

## Многочастонные функции распределения в квантовой хромодинамике

Г.М. Зиновьев, А.М. Снигирёв

*Традиционно в столкновительных экспериментах изучают структуру адронов (протона) и динамику их взаимодействий на основе исследования одиночных жёстких партон-партонных рассеяний, которые характеризуются структурными функциями (одиночными распределениями). Совершенно новая и уникальная информация извлекается при отборе и анализе событий, в которых происходит одновременно два (и более) жёстких рассеяния партон в одном столкновении протона с антипротоном на ускорителе Тэватрон (Национальная ускорительная лаборатория им. Э. Ферми, США) и столкновении протона с протоном на Большом адронном коллайдере (ЦЕРН, Швейцария). Для моделирования таких двукратных (многократных) партонных рассеяний должны быть известны двучастонные (многочастонные) функции распределения. Обсуждаются свойства таких многочастонных функций распределения, которые можно извлечь из квантовой хромодинамики.*

**Ключевые слова:** многочастонные взаимодействия, двучастонные рассеяния, коллинеарный подход

PACS numbers: 12.38.–t, 12.38.Bx

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFN.2020.10.038857>

### Содержание

1. Введение (372).
  2. Сечения  $n$ -партонных рассеяний в адронных столкновениях (373).
  3. Сечения двойных и тройных партонных рассеяний в адрон-адронных столкновениях (374).
  4. Квантово-хромодинамическая эволюция многочастонных функций распределения (375).  
4.1. Введение. Импульсное представление. 4.2. Одночастонные функции распределения в главном логарифмическом приближении. 4.3. Двучастонные и трёхчастонные функции распределения в главном логарифмическом приближении. 4.4. Многочастонные функции распределения в адронах. 4.5. Оценка корреляций.
  5. Сечения двойных и тройных партонных рассеяний с учётом квантово-хромодинамической эволюции (381).
  6. Феноменологические следствия квантово-хромодинамической эволюции (382).
  7. Заключение (383).
- Список литературы (384).

Г.М. Зиновьев<sup>(1,а)</sup>, А.М. Снигирёв<sup>(2,3,б)</sup>

<sup>(1)</sup> Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, Национальная академия наук Украины, ул. Метрологическая 14-6, 03680 Киев, Украина

<sup>(2)</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына, Ленинские горы 1, стр. 2, 119991 Москва, Российская Федерация

<sup>(3)</sup> Объединённый институт ядерных исследований, Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, ул. Жолио-Кюри 6, 141980 Дубна, Московская обл., Российская Федерация

E-mail: <sup>(а)</sup> Gennady.Zinoviev@cern.ch, <sup>(б)</sup> Alexandre.Snigirev@cern.ch

Статья поступила 12 апреля 2020 г.,  
после доработки 15 октября 2020 г.

### 1. Введение

С увеличением энергии в адрон-адронных столкновениях из-за сильного повышения плотности партонных потоков значительно возрастает роль жёстких многочастонных взаимодействий, которые являются важным и значимым фоном при поиске сигналов новой физики на Большом адронном коллайдере (БАК) (Large Hadron Collider, LHC). Обычно инклюзивное сечение жёсткого процесса вычисляется при предположении, что в столкновении наряду со множеством мягких взаимодействий происходит только одно жёсткое взаимодействие ввиду его относительно малой вероятности. Тем не менее возможны адрон-адронные столкновения, в которых жёстко рассеиваются две (или более) различные пары партон. Теоретически эти двойные партонные рассеяния изучаются на протяжении многих лет, начиная с давних времён [1–23] возникновения партонной модели. Современное состояние теории многочастонных взаимодействий и итоги многолетних исследований суммированы в недавней монографии [24], содержащей обширную библиографию. Изучение позволяет извлечь совершенно новую и уникальную информацию о неизвестном трёхмерном пространственном распределении партон в адронах, а также импульсных, ароматовых и цветовых корреляциях в волновой функции адронов.

Экспериментально двойные партонные рассеяния наблюдались сначала коллаборациями AFS (Axial Field Spectrometer) [25] и UA2 (Underground Area 2) [26] в ЦЕРНе, затем коллаборациями CDF (Collider Detector at Fermilab) [27, 28] и D0 [29, 30] на Тэватроне со статистикой, уже вполне достаточной для первичного анализа и изучения, а также на ускорителе в Протвино [31]. Ожидаемо, что при энергии и светимости БАК наблюда-

лось [24] значительно большее количество событий с жёсткими многократными взаимодействиями, чем в упомянутых экспериментах. Вклад от двойных партонных рассеяний теперь надёжно измерен и выделен [24] в ряде процессов, содержащих в конечном состоянии тяжёлые кварки (с, b), кварконии ( $J/\psi$ ,  $\Upsilon$ ), струи и калибровочные бозоны ( $\gamma$ , W, Z) (см., например, некоторые недавние результаты коллабораций ATLAS (A Toroidal LHC Apparatus) [32–34], CMS (Compact Muon Solenoid) [35–37] и LHCb (Large Hadron Collider beauty) [38–40], а также монографию [24]). Тройные партонные рассеяния пока экспериментально не наблюдались, однако оценённые сечения рождения тяжёлых кварков (с, b) через этот механизм достаточно велики, чтобы ставить вопрос об их измерении в pp-столкновениях [41] и pA-столкновениях [42] на БАК и при энергиях Будущего циркулярного коллайдера (Future Circular Collider, FCC) [43, 44]. В будущем также возможно наблюдение как трёх D-мезонов [45], так и тяжёлых кваркониев ( $3J/\psi$ ) [46].

Настоящий обзор посвящён в основном обсуждению свойств многопартонных функций распределения, которые можно извлечь из квантовой хромодинамики (КХД) в коллинеарном подходе, с акцентом на результаты, недостаточно полно освещённые в монографии [24] (уравнения эволюции и их явные решения). Настоящий краткий обзор преследует сугубо практические цели ознакомления (по желанию экспериментаторов) с основным инструментарием этой области феноменологии, и он построен следующим образом. В разделе 2 в рамках факторизационного подхода приведены формулы для вычисления инклюзивного сечения  $n$ -партонного рассеяния. Наиболее интересные с точки зрения феноменологических приложений случаи двойных и тройных партонных рассеяний обсуждаются в разделе 3. КХД-эволюция многопартонных функций распределения рассмотрена в разделе 4. В разделе 5 приводятся формулы вычисления инклюзивного сечения двойного и тройного партонных рассеяний с учётом эволюции. Общие феноменологические следствия обсуждаются в разделе 6. В разделе 7 приводятся некоторые выводы и обсуждаются дальнейшие перспективы.

## 2. Сечения $n$ -партонных рассеяний в адронных столкновениях

Инклюзивное сечение  $\sigma_{hh' \rightarrow a_1 \dots a_n}^{\text{NPS}}$  рождения  $n$  жёстких частиц в  $n$  независимых жёстких партонных рассеяниях в адрон-адронном столкновении  $hh' \rightarrow a_1 \dots a_n$  в факторизационном подходе может быть представлено в виде свёртки обобщённых  $n$ -партонных функций распределения и элементарных партонных сечений [47]:

$$\begin{aligned} \sigma_{hh' \rightarrow a_1 \dots a_n}^{\text{NPS}} &= \\ &= \frac{c}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n, i'_1, \dots, i'_n} \int \Gamma_h^{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n; Q_1^2, \dots, Q_n^2) \times \\ &\times \hat{\sigma}_{a_1}^{i_1 i'_1}(x_1, x'_1, Q_1^2) \dots \hat{\sigma}_{a_n}^{i_n i'_n}(x_n, x'_n, Q_n^2) \times \\ &\times \Gamma_{h'}^{i'_1 \dots i'_n}(x'_1, \dots, x'_n; \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}, \dots, \mathbf{b}_n - \mathbf{b}; Q_1^2, \dots, Q_n^2) \times \\ &\times dx_1 \dots dx_n dx'_1 \dots dx'_n d^2 b_1 \dots d^2 b_n d^2 b. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\Gamma_h^{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n; Q_1^2, \dots, Q_n^2)$  —  $n$ -партонные обобщённые функции распределения, зависящие от долей продольного импульса  $x_1, \dots, x_n$ , поперечных

координат  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  рассеивающихся партонов  $i_1, \dots, i_n$  на энергетических масштабах  $Q_1, \dots, Q_n$  жёстких подпроцессов с сечениями  $\hat{\sigma}_{a_1}^{i_1 i'_1}, \dots, \hat{\sigma}_{a_n}^{i_n i'_n}$  и рождением жёстких частиц  $a_1, \dots, a_n$  в конечном состоянии. Фактор  $c/n!$  учитывает свойства симметрии конечного состояния: наличие тождественных частиц. В случае, когда все частицы идентичны ( $a_1 = \dots = a_n$ ),  $c = 1$ , с увеличением числа различных частиц в конечном состоянии  $c = 2, 3, 6, \dots$ . Для наиболее интересного на сегодня в феноменологических приложениях случая двойных партонных рассеяний  $c = 1$ , если  $a_1 = a_2$ , и  $c = 2$ , если  $a_1 \neq a_2$ .

Эти  $n$ -партонные функции распределения

$$\Gamma_h^{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n; Q_1^2, \dots, Q_n^2)$$

теоретически кодируют всю информацию о трёхмерной структуре адрона, необходимую для вычисления сечений  $n$ -партонных рассеяний, в том числе данные о плотности партонов в поперечной плоскости и о всевозможных корреляциях как по квантовым числам, так и по кинематическим переменным. В целом  $\Gamma_h^{i_1 \dots i_n}$  имеют весьма сложную структуру, так что при феноменологических вычислениях часто прибегают к упрощённым вариантам. На самом деле без существенной потери общности любое сечение  $n$ -партонного рассеяния можно выразить через инклюзивные сечения  $\sigma_{hh' \rightarrow a}^{\text{SPS}}$  однопартонных рассеяний, вычисленных в рамках пертурбативной КХД со стандартными ("продольными") одиночными функциями распределения  $D_h^i(x; Q^2)$ :

$$\sigma_{hh' \rightarrow a}^{\text{SPS}} = \sum_{i_1, i_2} \int D_h^{i_1}(x_1; Q_1^2) \hat{\sigma}_a^{i_1 i_2}(x_1, x'_1) D_{h'}^{i_2}(x'_1; Q_1^2) dx_1 dx'_1. \quad (2)$$

В более точной формулировке любое  $n$ -партонное инклюзивное сечение может быть представлено в виде произведения  $n$  сечений соответствующих однопартонных рассеяний, в каждом из которых рождается одна жёсткая частица, нормированного на эффективное сечение в степени  $n - 1$ :

$$\sigma_{hh' \rightarrow a_1 \dots a_n}^{\text{NPS}} = \frac{c}{n!} \frac{\sigma_{hh' \rightarrow a_1}^{\text{SPS}} \dots \sigma_{hh' \rightarrow a_n}^{\text{SPS}}}{\sigma_{\text{eff, NPS}}^{n-1}}, \quad (3)$$

где  $\sigma_{\text{eff, NPS}}$  кодирует всю неизвестную информацию, связанную с обобщёнными функциями распределения. Уравнение (3) отражает наше интуитивное представление о том, что вероятность рождения  $n$  жёстких частиц в заданном неупругом адрон-адронном столкновении должна быть просто пропорциональна произведению  $n$  вероятностей независимого рождения каждой из этих частиц в рассматриваемом столкновении. Эта вероятность нормирована на эффективное сечение в степени  $n - 1$ , чтобы гарантировать необходимые единицы измерения конечного результата (3).

Величину  $\sigma_{\text{eff, NPS}}$  в уравнении (3) можно оценить, если использовать разумные стандартные приближения. Естественно предположить, что  $n$ -партонные функции распределения могут быть представлены в виде произведения продольных и поперечных компонент:

$$\begin{aligned} \Gamma_h^{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n; Q_1^2, \dots, Q_n^2) &= \\ &= D_h^{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n; Q_1^2, \dots, Q_n^2) f(\mathbf{b}_1) \dots f(\mathbf{b}_n), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $f(\mathbf{b}_1)$  — поперечная плотность партонов в адроне, которая часто полагается не зависящей от сорта парто-

нов. Далее, пренебрегая продольными импульсными корреляциями

$$D_h^{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n; Q_1^2, \dots, Q_n^2) = D_h^{i_1}(x_1; Q_1^2) \dots D_h^{i_n}(x_n; Q_n^2), \quad (5)$$

эффективное сечение можно выразить через интеграл степеней функции адрон-адронного перекрытия по прицельному параметру  $\mathbf{b}$ :

$$\sigma_{\text{eff, NPS}} = \left( \int d^2b T^n(\mathbf{b}) \right)^{-1/(n-1)}, \quad (6)$$

где

$$T(\mathbf{b}) = \int f(\mathbf{b}_1) f(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}) d^2b_1 \quad (7)$$

с фиксированной нормировкой  $\int T(\mathbf{b}) d^2b = 1$ .

### 3. Сечения двойных и тройных партонных рассеяний в адрон-адронных столкновениях

Важно для феноменологических приложений случае двойных партонных рассеяний в адрон-адронных столкновениях  $hh' \rightarrow a_1 a_2$  общее выражение (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_{hh' \rightarrow a_1 a_2}^{\text{DPS}} &= \frac{c}{2} \sum_{i,j,k,l} \int \Gamma_h^{ij}(x_1, x_2; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2; Q_1^2, Q_2^2) \times \\ &\times \hat{\sigma}_{a_1}^{ik}(x_1, x'_1, Q_1^2) \hat{\sigma}_{a_2}^{jl}(x_2, x'_2, Q_2^2) \times \\ &\times \Gamma_h^{kl}(x'_1, x'_2; \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}, \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}; Q_1^2, Q_2^2) \times \\ &\times dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2 d^2b_1 d^2b_2 d^2b. \end{aligned} \quad (8)$$

Применение исходных уравнений (3) и (6) для  $n = 2$  позволяет выразить инклюзивное сечение двойного партонного рассеяния в виде произведения независимых однократных инклюзивных сечений:

$$\sigma_{hh' \rightarrow a_1 a_2}^{\text{DPS}} = \frac{c}{2} \frac{\sigma_{hh' \rightarrow a_1}^{\text{SPS}} \sigma_{hh' \rightarrow a_2}^{\text{SPS}}}{\sigma_{\text{eff, DPS}}}, \quad (9)$$

где эффективное сечение двойного партонного рассеяния (6), нормирующее произведение однократных, в факторизационном подходе имеет простое геометрическое представление:

$$\sigma_{\text{eff, DPS}} = \left[ \int d^2b T^2(\mathbf{b}) \right]^{-1}. \quad (10)$$

Аналогично в случае тройных партонных рассеяний из общего выражения (1) для процесса  $hh' \rightarrow a_1 a_2 a_3$  следует [48]:

$$\begin{aligned} \sigma_{hh' \rightarrow a_1 a_2 a_3}^{\text{TPS}} &= \\ &= \frac{c}{3!} \sum_{i,j,k,l,m,n} \int \Gamma_h^{ijk}(x_1, x_2, x_3; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3; Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2) \times \\ &\times \hat{\sigma}_{a_1}^{il}(x_1, x'_1, Q_1^2) \hat{\sigma}_{a_2}^{jm}(x_2, x'_2, Q_2^2) \hat{\sigma}_{a_3}^{kn}(x_3, x'_3, Q_3^2) \times \\ &\times \Gamma_h^{lmn}(x'_1, x'_2, x'_3; \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}, \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}, \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}; Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2) \times \\ &\times dx_1 dx_2 dx_3 dx'_1 dx'_2 dx'_3 d^2b_1 d^2b_2 d^2b_3 d^2b. \end{aligned} \quad (11)$$

Это сечение может быть также представлено как произведение трёх независимых инклюзивных однократных

сечений:

$$\sigma_{hh' \rightarrow a_1 a_2 a_3}^{\text{TPS}} = \frac{c}{3!} \frac{\sigma_{hh' \rightarrow a_1}^{\text{SPS}} \sigma_{hh' \rightarrow a_2}^{\text{SPS}} \sigma_{hh' \rightarrow a_3}^{\text{SPS}}}{\sigma_{\text{eff, TPS}}^2}, \quad (12)$$

которое нормировано на *квадрат* эффективного сечения тройного партонного рассеяния (6), имеющий в факторизационном подходе простое геометрическое представление [41]:

$$\sigma_{\text{eff, TPS}}^2 = \left[ \int d^2b T^3(\mathbf{b}) \right]^{-1}. \quad (13)$$

Значения эффективных сечений двойного (10) и тройного (13) партонных рассеяний можно оценить, если использовать выражение (7) для разных видов поперечного партонного профиля сталкивающихся адронов, которые используются в современных генераторах событий Монте-Карло, таких, например, как Phytia-8 [49] или Herwig [50, 51]. В Phytia-8 функция перекрытия протона как функция прицельного параметра часто параметризуется в виде

$$T(\mathbf{b}) = \frac{m}{2\pi r_p^2 \Gamma(2/m)} \exp \left[ \left( -\frac{b}{r_p} \right)^m \right], \quad (14)$$

где  $T(\mathbf{b})$  нормирована на единицу,  $\int T(\mathbf{b}) d^2b = 1$ ,  $r_p$  — характерный "радиус" протона,  $\Gamma$  — гамма-функция, а показатель степени  $m$  зависит от используемых "настроек" в генераторе и определяется из подгонки к экспериментальным данным в pp-столкновениях [36]. Этот показатель изменяется в диапазоне от  $m = 2$  (чисто гауссово распределение) до  $m = 0,7, 1$  (экспоненциально-подобное распределение) Для соответствующих интегралов второй и третьей степени  $T(\mathbf{b})$  можно получить

$$\sigma_{\text{eff, DPS}} = \left( \int d^2b T^2(\mathbf{b}) \right)^{-1} = 2\pi r_p^2 \frac{2^{2/m} \Gamma(2/m)}{m}, \quad (15)$$

$$\sigma_{\text{eff, TPS}} = \left( \int d^2b T^3(\mathbf{b}) \right)^{-1/2} = 2\pi r_p^2 \frac{3^{1/m} \Gamma(2/m)}{m}. \quad (16)$$

Из уравнения (15) следует, что, для того чтобы воспроизвести величину  $\sigma_{\text{eff, DPS}} \simeq 15 \pm 5$  мб, извлекаемую из измерений по двойным партонным рассеяниям на Тэватроне [27–30] и БАК [32–40], необходимо положить характерный "радиус" протона  $r_p \simeq 0,11 \pm 0,02; 0,24 \pm 0,04; 0,49 \pm 0,08$  фм при  $m = 0,7, 1, 2$  соответственно. Значения эффективных сечений  $\sigma_{\text{eff, DPS}}$  и  $\sigma_{\text{eff, TPS}}$  (уравнения (15) и (16)) не являются независимыми — они связаны между собой:  $\sigma_{\text{eff, TPS}} = (3/4)^{1/m} \sigma_{\text{eff, DPS}}$ . Это соотношение не зависит от характерного "размера"  $r_p$  протона, но является чувствительным к общему виду поперечного партонного профиля, характеризующего показателем степени  $m$ . Для Phytia-8 с типичными значениями показателя  $m = 0,7, 1, 2$ , определёнными из подгонки к экспериментальным данным [36], можно получить  $\sigma_{\text{eff, TPS}} = [0,66, 0,75, 0,87] \sigma_{\text{eff, DPS}}$  соответственно.

В генераторе событий Herwig используется другая параметризация протонного профиля, взятая из дипольной подгонки для двухглюонного формфактора в импульсном представлении [52]:

$$F_{2g}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(q^2/m_g^2 + 1)^2}, \quad (17)$$

где глюонная масса  $m_g$  — параметр, характеризующий распределение партонов в протоне по поперечному импульсу  $q$ , а их распределение по поперечным координатам определяется через фурье-преобразование:

$$f(\mathbf{b}) = \int \exp(-i\mathbf{b}\mathbf{q}) F_{2g}(\mathbf{q}) \frac{d^2q}{(2\pi)^2}. \quad (18)$$

Соответствующие эффективные сечения двойного (10) и тройного (13) партонных рассеяний имеют вид [50]

$$\sigma_{\text{eff,DPS}} = \left[ \int F_{2g}^4(q) \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \right]^{-1} = \frac{28\pi}{m_g^2} \quad (19)$$

и [41]

$$\sigma_{\text{eff,TPS}}^{-2} = \int (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) F_{2g}(\mathbf{q}_1) F_{2g}(\mathbf{q}_2) F_{2g}(\mathbf{q}_3) \times \\ \times F_{2g}(-\mathbf{q}_1) F_{2g}(-\mathbf{q}_2) F_{2g}(-\mathbf{q}_3) \frac{d^2q_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2q_2}{(2\pi)^2} \frac{d^2q_3}{(2\pi)^2}.$$

Вычисляя последний интеграл численно и сравнивая его значение с результатом (19), можно получить соотношение  $\sigma_{\text{eff,TPS}} = 0,83 \sigma_{\text{eff,DPS}}$ , которое очень близко к полученному ранее для гауссовой функции перекрытия, используемой в Phytia-8. Для того чтобы воспроизвести значение экспериментально измеренного  $\sigma_{\text{eff,DPS}} \simeq 15 \pm 5$  мб, необходимо, чтобы характерный "размер" для этой параметризации составлял  $r_g = 1/m_g \simeq 0,13 \pm 0,02$  фм.

Таким образом, исследование широкого круга используемых в литературе параметризаций партонных поперечных плотностей позволяет установить очень простое, надёжное и полезное соотношение [41] между эффективными сечениями двойного и тройного партонных рассеяний:

$$\sigma_{\text{eff,TPS}} = k \sigma_{\text{eff,DPS}} \quad \text{при} \quad k = 0,82 \pm 0,11. \quad (20)$$

Для типичного значения  $\sigma_{\text{eff,DPS}} \simeq 15 \pm 5$  мб, извлекаемого из измерений на Тэватроне и БАК, получается следующая оценка для эффективного сечения тройного партонного рассеяния:

$$\sigma_{\text{eff,TPS}} = 12,5 \pm 4,5 \text{ мб}. \quad (21)$$

Эти значения эффективных сечений обычно и используются [24, 47] при вычислении инклюзивных сечений процессов с рождением частиц через механизмы двойного и тройного партонных рассеяний.

Следует заметить, что для описания экспериментальных данных по двойному рождению  $J/\psi$  необходимо использовать значительно меньшую величину эффективного сечения двойного партонного рассеяния, на уровне 5 мб: коллаборациями ATLAS, CMS и D0 представлены значения  $\sigma_{\text{eff,DPS}} \simeq 6,3 \pm 1,9$  мб [33],  $\sigma_{\text{eff,DPS}} \simeq 2,2 - 6,6$  мб [37] и  $\sigma_{\text{eff,DPS}} \simeq 4,8 \pm 2,5$  мб [53] соответственно. Такое заметное расхождение с другими измерениями, которое интерпретировалось в литературе как первое указание на возможную зависимость  $\sigma_{\text{eff,DPS}}$  от сорта рассеивающихся партонов, стимулировало ряд исследований по поиску решения этой проблемы посредством учёта как дополнительных механизмов рождения  $J/\psi$  в однократных рассеяниях, так и динамических КХД-корреляций в двойных партонных рассеяниях. Так, в недавней работе [54] в рамках  $k_t$ -факторизационного подхода показано, что вклады от механизма цветowych октетов с учётом комбина-

торных эффектов множественного излучения глюонов в начальном состоянии важны в кинематической области измерения CMS- и ATLAS-экспериментов, в то время как экспериментальные данные коллаборации LHCb хорошо описываются  $O(\alpha_s^4)$ -цветовыми синглетными вкладками и механизмом двойного партонного рассеяния. В результате комплексного анализа авторы [54] получают  $\sigma_{\text{eff,DPS}} \simeq 17,5 \pm 4,1$  мб, что уже оказывается совместимым с оценкой, извлекаемой из других измерений, и отчасти устраняет значительное расхождение в оценках величины эффективного сечения.

## 4. Квантово-хромодинамическая эволюция многопартонных функций распределения

### 4.1. Введение. Импульсное представление

Как отмечалось в разделе 3, величина эффективного сечения  $\sigma_{\text{eff,DPS}}$  либо определяется в рамках феноменологических моделей, либо извлекается из экспериментальных данных (по причине не решённой до сих пор проблемы конфайнмента). Однако мы можем многое узнать о свойствах многопартонных импульсных функций распределения в рамках теории возмущений КХД. Более того, в коллинеарном подходе удаётся установить статус факторизационных предположений (4) и (5) и найти поправки, вызванные КХД-эволюцией многопартонных распределений.

В дальнейшем вместо смешанного (импульсно-координатного) представления для инклюзивного сечения двойного партонного рассеяния (8) более удобным окажется импульсное представление [52]:

$$\sigma_{\text{hh}' \rightarrow a_1 a_2}^{\text{DPS}} = \frac{c}{2} \sum_{i,j,k,l} \int \Gamma_h^{ij}(x_1, x_2; \mathbf{q}; Q_1^2, Q_2^2) \times \\ \times \hat{\sigma}_{a_1}^{ik}(x_1, x_1') \hat{\sigma}_{a_2}^{jl}(x_2, x_2') \Gamma_h^{kl}(x_1', x_2'; -\mathbf{q}; Q_1^2, Q_2^2) \times \\ \times dx_1 dx_2 dx_1' dx_2' \frac{d^2q}{(2\pi)^2}. \quad (22)$$

Функции  $\Gamma_h^{ij}(x_1, x_2; \mathbf{q}; Q_1^2, Q_2^2)$  в импульсном представлении зависят от поперечного импульса  $\mathbf{q}$ , который равен разности между импульсами партонов в амплитуде волновой функции адрона и в сопряжённой амплитуде. Такая зависимость возникает потому, что только сумма поперечных импульсов партонов в паре сохраняется. Импульс  $\mathbf{q}$  является фурье-сопряжённой переменной к разности поперечных координат партонов, используемых в смешанном представлении.

Одна из главных проблем — найти двухпартонные функции  $\Gamma_h^{ij}(x_1, x_2; \mathbf{q}; Q_1^2, Q_2^2)$  без упрощающих предположений (4) и (5). Эти функции были известны в литературе [55–57] только при  $\mathbf{q} = 0$  (другими словами, проинтегрированные по относительному поперечному расстоянию между партонами) в коллинеарном подходе. В таком приближении

$$\Gamma_h^{ij}(x_1, x_2; \mathbf{q} = 0; Q_1^2, Q_2^2) = D_h^{ij}(x_1, x_2; Q^2)$$

при условии, что масштабы обоих процессов являются сравнимыми ( $Q_1^2 \simeq Q_2^2 = Q^2$ ), удовлетворяют обобщённым уравнениям эволюции, впервые выведенным в работах [55–57]. Возможно также обобщение для случая двух различных масштабов [58].

Аналогично в случае тройных партонных рассеяний вместо (11) в импульсном представлении имеем [48, 52]

$$\begin{aligned} \sigma_{hh' \rightarrow a_1 a_2 a_3}^{\text{TPS}} &= \\ &= \frac{c}{2} \sum_{i,j,k,l,m,n} \int \Gamma_h^{ijk}(x_1, x_2, x_3; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3; Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2) \times \\ &\times (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) \hat{\sigma}_{a_1}^{il}(x_1, x'_1, Q_1^2) \times \\ &\times \hat{\sigma}_{a_2}^{jm}(x_2, x'_2, Q_2^2) \hat{\sigma}_{a_3}^{kn}(x_3, x'_3, Q_3^2) \times \\ &\times \Gamma_h^{lmn}(x'_1, x'_2, x'_3; -\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_3; Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2) \times \\ &\times dx_1 dx_2 dx_3 dx'_1 dx'_2 dx'_3 \frac{d^2 q_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 q_2}{(2\pi)^2} \frac{d^2 q_3}{(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

В этом случае необходимо определить

$$\Gamma_h^{ijk}(x_1, x_2, x_3; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3; Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2),$$

которые известны в литературе [48, 55–57] при  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3 = 0$  (проинтегрированные по относительным поперечным расстояниям между партонами) в коллинеарном подходе, и в данном приближении

$$\begin{aligned} \Gamma_h^{ijk}(x_1, x_2, x_3; \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3 = 0; Q^2, Q^2, Q^2) &= \\ &= D_h^{ijk}(x_1, x_2, x_3; Q^2). \end{aligned}$$

Свойства таких многопартонных функций распределения обсуждаются в разделах 4.2–4.5 в рамках пертурбативной КХД.

#### 4.2. Однопартонные функции распределения в главном логарифмическом приближении

Анализ [59–61] жёстких процессов (глубоко неупругого рассеяния электронов на протонах и электрон-позитронной аннигиляции в адроны) по теории возмущений в КХД приводит к их описанию в главном логарифмическом приближении на языке партонной модели с переменным параметром обрезания  $\Lambda \sim Q$  по поперечным импульсам партонов. Зависимость многопартонных функций распределения и фрагментации от величины параметра обрезания определяется эволюционными уравнениями, изящный способ получения которых сформулировал Липатов [60] для любых перенормируемых полевых теорий. В литературе в качестве эволюционной переменной используются как сама величина масштаба жёсткости процесса  $Q^2$  (чаще всего квадрат переданного импульса), так и её логарифм  $\xi = \ln(Q^2/\mu^2)$  или двойной логарифм (учитывающий в явном виде поведение эффективной константы связи в главном логарифмическом приближении)

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2\pi\beta} \ln \left[ 1 + \frac{g^2(\mu^2)}{4\pi} \beta \ln \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi\beta} \ln \left[ \frac{\ln(Q^2/A_{\text{QCD}}^2)}{\ln(\mu^2/A_{\text{QCD}}^2)} \right], \end{aligned}$$

где  $\beta = (11N_c - 2n_f)/(12\pi)$  в КХД,  $g(\mu^2)$  — константа связи на некотором характерном масштабе  $\mu^2$ , начиная с которого применима теория возмущений,  $n_f$  — число активных ароматов,  $A_{\text{QCD}}$  — размерный параметр КХД,  $N_c = 3$  — число цветовых степеней свободы.

Уравнения эволюции, известные чаще всего как уравнения Докшиера – Грибова – Липатова – Алтарелли – Паризи (ДГЛАП) [59–62], имеют наиболее простой вид при использовании естественной безразмерной эволюционной переменной  $t$ :

$$\frac{dD_i^j(x, t)}{dt} = \sum_{j'} \int_x^1 \frac{dx'}{x'} D_i^{j'}(x', t) P_{j' \rightarrow j} \left( \frac{x}{x'} \right). \quad (24)$$

Уравнения (24) описывают изменение одиночных функций распределения голых кварков и глюонов ( $j = q, \bar{q}, g$ ) в одетых партонах (кварках и глюонах) с изменением эволюционной переменной  $t$ . Ядра этих уравнений  $P$  в методе Липатова автоматически включают регуляризацию при  $x \rightarrow x'$ , в то время как в работе [62] регуляризация введена фактически "вручную" исходя из требования выполнения закона сохранения импульса.

В подходе Липатова исходным является набор волновых функций  $\Psi_i^n(\beta_r, k_{\perp r})$  — амплитуд вероятностей обнаружить одетый партон сорта  $i$  в состоянии из  $n$  голых партонов с долями  $\beta_r$  продольного импульса и поперечными импульсами  $k_{\perp r}$ ,  $r = 1, \dots, n$ , удовлетворяющих условию нормировки:

$$\begin{aligned} 1 &= Z_i + \sum_{n=2}^{\infty} \int \prod_{r=1}^n \frac{d\beta_r}{\beta_r} \theta(\beta_r) d^2 k_{\perp r} \times \\ &\times |\Psi_i^n|^2 \delta^2 \left( \sum k_{\perp r} \right) \delta \left( \sum \beta_r - 1 \right), \end{aligned} \quad (25)$$

где  $Z_i$  — константа перенормировки волновой функции партона сорта  $i$ . При этом для определения некоторых интересующих нас величин вовсе не требуется вычислять  $\Psi_i^n$  в явном виде. Дело в том, что фейнмановские интегралы для  $\Psi_i^n$  и интегралы по  $k_{\perp}$  в условии нормировки (25) логарифмически расходятся в перенормируемых теориях. Их регуляризуют с помощью параметра обрезания  $\Lambda$ . Тогда все константы  $Z_i$ , голые заряды становятся функциями этого параметра, так же как и величины, которые можно выразить через волновые функции  $\Psi_i^n$ . Замкнутые уравнения определяют их зависимость от  $\Lambda$ . Для того чтобы получить эти уравнения, мы должны просто продифференцировать определения интересующих нас величин и использовать уравнения, которые получаются при дифференцировании по  $\Lambda$  нормировочного условия.

При дифференцировании пределов интегрирования по  $k_{\perp}$  следует иметь в виду, что в главном логарифмическом приближении основной вклад в  $\Psi_i^n$  дают древовидные скелетные диаграммы, которые не интерферируют между собой в (25) и похожих соотношениях. Это приводит к классической вероятностной интерпретации отдельных слагаемых в нормировочном условии: вероятность распада на  $n$  партонов определяется произведением вероятности распада на  $n-1$  партон и вероятности последующего распада на два партона. Кроме того, поперечные импульсы строго упорядочены: для глубоко неупругого рассеяния они возрастают вдоль скелетной диаграммы, а для  $e^+e^-$ -аннигиляции — убывают.

Естественно, метод Липатова позволяет получить уравнения эволюции и для многопартонных функций распределения (и фрагментации) дифференцированием их определений через введённые наборы волновых функций, что обсуждается в разделах 4.3–4.5.

Уравнения (24) после преобразования Меллина (перехода к моментам функций)

$$M_i^j(n, t) = \int_0^1 dx x^n D_i^j(x, t) \quad (26)$$

сводятся к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dM_i^j(n, t)}{dt} = \sum_{j'} M_i^{j'}(n, t) P_{j' \rightarrow j}(n), \quad (27)$$

где

$$P_{j' \rightarrow j}(n) = \int_0^1 x^n P_{j' \rightarrow j}(x) dx. \quad (28)$$

Решения этой системы находятся в явном виде посредством диагонализации [59–62]. Затем обратное преобразование Меллина

$$xD_i^j(x, t) = \int \frac{dn}{2\pi i} x^{-n} M_i^j(n, t) \quad (29)$$

позволяет определить функции распределения в  $x$ -представлении. Интегрирование при этом проводится вдоль мнимой оси правее всех сингулярностей по  $n$ , и в явном виде в общем случае оно невозможно. Однако асимптотическое поведение удаётся оценить в некоторых интересных и полезных пределах по кинематической переменной  $x$ . В частности, например, в дважды логарифмическом приближении можно в явном виде вычислить функции Грина — решения уравнений (24) с сингулярными начальными условиями  $D_i^j(x, t=0) = \delta(x-1)\delta_{ij}$ . Так, для распределения глюонов в глюонах можно получить (см., например, [61, 63])

$$\begin{aligned} xD_g^g(x, t) &= 4N_c t \exp(-at) \frac{I_1(v)}{v} \simeq \\ &\simeq 4N_c t v^{-3/2} \frac{\exp(v-at)}{\sqrt{2\pi}}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$v = \sqrt{8N_c t \ln \frac{1}{x}}, \quad a = \frac{11}{6} N_c + \frac{1}{3} \frac{n_f}{N_c^2}, \quad (31)$$

$I_1$  — стандартная модифицированная функция Бесселя. Результат (30) иллюстрирует нарушение унитарности при малых  $x$  из-за слишком быстрого возрастания глюонных плотностей. Стоит также отметить, что среднее число голых партонов типа  $j$  в одетом партоне  $i$ ,

$$\langle n^j \rangle_i = M_i^j(0, t) = [\exp(P(0)t)]_i^j, \quad (32)$$

не может быть корректно определено в коллинеарном подходе, так как ядра  $P_{g \rightarrow g}(0)$  и  $P_{q \rightarrow g}(0)$  при малых  $x$  расходятся, и необходим выход за рамки этого подхода.

#### 4.3. Двухпартонные и трёхпартонные функции распределения в главном логарифмическом приближении

Уравнения эволюции для двухпартоновых функций распределения выведены в работах [55–57]:

$$\frac{dD_i^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t)}{dt} =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j'_1} \int_{x_1}^{1-x_2} \frac{dx'_1}{x'_1} D_i^{j'_1 j_2}(x'_1, x_2, t) P_{j'_1 \rightarrow j_1} \left( \frac{x_1}{x'_1} \right) + \\ &+ \sum_{j'_2} \int_{x_2}^{1-x_1} \frac{dx'_2}{x'_2} D_i^{j_1 j'_2}(x_1, x'_2, t) P_{j'_2 \rightarrow j_2} \left( \frac{x_2}{x'_2} \right) + \\ &+ \sum_{j'} D_i^{j'}(x_1 + x_2, t) \frac{1}{x_1 + x_2} P_{j' \rightarrow j_1 j_2} \left( \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

при этом ядро

$$\frac{1}{x_1 + x_2} P_{j' \rightarrow j_1 j_2} \left( \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right), \quad (34)$$

входящее в неоднородную часть уравнений, не содержит  $\delta$ -образного члена, который присутствует в ядрах  $P_{j'_i \rightarrow j_i}(x_1/x'_i)$ . Уравнения описывают изменение двойных функций распределения голых кварков и глюонов в одетых партонах (кварках и глюонах) с изменением эволюционной переменной  $t$ , т.е. когда масштабы обоих жёстких процессов сравнимы:  $Q_1^2 \simeq Q_2^2$  — и нет ещё одного большого логарифма  $|\ln(Q_1^2/Q_2^2)|$ , требующего выхода за рамки главного логарифмического приближения, в котором, напомним, чаще используемая другая эволюционная переменная  $\xi$  определена с точностью до константы ввиду неоднозначности выбора нормировочного масштаба  $\mu^2$ .

Всем членам в правой части уравнений (33) можно придать простой физический смысл в рамках партонной модели. Рассмотрим инклюзивную вероятность  $D_i^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t) \delta x_1 \delta x_2$  найти в одетом партоне  $i$  пару голых партонов сортов  $j_1$  и  $j_2$  с долями продольного импульса от  $x_1$  до  $x_1 + \delta x_1$  и от  $x_2$  до  $x_2 + \delta x_2$  соответственно на масштабе  $t$ . Очевидно, что с увеличением  $t$  до  $t + \Delta t$  процессы двух типов могут изменять эту вероятность. Распад партонов с большими импульсами, увеличивающий число  $j_1 j_2$ -пар с искомыми импульсами, приводит к возрастанию вероятности, в то время как распад из пары  $j_1 j_2$  на партоны с меньшими импульсами её уменьшает.

Возможны три типа процессов распада, которые увеличивают число пар партонов  $j_1 j_2$  с продольными импульсами в интервале  $x_1 \rightarrow x_1 + \delta x_1$ ,  $x_2 \rightarrow x_2 + \delta x_2$ . В первом процессе мы начнём рассмотрение с пары партонов  $j'_1 j'_2$  с продольными импульсами в интервале  $x'_1 \rightarrow x'_1 + \delta x'_1$ ,  $x_2 \rightarrow x_2 + \delta x_2$ . Величины  $x'_1$  должны удовлетворять условию  $x_1 < x'_1 < 1 - x_2$ , т.е. быть достаточно большими для того, чтобы партон  $j'_1$  мог распасться на партон  $j_1$ , и достаточно малыми для того, чтобы импульс начальной пары партонов не превышал импульс одетого партона  $i$ . Затем партон  $j'_1$  распадается так, чтобы один из вновь образовавшихся партонов был сорта  $j_1$  с продольным импульсом в интервале  $x_1 \rightarrow x_1 + \delta x_1$ . Этот процесс описывается первым членом правой части уравнения (33), в котором ядро  $P_{j'_1 \rightarrow j_1}(x_1/x'_1)$  не содержит членов, пропорциональных  $\delta$ -функции, т.е. соответствует реальному распаду партона. Второй процесс (второй член правой части уравнения (33)) является аналогичным первому и соответствует распаду второго партона. Интерпретация этих двух вкладов как раз соответствует интерпретации аналогичного вклада от реального распада партонов в случае эволюции (24) однопартоновых функций распределения. В третьем процессе (третий член правой части уравнения (33)) один партон  $j'$  с "правильным"

продольным импульсом  $x_1 + x_2 \rightarrow x_1 + x_2 + \delta x_2$  распадается реально так, что образуется пара  $j_1 j_2$  с продольными импульсами в искомом интервале. Число  $j_1 j_2$ -пар уменьшается, когда распадается либо партон  $j_1$ , либо партон  $j_2$  на партоны с меньшими (чем искомые) продольными импульсами. Это как раз вклады от первых двух членов в правой части уравнений, генерируемые присутствием  $\delta$ -функций в ядрах ("виртуальные поправки").

Решения уравнений (33) можно представить в виде свёртки одиночных функций распределения и ядер уравнений [55–57]:

$$D_i^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t) = \sum_{j'_1 j'_2} \int_0^t dt' \int_{x_1}^{1-x_2} \frac{dz_1}{z_1} \int_{x_2}^{1-z_1} \frac{dz_2}{z_2} D_i^{j'_1 j'_2}(z_1 + z_2, t') \times \frac{1}{z_1 + z_2} P_{j' \rightarrow j'_1 j'_2} \left( \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right) D_{j'_1}^{j_1} \left( \frac{x_1}{z_1}, t - t' \right) D_{j'_2}^{j_2} \left( \frac{x_2}{z_2}, t - t' \right). \tag{35}$$

Эта свёртка совпадает с правилами исчисления струй [64, 65], сформулированными для многопартонных функций фрагментации, и представляет собой обобщение хорошо известного соотношения Грибова–Липатова, установленного для одиночных функций [59–61, 66]: распределение голых партонов в одетых идентично фрагментации голых партонов в одетые в главном логарифмическом приближении. Приведённые решения (35) показывают, что в главном логарифмическом приближении двухпартонные функции распределения сильно коррелированы:

$$D_i^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t) \neq D_i^{j_1}(x_1, t) D_i^{j_2}(x_2, t). \tag{36}$$

В случае тройных партонных рассеяний имеем [48, 55, 67]

$$\begin{aligned} \frac{dD_i^{j_1 j_2 j_3}(x_1, x_2, x_3, t)}{dt} = & \sum_{j'_1} \int_{x_1}^{1-x_2-x_3} \frac{dx'_1}{x'_1} D_i^{j'_1 j_2 j_3}(x'_1, x_2, x_3, t) P_{j'_1 \rightarrow j_1} \left( \frac{x_1}{x'_1} \right) + \\ & + \sum_{j'_2} \int_{x_2}^{1-x_1-x_3} \frac{dx'_2}{x'_2} D_i^{j_1 j'_2 j_3}(x_1, x'_2, x_3, t) P_{j'_2 \rightarrow j_2} \left( \frac{x_2}{x'_2} \right) + \\ & + \sum_{j'_3} \int_{x_3}^{1-x_1-x_2} \frac{dx'_3}{x'_3} D_i^{j_1 j_2 j'_3}(x_1, x_2, x'_3, t) P_{j'_3 \rightarrow j_3} \left( \frac{x_3}{x'_3} \right) + \\ & + \sum_{j'} D_i^{j' j_2 j_3}(x_1 + x_2, x_3, t) \frac{1}{x_1 + x_2} P_{j' \rightarrow j_1 j_2} \left( \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right) + \\ & + \sum_{j'} D_i^{j' j_1 j_3}(x_1 + x_3, x_2, t) \frac{1}{x_1 + x_3} P_{j' \rightarrow j_1 j_3} \left( \frac{x_1}{x_1 + x_3} \right) + \\ & + \sum_{j'} D_i^{j' j_1 j_2}(x_1, x_2 + x_3, t) \frac{1}{x_2 + x_3} P_{j' \rightarrow j_2 j_3} \left( \frac{x_2}{x_2 + x_3} \right). \end{aligned} \tag{37}$$

Определённые выше двухпартонные функции распределения  $D_i^{j'_1 j'_2 j'_3}(x_1 + x_2, x_3, t)$ , входящие в неоднородные части эволюционных уравнений (37), удовлетворяют уравнениям (33) с известным решением (35). Решения уравнений (37) могут быть также представлены в виде свёртки одиночных и двойных функций распределения с ядрами

уравнений [48]:

$$D_i^{j_1 j_2 j_3}(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{j'_1 j'_2 j'_3} \int_0^t dt' \int_{x_1}^1 \frac{dz_1}{z_1} \int_{x_2}^1 \frac{dz_2}{z_2} \int_{x_3}^1 \frac{dz_3}{z_3} \theta(1 - z_1 - z_2 - z_3) \times \left[ D_i^{j'_1 j'_2 j'_3}(z_1 + z_2, z_3, t') \frac{1}{z_1 + z_2} P_{j' \rightarrow j'_1 j'_2} \left( \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right) + D_i^{j'_1 j'_2 j'_3}(z_1 + z_3, z_2, t') \frac{1}{z_1 + z_3} P_{j' \rightarrow j'_1 j'_3} \left( \frac{z_1}{z_1 + z_3} \right) + D_i^{j'_1 j'_2 j'_3}(z_1, z_2 + z_3, t') \frac{1}{z_2 + z_3} P_{j' \rightarrow j'_2 j'_3} \left( \frac{z_2}{z_2 + z_3} \right) \right] \times D_{j'_1}^{j_1} \left( \frac{x_1}{z_1}, t - t' \right) D_{j'_2}^{j_2} \left( \frac{x_2}{z_2}, t - t' \right) D_{j'_3}^{j_3} \left( \frac{x_3}{z_3}, t - t' \right). \tag{38}$$

Уравнения для  $n$ -партонных функций распределения, как и их решения через свёртки  $(n - 1)$ -партонных функций с ядрами уравнений, также выведены и получены в работах [55, 67] в методе Липатова, но ввиду их громоздкости здесь не приводятся.

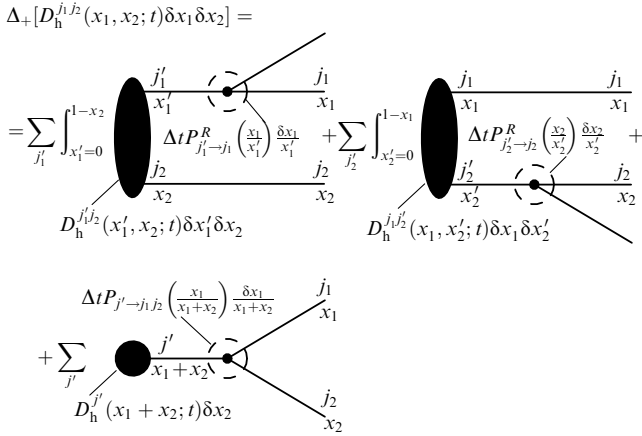
#### 4.4. Многопартонные функции распределения в адронах

В феноменологических применениях более интересны функции распределения голых кварков и глюонов в адронах, уравнения для которых могут быть получены в рамках широко используемой и феноменологически оправданной гипотезы о факторизации [68] физики малых и больших расстояний. В этом случае эволюция функций распределения голых кварков и глюонов в адронах описывается теми же уравнениями, которые обсуждались в разделах 4.1–4.3, с заменой индекса одетого партона  $i$  индексом рассматриваемого адрона  $h$ . Мы ограничимся здесь двухпартонными распределениями, как наиболее интересными в феноменологии, уравнения для которых имеют вид [56, 57]

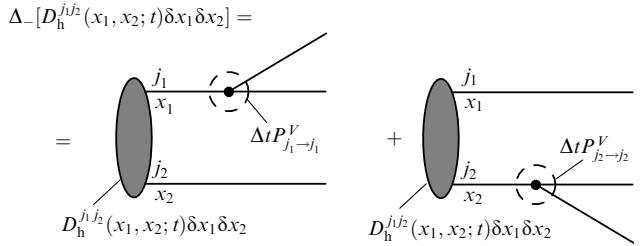
$$\begin{aligned} \frac{dD_h^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t)}{dt} = & \sum_{j'_1} \int_{x_1}^{1-x_2} \frac{dx'_1}{x'_1} D_h^{j'_1 j_2}(x'_1, x_2, t) P_{j'_1 \rightarrow j_1} \left( \frac{x_1}{x'_1} \right) + \\ & + \sum_{j'_2} \int_{x_2}^{1-x_1} \frac{dx'_2}{x'_2} D_h^{j_1 j'_2}(x_1, x'_2, t) P_{j'_2 \rightarrow j_2} \left( \frac{x_2}{x'_2} \right) + \\ & + \sum_{j'} D_h^{j' j_2}(x_1 + x_2, t) \frac{1}{x_1 + x_2} P_{j' \rightarrow j_1 j_2} \left( \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right). \end{aligned} \tag{39}$$

В дополнение к разделу 4.3, в котором дана вероятностная интерпретация всех вкладов в правой части эволюционных уравнений, для большей наглядности на рис. 1 и 2 мы приводим их графическую иллюстрацию.

Однако начальные условия для новых функций распределения в адронах на начальном масштабе  $t = 0$  ( $Q^2 = \mu^2$ ) теперь априори неизвестны, в отличие от начальных условий для функций партонного уровня (для которых  $D_i^j(x, t = 0) = \delta_{ij} \delta(x - 1)$ ;  $D_i^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t = 0) = 0$ ), и они должны быть введены феноменологически либо определены из эксперимента или из моделей, претендующих на решение проблемы конфайнмента. Тем не менее решения уравнений с заданными начальными условиями могут быть представлены через свёртки функций партон-



**Рис. 1.** Процессы распада партонов, в которых число  $j_1 j_2$ -пар с долями продольного импульса в интервале  $x_1 \rightarrow x_1 + \delta x_1, x_2 \rightarrow x_2 + \delta x_2$  возрастает на величину  $\Delta_+[D_h^{j_1 j_2}(x_1, x_2; t)\delta x_1 \delta x_2]$ .  $P_{j' \rightarrow j}^R(x)$  — часть ядра  $P_{j' \rightarrow j}(x)$ , соответствующая реальному распаду партонов, т.е. без членов, пропорциональных  $\delta(1-x)$ .



**Рис. 2.** Процессы распада партонов, которые уменьшают на величину  $\Delta_-[D_h^{j_1 j_2}(x_1, x_2; t)\delta x_1 \delta x_2]$  число  $j_1 j_2$ -пар с долями продольного импульса в интервале  $x_1 \rightarrow x_1 + \delta x_1, x_2 \rightarrow x_2 + \delta x_2$ .  $P_{j' \rightarrow j}^V(x)$  — часть ядра  $P_{j' \rightarrow j}(x)$  с членами, пропорциональными  $\delta(1-x)$ .

ного уровня в виде [56, 57]

$$D_h^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t) = D_{h(\text{fact})}^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t) + D_{h(\text{QCD})}^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t), \quad (40)$$

где  $D_{h(\text{fact})}^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t), D_{h(\text{QCD})}^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t)$  — вычисляемые по теории возмущений динамические корреляции, индуцированные эволюцией двухпартонных функций (ср. (35) и (42)),

$$D_{h(\text{fact})}^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t) = \sum_{j_1' j_2'} \int_{x_1}^{1-x_2} \frac{dz_1}{z_1} \int_{x_2}^{1-z_1} \frac{dz_2}{z_2} D_h^{j_1' j_2'}(z_1, z_2, 0) \times D_{j_1'}^{j_1}\left(\frac{x_1}{z_1}, t\right) D_{j_2'}^{j_2}\left(\frac{x_2}{z_2}, t\right), \quad (41)$$

$$D_{h(\text{QCD})}^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t) = \sum_{j_1' j_2'} \int_0^t dt' \int_{x_1}^{1-x_2} \frac{dz_1}{z_1} \int_{x_2}^{1-z_1} \frac{dz_2}{z_2} D_h^{j_1' j_2'}(z_1 + z_2, t') \frac{1}{z_1 + z_2} \times P_{j' \rightarrow j_1' j_2'}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) D_{j_1'}^{j_1}\left(\frac{x_1}{z_1}, t - t'\right) D_{j_2'}^{j_2}\left(\frac{x_2}{z_2}, t - t'\right). \quad (42)$$

Первый член в правой части выражения (40) — решение однородных КХД-уравнений (независимая эволюция двух ветвей партонного каскада), в котором двухпартон-

ные функции распределения  $D_h^{j_1' j_2'}(z_1, z_2, 0)$  на начальном масштабе  $\mu^2$ , вообще говоря, неизвестны. Для этих непертурбативных двухпартонных функций при малых  $z_1$  и  $z_2$  можно предположить их факторизацию:

$$D_h^{j_1' j_2'}(z_1, z_2, 0) \simeq D_h^{j_1'}(z_1, 0) D_h^{j_2'}(z_2, 0), \quad (43)$$

если пренебречь ограничениями ( $z_1 + z_2 < 1$ ), которые диктуются законом сохранения продольного импульса. Это приводит к

$$D_{h(\text{fact})}^{ij}(x_1, x_2, t) \simeq D_h^i(x_1, t) D_h^j(x_2, t) \quad (44)$$

и позволяет частично оправдать факторизационную гипотезу для двухпартонных функций распределения, которая широко использовалась в литературе в виде

$$D_{h(\text{fact})}^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t) = D_h^{j_1}(x_1, t) D_h^{j_2}(x_2, t) (1 - x_1 - x_2). \quad (45)$$

При этом продольный импульсный фактор  $(1 - x_1 - x_2)$  вводился фактически "вручную", для того чтобы гладким образом обнулить двухпартонные функции распределения при  $x_1 + x_2 \rightarrow 1$  согласно закону сохранения импульса.

Из выражений (40) и (42) следует, что даже если двухпартонные функции распределения факторизованы (43) на некотором масштабе, то в результате эволюции эта факторизация неизбежно нарушается и возникают дополнительные динамические корреляции, на что впервые было обращено внимание в работах [69–71]. К аналогичному выводу можно прийти и в случае тройных партонных распределений в адронах, детальное изучение которых проведено в работе [48], но ввиду громоздкости здесь не приводится.

#### 4.5. Оценка корреляций

Для практических приложений интересно выяснить, какова величина индуцированных корреляций (42) в сравнении с факторизационной компонентой (41). Частично эта проблема исследована теоретически в работе [72]. После перехода к моментам функций распределения

$$M_h^{j_1 j_2}(n_1, n_2, t) = \int_0^1 dx_1 dx_2 \theta(1 - x_1 - x_2) \times x_1^{n_1} x_2^{n_2} D_h^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t) \quad (46)$$

эволюционные интегро-дифференциальные уравнения превращаются в системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, решения которых находятся в явном виде. Затем обратное преобразование Меллина

$$x_1 x_2 D_h^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t) = \int \frac{dn_1}{2\pi i} x_1^{-n_1} \int \frac{dn_2}{2\pi i} x_2^{-n_2} M_h^{j_1 j_2}(n_1, n_2, t) \quad (47)$$

позволяет определить функции распределения в  $x$ -представлении. Интегрирование при этом проводится вдоль мнимой оси правее всех сингулярностей по  $n$ , и в явном виде в общем случае оно невозможно. Однако асимптотическое поведение удаётся оценить: с возрастанием  $t$  второй член в решении (40) при конечных  $x_1$  и  $x_2$  становится доминирующим [72], и, таким образом, асимптотика двухпартонных функций распределения не зависит от неизвестных априори двухпартонных начальных данных  $D_h^{j_1 j_2}(x_1, x_2, 0)$ .



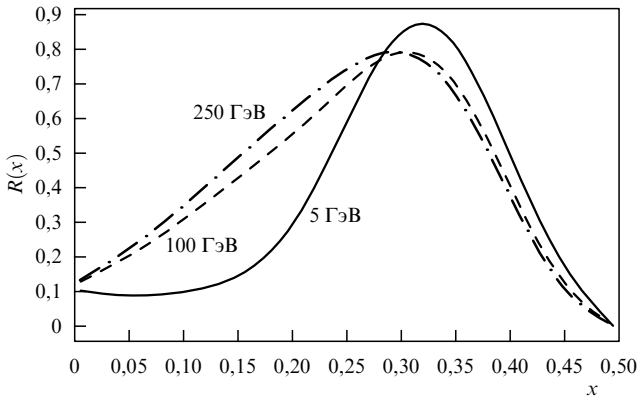


Рис. 3. Отношение корреляций, индуцированных эволюцией, к факторизационной компоненте для двойных глюон-глюон-распределений в протоне как функция  $x = x_1 = x_2$  для значений  $Q = 5$  ГэВ (сплошная кривая),  $Q = 100$  ГэВ (штриховая кривая),  $Q = 250$  ГэВ (штрихпунктирная кривая).

Асимптотическое поведение указывает только на тенденцию, но ничего не говорит нам о значениях  $x_1$ ,  $x_2$  и  $t(Q)$ , начиная с которых корреляции, вызванные КХД-эволюцией, становятся значительными (тем более, что асимптотическое поведение имеет место по дважды логарифмической переменной  $t$ ). Ответ и на этот специфический вопрос можно получить. Численно вклад индуцированных эволюцией корреляций в сравнении с факторизационной компонентой впервые был оценён в работе [70]. Необходимые при этих вычислениях начальные данные для одиночных партонных функций распределения  $D_h^g(x, 0)$  были заданы на масштабе  $Q_0 = \mu = 1,3$  ГэВ в соответствии с параметризацией коллаборации CTEQ (Coordinated Theoretical-Experimental project on QCD) [73]. Результаты для отношения gg-корреляций в протоне, появляющихся в результате эволюции, к факторизационной компоненте

$$R(x, t) = \frac{D_{p(\text{QCD, corr})}^{\text{gg}}(x_1, x_2, t)}{D_p^g(x_1, t)D_p^g(x_2, t)(1 - x_1 - x_2)^2} \Big|_{x_1=x_2=x} \quad (48)$$

представлены на рис. 3. Видно, что на масштабе  $Q \sim 5$  ГэВ, характерном для измерений коллаборации CDF, отношение (48) составляет около 10 % и увеличивается до 30 % на масштабе  $Q \sim 100$  ГэВ, доступном для измерений на БАК, для долей продольного импульса партонов  $x \leq 0,1$ . Для долей продольного импульса  $x \sim 0,2-0,4$  корреляции большие, вплоть до 90 %. Они становятся заметными с возрастанием  $t(Q)$  для всё большего диапазона  $x$  в соответствии с асимптотическим поведением, полученным в работе [72].

Следует отметить, что вместо продольного импульсного фактора  $(1 - x_1 - x_2)$ , "обнуляющего" гладким образом произведение двух одиночных партонных функций распределения при  $x_1 + x_2 \rightarrow 1$  в факторизационном анзаце (45), при вычислении отношения (48) был введён фактор  $(1 - x_1 - x_2)^2$  с более высокой степенью нуля при  $x_1 + x_2 \rightarrow 1$ , как это следует из эволюционных уравнений. Уже только интегрирование по фазовому объёму в (41) и (42) приводит ко второй степени нуля:

$$\int_{x_1}^{1-x_2} dz_1 \int_{x_2}^{1-z_1} dz_2 = \frac{(1 - x_1 - x_2)^2}{2}.$$

На самом деле эта степень должна быть больше двух и зависеть от  $t$ , увеличиваясь с возрастанием масштаба жёсткости процесса, как это имеет место для одиночных функций распределения в режиме  $x \rightarrow 1$  [61, 74]. Аналогичный результат получен для двухчастичных функций фрагментации в асимптотическом режиме  $x_1 + x_2 \rightarrow 1$  в работе [75]. Численные результаты подтверждают, что степень нуля при  $x_1 + x_2 \rightarrow 1$  больше двух и увеличивается с возрастанием  $t(Q)$ , как видно из рис. 3. Однако введённый фактор  $(1 - x_1 - x_2)^2$  практически не влияет на соотношение (48) в области относительно малых долей продольных импульсов  $x_1$ ,  $x_2$ , которая наиболее интересна с экспериментальной точки зрения, так как именно из этой области может быть экспериментально выделен вклад в сечение от многократных взаимодействий.

Более детально свойства двойных партонных распределений в адронах были исследованы позднее с помощью прямого интегрирования эволюционных уравнений (39) [76, 77] (в работе [77] только однородные уравнения). Такой способ оказался более эффективным при численных расчётах, чем использование решений (40) этих уравнений в виде свёрток одиночных функций распределения, так как в этом случае не приходится иметь дело с сингулярными функциями Грина (одиночными функциями партонного уровня с сингулярными  $\delta$ -образными начальными условиями). Существующие программы позволяют табулировать двойные партонные функции распределения в широком диапазоне изменения переменных:  $10^{-6} < x_1 < 1$ ;  $10^{-6} < x_2 < 1$ ;  $1 < Q^2 < 10^9$  ГэВ<sup>2</sup>. При этом начальные данные для двойных распределений задаются в улучшенном "факторизованном" виде с учётом дополнительных ограничений, вытекающих из импульсных и кварковых правил сумм:

$$D_h^{j_1 j_2}(x_1, x_2, 0) = D_h^{j_1}(x_1, 0)D_h^{j_2}(x_2, 0)(1 - x_1 - x_2)^2 \times \\ \times (1 - x_1)^{-2-\alpha(j_1)}(1 - x_2)^{-2-\alpha(j_2)}, \quad (49)$$

где  $\alpha(j) = 0$  для морских партонов и  $\alpha(j) = 0,5$  для валентных партонов. Дело в том, что уравнения эволюции (39) благодаря свойствам их ядер сохраняют как полный импульс партонов, так и число валентных кварков (как это имеет место и для одиночных распределений):

$$\sum_{j_1} \int_0^{1-x_2} dx_1 x_1 D_h^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t) = (1 - x_2)D_h^{j_2}(x_2, t), \quad (50)$$

$$\int_0^{1-x_2} dx_1 D_h^{j_1 j_2}(x_1, x_2, t) = N D_h^{j_2}(x_2, t), \quad (51)$$

где  $N = N_{j_{iv}}$  при  $j_2$ , не равном  $j_1$  или  $\bar{j}_1$ ;  $N = N_{j_{iv}} - 1$  при  $j_2 = j_1$ ;  $N = N_{j_{iv}} + 1$  при  $j_2 = \bar{j}_1$ ;  $j_{iv} \equiv j_1 - \bar{j}_1$  ( $j_1$  не равно  $g$ );  $N_{j_{iv}}$  — число валентных кварков сорта  $j_1$  в протоне (адроне). Заметим, что без дополнительных множителей  $(1 - x_1)^{-2-\alpha(j_1)}(1 - x_2)^{-2-\alpha(j_2)}$  в улучшенном "факторизационном" анзаце (49) невозможно добиться выполнения импульсных (50) и кварковых (51) правил сумм для двух-партонных начальных данных.

Здесь стоит также отметить, что частное решение (42) неоднородных уравнений даёт вклад в инклюзивное сечение двойного партонного рассеяния с большим весом (другим эффективным сечением [78–84]), чем решение однородных уравнений (41), о чём подробнее говорится в

разделе 5. Решения однородных уравнений обычно, как отмечалось, берут в факторизационном виде, в качестве хорошего приближения к точному решению, если непертурбативные корреляции отсутствуют. Эти начальные корреляционные условия *априори* не известны, но и не совсем произвольны, так как они должны удовлетворять нетривиальным правилам сумм [76, 85, 86], которые сохраняются в процессе эволюции. Проблема задания "правильных" начальных данных для эволюционных уравнений с корректным поведением вблизи кинематических границ также интенсивно изучалась и обсуждается [76, 85, 87–92].

## 5. Сечения двойных и тройных партонных рассеяний с учётом квантово-хромодинамической эволюции

За последнее десятилетие были сделаны многочисленные успешные попытки [24, 78–83, 93–98] учесть в адрон-адронных столкновениях обусловленные эволюцией динамические КХД-корреляции, обсуждённые в разделе 4. Решения эволюционных уравнений для двойных функций распределения представляют собой сумму решений однородных и неоднородных уравнений. Первые описывают независимую (одновременную) эволюцию двух ветвей партонного каскада: одна ветвь содержит партон с долей продольного импульса  $x_1$  в конечном состоянии, другая — партон с  $x_2$ . В решениях неоднородных уравнений допускается возможность расщепления однопартонной эволюции (одной ветви  $j$  на две разные ветви:  $j_1$  и  $j_2$ ) со стандартным ядром расщепления  $P_{j \rightarrow j_1 j_2}(z)$ . Эти две разные структуры генерируют три разных вклада в инклюзивное сечение двойного партонного рассеяния [78]:

$$\sigma_{hh' \rightarrow a_1 a_2}^{\text{DPS}} = \sigma_{hh' \rightarrow a_1 a_2}^{\text{DPS}, 1 \times 1} + \sigma_{hh' \rightarrow a_1 a_2}^{\text{DPS}, 1 \times 2 + 2 \times 1} + \sigma_{hh' \rightarrow a_1 a_2}^{\text{DPS}, 2 \times 2}, \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{hh' \rightarrow a_1 a_2}^{\text{DPS}, 1 \times 1} &= \frac{c}{2} \sum_{i, j, k, l} \int dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2 \int F_{2g}^4(q) \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \times \\ &\times D_h^i(x_1; \mu^2, Q_1^2) D_h^j(x_2; \mu^2, Q_2^2) \hat{\sigma}_{a_1}^{ik}(x_1, x'_1) \times \\ &\times \hat{\sigma}_{a_2}^{jl}(x_2, x'_2) D_{h'}^k(x'_1; \mu^2, Q_1^2) D_{h'}^l(x'_2; \mu^2, Q_2^2), \quad (53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{hh' \rightarrow a_1 a_2}^{\text{DPS}, 1 \times 2 + 2 \times 1} &= \\ &= \frac{c}{2} \sum_{i, j, k, l} \int dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2 \int^{\min(Q_1^2, Q_2^2)} F_{2g}^2(q) \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \times \\ &\times [D_h^i(x_1; \mu^2, Q_1^2) D_h^j(x_2; \mu^2, Q_2^2) \hat{\sigma}_{a_1}^{ik}(x_1, x'_1) \times \\ &\times \hat{\sigma}_{a_2}^{jl}(x_2, x'_2) D_{h'}^{kl}(x'_1, x'_2; q^2, Q_1^2, Q_2^2) + \\ &+ D_{h_2}^{ij}(x_1, x_2; q^2, Q_1^2, Q_2^2) \hat{\sigma}_{a_1}^{ik}(x_1, x'_1) \times \\ &\times \hat{\sigma}_{a_2}^{jl}(x_2, x'_2) D_{h'}^k(x'_1; \mu^2, Q_1^2) D_{h'}^l(x'_2; \mu^2, Q_2^2)], \quad (54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{hh' \rightarrow a_1 a_2}^{\text{DPS}, 2 \times 2} &= \frac{c}{2} \sum_{i, j, k, l} \int dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2 \int^{\min(Q_1^2, Q_2^2)} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \times \\ &\times D_{h_2}^{ij}(x_1, x_2; q^2, Q_1^2, Q_2^2) \hat{\sigma}_{a_1}^{ik}(x_1, x'_1) \times \\ &\times \hat{\sigma}_{a_2}^{jl}(x_2, x'_2) D_{h_2}^{kl}(x'_1, x'_2; q^2, Q_1^2, Q_2^2), \quad (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{h_2}^{ij}(x_1, x_2; q^2, Q_1^2, Q_2^2) &= \\ &= \sum_{j'_1 j'_2} \int_{q^2}^{\min(Q_1^2, Q_2^2)} dk^2 \frac{\alpha_s(k^2)}{2\pi k^2} \int_{x_1}^{1-x_2} \frac{dz_1}{z_1} \int_{x_2}^{1-z_1} \frac{dz_2}{z_2} \times \\ &\times D_h^{j'}(z_1 + z_2; \mu^2, k^2) \frac{1}{z_1 + z_2} P_{j \rightarrow j'_1 j'_2} \left( \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right) \times \\ &\times D_{j'_1}^i \left( \frac{x_1}{z_1}; k^2, Q_1^2 \right) D_{j'_2}^j \left( \frac{x_2}{z_2}; k^2, Q_2^2 \right), \quad (56) \end{aligned}$$

где  $\alpha_s(k^2) = g^2(k^2)/(4\pi)$  — бегущая константа связи. Одиночные функции распределения  $D_h^i(x_1; \mu^2, Q_1^2)$ , отмеченные здесь как функции обоих масштабов явно, являются решениями ДГЛАП-уравнений с заданными начальными условиями  $D_h^i(x_1; \mu^2)$  на начальном масштабе  $\mu^2$ , и они могут быть определены через функции Грина  $D_i^j(z; \mu^2, Q^2)$ :

$$D_h^i(x; \mu^2, Q^2) = \sum_{i'} \int_x^1 \frac{dz}{z} D_{h'}^{i'}(z; \mu^2) D_i^j \left( \frac{x}{z}; \mu^2, Q^2 \right). \quad (57)$$

Прежде всего следует отметить, что три члена (53)–(55) дают вклады в инклюзивное сечение с разными размерными (геометрическими) весами, представляющими собой так называемые эффективные сечения. Так, первая ( $1 \times 1$ )-компонента описывает рождение двух жёстких частиц,  $a_1$  и  $a_2$ , в результате взаимодействия двух партонных пар из двух независимых ветвей партонных каскадов. Вероятность такого двойного партонного взаимодействия зависит от пространственного распределения (в поперечной плоскости прицельного параметра) ветвей партонного каскада. В импульсном представлении это пространственное распределение регулируется двухпартоным (при малых  $x$  в основном двухглюонным) формфактором  $F_{2g}$  [52]. После интегрирования по  $q$  получим

$$\int F_{2g}^4(q) \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} = \frac{1}{\sigma_{\text{eff, DPS}}}. \quad (58)$$

Величина  $\sigma_{\text{eff, DPS}}$ , традиционно называемая эффективным сечением, характеризует поперечную площадь, занимаемую партонами, участвующими в жёстком столкновении.

Таким образом, инклюзивное сечение двойного партонного рассеяния зависит от пространственных корреляций между двумя партонами в волновой функции сталкивающегося протона (адрона). Вследствие сильного упорядочения поперечных импульсов в течение ДГЛАП-эволюции положение партонов в поперечной плоскости прицельного параметра  $b_i$  фактически "заморожено", а формфактор  $F_{2g}$  описывает начальное  $b_i$ -распределение, сформированное в непертурбативной области на некотором масштабе, меньшем, чем масштаб  $\mu^2$ , с которого начинается ДГЛАП-эволюция.

Однако существует и другой тип корреляций, обусловленный расщеплением одной ветви партонного каскада на две ветви. Расщепление на масштабе  $k^2$  приводит к возникновению двух ветвей с относительно малым поперечным пространственным разделением  $\delta b_i^2 \sim 1/k^2$ . Этот эффект чисто пертурбативного происхождения может значительно увеличить инклюзивное сечение двойного партонного рассеяния, приводя к значительному уменьшению эффективного сечения  $\sigma_{\text{eff, DPS}}$  (извлека-

емого из соотношения (9)) по сравнению с величиной, оценённой в геометрическом представлении (10).

В зависимости от кинематики рассматриваемого процесса и экспериментальных обрезаний можно сосредоточиться на изучении или двухпартонных корреляций, обусловленных непertурбативной областью, т.е.  $(1 \times 1)$ -компонентой, или корреляций чисто пертурбативного происхождения, т.е. обусловленных  $(2 \times 2)$ -компонентой.

Вклад смешанной  $(1 \times 2 + 2 \times 1)$ -компоненты регулируется формфактором  $F_{2g}(q)$  со стороны одного налетающего протона и пертурбативным расщеплением со стороны другого. Так как формфактор  $F_{2g}(q)$  уже обеспечивает быструю сходимость интеграла по  $q$  в области малых  $q^2 < \mu^2$ , здесь мы фактически имеем дело в основном с дальнедействующими корреляциями из непertурбативной области.

В литературе проводились обширные дискуссии [79–82, 93–97] относительно  $(2 \times 2)$ -компоненты, носившие, с нашей точки зрения [82], в основном терминологический характер. Данный вклад включает два ядра расщепления, и интегрирование по  $q$  не содержит сильного подавляющего фактора  $F_{2g}(q)$ . Формально в области не слишком малых  $x$  в рамках коллинеарного подхода этот вклад следует рассматривать как результат взаимодействия *одной* пары партоннов с  $2 \rightarrow 4$ -жестким подпроцессом [79–82, 93, 94], так как доминирующий вклад в фазовый объём обусловлен областью больших  $q^2 \sim \min(Q_1^2, Q_2^2)$ . Однако, как показано в работах [78, 82], возможны конфигурации с относительно большим интервалом между точкой расщепления  $(k^2, z_1 + z_2)$  и координатами (импульсными)  $(Q_i^2, x_i)$  жесткого подпроцесса. В таком случае открывается возможность для эволюции (или ДГЛАП, если  $k^2 \ll Q_i^2$ , или Балицкого–Фадина–Кураева–Липатова (БФКЛ) [63, 99–101], если  $z_1 + z_2 \gg x_i$ ) с образованием множества вторичных частиц. Соответствующий процесс не может быть описан  $2 \rightarrow 4$ -жестким матричным элементом, и необходим учёт всех вкладов в (52), особенно в случае конфигураций с совершенно разными масштабами (например,  $Q_1^2 \ll Q_2^2$ ).

Структура дополнительных вкладов  $(1 \times 2 + 2 \times 1)$  и  $(2 \times 2)$ , содержащих одно и два ядра расщепления соответственно, исследована в дважды логарифмическом приближении в работе [82], где указана кинематическая область, в которой  $(2 \times 2)$ -компонента должна быть отнесена к двойному партонному рассеянию. Позднее проблема так называемого двойного учёта была подробно изучена с прескрипцией её решения [96, 97] и подтверждением факта необходимости рассматривать  $(2 \times 2)$ -компоненту как двойное партонное рассеяние в области достаточно малых продольных импульсов.

Формулы для вычисления инклюзивного сечения тройного партонного рассеяния с учётом КХД-эволюции также были получены [48] с оценкой геометрических факторов для разных вкладов, генерируемых решениями соответствующих однородных и неоднородных уравнений, и обсуждением проблемы двойного учёта, но ввиду громоздкости здесь не приводятся.

## 6. Феноменологические следствия квантово-хромодинамической эволюции

Как отмечалось, в результате эволюции двойные партонные функции распределения становятся сильно кор-

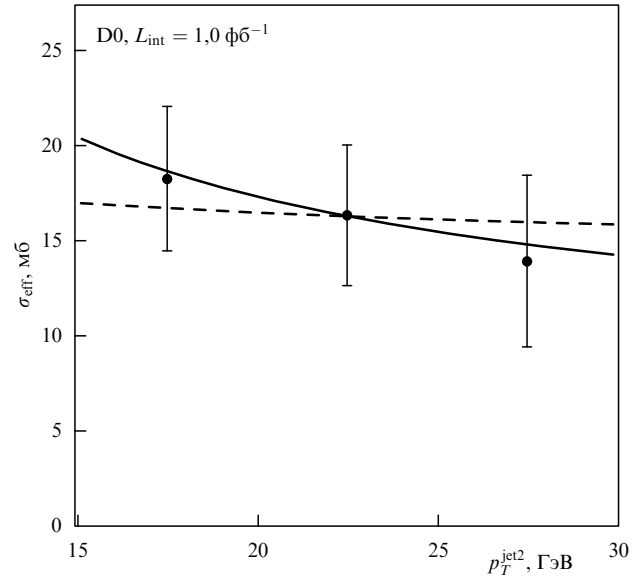


Рис. 4. Эффективное сечение  $\sigma_{\text{eff,DPS}}^{\text{exp}}$ , измеренное для трёх значений поперечного импульса второй струи  $p_T^{\text{jet}2}$  (из работы [29]). Сплошная кривая ( $k = 0,5$ ) и штриховая ( $k = 0,1$ ) — результат вычислений по формуле (60) при  $p_{T0}^{\text{jet}2} = 22,5$  ГэВ и  $\sigma_{\text{eff}}^0 = 16,3$  мб.

релированными при больших  $Q^2$  и конечных долях продольных импульсов  $x_1$  и  $x_2$ , даже если на начальном масштабе  $Q_0^2 = \mu^2$  они были факторизованы. Однако экспериментальные данные пока не свидетельствуют в пользу наличия сильных корреляций по продольным импульсным фракциям. Последнее можно объяснить тем фактом, что доступная для исследования кинематическая область переменных (относительно малые  $x$  и  $Q^2$ ) ещё далека от асимптотической области доминирования динамических КХД-корреляций. С увеличением светимости на БАК открывается возможность исследовать двойные партонные рассеяния и в режиме больших  $x$  и  $Q^2$ , в котором корреляции уже могут проявиться непосредственно.

В работе [102] показано, что измерения коллаборации D0 [29] эффективного сечения  $\sigma_{\text{eff,DPS}}^{\text{exp}}$ , представленные как функция импульса второй струи  $p_T^{\text{jet}2}$  (упорядоченные по поперечному импульсу), можно рассматривать как первое косвенное указание на эволюцию двойных партонных распределений. Как видно из рис. 4, в поведении этого сечения заметна тенденция его уменьшения с возрастанием жесткости процесса, которая в данном случае может быть охарактеризована поперечным импульсом струи. Хотя, на первый взгляд, размерный геометрический фактор  $\sigma_{\text{eff,DPS}}$  содержит информацию о непertурбативной структуре протона и отражает распределение партонной материи в области перекрытия двух сталкивающихся адронов, и поэтому он не должен зависеть от жесткости партонного подпроцесса априори. Однако в экспериментах и CDF, и D0 эффективное сечение  $\sigma_{\text{eff,DPS}}^{\text{exp}}$  непосредственно не измерялось, а вычислялось (извлекалось) с использованием нормировки на произведение двух одиночных сечений (как в (9)):

$$\frac{\sigma_{\text{DPS}}^{\gamma+3j}}{\sigma^{\gamma j} \sigma^{\gamma j}} = (\sigma_{\text{eff,DPS}}^{\text{exp}})^{-1}, \quad (59)$$

где  $\sigma_{\text{DPS}}^{\gamma+3j}$  — инклюзивное сечение событий с фотоном и тремя струями в конечном состоянии, рождёнными в

двойном партонном рассеянии,  $\sigma^{jj}$  — инклюзивное сечение процесса с фотоном и струей в конечном состоянии,  $\sigma^{jj}$  — инклюзивное сечение двухструйных событий. Отметим, что обе коллаборации при этом не использовали никаких теоретических вычислений (предсказаний) для инклюзивных сечений, а сравнивали число наблюдаемых двойных партонных событий с фотоном и тремя струями в конечном состоянии в одном жёстком рр-столкновении с числом событий с фотоном и тремя струями во взаимодействиях, имеющих место в двух разных рр-соударениях.

При такой нормировке (59) и наличии дополнительных корреляций в двойных партонных распределениях экспериментально "вытаскиваемое"  $\sigma_{\text{eff,DPS}}^{\text{exp}}$  будет отличаться от  $\sigma_{\text{eff,DPS}}$ , определяемого из уравнения (10) через плотности партонной материи  $f(b)$  в плоскости прицельного параметра, и зависеть от масштаба жёсткости процесса. Функциональная форма зависимости  $\sigma_{\text{eff,DPS}}^{\text{exp}}$  от  $p_T^{\text{jet2}}$ , мотивированная явным видом эволюционной переменной  $t$  и решением эволюционных уравнений, была предложена в [102]:

$$\sigma_{\text{eff,DPS}}^{\text{exp}} = \sigma_{\text{eff}}^0 \left( 1 + k \ln \frac{p_T^{\text{jet2}}}{p_{T0}^{\text{jet2}}} \right)^{-1}, \quad (60)$$

и показана на рис. 4 при  $k = 0,1$  (штриховая кривая) и  $k = 0,5$  (сплошная кривая). Эти кривые иллюстрируют две возможности поведения  $\sigma_{\text{eff,DPS}}^{\text{exp}}$ : едва заметное (практически константа) уменьшение и отчётливое убывание в области измерения. Точка нормировки  $p_{T0}^{\text{jet2}} = 22,5$  ГэВ с  $\sigma_{\text{eff}}^0 = 16,3$  мб была фиксирована, чтобы воспроизвести измеренную величину в центральном бине  $p_T^{\text{jet2}}$ . Проведённые измерения в трёх интервалах по  $p_T^{\text{jet2}}$  не позволяют пока говорить о серьёзной проверке "предсказания" (60) с двумя подгоночными параметрами,  $\sigma_{\text{eff}}^0$  и  $k$ .

Таким образом, в отличие от наивных ожиданий, существование дополнительных динамических КХД-корреляций подразумевает зависимость экспериментально извлекаемого эффективного сечения  $\sigma_{\text{eff,DPS}}^{\text{exp}}$  от величины энергетического масштаба разрешения, что нашло подтверждение в дальнейших теоретических исследованиях [78, 83, 98, 103]. Более того, относительный вклад смешанной  $(1 \times 2 + 2 \times 1)$ -компоненты (54) в инклюзивное сечение двойного партонного рассеяния численно оказывается значимым [83, 98] при энергиях БАК и увеличивается с возрастанием энергетического масштаба. Первые оценки этих дополнительных вкладов в инклюзивное сечение реальных процессов были сделаны в работе [84] в упрощённом феноменологическом подходе с обнадёживающим выводом о их экспериментальной наблюдаемости. В рамках генератора Pythia [49] также получена близкая оценка для частоты наблюдаемости так называемых совместных взаимодействий (joint interactions) [19]. В работе [83] показано, что учёт дополнительных динамических КХД-корреляций (трёхпартонных взаимодействий в авторской терминологии) позволяет разрешить давнюю проблему: почему наблюдаемое инклюзивное сечение двойного партонного рассеяния в два раза больше, чем его оценка в приближении независимых партонных взаимодействий (только факторизационная  $(1 \times 1)$ -компонента (53) со "стандартным" геометрическим поперечным профилем и радиусом протона).

Как отмечалось во введении, к настоящему времени вклад от двойных партонных рассеяний надёжно измерен

и выделен [24] в ряде процессов, содержащих в конечном состоянии тяжёлые кварки (с, b), кварконии ( $J/\psi$ ,  $\Upsilon$ ), струи и калибровочные бозоны ( $\gamma$ , W, Z). Существует также много теоретических оценок сечений для более редких процессов, наблюдение и изучение которых станет возможным с увеличением светимости БАК и при более высоких энергиях проектируемых коллайдеров. Большинство этих оценок сделано в приближении независимых партонных взаимодействий (только факторизационная  $(1 \times 1)$ -компонента (53), но не со "стандартным" геометрическим поперечным профилем и радиусом протона, а с типичным значением  $\sigma_{\text{eff,DPS}} \simeq 15 \pm 5$  мб, чтобы таким образом эффективно учесть дополнительные нефакторизационные вклады). Однако теперь возможны и более детальные вычисления сечений в рамках разработанной недавно модели Монте-Карло [104] двойных партонных рассеяний, учитывающей явно эффекты эволюции.

В заключение этого раздела обратим внимание ещё только на процессы с рождением двух W-бозонов с одинаковыми знаками электрических зарядов, а также на рождение W-бозона в сопровождении тяжёлых мезонов с электрическим зарядом того же знака. Дело в том, что, несмотря на малую вероятность таких событий, указанные процессы были предложены [105–108] как наиболее подходящие и "чистые" для изучения механизма двойного партонного рассеяния ввиду значительно меньшего относительного фона от однократных рассеяний. Более того, в случае рождения двух W-бозонов одного знака динамические КХД-корреляции могут проявляться в нетривиальных кинематических корреляциях [106] этих бозонов по скорости, которые отсутствуют в приближении независимых партонных взаимодействий. Процессы с рождением двух тяжёлых кваркониев в разных комбинациях также весьма перспективны [24, 109–111] для изучения двойных партонных рассеяний.

## 7. Заключение

Двухпартонные функции распределения в главном логарифмическом приближении теории возмущений КХД удовлетворяют определённым эволюционным уравнениям. Из этих уравнений следует, что факторизационная гипотеза, часто используемая для двухпартонных функций распределения при анализе экспериментальных данных по двойным партонным рассеяниям, может быть принята в качестве первого приближения в ограниченном интервале изменения масштаба жёсткости процесса. При этом импульсные и кварковые правила сумм, сохраняющиеся при эволюции благодаря свойствам ядер уравнений, приводят к дополнительным ограничениям на вид "факторизационного" анзаца для начальных данных. С увеличением масштаба жёсткости процесса вклад возникающих динамических КХД-корреляций в двухпартонные функции распределения и инклюзивное сечение двойного партонного рассеяния возрастает по сравнению с факторизационной компонентой, что позволяет надеяться на их прямое наблюдение.

Измерения коллаборации D0 [29] эффективного сечения  $\sigma_{\text{eff,DPS}}^{\text{exp}}$ , представленные как функция импульса второй струи  $p_T^{\text{jet2}}$ , можно рассматривать как первое косвенное указание на эволюцию двойных партонных распределений. Измерения в большем интервале изменения

масштаба жёсткости процесса с меньшими экспериментальными неопределённостями необходимы, чтобы увидеть этот эффект чётче и сравнить детально с результатами вычислений [83], учитывающих явно динамические корреляции (трёхпартонные взаимодействия).

Стоит отметить, что двойные партонные рассеяния также интенсивно обсуждаются и в протон-ядерных (pA) соударениях [42, 112–126], так как их относительный вклад усиливается по сравнению с наивным скейлинговым ожиданием, и открываются новые уникальные возможности для дальнейшего изучения и измерения КХД-импульсных корреляций. С последними достижениями и перспективами этих исследований можно ознакомиться в обзоре [47]. Ядро-ядерные (AA) соударения не так интересны [47, 124] для изучения многопартонных взаимодействий, поскольку в этом случае доминируют многократные нуклон-нуклонные рассеяния, отражающие хорошо известную структуру распределения нуклонов в ядре, а не интересующую нас структуру распределения партонов в нуклоне.

С увеличением энергии столкновений становится доступной для изучения область всё меньших долей продольных партонных импульсов, в которой сильно возрастают их плотности, и выход за рамки стандартных подходов необходим [63, 127–129]. В связи с этим весьма интересным становится вопрос о соотношении между конкурирующими эффектами: увеличением партонных плотностей за счёт расщепления ветвей партонного каскада и их уменьшением в результате партонной диффузии [129] по скорости.

Результаты, освещённые в настоящем обзоре, подчёркивают важность хорошего понимания динамики многопартонных взаимодействий в адронных соударениях на действующих и проектируемых коллайдерах с точки зрения исследования как глубинных КХД-явлений, так и фона для поиска новой физики в редких событиях с рождением множества тяжёлых частиц и частиц с большими поперечными импульсами.

**Благодарности.** Авторы благодарят Д.В. Бандурина, С.П. Баранова, Э.Э. Бооса, И.М. Дрёмина, А.Г. Загородного, Ю.Б. Иванова, В.Л. Коротких, А.В. Леонидова, С.Н. Неделько, М.Г. Рыскина, О.В. Теряева, В.Д. Тонеева, Ф. Антинори (F. Antinori), Д. де Энтерриа (D. d'Enterria), Ж.-В. Чиу (Jian-Wei Qiu), А. Ковнера (A. Kovner), Л. Мак-Леррана (L. McLerran), Г. Паича (G. Paic), Ю. Шукрафта (J. Schukraft), Д. Трелеани (D. Treleani), М. ван Лейвана (M. van Leeuwen) за полезные обсуждения и Н.П. Карпинскую за помощь при подготовке рукописи к печати. Работа Г.М. Зиновьева выполнена при поддержке Целевой программой сотрудничества между ЦЕРНом и Национальной академией наук Украины "Ядерная материя в экстремальных условиях" (грант 0120U100935) (the Goal-Oriented Program of Cooperation between CERN and National Academy of Science of Ukraine "Nuclear Matter under Extreme Conditions" (agreement 0120U100935)).

## Список литературы

- Landshoff P V, Polkinghorne J C *Phys. Rev. D* **18** 3344 (1978)
- Takagi F *Phys. Rev. Lett.* **43** 1296 (1979)
- Goebel C, Scott D M, Halzen F *Phys. Rev. D* **22** 2789 (1980)
- Paver N, Treleani D *Nuovo Cimento A* **70** 215 (1982)
- Humpert B *Phys. Lett. B* **131** 461 (1983)
- Humpert B, Odorico R *Phys. Lett. B* **154** 211 (1985)
- Mekhfi M *Phys. Rev. D* **32** 2371 (1985)
- Mekhfi M *Phys. Rev. D* **32** 2380 (1985)
- Ametller L, Paver N, Treleani D *Phys. Lett. B* **169** 289 (1986)
- Halzen F, Hoyer P, Stirling W Y *Phys. Lett. B* **188** 375 (1987)
- Sjöstrand T, van Zijl M *Phys. Rev. D* **36** 2019 (1987)
- Mangano M Z. *Phys. C* **42** 331 (1989)
- Godbole R M, Gupta S, Lindfors J Z. *Phys. C* **47** 69 (1990)
- Drees M, Han T *Phys. Rev. Lett.* **77** 4142 (1996)
- Calucci G, Treleani D *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **71** 392 (1999)
- Calucci G, Treleani D *Phys. Rev. D* **60** 054023 (1999)
- Del Fabbro A, Treleani D *Phys. Rev. D* **61** 077502 (2000)
- Sjöstrand T, Skands P Z *J. High Energy. Phys.* **2004** (3) 053 (2004)
- Sjöstrand T, Skands P Z *Eur. Phys. J. C* **39** 129 (2005)
- Dremin I M, Nechitailo V A *Phys. Rev. D* **70** 034005 (2004)
- Maina E J. *High Energy. Phys.* **2009** (4) 098 (2009); *J. High Energy. Phys.* **2009** (9) 081 (2009)
- Rogers T C, Strikman M *Phys. Rev. D* **81** 016013 (2010)
- Berger E L, Jakson C B, Shaughnessy G *Phys. Rev. D* **81** 014014 (2010)
- Bartalini P, Gaunt J R, in *Multiple Parton Interactions at the LHC* (Advanced Series on Directions in High Energy Physics, Vol. 29, Eds P Bartalini, J R Gaunt) (Singapore: World Scientific, 2018) p. 1
- Åkesson T et al. (Axial Field Spectrometer Collab.) *Z. Phys. C* **34** 163 (1987)
- Alitti J et al. (UA2 Collab.) *Phys. Lett. B* **268** 145 (1991)
- Abe F et al. (CDF Collab.) *Phys. Rev. D* **47** 4857 (1993)
- Abe F et al. (CDF Collab.) *Phys. Rev. D* **56** 3811 (1997)
- Abazov V M et al. (D0 Collab.) *Phys. Rev. D* **81** 052012 (2010)
- Abazov V M et al. (D0 Collab.) *Phys. Rev. D* **83** 052008 (2011)
- Абрамов В В и др. *ЯФ* **69** 887 (2006); Abramov V V et al. *Phys. Atom. Nucl.* **69** 860 (2006)
- Aaboud M et al. (ATLAS Collab.) *J. High Energy. Phys.* **2016** (11) 110 (2016)
- Aaboud M et al. (ATLAS Collab.) *Eur. Phys. J. C* **77** 76 (2017)
- Aaboud M et al. (ATLAS Collab.) *Phys. Lett. B* **790** 595 (2019)
- Chatrchyan S et al. (CMS Collab.) *J. High Energy. Phys.* **2014** (3) 032 (2014)
- Khachatryan V et al. (CMS Collab.) *Eur. Phys. J. C* **76** 439 (2016)
- Khachatryan V et al. (CMS Collab.) *J. High Energy. Phys.* **2017** (5) 013 (2017)
- Aaij R et al. (LHCb Collab.) *J. High Energy. Phys.* **2012** (6) 141 (2012)
- Aaij R et al. (LHCb Collab.) *J. High Energy. Phys.* **2016** (7) 052 (2016)
- Aaij R et al. (LHCb Collab.) *J. High Energy. Phys.* **2017** (6) 047 (2017)
- d'Enterria D, Snigirev A M *Phys. Rev. Lett.* **118** 122001 (2017)
- d'Enterria D, Snigirev A M *Eur. Phys. J. C* **78** 359 (2018)
- Mangano M L et al., CERN Yellow Report, CERN-2017-003-M, Vol. 3 (Ed. M L Mangano) (Geneva: CERN, 2017) p. 1, <https://doi.org/10.23731/CYRM-2017-003.1>
- Dainese A et al., CERN Yellow Report, CERN-2017-003-M, Vol. 3 (Ed. M L Mangano) (Geneva: CERN, 2017) p. 635, <https://doi.org/10.23731/CYRM-2017-003.635>
- Maciula R, Szczurek A *Phys. Lett. B* **772** 849 (2017)
- Shao H-S, Zhang Y-J *Phys. Rev. Lett.* **122** 192002 (2019)
- d'Enterria D, Snigirev A, in *Multiple Parton Interactions at the LHC* (Advanced Series on Directions in High Energy Physics, Vol. 29, Eds P Bartalini, J R Gaunt) (Singapore: World Scientific, 2018) p. 159
- Snigirev A M *Phys. Rev. D* **94** 034026 (2016)
- Sjöstrand T, Mrenna S, Skands P *Comput. Phys. Commun.* **178** 852 (2008)
- Seymour M H, Siódmok A *J. High Energy. Phys.* **2013** (10) 113 (2013)
- Bellm J, Gieseke S, Kirchgaeßer P *Eur. Phys. J. C* **80** 469 (2020)
- Blok B et al. *Phys. Rev. D* **83** 071501(R) (2011)
- Abazov V M et al. (D0 Collab.) *Phys. Rev. D* **90** 111101(R) (2014)
- Prokhorov A A et al. *Eur. Phys. J. C* **80** 1046 (2020)
- Kirschner R *Phys. Lett. B* **84** 266 (1979)
- Shelest V P, Snigirev A M, Zinovjev G M *Phys. Lett. B* **113** 325 (1982)
- Зиновьев Г М, Снигирев А М, Шелест В П *ТМФ* **51** 317 (1982); Zinov'ev G M, Snigirev A M, Shelest V P *Theor. Math. Phys.* **51** 523 (1982)

58. Ceccopieri F A *Phys. Lett. B* **697** 482 (2011)
59. Грибов В Н, Липатов Л Н *ЯФ* **15** 781 (1972); Gribov V N, Lipatov L N *Sov. J. Nucl. Phys.* **15** 438 (1972); Грибов В Н, Липатов Л Н *ЯФ* **15** 1218 (1972); Gribov V N, Lipatov L N *Sov. J. Nucl. Phys.* **15** 675 (1972)
60. Липатов Л Н *ЯФ* **20** 181 (1974); Lipatov L N *Sov. J. Nucl. Phys.* **20** 94 (1974)
61. Докшицер Ю Л *ЖЭТФ* **73** 1216 (1977); Dokshitzer Yu L *Sov. Phys. JETP* **46** 641 (1977)
62. Altarelli G, Parisi G *Nucl. Phys. B* **126** 298 (1977)
63. Gribov L V, Levin E M, Ryskin M G *Phys. Rep.* **100** 1 (1983)
64. Konishi K, Ukawa A, Veneziano G *Phys. Lett. B* **78** 243 (1978)
65. Konishi K, Ukawa A, Veneziano G *Nucl. Phys. B* **157** 45 (1979)
66. Pavlenko O P, Snigirev A M, Zinovjev G M *Phys. Lett. B* **126** 267 (1983)
67. Shelest V P, Snigirev A M, Zinovjev G M, Preprint ITP-83-46-E (Kiev: Inst. Theor. Phys., 1983)
68. Collins J C, Soper D E, Sterman G, in *Perturbative QCD* (Advanced Series on Directions in High Energy Physics, Vol. 5, Ed. A H Mueller) (Singapore: World Scientific, 1989) p. 1
69. Snigirev A M *Phys. Rev. D* **68** 114012 (2003)
70. Korotkikh V L, Snigirev A M *Phys. Lett. B* **594** 171 (2004)
71. Снигирев А М *ЯФ* **74** 158 (2011); Snigirev A M *Phys. Atom. Nucl.* **74** 158 (2011)
72. Snigirev A M, Snigireva N A, Zinovjev G M *Phys. Rev. D* **90** 014015 (2014)
73. Lai H L et al. (CTEQ Collab.) *Eur. Phys. J. C* **12** 375 (2000)
74. Dokshitzer Yu L, Dyakonov D I, Troyan S I *Phys. Rep.* **58** 269 (1980)
75. Vendramin I *Nuovo Cimento A* **62** 21 (1981)
76. Gaunt J R, Stirling W J J. *High Energ. Phys.* **2010** (3) 005 (2010)
77. Diehl M, Kasemets T, Keane S J. *High Energ. Phys.* **2014** (5) 118 (2014)
78. Ryskin M G, Snigirev A M *Phys. Rev. D* **83** 114047 (2011)
79. Blok B et al. *Eur. Phys. J. C* **72** 1963 (2012)
80. Gaunt J R, Stirling W J, arXiv:1202.3056
81. Gaunt J R J. *High Energ. Phys.* **2013** (1) 042 (2013)
82. Ryskin M G, Snigirev A M *Phys. Rev. D* **86** 014018 (2012)
83. Blok B et al. *Eur. Phys. J. C* **74** 2926 (2014)
84. Cattaruzza E, Del Fabbro A, Treleani D *Phys. Rev. D* **72** 034022 (2005)
85. Ceccopieri F A *Phys. Lett. B* **734** 79 (2014)
86. Diehl M, Plöbl P, Schäfer A *Eur. Phys. J. C* **79** 253 (2019)
87. Snigirev A M *Phys. Rev. D* **83** 034028 (2011)
88. Chang H-M, Manohar A V, Waalewijn W J *Phys. Rev. D* **87** 034009 (2013)
89. Rinaldi M, Scopetta S, Vento V *Phys. Rev. D* **87** 114021 (2013)
90. Golec-Biernat K, Lewandowska E *Phys. Rev. D* **90** 014032 (2014)
91. Golec-Biernat K et al. *Phys. Lett. B* **750** 559 (2015)
92. Diehl M et al. *Eur. Phys. J. C* **80** 468 (2020)
93. Gaunt J R, Stirling W J J. *High Energ. Phys.* **2011** (6) 048 (2011)
94. Manohar A V, Waalewijn W J *Phys. Lett. B* **713** 196 (2012)
95. Diehl M, Schäfer A *Phys. Lett. B* **698** 389 (2011)
96. Diehl M, Gaunt J R, arXiv:1603.05468
97. Diehl M, Gaunt J R, Schönwald K J. *High Energ. Phys.* **2017** (6) 083 (2017)
98. Gaunt J R, Maciula R, Szczurek A *Phys. Rev. D* **90** 054017 (2014)
99. Кураев Э А, Липатов Л Н, Фадин В С *ЖЭТФ* **71** 840 (1976); Kuraev E A, Lipatov L N, Fadin V S *Sov. Phys. JETP* **44** 443 (1976)
100. Кураев Э А, Липатов Л Н, Фадин В С *ЖЭТФ* **72** 377 (1977); Kuraev E A, Lipatov L N, Fadin V S *Sov. Phys. JETP* **45** 199 (1977)
101. Балицкий И И, Липатов Л Н *ЯФ* **28** 1597 (1978); Balitskii I I, Lipatov L N *Sov. J. Nucl. Phys.* **28** 822 (1978)
102. Snigirev A M *Phys. Rev. D* **81** 065014 (2010)
103. Flensburg C et al. *J. High Energ. Phys.* **2011** (6) 066 (2011)
104. Cabouat B, Gaunt J R, Ostrolenk K J. *High Energ. Phys.* **2019** (11) 061 (2019)
105. Kulesza A, Stirling W J *Phys. Lett. B* **475** 168 (2000)
106. Gaunt J R et al. *Eur. Phys. J. C* **69** 53 (2010)
107. Baranov S P et al. *Phys. Lett. B* **746** 100 (2015)
108. Baranov S P et al. *Phys. Rev. D* **93** 094013 (2016)
109. Kom C-H, Kulesza A, Stirling W J *Phys. Rev. Lett.* **107** 082002 (2011)
110. Baranov S P, Snigirev A M, Zotov N P *Phys. Lett. B* **705** 116 (2011)
111. Baranov S P et al. *Phys. Rev. D* **87** 034035 (2013)
112. Strikman M, Treleani D *Phys. Rev. Lett.* **88** 031801 (2002)
113. Del Fabbro A, Treleani D *Phys. Rev. D* **70** 034022 (2004)
114. Frankfurt L, Strikman M, Weiss C *Ann. Physik* **13** 665 (2004)
115. Cattaruzza E, Del Fabbro A, Treleani D *Phys. Rev. D* **70** 034022 (2004)
116. Del Fabbro A, Treleani D *Eur. Phys. J. A* **19S1** 229 (2004)
117. Cattaruzza E, Del Fabbro A, Treleani D *Int. Mod. Phys. A* **20** 4462 (2005)
118. Treleani D, Calucci G *Phys. Rev. D* **86** 036003 (2012)
119. Blok B, Strikman M, Wiedemann U A *Eur. Phys. J. C* **73** 2433 (2013)
120. d'Enterria D, Snigirev A M *Phys. Lett. B* **718** 1395 (2013)
121. Salvini S, Treleani D, Calucci G *Phys. Rev. D* **89** 016020 (2014)
122. d'Enterria D, Snigirev A M *Nucl. Phys. A* **931** 303 (2014)
123. d'Enterria D, Snigirev A M *Nucl. Phys. A* **932** 296 (2014)
124. d'Enterria D, Snigirev A M *Phys. Lett. B* **727** 157 (2013)
125. Shao H-S, arXiv:2001.04225
126. Bierlich C *EPJ Web Conf.* **235** 01001 (2020)
127. Дремин И М *Письма в ЖЭТФ* **31** 201 (1980); Dremine I M *JETP Lett.* **31** 185 (1980)
128. Дремин И М, Леонидов А В *ЯФ* **35** 430 (1982); Dremine I M, Leonidov A V *Sov. J. Nucl. Phys.* **35** 247 (1982)
129. Snigirev A M, Zinovjev G M *Phys. Rev. D* **100** 094008 (2019)

### Multiparton distribution functions in quantum chromodynamics

G.M. Zinovjev<sup>(1,a)</sup>, A.M. Snigirev<sup>(2,3,b)</sup>

<sup>(1)</sup> Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, ul. Metrologicheskaya 14-b, 03680 Kiev, Ukraine

<sup>(2)</sup> Lomonosov Moscow State University, Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Leninskie gory 1, str. 2, 119991 Moscow, Russian Federation

<sup>(3)</sup> Joint Institute for Nuclear Research, Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, ul. Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russian Federation

E-mail: <sup>(a)</sup> Gemady.Zinovjev@cern.ch, <sup>(b)</sup> Alexandre.Snigirev@cern.ch

The structure of hadrons (protons) and the dynamics of their interaction are usually studied in collisional experiments by exploring hard single parton-parton scattering described in terms of structure functions (single-particle distributions). Completely new and unique information comes from the selection and analysis of events in which two (or more) hard parton scatterings concurrently occur in a single pp (Tevatron; FermiLab, USA) or pp (LHC; CERN, Switzerland) collision. The simulation of such double (multiple) parton scatterings involves two-parton (multiparton) distribution functions. Properties of these functions, which may be extracted from quantum chromodynamics, are reviewed.

**Keywords:** multiparton interactions, double parton scatterings, collinear approach

PACS numbers: **12.38.**–t, 12.38.Bx

Bibliography — 129 references

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **191** (4) 372–385 (2021)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.10.038857>

Received 12 April 2020, revised 15 October 2020

*Physics – Uspekhi* **64** (4) (2021)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2020.10.038857>