139. Li J et al. *Sci. Rep.* **4** 4930 (2014)
140. Prada E, Aguado R, San-Jose P *Phys. Rev. B* **96** 085418 (2017)
141. Clarke D J *Phys. Rev. B* **96** 201109 (2017)
142. Ricco L S et al. *Phys. Rev. B* **99** 155159 (2019)
143. Lee M, Lim J S, López R *Phys. Rev. B* **87** 241402 (2013)
144. Nilsson J, Akhmerov A R, Beenakker C W J *Phys. Rev. Lett.* **101** 120403 (2008)
145. Liu J, Zhang F-C, Law K T *Phys. Rev. B* **88** 064509 (2013)
146. Bolech C J, Demler E *Phys. Rev. Lett.* **98** 237002 (2007)
147. Liu D E, Cheng M, Lutchyn R M *Phys. Rev. B* **91** 081405 (2015)
148. Haim A et al. *Phys. Rev. B* **92** 245112 (2015)
149. Valentini S et al. *Physica E* **82** 254 (2016)
150. Smirnov S *New J. Phys.* **19** 063020 (2017)
151. Smirnov S *Phys. Rev. B* **97** 165434 (2018)
152. Leijnse M, Flensberg K *Phys. Rev. Lett.* **107** 210502 (2011)
153. Sticlet D, Bena C, Simon P *Phys. Rev. Lett.* **108** 096802 (2012)
154. Nagai Y, Nakamura H, Machida M J. *Phys. Soc. Jpn.* **83** 064703 (2014)
155. Guigou M et al. *Europhys. Lett.* **115** 47005 (2016)
156. Serina M, Loss D, Klinovaja J *Phys. Rev. B* **98** 035419 (2018)
157. Вальков В В, Аксенов С В *ФНТ* **43** 546 (2017); Val'kov V V, Aksenov S V *Low Temp. Phys.* **43** 436 (2017)
158. Val'kov V V, Aksenov S V J. *Magn. Magn. Mater.* **440** 112 (2017)
159. He J J et al. *Phys. Rev. Lett.* **112** 037001 (2014)
160. He J J et al. *Nat. Commun.* **5** 3232 (2014)
161. Wu B H et al. *Phys. Rev. B* **90** 205435 (2014)
162. Albrecht S M et al. *Nature* **531** 206 (2016)
163. Hekking F W J et al. *Phys. Rev. Lett.* **70** 4138 (1993)
164. Hergenrother J M, Tuominen M T, Tinkham M *Phys. Rev. Lett.* **72** 1742 (1994)
165. Averin D V, Nazarov Yu V *Phys. Rev. Lett.* **69** 1993 (1992)
166. Fu L *Phys. Rev. Lett.* **104** 056402 (2010)
167. Zazunov A, Yeyati A L, Egger R *Phys. Rev. B* **84** 165440 (2011)
168. Hützen R et al. *Phys. Rev. Lett.* **109** 166403 (2012)
169. Khaymovich I M, Pekola J P, Melnikov A S *New J. Phys.* **19** 123026 (2017)
170. Chiu C-K, Sau J D, Das Sarma S *Phys. Rev. B* **96** 054504 (2017)
171. Aharonov Y, Bohm D *Phys. Rev.* **115** 485 (1959)
172. Yacoby A et al. *Phys. Rev. Lett.* **73** 3149 (1994)
173. Kobayashi K et al. *Phys. Rev. B* **68** 235304 (2003)
174. Cabosart D et al. *Phys. Rev. B* **90** 205433 (2014)
175. Akhmerov A R et al. *Phys. Rev. Lett.* **106** 057001 (2011)
176. Whittcar A M et al. *Nat. Commun.* **11** 3212 (2020)
177. Ioselevich P A, Feigel'man M V *Phys. Rev. Lett.* **106** 077003 (2011)
178. Snelder M et al. *Phys. Rev. Lett.* **87** 104507 (2013)
179. Jacquod Ph, Büttiker M *Phys. Rev. B* **88** 241409 (2013)
180. Tripathi K M, Das S, Rao S *Phys. Rev. Lett.* **116** 166401 (2016)
181. Sau J D, Swingle B, Tewari S *Phys. Rev. B* **92** 020511 (2015)
182. Hell M, Flensberg K, Leijnse M *Phys. Rev. B* **97** 161401 (2018)
183. Flensberg K *Phys. Rev. Lett.* **106** 090503 (2011)
184. Liu D E, Baranger H U *Phys. Rev. B* **84** 201308 (2011)
185. Chiu C-K, Sau J D, Das Sarma S *Phys. Rev. B* **97** 035310 (2018)
186. Fano U *Phys. Rev.* **124** 1866 (1961)
187. Dessotti F A et al. *J. Appl. Phys.* **116** 173701 (2014)
188. Shang E-M et al. *Chinese Phys. B* **23** 057201 (2014)
189. Ueda A, Yokoyama T *Phys. Rev. B* **90** 081405 (2014)
190. Jiang C, Zheng Y-S *Solid State Commun.* **212** 14 (2015)
191. Schuray A, Weithofer L, Recher P *Phys. Rev. B* **96** 085417 (2017)
192. Zhang Y-J et al. *Superlattices Microstruct.* **113** 25 (2018)
193. Rainis D et al. *Phys. Rev. Lett.* **112** 196803 (2014)
194. Келдыш Л В *ЖЭТФ* **47** 1515 (1964); Keldysh L V *Sov. Phys. JETP* **20** 1018 (1965)
195. Арсеев П И *УФН* **185** 1271 (2015); Arseev P I *Phys. Usp.* **58** 1159 (2015)
196. Арсеев П И и др. *УФН* **187** 1147 (2017); Arseev P I et al. *Phys. Usp.* **60** 1067 (2017)
197. Rogovin D, Scalapino D J *Ann. Physics* **86** 1 (1974)
198. Zeng Z Y, Li B, Claro F *Phys. Rev. B* **68** 115319 (2003)
199. Вонсовский С В, Изюмов Ю А, Курмаев Э З *Сверхпроводимость переходных металлов, их сплавов и соединений* (М.: Наука, 1977); Пер. на англ. яз.: Vonsovsky S V, Izyumov Y A, Kurmaev E Z *Superconductivity of Transition Metals: their Alloys and Compounds* (Berlin: Springer-Verlag, 1982)
200. von Neumann J, Wigner E *Phys. Z.* **30** 465 (1929)
201. Volya A, Zelevinsky V *Phys. Rev. C* **67** 054322 (2003)
202. Sadreev A F, Bulgakov E N, Rotter I *Phys. Rev. B* **73** 235342 (2006)
203. Lee H-W *Phys. Rev. Lett.* **82** 2358 (1999)
204. Sadreev A F, Rotter I J. *Phys. A* **36** 11413 (2003)
205. Nowak M P, Szafran B, Peeters F M *Phys. Rev. B* **84** 235319 (2011)
206. Lu H, Lü R, Zhu B *Phys. Rev. B* **71** 235320 (2005)
207. Landrón de Guevara M L, Orellana P A *Phys. Rev. B* **73** 205303 (2006)
208. Shababazyan T V, Raikh M E *Phys. Rev. B* **49** 17123 (1994)
209. Vorrath T, Brandes T *Phys. Rev. B* **68** 035309 (2003)
210. Landrón de Guevara M L, Claro F, Orellana P A *Phys. Rev. B* **67** 195335 (2003)
211. Orellana P A, Landrón de Guevara M L, Claro F *Phys. Rev. B* **70** 233315 (2004)
212. Dicke R H *Phys. Rev.* **89** 472 (1953)
213. Myoung N et al. *Phys. Rev. B* **100** 045427 (2019)
214. Stoudenmire E M et al. *Phys. Rev. B* **84** 014503 (2011)
215. Ким Ч С, Сатанин А М *ЖЭТФ* **115** 211 (1999); Kim C S, Sata-nin A M J. *Exp. Theor. Phys.* **88** 118 (1999)
216. Ким Ч С и др. *ЖЭТФ* **116** 263 (1999); Kim C S et al. *J. Exp. Theor. Phys.* **89** 144 (1999)
217. Аксенов С В, Каган М Ю *Письма в ЖЭТФ* **111** 321 (2020); Aksenov S V, Kagan M Yu *JETP Lett.* **111** 286 (2020)
218. Miroshnichenko A E, Flach S, Kivshar Yu S *Rev. Mod. Phys.* **82** 2257 (2010)
219. Зубарев Д Н *УФН* **71** 71 (1960); Zubarev D N *Sov. Phys. Usp.* **3** 320 (1960)
220. Miroshnichenko A E, Kivshar Yu S *Phys. Rev. E* **72** 056611 (2005)
221. Braunecker B et al. *Phys. Rev. B* **82** 045127 (2010)
222. Kjaergaard M, Wölms K, Flensberg K *Phys. Rev. B* **85** 020503 (2012)
223. Egger R, Flensberg K *Phys. Rev. B* **85** 235462 (2012)
224. Kornich V et al. *Phys. Rev. B* **101** 125414 (2020)
225. Braunecker B, Simon P *Phys. Rev. Lett.* **111** 147202 (2013)
226. Klinovaja J et al. *Phys. Rev. Lett.* **111** 186805 (2013)
227. Vazifeh M M, Franz M *Phys. Rev. Lett.* **111** 206802 (2013)
228. Yu L *Acta Phys. Sin.* **4** 113 (1965)
229. Shiba H *Prog. Theor. Phys.* **40** 435 (1968)
230. Русинов А И *ЖЭТФ* **56** 2047 (1969); Rusinov A I *Sov. Phys. JETP* **29** 1101 (1969)
231. Choi D-J et al. *Rev. Mod. Phys.* **91** 041001 (2019)
232. Nadj-Perge S et al. *Phys. Rev. B* **88** 020407 (2013)
233. Nadj-Perge S et al. *Science* **346** 602 (2014)
234. Ruby M et al. *Phys. Rev. Lett.* **115** 197204 (2015)
235. Pawlak R et al. *Npj Quantum Inf.* **2** 16035 (2016)
236. Ruby M et al. *Nano Lett.* **17** 4473 (2017)
237. Feldman B E et al. *Nat. Phys.* **13** 286 (2017)
238. Kim H et al. *Sci. Adv.* **4** eaar5251 (2018)
239. Spethmann J et al. *Phys. Rev. Lett.* **124** 227203 (2020)
240. Bedow J et al. *Phys. Rev. B* **102** 180504 (2020)
241. Crawford D et al. *Phys. Rev. B* **101** 174510 (2020)

242. Rex S, Gornyi I V, Mirlin A D *Phys. Rev. B* **102** 224501 (2020)
243. Heimes A, Kotetes P, Schön G *Phys. Rev. B* **90** 060507 (2014)
244. Pawlak R et al. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **107** 1 (2019)
245. Буздин А И и др. *УФН* **144** 597 (1984); Buzdin A I et al. *Sov. Phys. Usp.* **27** 927 (1984)
246. Iida K et al. *Phys. Rev. B* **100** 014506 (2019)
247. Devizorova Zh, Buzdin A *Phys. Rev. B* **100** 104523 (2019)
248. Kim T K et al. *Phys. Rev. B* **103** 174517 (2021)
249. Takada K et al. *Nature* **422** 53 (2003)
250. Pyon S, Kudo K, Nohara M *J. Phys. Soc. Jpn.* **81** 053701 (2012)
251. McKenzie R H *Comments Condens. Matter Phys.* **18** 309 (1998)
252. Голосов Д И, Чубуков А В *Письма в ЖЭТФ* **50** 416 (1989); Golosov D I, Chubukov A V *JETP Lett.* **50** 451 (1989)
253. Ritchey I, Coleman P J. *Phys. Condens. Matter* **2** 9227 (1990)
254. Chubukov A V, Golosov D I *J. Phys. Condens. Matter* **3** 69 (1991)
255. Barabanov A F, Mikheyenkov A V *Письма в ЖЭТФ* **56** 470 (1992); *JETP Lett.* **56** 454 (1992)
256. Chubukov A V, Senthil T, Sachdev S *Phys. Rev. Lett.* **72** 2089 (1994)
257. Chubukov A V, Sachdev S, Senthil T *J. Phys. Condens. Matter* **6** 8891 (1994)
258. Михеенков А В и др. *ЖЭТФ* **153** 483 (2018); Mikheyenkov A V et al. *J. Exp. Theor. Phys.* **126** 404 (2018)
259. Lu Y-M, Wang Z *Phys. Rev. Lett.* **110** 096403 (2013)
260. Yao M-Y et al. *Phys. Rev. B* **91** 161411 (2015)
261. Буздин А И, Булаевский Л Н *УФН* **149** 45 (1986); Buzdin A I, Bulaeviskii L N *Sov. Phys. Usp.* **29** 412 (1986)
262. Pfeleiderer C *Rev. Mod. Phys.* **81** 1551 (2009)
263. Вальков В В, Злотников А О *Письма в ЖЭТФ* **95** 390 (2012); Val'kov V V, Zlotnikov A O *JETP Lett.* **95** 350 (2012)
264. Lu Y-M, Xiang T, Lee D-H *Nat. Phys.* **10** 634 (2014)
265. Lau A, Timm C *Phys. Rev. B* **88** 165402 (2013)
266. Lau A, Timm C *Phys. Rev. B* **90** 024517 (2014)
267. Ghaemi P, Wang F, Vishwanath A *Phys. Rev. Lett.* **102** 157002 (2009)
268. Youmans C et al. *Phys. Rev. B* **98** 144517 (2018)
269. Balatsky A V, Abrahams E *Phys. Rev. B* **45** 13125 (1992)
270. Coleman P, Miranda E, Tsvetlik A *Phys. Rev. Lett.* **70** 2960 (1993)
271. Asano Y, Tanaka Y *Phys. Rev. B* **87** 104513 (2013)
272. Вальков В В, Валькова Т А, Мицкан В А *Письма в ЖЭТФ* **102** 399 (2015); Val'kov V V, Val'kova T A, Mitskan V A *JETP Lett.* **102** 361 (2015)
273. Ovchinnikov S G, Val'kov V V *Hubbard Operators in the Theory of Strongly Correlated Electrons* (London: Imperial College Press, 2004)
274. Ishikawa K, Matsuyama T *Nucl. Phys. B* **280** 523 (1987)
275. Вальков В В, Злотников А О *Письма в ЖЭТФ* **104** 512 (2016); Val'kov V V, Zlotnikov A O *JETP Lett.* **104** 483 (2016)
276. Вальков В В, Злотников А О *ФТТ* **59** 2100 (2017); Val'kov V V, Zlotnikov A O *Phys. Solid State* **59** 2120 (2017)
277. Вальков В В, Злотников А О *Письма в ЖЭТФ* **109** 769 (2019); Val'kov V V, Zlotnikov A O *JETP Lett.* **109** 736 (2019)
278. Reeg C, Loss D, Klinovaja J *Phys. Rev. B* **96** 125426 (2017)
279. Kopasov A A, Khaymovich I M, Mel'nikov A S *Beilstein J. Nanotechnol.* **9** 1184 (2018)
280. Theiler A, Björnson K, Black-Schaffer A M *Phys. Rev. B* **100** 214504 (2019)
281. Jiang K, Zhou S, Wang Z *Phys. Rev. B* **90** 165135 (2014)
282. Pasrija K, Kumar S *Phys. Rev. B* **93** 195110 (2016)
283. Weber C et al. *Phys. Rev. B* **73** 014519 (2006)
284. Val'kov V V et al. *J. Magn. Magn. Mater.* **440** 37 (2017)
285. Val'kov V V, Zlotnikov A O, Shustin M S *J. Magn. Magn. Mater.* **459** 112 (2018)

Topological superconductivity and Majorana states in low-dimensional systems

V.V. Val'kov^(1,a), M.S. Shustin^(1,b), S.V. Aksenov^(1,c), A.O. Zlotnikov^(1,d), A.D. Fedoseev^(1,e), V.A. Mitskan^(1,f), M.Yu. Kagan^(2,3,g)

⁽¹⁾ Kirensky Institute of Physics,

Federal Research Center Krasnoyarsk Science Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Akademgorodok 50, str. 38, 660036 Krasnoyarsk, Russian Federation

⁽²⁾ National Research University Higher School of Economics, ul. Myasnitskaya 20, 101000 Moscow, Russian Federation

⁽³⁾ Kapitza Institute for Physical Problems, Russian Academy of Sciences, ul. Kosygina 2, 119334 Moscow, Russian Federation

E-mail: ^(a) vvv@iph.krasn.ru, ^(b) mshustin@yandex.ru, ^(c) asv86@iph.krasn.ru, ^(d) zlotn@iph.krasn.ru, ^(e) fad@iph.krasn.ru,

^(f) mitskan@iph.krasn.ru, ^(g) kagan@kapitza.ras.ru

We discuss the properties of topologically nontrivial superconducting phases and the conditions for their realization in condensed media, the criteria for the appearance of elementary Majorana-type excitations in solids, and the corresponding principles and experimental methods for identifying Majorana bound states (MBSs). Along with the well-known Kitaev chain and superconducting nanowire (SNW) models with spin-orbit coupling in an external magnetic field, we discuss models of quasi-two-dimensional materials in which MBSs are realized in the presence of noncollinear spin ordering. For finite-length SNWs, we demonstrate a cascade of quantum transitions occurring with a change in the magnetic field, accompanied by a change in the fermion parity of the ground state. The corresponding anomalous behavior of the magnetocaloric effect can be used as a tool for identifying MBSs. We devote considerable attention to the analysis of the transport characteristics of devices that contain topologically nontrivial materials. The results of studying the conductivity of an Aharonov-Bohm ring whose arms are connected by an SNW are discussed in detail. An important feature of this device is the appearance of Fano resonances in the dependence of conductance on the magnetic field when the SNW is in a topologically nontrivial phase. We establish a relation between the characteristics of such resonances and the spatial structure of the lowest-energy SNW state. The conditions for the occurrence of an MBS in the phase of the coexistence of chiral $d + id$ superconductivity and 120-degree spin ordering are determined in the framework of the $t - J - V$ model on a triangular lattice. We take electron-electron interactions into account in discussing the topological invariants of low-dimensional superconducting materials with noncollinear spin ordering. The formation of Majorana modes in regions with an odd value of a topological $\mathbb{Z}$ invariant is demonstrated. The spatial structure of these excitations in the Hubbard fermion ensemble is determined.

Keywords: low-dimensional system, Majorana bound state, spin-orbit coupling, topological invariant, Coulomb correlations, noncollinear magnetism, topological superconductivity, quantum transport

PACS numbers: 71.20.Nr, 71.20.Ps, 71.23.An, 71.70.Ej, **73.23.-b**, 74.20.Rp, 74.25.F-, **74.90.+n**

Bibliography — 285 references

Received 26 May 2020, revised 18 December 2020

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **192** (1) 3–44 (2022)

Physics – Uspekhi **65** (1) (2022)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.03.038950>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2021.03.038950>