

ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Излучение ондуляторов и лазеров на свободных электронах с аналитическим учётом гармоник поля и внеосевых эффектов

К.В. Жуковский

Дано аналитическое описание генерации гармоник ондуляторного излучения (ОИ) в обобщённом эллиптическом ондуляторе с гармониками поля. Полученные аналитические выражения для обобщённых функций Бесселя и Эйри описывают линии спектра и интенсивность ОИ в общем и в частных случаях двухчастотного плоского и спирального ондуляторов, а также для других эллиптических и плоских ондуляторов. Аналитически учтено влияние конечного размера пучка электронов, его эмиттанса, отклонения положения электронов от оси, разброса энергии электронов и отклоняющих постоянных магнитных компонент. Полученные аналитические выражения выделяют вклады каждой компоненты поля, параметров пучка и ондулятора в генерацию гармоник излучения. С применением аналитической модели однопроходных лазеров на свободных электронах (ЛСЭ) исследована эволюция мощности гармоник в экспериментах на ЛСЭ LCLS, LEUTL и SACLA. Проанализировано влияние параметров пучка и ондулятора на генерацию гармоник. Показано, что сильные вторые гармоники излучения в экспериментах вызваны зарегистрированным отклонением траекторий электронов от оси на ~ 15 мкм на длине усиления ЛСЭ 1,5 м в рентгеновском ЛСЭ LCLS и большим сечением пучка, ~ 200 мкм, в ЛСЭ LEUTL. Результаты моделирования полностью согласуются с экспериментами, что подтверждает справедливость представленного теоретического описания мощности и спектральной плотности излучения в ЛСЭ.

Ключевые слова: ондулятор, магнитное поле, лазер на свободных электронах, генерация гармоник

PACS numbers: 41.60. – m, 41.60.Ap, 41.60.Cr

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.06.038803>

Содержание

1. Введение (318).
 2. Излучение обобщённого эллиптического ондулятора и его предельные случаи (319).
 3. Поправки к ондуляторному излучению за счёт разброса энергии и внеосевых эффектов (321).
 - 3.1. Влияние постоянного магнитного поля.
 - 3.2. Влияние бета-тронных колебаний.
 4. Моделирование генерации гармоник в экспериментах с лазерами на свободных электронах (324).
 5. Заключение (327).
 6. Приложение. Феноменологическая модель однопроходного лазера на свободных электронах (328).
- Список литературы (329).

1. Введение

Ондуляторное излучение (ОИ) впервые было предложено Гинзбургом [1]; первый ондулятор был построен Мотцом [2], проведшим и первые наблюдения ОИ. За

прошедшие десятилетия технический прогресс привёл к появлению лазеров на свободных электронах (ЛСЭ) (англ. Free Electron Laser, FEL); в них, в полном соответствии с гипотезой Гинзбурга, генерируется когерентное излучение электронами, которые группируются в микропучки размером, меньшим длины волны излучения λ_0 , разделённые между собой длиной волны λ_0 . Энергия электронов E в ондуляторе обычно большая, так что соответствующий релятивистский фактор оказывается порядка $\gamma = E/(mc^2) \approx 10^3 - 10^4 \gg 1$, где m — масса электрона, c — скорость света. Это позволяет получить рентгеновское когерентное излучение для исследования процессов на наномасштабе [3–10]. Отметим, что для генерации когерентного излучения в рентгеновском диапазоне и гамма-диапазоне кроме ЛСЭ можно также использовать обратное комптоновское рассеяние электронами и обратное резонансное рассеяние фотонов лазерного пучка оптического диапазона не полностью ионизованными ионами [11].

Для эффективной группировки электронов необходимо высокое качество пучков и ондуляторов; требуется свести к минимуму отклонения поля от идеально периодического, его непериодические компоненты, отклонения пучка от оси и разброс энергии электронов в пучке. В действительности в ондуляторах почти всегда в той или иной мере присутствуют все вышеперечисленные факторы, приводящие к потерям, уширению линии спектра ОИ и ухудшению группировки электронов, эффективность которой определяется условиями на разброс

К.В. Жуковский, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы 1, стр. 2, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru

Статья поступила 26 декабря 2019 г.,
после доработки 2 апреля 2020 г.

энергий $\sigma_e \leq \rho/2$ и эмиттанс $\varepsilon_{x,y} \leq \lambda_0/(4\pi)$ (см., например, [5, 12]), где ρ — параметр Пирса ЛСЭ (см., например, [12, 13]), λ_0 — длина волны излучения. Кроме того, надо учитывать, что идеальное гармоническое поле ондулятора в реальных устройствах не осуществляется хотя бы потому, что оно не удовлетворяет уравнениям Максвелла вне оси, а также из-за присутствия гармоник поля в реальных устройствах. В ондуляторах с постоянными магнитами бигармоническое поле можно получить шиммированием с помощью ферромагнитных материалов [14–20]. В некоторых случаях измеренная амплитуда гармоник поля достигала ~ 20 – 30 % напряжённости основного поля [18, 21, 22]. Влияние бигармонических компонент на излучение электромагнитных ондуляторов изучалось, например, в [23, 24]; было получено усиленное по сравнению с таковым обычного ондулятора излучение высших гармоник ОИ [19, 25]. Влияние гармоник поля на ОИ в ондуляторах с постоянными магнитами и с электромагнитами изучалось также в [26–29]; было показано, что гармоники поля могут способствовать улучшенной генерации высших гармоник излучения ЛСЭ, что выгодно с точки зрения возможности использования электронов более низкой энергии для получения более высокочастотного излучения. Кроме плоских ондуляторов применяются также эллиптические ондуляторы (см., например, [25]) и ондуляторы, в которых можно менять эллиптичность излучения, например, ондулятор APPLE-III для SwissFEL [30], ондулятор Delta [31] для LCLS (Linac Coherent Light Source) [32] и др. Численное моделирование излучения таких ондуляторов проводилось в [33].

Отметим, что в идеальном плоском ондуляторе на оси излучаются только нечётные гармоники, а в спиральном ондуляторе излучается только основной тон. Мощность излучения обычно составляет около 1 – 3 % и $0,1$ % мощности основного тона для гармоник ЛСЭ с $n = 3$ и $n = 5$ соответственно. В спектре некоторых ЛСЭ зафиксированы также чётные гармоники; их мощность сильно варьируется в зависимости от установки и может достигать до $\sim 0,1$ % мощности основного тона (см., например, [34–37]).

Моделирование мощности гармоник спонтанного и вынужденного ОИ в каждом конкретном случае можно провести численно с помощью специальных программ. Однако численный расчёт требует наличия персонала, готового работать с этими программами, вычислительных мощностей и самих программ. Это оправдано при проектировании ЛСЭ, но не всегда доступно при исследовании и сравнении различных установок между собой. Кроме того, при численном моделировании трудно выяснить физические причины возникновения тех или иных гармоник в спектре. В связи с этим представляется актуальным аналитическое исследование генерации гармоник в реальных установках с учётом параметров ондуляторов и пучков.

В настоящей статье мы проведём теоретический анализ и исследование поведения гармоник спонтанного и вынужденного ОИ в ондуляторе с многокомпонентным магнитным полем с его гармониками с учётом всех основных потерь. Из полученных нами аналитических соотношений для такого ондулятора следуют в результате предельных переходов случаи плоского, спирального и эллиптического ондуляторов с учётом дополнительных периодических и непериодических компонент.

Мы также исследуем и количественно объясним появление и измеренную мощность чётных гармоник в некоторых ЛСЭ.

2. Излучение обобщённого эллиптического ондулятора и его предельные случаи

Рассмотрим ОИ эллиптического ондулятора; излучение электрона в нём можно рассчитать с помощью интеграла излучения

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2c} \left| \omega \int_{-\infty}^{\infty} dt [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})] \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\mathbf{nr}}{c} \right) \right] \right|^2, \quad (1)$$

где $\mathbf{n} \cong (\theta \cos \varphi, \theta \sin \varphi, 1 - \theta^2)$ — единичный вектор в направлении от заряда к наблюдателю, ω — частота излучения, $\boldsymbol{\beta}$ — скорость заряда, \mathbf{r} — его радиус-вектор. Рассмотрим магнитное поле \mathbf{H} эллиптического ондулятора с амплитудой H_0 , основным периодом λ_u и кратными периодами:

$$\mathbf{H} = H_0 (\sin(k_\lambda z) + d \sin(pk_\lambda z), d_1 \sin(hk_\lambda z) + d_2 \cos(lk_\lambda z), 0), \\ k_\lambda = \frac{2\pi}{\lambda_{u,x}}, \quad \lambda_{u,x} \equiv \lambda_u, \quad h, l, p \in \mathbf{Z}, \quad d, d_1, d_2 \in \mathbf{R}, \quad (2)$$

где \mathbf{Z} и \mathbf{R} — множества соответственно целых и действительных чисел. Гармоники поля в модели могут иметь произвольную интенсивность. Это позволяет получить из поля (2) предельные случаи для плоского двухчастотного и некоторых эллиптических ондуляторов (в том числе с гармониками поля), исследованных ранее [39–44]. При расчёте ниже мы используем технику обобщённых функций Бесселя, развитую нами в [43], и похожий формализм, развитый другими авторами в [45–48], где исследовалось получение жёсткого циркулярно поляризованного гамма-излучения на высших гармониках ОИ. Вывод работы [49], в которой была решена обратная задача по нахождению распределения поля ондулятора с линейно поляризованным излучением на оси в оптимальных условиях, о том, что поле такого ондулятора в основном описывается суммой первой и третьей гармоник, использован нами при выборе конфигурации поля. Действуя по аналогии, получаем в релятивистском пределе $1/\gamma \ll 1$ следующее выражение для интенсивности ОИ в поле (2):

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 N^2 k^2}{4\gamma^2 c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_u}{\lambda_n} \right)^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{v_n}{2} \right) (|f_{n,x}^{1,2}|^2 + |f_{n,y}^{1,2}|^2), \quad (3)$$

где функция $\text{sinc}(\dots)$ описывает идеальную форму линии спектра ОИ и параметра расстройки ондулятора $v_n = 2\pi n N (\omega/\omega_n - 1)$, $\omega_n = 2\pi c/\lambda_n$, λ_n — резонансная длина ОИ:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_u}{2n\gamma^2} \left[1 + \frac{k^2}{2} \left(1 + \left(\frac{d}{p} \right)^2 + \left(\frac{d_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{d_2}{l} \right)^2 \right) + (\gamma\theta)^2 \right], \quad (4)$$

$f_{n,x,y}$ — коэффициенты Бесселя соответствующих поляризаций ОИ:

$$f_{n;x}^1 = \frac{d_1}{h} (J_{n+h}^n + J_{n-h}^n) + i \frac{d_2}{l} (J_{n+l}^n - J_{n-l}^n), \quad (5)$$

$$f_{n;x}^2 = \frac{2}{k} J_n^n \gamma \theta \cos \varphi,$$

$$f_{n;y}^1 = (J_{n+1}^n + J_{n-1}^n) + \frac{d}{p}(J_{n+p}^n + J_{n-p}^n), \quad (6)$$

$$f_{n;y}^2 = \frac{2}{k} J_n^n \gamma \theta \sin \varphi,$$

выраженные через ондуляторный параметр $k = H_0 \lambda_u x e / (2\pi m c^2)$, угол θ отклонения от оси, азимутальный угол φ и обобщённые функции Бесселя:

$$J_n^m(\xi_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \exp \left[i \left(n\alpha + \xi_1 \sin(h\alpha) + \xi_2 \cos(l\alpha) + \xi_3 \sin \alpha + \xi_4 \sin(2\alpha) + \xi_5 \sin(2h\alpha) + \xi_6 \sin(2l\alpha) + \xi_7 \cos[(l+h)\alpha] + \xi_8 \cos[(l-h)\alpha] + \xi_9 \sin(p\alpha) + \xi_{10} \sin[(p+1)\alpha] + \xi_{11} \sin(2p\alpha) \right) \right]. \quad (7)$$

Последние имеют индексы m, n и зависят от следующих аргументов ξ_i :

$$\xi_4 = \frac{1}{4} \frac{mk^2}{1 + \frac{k^2}{2} \left(1 + \left(\frac{d}{p} \right)^2 + \left(\frac{d_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{d_2}{l} \right)^2 \right) + \gamma^2 \theta^2}, \quad (8)$$

$$\xi_0 = \frac{\xi_4 8d}{kp^2} \gamma \theta \sin \varphi, \quad \xi_1 = \frac{\xi_4 8d_1}{kh^2} \gamma \theta \cos \varphi, \quad (9)$$

$$\xi_2 = \frac{\xi_4 8d_2}{kl^2} \gamma \theta \cos \varphi, \quad \xi_3 = \frac{\xi_4 8}{k} \gamma \theta \sin \varphi,$$

$$\xi_5 = \frac{d_1^2}{h^3} \xi_4, \quad \xi_6 = -\frac{d_2^2}{l^3} \xi_4, \quad \xi_{11} = \frac{d^2}{p^3} \xi_4, \quad (10)$$

$$\xi_7 = \frac{4d_1 d_2}{hl(l+h)} \xi_4, \quad \xi_8 = \frac{4d_1 d_2}{hl(l-h)} \xi_4,$$

$$\xi_9 = \frac{4d}{p(p+1)} \xi_4, \quad \xi_{10} = \frac{4d}{p(p-1)} \xi_4. \quad (11)$$

На оси $\theta = 0$ и выражения существенно упрощаются, но зависимость от угла θ принципиально важна, так как она позволяет изучить происхождение чётных гармоник ОИ. Аналитические выражения (3)–(11) дают зависимость интенсивности ОИ от параметров ондулятора и углов в наиболее общем виде и позволяют определить вклад каждого из параметров в генерацию гармоник ОИ.

Рассмотрим несколько предельных случаев поля (2). Так, в поле с конфигурацией $\sin - \sin$

$$\mathbf{H} = H_0 (d_1 \sin(hk_\lambda z), \sin(k_\lambda z), 0), \quad (12)$$

$$k_\lambda = \frac{2\pi}{\lambda_u}, \quad h \in \mathbf{Z}, \quad d_1, h = \text{const},$$

получаем, согласно [45–48], следующие коэффициенты Бесселя:

$$f_{n;x}^{1;\sin \sin} = (J_{n+1}^n + J_{n-1}^n), \quad f_{n;x}^{2;\sin \sin} = \frac{2}{k} J_n^n \gamma \theta \sin \varphi, \quad (13)$$

$$f_{n;y}^{1;\sin \sin} = \frac{d_1}{h} (J_{n+h}^n + J_{n-h}^n), \quad f_{n;y}^{2;\sin \sin} = \frac{2}{k} J_n^n \gamma \theta \cos \varphi.$$

Угловая зависимость от θ и φ учитывается в аргументах $\xi_4, \xi_1, \xi_3, \xi_5$ функций Бесселя (7); $d = d_2 = 0$ в соответствующих выражениях. Опуская тривиальный случай $h = 1$ в (13), в соответствии с рекомендацией в [49] рассмотрим случай $h = 3$: $\mathbf{H} = H_0 (d_1 \sin[2\pi z / (\lambda_u/3)], \sin(2\pi z / \lambda_u), 0)$. Для излучения с x -поляризацией имеем

коэффициент Бесселя $f_{n;x}$, который практически не зависит от d ; для излучения с y -поляризацией коэффициент $f_{3;y}$ оказывается наибольшим, немного меньше $f_{5;y}$, а $f_{1;y}$ существенно меньше, чем $f_{3,5;y} \approx 0,1 - 0,3$ при $|d| \approx 0,5 - 1$.

Таким образом, в асимметричном поле (12) ОИ имеет в y -поляризации более сильные высшие гармоники с большими значениями коэффициентов Бесселя, чем соответствующие значения для основного тона, $f_{3,5;y} \gg f_{1;y}$. Случай $h = 5$ и другие высшие гармоники поля в полном соответствии с [49] не дают большого вклада в ОИ. Отметим, что выбор $d_1 = 1$ в (12) позволяет получить плоский ондулятор с амплитудой поля $\sqrt{2}H_0$; соответствующие коэффициенты Бесселя определяются выражениями (13).

В предельном случае эллиптического магнитного поля с конфигурацией $\sin - \cos$,

$$\mathbf{H} = H_0 (d_2 \cos(lk_\lambda z), \sin(k_\lambda z), 0), \quad (14)$$

$$k_\lambda = \frac{2\pi}{\lambda_u}, \quad l \in \mathbf{Z}, \quad l, d_2 = \text{const},$$

получаем коэффициенты Бесселя (7), где $d = d_1 = 0$ в оставшихся аргументах $\xi_4, \xi_2, \xi_3, \xi_6$; для x - и y -поляризации получаем следующие выражения:

$$f_{n;x}^{1;\sin \cos} = J_{n+1}^n + J_{n-1}^n, \quad f_{n;x}^{2;\sin \cos} = \frac{2}{k} J_n^n \gamma \theta \sin \varphi, \quad (15)$$

$$f_{n;y}^{1;\sin \cos} = \frac{d_2}{l} (J_{n+l}^n - J_{n-l}^n), \quad f_{n;y}^{2;\sin \cos} = \frac{2}{k} J_n^n \gamma \theta \cos \varphi.$$

При $l = 3$ с третьей гармоникой поля получаем коэффициенты $f_{n;x,y}$ и поведение гармоник, похожее на таковое в случае $\sin - \sin$ -поля. При $l = 1$ имеем одинаковые периоды ондулятора и при $d \equiv d_2 = \pm 1$ получаем известный спиральный ондулятор.

Плоский ондулятор с гармониками поля

$$\mathbf{H} = H_0 \left(0, \sin \frac{2\pi z}{\lambda_u} + d \sin \frac{2\pi p z}{\lambda_u}, 0 \right), \quad (16)$$

$$p \in \mathbf{Z}, \quad d, p = \text{const},$$

где $\xi_4, \xi_0, \xi_3, \xi_{11}, \xi_{10}, \xi_9$ — оставшиеся аргументы (7) и $d_1 = d_2 = 0$, был детально исследован, например, в [50]. Соответствующие коэффициенты Бесселя:

$$f_{n;x}^{1;\sin + \sin} = (J_{n+1}^n + J_{n-1}^n) + \frac{d}{p} (J_{n+p}^n + J_{n-p}^n),$$

$$f_{n;x}^{2;\sin + \sin} = \frac{2}{k} J_n^n \gamma \theta \sin \varphi, \quad (17)$$

$$f_{n;y}^{1;\sin + \sin} = f_{n;y}^{2;\sin + \sin} = \frac{2}{k} J_n^n \gamma \theta \cos \varphi.$$

В дополнение к анализу, проведённому в [50], добавим, что основной вывод в этом случае состоит в следующем: при $d > 0$ усиливаются высшие гармоники ОИ и становится несколько слабее интенсивность основного тона при $k > 1,5$ и $p = 3$, подтверждая тем самым вывод [49] о решающем влиянии третьей гармоники поля. Другие гармоники поля не оказывают решающего влияния на генерацию гармоник ОИ. Основной эффект усиления высших гармоник ОИ достигается при $d \approx 0,5$ и, естественно, он увеличивается с возрастанием ондуляторного параметра k (см. [50]) (рис. 1).

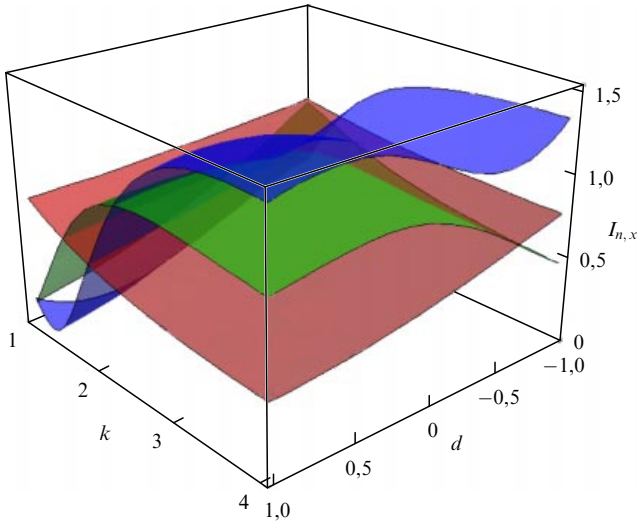


Рис. 1. (В цвете онлайн.) Безразмерная интенсивность $I_{n,x}$ гармоник ОИ $n = 1, 3, 5$ в плоском ондуляторе с 3-й гармоникой поля (16), $p = 3, 1 < k < 4$. Поверхности соответствуют гармоникам ОИ: $n = 1$ — красно-коричневая, $n = 3$ — зелёная, $n = 5$ — синяя.

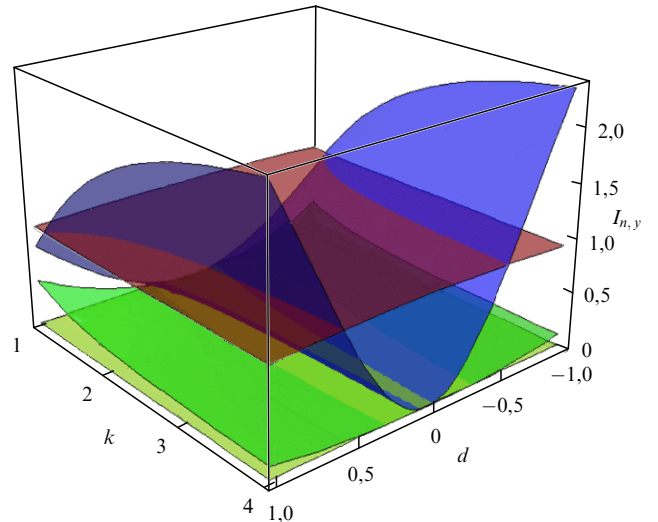


Рис. 2. (В цвете онлайн.) Безразмерная интенсивность $I_{n,y}$ гармоник ОИ с $n = 1, 2, 3, 5$ в поле ондулятора (18) с $h = 3$ и $1 < k < 4, -1 < d < 1$. Поверхности соответствуют гармоникам ОИ: $n = 1$ — красно-коричневая, $n = 2$ — жёлтая, $n = 3$ — зелёная, $n = 5$ — синяя.

В поле спирального ондулятора

$$\mathbf{H} = H_0(\sin(k_\perp z) - d \sin(hk_\perp z), \cos(k_\perp z) + d \cos(hk_\perp z), 0) \quad (18)$$

была зарегистрирована 3-я гармоника ($h = 3$) с амплитудой $d \approx 0,08$ [25]. Для поля (18) получаем следующие коэффициенты Бесселя [50]:

$$f_{n;x}^{1;asym} = i(J_{n+1}^n - J_{n-1}^n) + i \frac{d}{h}(J_{n+h}^n - J_{n-h}^n), \quad (19)$$

$$f_{n;x}^{2;asym} = \frac{2}{k} J_n^n \gamma \theta \cos \varphi,$$

$$f_{n;y}^{1;asym} = -(J_{n+1}^n + J_{n-1}^n) + \frac{d}{h}(J_{n+h}^n + J_{n-h}^n), \quad (20)$$

$$f_{n;y}^{2;asym} = \frac{2}{k} J_n^n \gamma \theta \sin \varphi,$$

где d и h соответствуют полю (18), верхний индекс asym в (19), (20) подразумевает асимметричную конфигурацию поля (18) в соответствующем ондуляторе и обобщённые функции Бесселя таковы [50]:

$$J_n^m = \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ i \left(n\alpha + \xi_1 \cos \alpha + \xi_2 \cos(h\alpha) - \xi_3 \sin \alpha + \xi_4 \sin(h\alpha) - \xi_5 \sin[(h+1)\alpha] \right) \right\} \frac{d\alpha}{2\pi}, \quad (21)$$

а их аргументы выражаются как

$$\xi_0 = \frac{2mk}{1 + k^2 [1 + (d/h)^2] + \gamma^2 \theta^2}, \quad (22)$$

$$\xi_1 = \xi_0 \gamma \theta \cos \varphi, \quad \xi_2 = \frac{d}{h^2} \xi_1, \quad \xi_3 = \xi_1 \tan \varphi, \quad (23)$$

$$\xi_4 = \frac{d}{h^2} \xi_1 \tan \varphi, \quad \xi_5 = \xi_0 \frac{kd}{h(h+1)}.$$

В [50] показано, что 5-я гармоника ОИ в поле (18) оказывается заметной уже при $d \sim 0,1$, при $d > 0,5$ она становится доминирующей в спектре спонтанного ОИ.

Это продемонстрировано на рис. 2, который дополняет анализ в [50].

Однако в спектре ЛСЭ с самоусилением спонтанного излучения (ССИ) (SASE FEL — Self-Amplified Spontaneous Emission (SASE) regime for FEL) с ондулятором с полем (18) 5-я гармоника излучения лишь незначительно мощнее начального шума электронного банча. Хотя мощность 5-й гармоники излучения ЛСЭ больше мощности 3-й гармоники, но даже при амплитуде гармоники поля $d \sim 0,3-0,5$ 5-я гармоника ЛСЭ остаётся на четыре порядка слабее основного тона ЛСЭ [50, 51].

3. Поправки к ондуляторному излучению за счёт разброса энергии и внеосевых эффектов

В реальных устройствах необходимо учитывать, что каждый электрон в пучке имеет свою энергию, своё направление движения и его траектория может проходить вдали от оси ондулятора, где магнитное поле отличается от простейшего модельного поля вида (2), (12), (14), (16), (18) и т.д. ОИ на оси ондулятора рассматривается наиболее часто, но даже в этом случае необходимо учитывать разброс по энергиям электронов в пучке, который осуществляется с помощью свёртки в выражении для интенсивности излучения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 I(v_n + 4\pi n N \varepsilon, \theta)}{d\omega d\Omega \sqrt{2\pi} \sigma_\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right) d\varepsilon.$$

Дополнительно надо учитывать эмиттанс и реальные размеры пучка, а также возможное влияние непериодических компонент поля, которые немного сдвигают спектр ОИ вниз по частоте и изменяют форму линии ОИ. Учёт этих факторов в ЛСЭ, а также учёт того, что электрон-фотонное взаимодействие на высших гармониках ОИ более чувствительно к потерям, представляет собой сложную задачу. Обычно она выполняется с помощью численных программ, которые решают весь комплекс уравнений движения электронов во взаимодействии с полем волны в одно- или трёхмерном случаях. Такие

программы написаны для заданной конфигурации поля ондулятора, и для работы с ними требуются квалифицированные специалисты. Модификация численной программы для произвольного поля ондулятора невозможна; её модификация для другой конфигурации поля, отличной от заданной, производится разработчиками программы. С другой стороны, аналитические инструменты описания работы ЛСЭ, в частности феноменологическая модель ЛСЭ в её последней версии [52], позволяют хорошо описать эволюцию мощности гармоник ЛСЭ с практически любым ондулятором, но требуют точного аналитического учёта всех потерь.

3.1. Влияние постоянного магнитного поля

Влияние непериодических магнитных компонент в ондуляторах стараются свести к минимуму [53], так как они приводят к уширению линий спектра $\text{sinc}(v_n/2)$ ОИ. Для этого тщательно вычисляют и минимизируют интегралы поля [44, 45], а влияние внешних полей экранируют или компенсируют. Некоторые численные оценки, например, для установки "Сибирь-2" даны в [54, 55]. Постоянное поле, по существу, приводит к уходу электрона с оси ондулятора и появлению вызванного полем угла изгиба θ_H . Таким образом, пользователь ОИ видит на оси излучение от электрона под индуцированным углом

$$\theta_H = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{k}{\gamma} N(\kappa^2 + \rho^2)^{1/2} \quad (24)$$

за счёт поперечных постоянных компонент $H_x = H_0\rho$, $H_y = H_0\kappa$. Последние приводят к появлению в экспоненте интеграла излучения дополнительных непериодических слагаемых, которые в свою очередь приводят для формы линии спектра ОИ к обобщённой функции Эйри в интегральном виде,

$$S(v_n, \eta, \beta) \equiv \int_0^1 d\tau \exp [i(v_n\tau + \eta\tau^2 + \beta\tau^3)], \quad (25)$$

вместо известной функции $\text{sinc}(v_n/2)$. Углы θ и φ входят в аргументы специальной функции $S(v_n, \beta, \eta)$

$$\eta = \frac{4\pi^2 N^2 n k \gamma \theta}{1 + k^2/2} (\kappa \cos \varphi - \rho \sin \varphi), \quad (26)$$

$$\beta = (2\pi n N + v_n) \frac{(\gamma\theta_H)^2}{1 + k^2/2} \cong 2\pi n N \frac{(\gamma\theta_H)^2}{1 + k^2/2}. \quad (27)$$

Интенсивность ОИ плоского ондулятора тогда выражается следующим образом:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \cong \frac{e^2 N^2 \gamma^2 k^2}{c(1 + k^2/2)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \left[S^2(v_n, \eta, \beta) (J_{n+1}^n + J_{n-1}^n)^2 + \left(\frac{2}{k} \gamma\theta_H \sqrt{3} \frac{\partial S}{\partial v_n} J_n^n \right)^2 \right]. \quad (28)$$

Отметим, что чётные гармоники ОИ на оси ондулятора за счёт постоянного поля, т.е. второго слагаемого в квадратных скобках в (28), описываются множителем $(2/k)\gamma\theta_H\sqrt{3}\partial S/\partial v_n$, из которого видно, что эффект поля накапливается по длине ондулятора $L = \lambda_u N$ в θ_H . В идеальном случае, когда $\theta_H = 0$, исчезает и второе слагаемое в (28), соответствующее чётным гармоникам ОИ на оси, и $S(v_n, \beta, \eta)$ сводится к $\text{sinc}(v_n/2)$:

$$S(v_n, 0, 0) = \exp \frac{iv_n}{2} \text{sinc} \frac{v_n}{2}. \quad (29)$$

Для мультипериодических ондуляторных полей (2), (12), (14), (16), (18) и др. структура выражения (28) сохраняется; вместо функции $\text{sinc}(v_n/2)$ функция S определяет в (3) линию спектра нечётных гармоник с соответствующими коэффициентами Бесселя $f_{n;x,y}^{1,2}$ (5), (6), (13), (15), (17), а чётные гармоники на оси задаются обобщёнными функциями Бесселя (7) с коэффициентами $(2/k)\gamma\theta_H\sqrt{3}\partial S/\partial v_n$ (см. (28)). Для более простых конфигураций поля соответствующие выражения для $f_{n;x,y}^{1,2}$ и $J_n^m(\xi_i)$ упрощаются (см. раздел 2).

Рассмотрим кратко основные свойства обобщённых функций Эйри (25). Они связаны с обобщёнными полиномами Эрмита трёх переменных:

$$S(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n H_n(x, -iy, -z)}{(n+1)!}. \quad (30)$$

Полиномы Эрмита $H_n(x, y, z)$ могут быть выражены через суммы полиномов Эрмита $H_n(x, y)$ двух переменных,

$$H_n(x, y, z) = n! \sum_{r=0}^{[n/3]} \frac{z^{n-3r}}{(n-3r)! r!} H_n(x, y), \quad (31)$$

где $H_n(x, y)$ определяются суммой [56]:

$$H_n(x, y) = n! \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{x^{n-2r} y^r}{(n-2r)! r!}, \quad (32)$$

и выражаются через обычные полиномы Эрмита:

$$H_n(x, y) = (-i)^n y^{n/2} H_n\left(\frac{ix}{2\sqrt{y}}\right) = i^n (2y)^{n/2} \text{He}_n\left(\frac{x}{\sqrt{2y}}\right). \quad (33)$$

Производящие экспоненты для полиномов Эрмита $H_n(x, y)$ и $H_n(x, y, z)$ имеют вид

$$\exp(xt + yt^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x, y), \quad (34)$$

$$\exp(xt + yt^2 + zt^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x, y, z).$$

Обобщённые полиномы Эрмита двух и трёх переменных, $H_n(x, y)$ и $H_n(x, y, z)$, представимы в операторном виде как результат действия экспоненциальных дифференциальных операторов соответственно второго и третьего порядка на мономы:

$$H_n(x, y) = \exp(y\partial_x^2)x^n, \quad H_n(x, y, z) = \exp(y\partial_x^2 + z\partial_x^3)x^n. \quad (35)$$

Эти операторные определения раскрывают неочевидную внутреннюю связь между не связанными на первый взгляд друг с другом математическими объектами и позволяют глубже понять их физический смысл. Для обобщённой функции Эйри $S(x, y, z)$ получаем следующее операторное отношение с функцией $\text{sinc} x$ линии спектра ОИ:

$$\begin{aligned} S(x, y, z) &\equiv \int_0^1 d\tau \exp [i(x\tau + y\tau^2 + z\tau^3)] = \\ &= \exp(-iy\partial_x^2 - z\partial_x^3) \int_0^1 \exp(ix\tau) d\tau = \\ &= \exp(-iy\partial_x^2 - z\partial_x^3) \left[\frac{\sin x/2}{x/2} \exp\left(i\frac{x}{2}\right) \right]. \quad (36) \end{aligned}$$

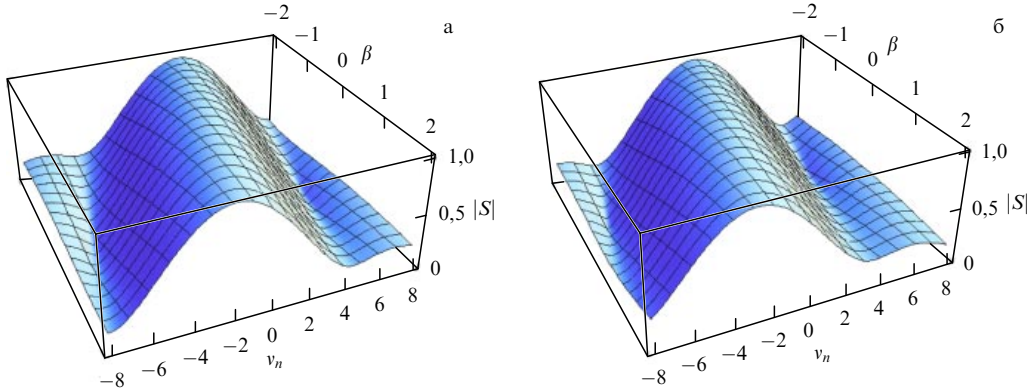


Рис. 3. (В цвете онлайн.) Абсолютные значения функции $S(x, \beta)$ в зависимости от параметра расстройки v_n и аргумента β для $\eta = 0$ (а) и для $\eta = 1$ (б).

На оси ондулятора $S(x, y, z)$ (25) упрощается:

$$S(x, y, z)|_{\text{on axis}} = S(x, z) = \int_0^1 \exp [i(x\tau + z\tau^3)] d\tau = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m H_m(x, -z)}{(m+1)!}. \quad (37)$$

Модифицированная форма линий спектра определяется поведением функций S и $\partial S/\partial v_n$. Так, для нечётных гармоник соответствующих коэффициентов Бесселя f_n^1 форма линий спектра определяется функцией $S(v_n, \beta, \eta)$ (рис. 3). Индуцированный угол θ_H входит в аргумент β ; излучение в угол θ от оси учитывается в аргументе η ; максимум функции равен единице: $\max S = 1$.

Углы θ_H и θ могут отчасти компенсировать влияние друг друга. Для сохранения максимума спектральной линии в точке $v_n = 0$, т.е. без расстройки частот спектра, требуется выполнение условия (см. рис. 3)

$$v_n \approx -(\beta + \eta) \text{ при } v_n, \beta, \eta \in [-2\pi, 2\pi]. \quad (38)$$

Из (38) следует, что компенсация до $v_n = 0$ возможна только при угле

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \frac{k}{\gamma} N \frac{\kappa^2 + \rho^2}{\rho \sin \varphi - \kappa \cos \varphi}.$$

Не теряя общности рассмотрения, положим для простоты, что присутствует только одна компонента постоянного поля, $\rho = 0$; тогда в направлении $\varphi = \pi$ получаем, что излучение в угол θ происходит на неизменной частоте резонанса ОИ $v_n = 0$:

$$\tilde{\theta} = \frac{2\pi}{3} \frac{k}{\gamma} N \kappa = \sqrt{3} \theta_H.$$

Резонансные частоты ОИ записываются с учётом углов θ_H , индуцированных постоянным полем, следующим образом:

$$\omega_n = \frac{2\pi\omega_0\gamma^2}{\left(1 + \frac{k^2}{2}\right) + (\gamma\theta)^2 + (\gamma\theta_H)^2 - \gamma^2\sqrt{3}\theta_H\theta \frac{\rho \sin \varphi - \kappa \cos \varphi}{\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}}}. \quad (39)$$

Таким образом, постоянная компонента κH_0 приводит к изгибу траектории электрона на угол θ_H , и излучение,

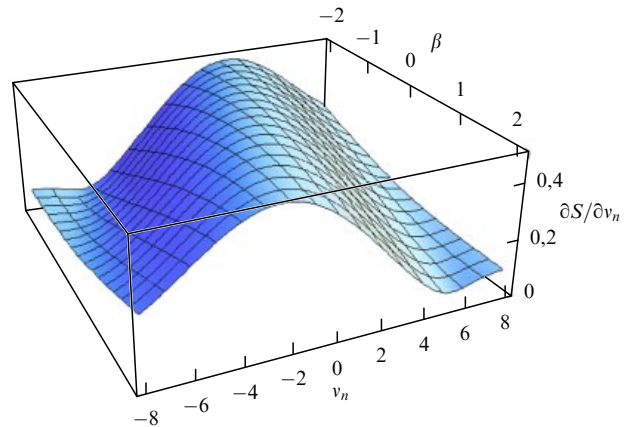


Рис. 4. (В цвете онлайн.) Абсолютные значения функции $\partial S/\partial v_n$ в зависимости от параметра расстройки v_n и аргумента β для $\eta = 0$.

идущее параллельно оси ондулятора под углом $\theta = -\theta_H$ к направлению движения электрона, имеет резонансы на частотах

$$\omega_n \cong \frac{2\pi\omega_0\gamma^2}{1 + k^2/2 + 0,27(\gamma\theta_H)^2}.$$

Для чётных гармоник за счёт угла θ_H имеем форму спектральной линии ОИ, определяемую функцией $\partial S/\partial v_n$, как показано на рис. 4; максимум функции равен 0,5, $\max \partial S/\partial v_n = 0,5$.

Отметим, что множитель

$$\frac{2}{k} \gamma\theta_H\sqrt{3} \frac{\partial S}{\partial v_n} J_n^n$$

в (28) имеет такую же структуру в отношении угла $\gamma\theta_H$, как и угловая часть $\sim \gamma\theta$ в $f_{n;x,y}^2$ (см. (13), (15), (17) и др.). Более того, с учётом коэффициента $\sqrt{3}$ в этом множителе в (28) получаем, принимая во внимание поведение функции $\partial S/\partial v_n$:

$$f_n^3 = \frac{2}{k} \gamma\theta_H\sqrt{3} \max \frac{\partial S}{\partial v_n} J_n^n \cong \frac{1,73}{k} \gamma\theta_H J_n^n, \quad (40)$$

т.е. значение, близкое к тому, которое входит в угловую часть $f_{n;x,y}^2$: $(2/k)\gamma\theta_H J_n^n$. Таким образом, для оценки вклада угла θ_H можно использовать обычные выражения $f_{n;x,y}^2$ из (5)–(7), (13), (15), (17) и др., где $\theta \rightarrow \theta_H$. Отметим

также, что угол θ_H индуцируется полем

$$H [\text{Тл}] = \frac{\sqrt{3} \gamma \theta_H}{2\pi \lambda_u [\text{см}] N}$$

и для создания значимого угла $\gamma \theta_H \approx 0,1$ требуется довольно слабое магнитное поле. Так, например, в длинном ондуляторе LCLS FEL, $L = 3,4$ м, для угла $\gamma \theta_H = 0,1$ требуется поле $H = 0,8$ Гс, т.е. ненамного большее поля Земли. Естественно, такие поля тщательно компенсируются и экранируются. Несмотря на это, как мы покажем в разделе 3.2, даже отклонение пучка от оси на 15–20 мкм на длине усиления ЛСЭ может вызвать значительное излучение второй гармоники в ЛСЭ, зафиксированное экспериментально [34–36].

3.2. Влияние бетатронных колебаний

Вклад бетатронных колебаний в ОИ хорошо изучен (см., например, [39–45, 57]). Напомним, что простейшая гармоническая зависимость поля от координаты по оси ондулятора, $H_y = H_0 \sin(k_\lambda z)$, не удовлетворяет уравнениям Максвелла; рассматриваются дополнительные компоненты, например $H_y = H_0 \sin(k_\lambda z) \cosh(k_\lambda y)$ и $H_z = H_0 \cos(k_\lambda z) \sinh(k_\lambda y)$, которые позволяют удовлетворить уравнениям Максвелла во всём зазоре ондулятора. Это приводит к появлению бетатронных колебаний на частоте

$$\omega_\beta = \frac{\sqrt{2} \pi c k \delta}{\lambda_n n \gamma} \cong \frac{2\sqrt{2} \pi c \gamma k \delta}{\lambda_u \{1 + (k^2/2)[1 + (d/p)^2 + (d_1/h)^2 + (d_2/l)^2]\}}, \quad (41)$$

где для обычного плоского ондулятора $\delta = 1$, $d = 0$; $\omega_\beta \propto \omega_n/\gamma$ значительно ниже, чем резонансы ОИ ω_n при $\gamma \gg 1$. В современных ЛСЭ используют ультрарелятивистские электроны с $\gamma \approx 10^3 - 10^4$ и расщепление линий ОИ малозаметно. Отметим, что недавно подробный анализ ОИ с учётом бетатронных колебаний был проведён в [23] для двухчастотного ондулятора с полем (16). В случае мультипериодических полей в ондуляторе физика бетатронных колебаний существенно не меняется. Получаем коэффициенты Бесселя (5), (6), (13), (15), (17), (19), (20) (в зависимости от гармоник поля ондулятора), факторизованные следующими обобщёнными функциями Бесселя, возникающими за счёт бетатронных колебаний:

$$f_n^{1,2} \rightarrow \sum_p \tilde{J}_p(\xi, \zeta) f_n^{1,2}, \quad (42)$$

$$\tilde{J}_p(\xi, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[pq - \xi \sin q - \zeta \sin(2q)] dq,$$

с аргументами, включающими в себя отклонение электрона от оси на y_0 :

$$\xi = \frac{\pi^2 y_0^2 k \delta}{2n\gamma \sqrt{2} \lambda_u \lambda_n} \approx \frac{\pi^2 \gamma y_0^2 k \delta}{\sqrt{2} \lambda_u^2 (1 + k^2/2)}, \quad (43)$$

$$\zeta = \frac{2\pi \theta y_0}{n \lambda_n} \approx \frac{4\pi \theta y_0 \gamma^2}{\lambda_u (1 + k^2/2)}.$$

В ЛСЭ, где используются пучки релятивистских электронов, коэффициент $\tilde{J}_{p=0}$ во многих случаях близок к единице, а остальные коэффициенты $J_{p=\pm 1, 2, 3, \dots}$ малы,

$\sim 10^{-1} - 10^{-2}$. Но даже если расщепление линий спектра значительно, субгармоники p расположены близко друг к другу, на расстоянии $\delta\lambda = \lambda k/\sqrt{2}\gamma$; для релятивистских пучков $\delta\lambda/\lambda$ обычно существенно меньше относительной ширины линии спектра ОИ и величины параметра Пирса ρ , которая даёт оценочное значение спектральной плотности излучения ЛСЭ. Отметим, что расщепление линий спектра ОИ может произойти за счёт комбинации отклонения от оси на y_0 и излучения под углом θ в аргументе ζ . Численные оценки даны в разделе 4, где мы исследуем происхождение сильной второй гармоники излучения в рентгеновском ЛСЭ LCLS [35, 36] и в ЛСЭ LEUTL (Low-Energy Undulator Test Line) [37, 38], излучающем в видимом и длинноволновом ультрафиолетовом (УФ-А) диапазонах.

Чётные гармоники плоского ондулятора за счёт бетатронных осцилляций хорошо известны; они имеют следующие коэффициенты Бесселя, к которым сводится и более сложное выражение для двухчастотного ондулятора в [23]:

$$f_{n,p,y}^4 \cong \frac{\sqrt{2} \pi y_0 \delta}{\lambda_u} (\tilde{J}_{p+1}(\xi, \zeta) - \tilde{J}_{p-1}(\xi, \zeta)) \tilde{J}_n(\bar{\xi}, \bar{\zeta}), \quad (44)$$

где

$$\bar{\xi} = -\frac{1}{8} \frac{k^2 \lambda_u}{\gamma^2 \lambda_n} = -\frac{1}{4} \frac{nk^2}{1 + k^2/2}, \quad \bar{\zeta} = \frac{8\bar{\xi}\gamma\theta}{k},$$

ξ, ζ определены в (43). Для поля плоского ондулятора с гармоникой (16) $H_y = H_0 [\sin(k_\lambda z) + d \sin(pk_\lambda z)]$ вычисления, проведённые в [23], ожидаемо дают коэффициенты Бесселя (17) с множителем (42). Гармоника поля ондулятора d даёт вклад в $\delta = \sqrt{1 + d^2}$ и в резонансные длины волн излучения

$$\lambda_n = \frac{\lambda_u}{2n\gamma^2} \left[1 + \frac{k^2}{2} \left(1 + \left(\frac{d}{p} \right)^2 \right) \right].$$

Вместо $\tilde{J}_n(\bar{\xi}, \bar{\zeta})$ для двухчастотного ондулятора в (44) входят J_n^n (см. угловую часть $f_{n,y}^2$ в (17) и [23] в других обозначениях); функции J_n^n являются предельным случаем (7) для $d_1 = d_2 = h = l = 0$. Обобщение вклада бетатронных колебаний для случая мультипериодического поля ондулятора (2) происходит с учётом не равных нулю $d_{1,2}, p, h, l$ в (7)–(11) и $\delta = (1 + d^2 + d_1^2 + d_2^2)^{1/2}$ в ω_β : в выражении (44) используем $J_n^n(\xi_i)$ (7) вместо $\tilde{J}_n(\bar{\xi}, \bar{\zeta})$.

Итак, n -я гармоника ОИ расщепляется на p субгармоник. Это расщепление малозаметно, так как $\omega_\beta \propto \omega_n/\gamma$. В результате для $p = 0$ имеем $f_{n,p=0,y}^4 \sim 10^{-2}$; для других p получаем ещё меньшие значения и вклад в генерацию чётных гармоник за счёт бетатронных колебаний и соответствующие коэффициенты Бесселя $f_{n,p,y}^4$ малы по сравнению с (5), (6), (13), (15), (17), где $f_{n=1,3,5}^{1,2} \sim 0,15 - 0,8$. Примеры для реальных установок ЛСЭ приведены в разделе 4, где с помощью аналитической модели (см. приложение), использующей логистическую функцию [58–60], исследованы некоторые ЛСЭ-эксперименты.

4. Моделирование генерации гармоник в экспериментах с лазерами на свободных электронах

Отклонения пучка электронов от оси ондулятора обычно малы; однако даже отклонения на $\sim 5 - 25$ мкм на длине усиления рентгеновских ЛСЭ могут изменить спектраль-

Таблица. Некоторые данные моделирования* эксперимента на LCLS с $\lambda = 1,5$ нм

Номер гармоники ЛСЭ	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$
Коэффициент Бесселя с учётом ухода пучка с оси на 15 мкм на длине 1,5 м	0,742	0,075	0,330	0,213
Коэффициент Бесселя f_n для пучка на оси	0,744	0,025	0,338	0,229
Параметр Пирса $\tilde{\rho}_n$ с учётом ухода пучка с оси на 15 мкм на длине 1,5 м	0,0010	0,0002	0,0006	0,0005
Параметр Пирса $\tilde{\rho}_n$ для пучка на оси	0,0010	0,0001	0,0006	0,0005
Длина волны гармоники λ_n , нм	1,5	0,75	0,5	0,3
Мощность насыщения с учётом ухода пучка на 15 мкм на длине 1,5 м, $P_{F,n}$, Вт	$5,5 \times 10^9$	$1,5 \times 10^6$	$1,2 \times 10^8$	$1,3 \times 10^7$
Мощность насыщения для пучка на оси $P_{F,n}$, Вт	7×10^9	10^4	2×10^8	2×10^7

* Параметры пучка электронов: энергия $E = 4,3$ ГэВ, $\gamma = 8400$, мощность пучка $P_E = 4,29$ ТВт, ток $I_0 = 1$ кА, плотность тока $J = 2,23 \times 10^{11}$ А м⁻², сечение $\Sigma = 2\pi\sigma_x\sigma_y = 4,79 \times 10^{-9}$ м², эмиттанс у инжектора $\gamma\epsilon_{x,y}^{135\text{ мэВ}} = 0,4$ мкм, эмиттанс в проекции у ондуляторов $\gamma\epsilon_{x,y}^{4,3\text{ ГэВ}} \approx 0,6$ мкм, параметр Твисса $\beta = 10$ м, поперечный размер $\sigma_{x,y} \approx 27$ мкм, расходимость $\theta_{\text{div}} \approx 2,7$ мрад, разброс энергий $\sigma_e = 0,3 \times 10^{-3}$. Параметры ондулятора: $k = 3,5$, $\lambda_u = 3$ см, $N = 113$, длина секции 3,4 м. Рассчитанные параметры ЛСЭ: длина насыщения $L_s \approx 25$ м, длина усиления $L_{\text{gain}} \approx 1,5$ м, размер фотонного пучка $\sigma_{\text{photon}} \approx 19$ мкм.

ный состав излучения. В экспериментах с рентгеновским ЛСЭ LCLS требование к центрированию пучка электронов на оси составляло 5 мкм на длине усиления $L_g = 1,6-3,5$ м, в то время как доступные методы контроля и регулировки имели точность 50 мкм [34–36]. Действительно, отклонение пучка электронов с энергией $E = 13,6$ ГэВ всего на 10 мкм на длине усиления $L_g \approx 3$ м приводит к значительному эффективному углу изгиба $\theta\gamma \approx 0,1$. Это может оказать влияние на излучение, как мы покажем ниже. В ЛСЭ LEUTL пучок имел на порядок большие размеры, $\sim 0,2$ мм. Для моделирования и анализа влияния различных факторов на мощность излучения гармоник ЛСЭ используем откалиброванную в экспериментах с ЛСЭ аналитическую модель ЛСЭ [52], дополненную описанием осцилляций мощности в режиме насыщения (см. приложение), и полученные в разделах 2, 3 аналитические выражения для коэффициентов Бесселя с учётом углов и поправок на бетатронные колебания в пучке конечного размера.

В экспериментах на LCLS [35, 36] генерировалось рентгеновское излучение в диапазоне 1,5–20 Å. Установка состоит из 33 ондуляторных секций длиной 3,4 м каждая, ондуляторы с постоянными магнитами имеют период $\lambda_u = 3$ см и параметр $k = H_0\lambda_u e / (2\pi mc^2) = 3,5$, величина электронного тока 1–3,5 кА. В экспериментах с рентгеновским излучением с длиной волны основного тона $\lambda_1 = 1,5$ нм были зарегистрированы 2-я и 3-я гармоники. Согласно [36] в большинстве случаев измеренная мощность 3-й гармоники составляла $\approx 2-2,5\%$ мощности основного тона, измеренная мощность 2-й гармоники излучения составляла $\sim 0,04-0,1\%$ основного тона при нормальной работе ЛСЭ [36]; 5-я гармоника не измерялась, по численным симуляциям её мощность $\sim 10\%$ 3-й гармоники. В [35, 36] отмечалось, что в некоторых случаях уровень высших гармоник ЛСЭ уменьшался на порядок и требовались дополнительные исследования, особенно в отношении происхождения относительно сильной 2-й гармоники излучения. Мы провели моделирование этого эксперимента; основные данные собраны в таблице.

Эволюция мощности гармоник ЛСЭ по длине ондуляторов проиллюстрирована на рис. 5; измеренная мощность гармоник показана цветными зонами в области насыщения в правой части рис. 5 с учётом разброса измеренной мощности гармоник (см. [36]). Длины насыщения, усиления и мощность основного тона ЛСЭ точно

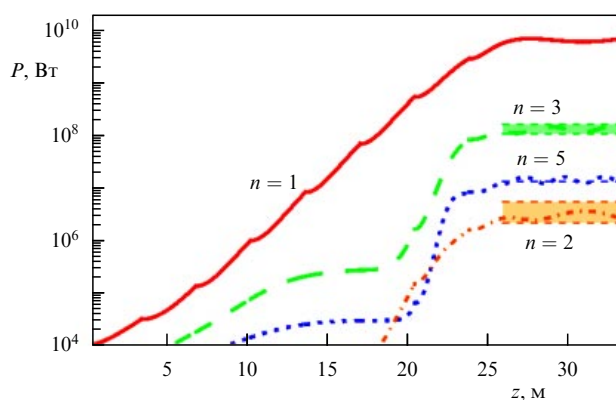


Рис. 5. (В цвете онлайн.) Эволюция мощности гармоник ЛСЭ в эксперименте на LCLS с $E = 4,3$ ГэВ, $\lambda_1 = 1,5$ нм, $\sigma_e = 0,3 \times 10^{-4}$, $I_0 = 1$ кА. Гармонике $n = 1$ соответствует красная сплошная кривая, гармонике $n = 2$ — оранжевая штрихпунктирная, $n = 3$ — зелёная штриховая, $n = 5$ — синяя пунктирная. Экспериментально допустимые диапазоны измеренных величин обозначены цветными зонами справа, оценка мощности 5-й гармоники $P_5 \approx 0,1P_3$.

воспроизводят экспериментальные данные [34–36]. Высшие гармоники ЛСЭ также хорошо укладываются в допуск измерений (см. рис. 5). Отметим, что гармоники поля сами не могут вызвать появления сильной второй гармоники ОИ; они в основном влияют на интенсивность 3-й и 5-й гармоник излучения [50, 52], а также на длины и мощности насыщения этих гармоник в ЛСЭ. Основная поправка к спектру излучения обусловлена 3-й гармоникой магнитного поля ондулятора [49], другие гармоники поля влияют мало. Однако даже заметное присутствие гармоник поля, $\sim 10\%$ напряжённости основного поля ондулятора, мало изменяет характеристики излучения ЛСЭ, таких как LCLS и др. [52].

Поведение гармоник ЛСЭ в зависимости от параметров пучка исследовано аналитически. Учтена зависимость коэффициентов Бесселя от углов и размеров пучка, также учтены все поправки на разброс энергий, эмиттанс, дифракцию и т.д. в феноменологической модели ЛСЭ. Соответствующие значения параметров ЛСЭ для пучка, центрированного на оси, и с учётом его отклонения от оси на 15 мкм на длине усиления $L_{\text{gain}} \approx 1,5$ м, выделены для наглядности в таблице соответственно курсивным и жирным шрифтом. Исследование подтверждает выводы [36] о том, что "доля третьей гармоники уменьшается при

деградации пучка и ухудшении работы ЛСЭ ("the proportion of 3rd harmonic falls as the FEL performance and beam quality degrade").

В случае центрирования пучка с точностью 5 мкм от оси ондулятора мы получили теоретическое значение мощности 3-й гармоники немного выше приведённого на рис. 5 (немного выше верхней границы зелёной области в правой части рис. 5). При идеальном центрировании теоретическая мощность 2-й гармоники оказывалась существенно ниже измеренной в эксперименте. Мы тщательно оценили вклад бетатронных колебаний: соответствующие коэффициенты Бесселя оказались пренебрежимо малыми: $f_{n,p;y}^4 \sim 2 \times 10^{-3}$. Для сравнения, коэффициенты Бесселя 2-й гармоники только за счёт эмиттанса на порядок больше: $f_{2;y} \sim 0,025$. В эксперименте на LCLS с энергией электронов $E_e = 4,3$ ГэВ [36] зарегистрирован уход траекторий пучка от оси на 10–20 мкм на длине усиления $L_{\text{gain}} \approx 1,5$ м (см. [34, 35]). Такое отклонение пучка от оси сопоставимо с размером фотонного пучка $\sigma_{\text{photon}} \equiv \sigma_\gamma \approx [\sigma_{x,y} \sqrt{\lambda_1 L_g / (4\pi)}]^{1/2} \approx 20$ мкм.

Отметим, что целевое отклонение пучка в установке составляло 5 мкм, а методы регулирования позволяли надёжно контролировать отклонение 50 мкм. Исходя из минимального отклонения 5 мкм получаем теоретическое значение мощности 2-й гармоники ЛСЭ ~ 10 кВт и минимальное расщепление линии ОИ: $\tilde{J}_{p=-1,0,1}(\xi, \zeta) = \{0,1, 0,98, 0,1\}$. Принимая во внимание размер фотонного пучка и реальное центрирование электронного пучка с точностью ~ 15 мкм, получаем мощность 2-й гармоники ЛСЭ в пределах измеренных значений (см. штрихпунктирную оранжевую линию и оранжевую область на рис. 5).

Другие гармоники также находятся в диапазоне измеренных величин. При этом соответствующий эффективный угол составляет $\theta \approx 9$ мрад, $\theta\gamma \approx 0,08$, но расщепление линии ОИ за счёт бетатронных колебаний остаётся малым, о чём свидетельствуют значения функции Бесселя для субгармоник p : $\tilde{J}_{p=-2,-1,0,1,2}(\xi, \zeta) = \{0,06, 0,34, 0,87, 0,34, 0,07\}$.

Вклад субгармоник и расщепление линии спектра основного тона $\lambda_1 = 1,5$ нм в зависимости от расстояния от оси показаны на рис. 6.

Вследствие высокой энергии электронов пучка, $E \approx 4,3$ ГэВ, линия спектра ОИ расщепляется на очень малую величину $\delta\lambda = \lambda_1 k / (\gamma\sqrt{2}) \approx 0,0005$ нм и отклонение субгармоник от длины волны $\lambda_1 = 1,5$ нм и её резонансов λ_1/n ничтожно мало. С учётом расщепления (см. рис. 6) имеем теоретическую ширину линии $\Delta \sim 2$ пм и относительную спектральную плотность $\Delta/\lambda_1 \sim 0,15\%$. Излучаемые субгармоники $p = 0, \pm 1, \pm 2$ находятся в пределах естественной ширины линии спектра, и электроны пучка взаимодействуют со всеми субгармониками n -й гармоники ЛСЭ даже при значительном отклонении пучка от оси, которое зарегистрировано в эксперименте на LCLS. Отметим, что эквивалентный угол $\gamma\theta_H = 0,08$ может быть вызван полем напряжённостью $H \approx 1,4$ Гс, что в $\sim 2,5$ раза сильнее поля Земли; такие поля всегда компенсируются.

В эксперименте на LEUTL [37] генерировалось излучение в УФ-А-диапазоне и видимом диапазоне на длинах волн $\lambda_1 = 385$ и 532 нм; пучки электронов и фотонов имели размеры, на порядок большие, чем в ЛСЭ LCLS: $\sigma_{x,y} \approx 0,26$ мм, $\sigma_\gamma \approx 0,2$ мм; угол расходимости, $\theta \sim \sim 0,15$ мрад, почти на два порядка больше, чем в ЛСЭ

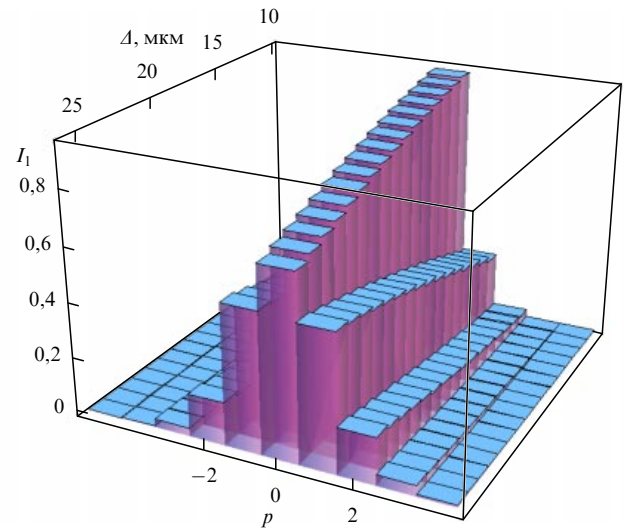


Рис. 6. Расщепление линии спектра основного тона $\lambda = 1,5$ нм на субгармоники p в зависимости от расстояния Δ в ЛСЭ LCLS.

LCLS. При таких условиях в ЛСЭ LEUTL можно предположить существенное влияние бетатронных колебаний на излучение. Расчёт коэффициентов Бесселя $f^{1,2}$ (17) для x - и y -поляризации с учётом расходимости пучка $\gamma\theta_{\text{div}} \approx 0,07$ даёт следующие значения:

$$f_{n=1,\dots,5;x}^{1,2} \approx \{0,75, 0,07, 0,34, 0,07, 0,23\},$$

$$f_{n=1,\dots,5;y}^{1,2} \approx \{0, 0,015, 0, 0,015, 0\}.$$

Расщепление спектра, вызванное бетатронными колебаниями, мало, так как $\gamma \approx 500 \gg 1$. Более того, при $\gamma\theta_{\text{div}} = 0,07$ расщепление слабо выражено — присутствует в основном субгармоника с $p = 0$ и $\tilde{J}_{p=0} \approx 1$. Для второй гармоники, $n = 2$, излучения ЛСЭ получаем за счёт бетатронных колебаний следующие коэффициенты Бесселя (44) для субгармоник $p = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$:

$$f_{n=2,p=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3}^4 \approx \{0,012, 0,008, 0,005, 0,002\},$$

которые все вместе дают малый вклад: $\sqrt{\sum_p (f_{n=2,p}^4)^2} \sim \sim 0,014$. Последний сравним с вкладом от угла расходимости θ_{div} для y -поляризации ОИ, $f_{n=2,y} \approx 0,015$, но меньше вклада от угла расходимости θ_{div} для основной x -поляризации излучения: $f_{n=2,x} \approx 0,04$. Однако даже с учётом всех рассмотренных факторов расчётная мощность 2-й гармоники получается значительно меньше измеренной в эксперименте.

Для объяснения большой мощности 2-й гармоники в эксперименте LEUTL примем во внимание угол взаимодействия излучения с электронами в широком пучке размером $\sigma_{x,y} \sim 0,2$ мм на длине усиления $L_{\text{gain}} \approx 0,88$ м: $\bar{\theta} \approx \sigma_{x,y} / L_{\text{gain}} \approx 2,4 \times 10^{-4}$ рад, $\gamma\bar{\theta} \approx 0,12$, который больше угла расходимости $\theta \approx 1,4 \times 10^{-4}$ рад. С учётом эффективного угла электрон-фотонного взаимодействия θ появляются субгармоники с $p = \{0, \pm 1\}$, $\tilde{J}_{p=-1,0,1} = \{0,22, 0,95, 0,19\}$, но расщепление линий ОИ происходит на малую величину $\delta\lambda/\lambda \sim 1/\gamma \ll 1$, так как $\gamma \approx 500 \gg 1$. Коэффициенты Бесселя при этом таковы:

$$f_{n=1,\dots,5;x} \approx \{0,75, 0,14, 0,31, 0,15, 0,18\},$$

$$f_{n=1,\dots,5;y} \approx \{0,006, 0,04, 0,010, 0,026, 0,012\};$$

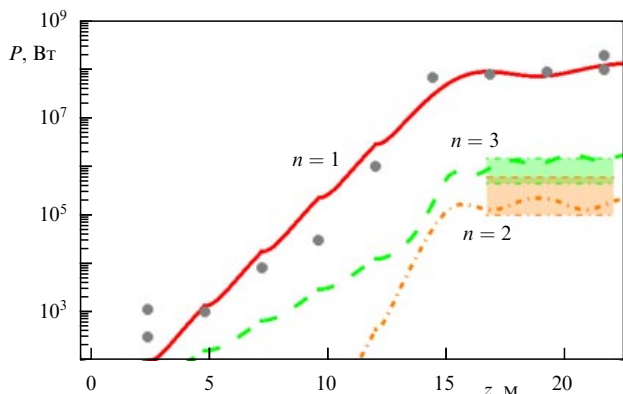


Рис. 7. (В цвете онлайн.) Эволюция мощности гармоник ЛСЭ в эксперименте LEUTL с $E = 255$ МэВ, $\lambda_1 = 385$ нм, $\sigma_e = 1 \times 10^{-3}$, $I_0 = 184$ А. Гармоника $n = 1$ — красная сплошная кривая, $n = 2$ — оранжевая штрихпунктирная, $n = 3$ — зелёная штриховая. Оценённые авторами эксперимента диапазоны мощности гармоник обозначены цветными зонами в правой части рисунка. Экспериментальные значения показаны кружками.

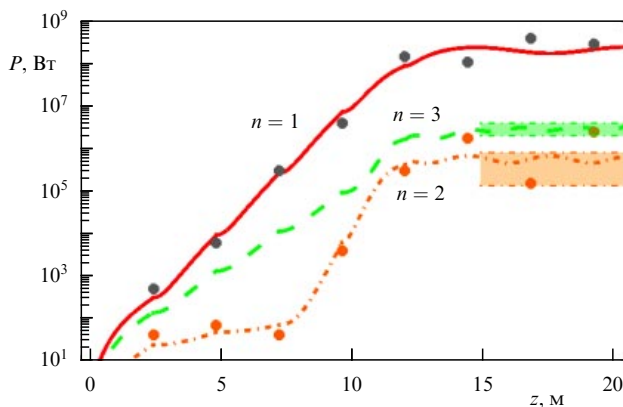


Рис. 8. (В цвете онлайн.) Эволюция мощности гармоник ЛСЭ в эксперименте LEUTL с $E = 217$ МэВ, $\lambda_1 = 532$ нм, $\sigma_e = 1 \times 10^{-3}$, $I_0 = 210$ А. Гармоника $n = 1$ — красная сплошная кривая, $n = 2$ — оранжевая штрихпунктирная, $n = 3$ — зелёная штриховая. Оценённые авторами эксперимента диапазоны мощности гармоник обозначены цветными зонами и штрихпунктирными линиями в правой части рисунка. Экспериментальные значения показаны кружками.

для чётных гармоник они в несколько раз больше, а для нечётных — несколько меньше, чем в том случае, когда учитывается только расходимость пучка (см. выше). Вклад бетатронных колебаний (44) в излучение чётных гармоник остаётся по-прежнему малым, сравнимым с угловым вкладом излучения с y -поляризацией (17): $f_{n=2,p}^\beta \approx 0,03 \sim f_{n=2,y} \approx 0,04$. Для излучения с x -поляризацией, которое представляет собой основную часть излучения, имеем значительно больший коэффициент Бесселя 2-й гармоники: $f_{n=2,x} \approx 0,14$, который превышает соответствующий коэффициент для излучения с y -поляризацией $f_{n=2,y}$ и бетатронный вклад $f_{n=2,p}^\beta$ (см. выше). С учётом этого получаем мощность излучения всех гармоник ЛСЭ LEUTL в соответствии с экспериментальными значениями [37, 38], как показано на рис. 7 и 8.

Отметим, что аналитическое описание экспериментов на LEUTL точнее, чем численная симуляция авторов эксперимента в [36, 37].

В заключение приведём результаты аналитического моделирования сильноточного эксперимента SACLA

(Spring-8 Angstrom Compact free-electron LAsEr) [61] с энергией электронов $E = 7,8$ ГэВ, длительностью электронного банча $\tau_e = 10$ фс, током $I = 27$ кА, разбросом энергии $\sigma_e = 0,087\%$, эмиттансом $\gamma\epsilon = 0,6$ мкм и излучением на длине волны $\lambda_1 \approx 0,125$ нм от ондуляторов с $k = 2,115$ и периодом $\lambda_u = 1,8$ см. Получаем длительность фотонного импульса $\tau_\gamma \sim 6,3$ фс, длину усиления $\approx 2,1$ м, насыщение после 32 м с мощностью ~ 70 ГВт, в согласии с [61]; экспериментальные значения показаны кружками, полученные в модели значения мощности — цветными кривыми на рис. 9а. Доли мощности гармоник в режиме насыщения: $\sim 0,4\%$ для $n = 3$, $\sim 0,01\%$ для $n = 5$ и $0,006\%$ для $n = 2$.

С помощью изложенной в разделе 3 теории с использованием обобщённых специальных функций Бесселя и Эйри мы теоретически рассчитали форму и ширину спектральной линии излучения (рис. 9б). Спектральная плотность излучения на длине волны основного тона определяется расщеплением на более чем 20 субгармоник и составляет $\approx 0,2\%$. Это хорошо согласуется с экспериментальным результатом для спектральной ширины ≈ 30 эВ для фотонов с энергией 9,85 кэВ и соответствующей плотностью $\approx 0,3\%$ (см. рис. 2 в [61]).

Последние результаты других экспериментов с рентгеновскими ЛСЭ также подтверждают справедливость разработанного нами теоретического подхода к исследованию характеристик излучения ЛСЭ [62–64].

Сравнительный анализ представленных выше аналитических результатов и данных экспериментов на ЛСЭ показывает, что результаты нашего теоретического анализа практически не уступают по точности результатам численного моделирования на мощных компьютерах, проведённого большими группами проектировщиков и исследователей с использованием сложных трёхмерных численных симуляций в соответствующей вычислительной среде. Развитый выше аналитический формализм применим к практически произвольному ондулятору ЛСЭ; он позволяет исследовать генерацию гармоник в ондуляторах ЛСЭ, используя персональный компьютер с обычным набором программ, объясняет причины генерации гармоник и хорошо соответствует экспериментам.

5. Заключение

Проведено теоретическое исследование генерации гармоник ОИ в ондуляторах с гармониками поля с учётом внесосевых эффектов и непериодических магнитных составляющих. В квадратурах элементарных функций получены точные аналитические выражения для коэффициентов Бесселя, интенсивности и спектра излучения релятивистских электронов. Для обобщённого эллиптического ондулятора с двумя различными гармониками поля в обеих поляризациях получены точные аналитические результаты в виде обобщённых функции Бесселя и Эйри. Учтено влияние конечного размера пучка электронов, расходимости и разброса энергии электронов на характеристики излучения. Исследовано возможное влияние постоянных компонент магнитного поля на спектр, интенсивность и форму линий ОИ. Результаты получены в интегральной форме для произвольного ондулятора.

Полученные точные аналитические выражения для коэффициентов Бесселя гармоник ОИ учитывают все

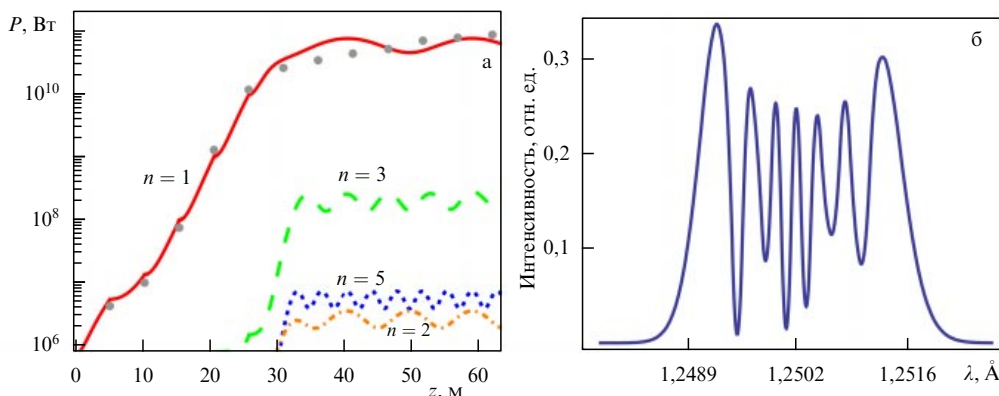


Рис. 9. (В цвете онлайн.) (а) Эволюция мощности гармоник ЛСЭ в сильноточном эксперименте на SACLA с $E = 7,8$ ГэВ, $\sigma_e = 0,87 \times 10^{-3}$, $I_0 = 27$ кА, $\lambda_0 = 1,8$ см. Гармоника $n = 1$ ($\lambda_1 = 0,125$ нм) — красная сплошная кривая, $n = 2$ — оранжевая штрихпунктирная, $n = 3$ — зелёная штриховая, $n = 5$ — синяя пунктирная; экспериментальные значения отмечены кружками. (б) Теоретически рассчитанная линия спектра основного тона.

основные потери в реальных установках. Они использованы в аналитической модели ЛСЭ для исследования эволюции мощности гармоник однопроходного ЛСЭ по длине ондуляторов. Исследована генерация гармоник ЛСЭ в экспериментах на LCLS в рентгеновском диапазоне и LEUTL в видимом и длинноволновом ультрафиолетовом диапазоне. Зарегистрированная в экспериментах 2-я гармоника излучения не может быть вызвана гармониками поля ондулятора, которые могут влиять на нечётные гармоники ОИ. Аналитическая форма всех полученных выражений позволила исследовать отдельно вклады каждой составляющей коэффициентов Бесселя. Показано, что сам по себе эмиттанс пучка электронов в рентгеновском ЛСЭ LCLS не может вызывать 2-ю гармонику излучения с интенсивностью, зарегистрированной в эксперименте. Вклад бетатронных колебаний в генерацию чётных гармоник также оказывается пренебрежимо малым; мало также вызванное бетатронными колебаниями расщепление линий ОИ в эксперименте LCLS. Генерация 2-й гармоники мягкого рентгеновского излучения ЛСЭ LCLS объясняется зарегистрированным отклонением траекторий пучка электронов от оси на ~ 15 мкм на длине усиления ЛСЭ $\sim 1,5$ м; такое отклонение сравнимо с размером фотонного пучка. При этом возникают существенные учтённые аналитически угловые вклады, которые приводят к значительной мощности 2-й гармоники ЛСЭ. Результаты проведённого нами моделирования с использованием аналитических выражений эволюции гармоник ЛСЭ в ондуляторах LCLS в точности соответствует экспериментальным данным (см. рис. 5). Спектральная ширина излучения на длине основного тона $\lambda_1 = 1,5$ нм с учётом теоретически рассчитанного расщепления (см. рис. 6) составляет $\sim 0,15\%$, являясь сравнимой с величиной параметра Пирса $\rho \approx 10^{-3}$. В экспериментах на LEUTL в видимом диапазоне и УФ-А-диапазоне учёт только бетатронных эффектов и эмиттанса широкого пучка электронов даёт теоретическую мощность 2-й гармоники излучения, на два порядка меньшую, чем в соответствующих экспериментах. Измеренные значения мощности 2-й гармоники в экспериментах на LEUTL объясняются значительным эффективным углом $\gamma\theta \approx 0,1$ электрон-фотонного взаимодействия в широком пучке размером $\sim 0,2$ мм на длине усиления $L_{\text{gain}} \approx 0,88$ м. С учётом этого получаем в несколько раз

бóльшие коэффициенты Бесселя для чётных гармоник и немного меньшие их значения для нечётных гармоник; теоретические результаты для эволюции мощности излучения гармоник ЛСЭ согласуются с экспериментальными данными (см. рис. 7, 8).

Таким образом, проведённый подробный анализ генерации гармоник в ЛСЭ с использованием полученных нами точных аналитических выражений коэффициентов Бесселя и аналитических формул для динамики мощности ЛСЭ позволил учесть, выделить и проанализировать вклады всех основных факторов в генерацию каждой гармоники ЛСЭ. Разработанная нами теория объясняет физические причины генерации гармоник излучения в различных условиях. В частности, измеренная 2-я гармоника в рентгеновском ЛСЭ LCLS объясняется экспериментально зарегистрированным отклонением электронного пучка от оси на ≈ 15 мкм, сравнимым с размерами фотонного пучка; мощная 2-я гармоника в ЛСЭ LEUTL возникает за счёт широких, ~ 200 мкм, пучков электронов и фотонов и соответствующего значительного угла электрон-фотонного взаимодействия.

Моделирование недавнего ЛСЭ-эксперимента на установке SACLA также подтверждает справедливость развитого нами теоретического подхода. Рассчитанные эволюция мощности излучения, насыщение, форма спектральной линии и её спектральная плотность полностью соответствуют экспериментальным данным.

Данное нами аналитическое описание линий спектра и интенсивности спонтанного и вынужденного ОИ позволяет выделить и проанализировать все вклады в генерацию гармоник излучения. Использование полученных результатов даёт возможность аналитически исследовать влияние различных характеристик пучка и магнитного поля на генерацию гармоник ЛСЭ. Это может быть также использовано для определения качества пучка и его центровки в ондуляторах по характеристикам излучения.

6. Приложение.

Феноменологическая модель однопроходного лазера на свободных электронах

Эффективное описание эволюции мощности гармоник по длине ЛСЭ с учётом дифракции использует параметр

Пирса ρ_n [12, 13, 60]:

$$\tilde{\rho}_n = \frac{\rho_n}{(1 + \mu_{D,n})^{1/3}}, \quad \rho_n = \frac{J^{1/3}(\lambda_u k_{\text{eff}} f_n)^{2/3}}{2\gamma(4\pi i)^{1/3}}, \quad (45)$$

$$\mu_{D,n} = \frac{\lambda_u \lambda_n}{16\pi \rho_n \Sigma},$$

где n — номер гармоники, $\Sigma = 2\pi\sqrt{\beta_x \varepsilon_x \beta_y \varepsilon_y}$ — сечение пучка, $\varepsilon_{x,y} = \sigma_{x,y} \theta_{x,y}$ — его эмиттанс, $\sigma_{x,y} = \sqrt{\varepsilon_{x,y} \beta_{x,y}}$ — поперечное сечение, $\theta_{x,y}$ — расходимость, $\gamma_{x,y}$ и $\beta_{x,y} = \varepsilon_{x,y}/\theta_{x,y}^2$ — параметры Твисса, $J = I_0/\Sigma$ [А м⁻²] — плотность тока, I_0 [А] — электронный ток, $i \approx 1,7045 \times 10^4$ А — постоянная Альвена, λ_u [м] — основной период ондулятора, λ_n — длина волны излучения (4), k_{eff} — ондуляторный параметр (для плоского ондулятора $k_{\text{eff}} = k = eH_0 \lambda_u / (2\pi m c^2) \approx H_0 \lambda_u$ [Тл см]), H_0 — амплитуда магнитного поля на оси ондулятора, f_n — коэффициенты Бесселя гармоники n (см. (5), (6)). Параметр Пирса $\tilde{\rho}$ определяет длину усиления $L_{n,g} \cong \Phi_n \lambda_u / (4\pi\sqrt{3} n^{1/3} \tilde{\rho}_n)$ для гармоники n , $L_{1,g} \equiv L_g$. Поправки, описывающие потери в ЛСЭ, учитываются феноменологически таким образом:

$$\Phi_n \cong (\zeta^n + 0,165 \mu_{e,n}^2) \exp(0,034 \mu_{e,n}^2), \quad \tilde{\Phi}_n = \Phi_n |_{\mu_{e,n} \rightarrow \tilde{\mu}_{e,n}}, \quad (46)$$

$$\mu_{e,n}(\sigma_e, n) \cong \frac{2\sigma_e}{n^{1/3} \rho_n}, \quad \tilde{\mu}_{e,n}(\sigma_e, n) \cong \frac{2n^{2/3} \sigma_e}{\tilde{\rho}_n}, \quad (47)$$

$$\eta_n \cong \frac{\exp[-\Phi_n(\Phi_n - 0,9)] + 1,57(\Phi_n - 0,9)/\Phi_n^3}{1,062}, \quad (48)$$

$$\tilde{\eta} = \eta_n |_{\Phi_n \rightarrow \tilde{\Phi}_n},$$

$$\zeta \cong \sqrt{\prod_{i=x,y,\tilde{x},\tilde{y}} (1 + \mu_i^2)} \times \left(1 + 0,159 \sum_{i=x,y,\tilde{x},\tilde{y}} \mu_i^2 - 0,066 \sum_{i=x,y,\tilde{x},\tilde{y}} \mu_i\right)^{-1}, \quad (49)$$

$$\mu_{\tilde{x},\tilde{y}} = \frac{1}{\tilde{\rho}_1} \frac{\gamma^2 \varepsilon_{x,y}}{(1 + k_{\text{eff}}^2) \lambda_u \beta_{x,y}}, \quad \mu_{x,y} = \frac{1}{\tilde{\rho}_1} \frac{\gamma^2 \pi^2 k^2 \varepsilon_{x,y}}{(1 + k_{\text{eff}}^2) \gamma^2 \lambda_u^2 \gamma_{x,y}}. \quad (50)$$

Обычно пучок согласован с ондулятором, тогда $\zeta \approx 1,00 - 1,05$; в рентгеновских ЛСЭ $\zeta \approx 1 - 1,02$. Феноменологические формулы (46)–(50) и формулы эволюции мощности (51)–(53), полученные путём сравнения с результатами ЛСЭ-экспериментов, существенно отличаются от ранее использовавшихся выражений в [43, 60]. Они учитывают потери в реальных установках отдельно для каждой гармоники и позволяют хорошо описать динамику мощности в ЛСЭ, включая режим насыщения. Выражение, описывающее возрастание мощности излучения n -й гармоники по координате z , включает в себя независимый $\propto \exp(z/L_{n,g})$ и индуцированный $\propto \exp(nz/L_g)$ члены:

$$P_n(z) \cong P_{L,n}(z) + \frac{\tilde{P}_{n,0} \exp(nz/L_g)}{1 + [\exp(nz/L_g) - 1] \tilde{P}_{n,0}/\tilde{P}_{n,F}} + \frac{P_{n,0} \exp(nz/L_g)}{1 + \frac{1,3 P_{n,0} [\exp(nz/L_g) - 1]}{P_{n,F} \{1 + 0,3 \cos[n(z - L_s)/(1,4L_g)]\}} - 0,3 \tilde{P}_{n,F}}, \quad (51)$$

где для несгруппированного пучка электронов имеем независимый член

$$P_{L,n}(z) \cong \frac{P_{0,n} A(n, z) \exp(0,223z/L_s)}{1 + \frac{1,3 P_{n,0} (A(n, z) - 1)}{P_{n,F} \{1 + 0,3 \cos[n(z - L_s)/(1,4L_g)]\}}}, \quad (52)$$

$$A(n, z) \cong \frac{1}{3} + \frac{\cosh(z/L_{n,g})}{4,5} + \frac{\cos[\sqrt{3}z/(2L_{n,g})] \cosh[z/(2L_{n,g})]}{0,444},$$

и для каскада ондуляторов, получающих уже сгруппированный пучок,

$$P_{L,n}(z) \cong \frac{P_{0,n} F(n, z)}{1 + 1,3 P_{0,n} F(n, z)/P_{n,f} \{1 + 0,3 \cos[n(z - L_s)/(1,3L_g)]\}}, \quad (53)$$

$$F(n, z) \cong 2 \left| \cosh\left(\frac{z}{L_{n,g}}\right) - \cos\left(\frac{z}{2L_{n,g}}\right) \cosh\left(\frac{z}{2L_{n,g}}\right) \right|,$$

где $L_s \cong 1,07 L_{1,g} \ln(9\eta_1 P_F/P_{0,1})$ — длина насыщения [60], $P_{n,F} = \eta_n P_F f_n^2 / (n^{5/2} f_1^2)$ — полная и $\tilde{P}_{n,F} = \tilde{\eta}_n \tilde{P}_F f_n^2 / (n^{5/2} f_1^2)$ — предварительная мощности насыщения, $P_F \cong \sqrt{2} P_e \eta_1 \tilde{\rho}_1^2 / \rho_1$, $\tilde{P}_F = P_F |_{\eta_n \rightarrow \tilde{\eta}_n}$, $P_{0,n}$ — начальные мощности гармоник, $P_{n,0} \cong n b_n^2 P_{n,F}$ и $\tilde{P}_{n,0} \cong d_n b_n^2 \tilde{P}_{n,F}$ — индуцированные основным тоном начальные мощности за счёт банчинга $b_n^2 \cong (P_{0,1}/9P_e \tilde{\rho}_1)^n$, $d_{n=1,\dots,5} \cong \{1, 3, 8, 40, 120\}$ [60].

Дополнительный вклад шума излучения банча, $P_{\text{noise}} \approx 6\pi \rho^2 \gamma m c^3 / \lambda_1$, в первом каскаде ЛСЭ ССИ (SASE FEL) описывается следующей приближённой феноменологической формулой:

$$N_n(z) \approx P_{\text{noise}} \frac{S_n(z)}{1 + [300 P_{\text{noise}} S_n(z)/(n P_{n,f})]}, \quad (54)$$

$$S_n(z) \cong 2 \left| \cosh\left(\frac{z}{L_{n,g}}\right) - \exp\left(\frac{z}{2L_{n,g}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}z}{2L_{n,g}}\right) - \exp\left(\frac{z}{2L_{n,g}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}z}{2L_{n,g}}\right) \right|,$$

которая согласуется с экспериментальными результатами (см. рис. 7–9).

Список литературы

1. Гинзбург В Л *Изв. АН СССР Сер. физ.* **11** 165 (1947)
2. Motz H, Thon W, Whitehurst R N *J. Appl. Phys.* **24** 826 (1953)
3. McNeil B W J, Thompson N R *Nat. Photon.* **4** 814 (2010)
4. Pellegrini C, Marinelli A, Reiche S *Rev. Mod. Phys.* **88** 015006 (2016)
5. Schmüser P et al. *Free-Electron Lasers in the Ultraviolet and X-Ray Regime. Physical Principles, Experimental Results, Technical Realization* (Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 258) (Cham: Springer, 2014)
6. Huang Z, Kim K-J *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **10** 034801 (2007)
7. Margaritondo G, Ribic P R *J. Synchrotron Rad.* **18** 101 (2011)
8. Margaritondo G *Riv. Nuovo Cimento* **40** 411 (2017)
9. Bordovitsyn V A (Ed.) *Synchrotron Radiation Theory and Its Development in Memory of I.M. Ternov* (World Scientific Series on Synchrotron Radiation Techniques and Applications, Vol. 5) (Singapore: World Scientific, 1999)
10. Margaritondo G, in *Synchrotron Radiation. Basics, Methods and Applications* (Eds S Mobilio, F Boscherini, C Meneghini) (Berlin: Springer, 2015) p. 29
11. Placzek W et al. *Acta Phys. Pol. B* **50** 1191 (2019)

12. Saldin E L, Schneidmiller E A, Yurkov M V *The Physics of Free Electron Lasers* (Berlin: Springer, 2000)
13. Bonifacio R, Pellegrini C, Narducci L *Opt. Commun.* **50** 373 (1984)
14. Nakao N et al. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **407** 374 (1998)
15. Sharma G, Mishra G, Gehlot M *JINST* **9** T01002 (2014)
16. Bazouband F, Maraghechi B *J. Plasma Phys.* **81** 905810305 (2015)
17. Asakawa M et al. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **318** 538 (1992)
18. Asakawa M et al. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **358** 399 (1995)
19. Asakawa M et al. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **375** 416 (1996)
20. Iracane D, Bamas P *Phys. Rev. Lett.* **67** 3086 (1991)
21. Halbach K *J. Phys. Colloques* **44** C1-211 (1983)
22. Halbach K *J. Appl. Phys.* **57** 3605 (1985)
23. Prakash B et al. *Optik* **127** 1639 (2016)
24. Huse V et al. *Chin. Phys. Lett.* **31** 034101 (2014)
25. Lee K et al. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **776** 27 (2015)
26. Jeevakhan H, Mishra G *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **656** 101 (2011)
27. Gupta V, Mishra G *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **574** 150 (2007)
28. Gupta V, Mishra G *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **556** 350 (2006)
29. Yang Y, Ding W *Phys. Plasmas* **5** 782 (1998)
30. Schmidt T et al., in *Proc. of the 36th Intern. Free Electron Laser Conf., FEL 2014, Basel, Switzerland, 25–29 August 2014* (Editorial Board: J Chrin, S Reiche, V R W Schaa) (Basel: JACoW, 2015) p. 116; <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/FEL2014/papers/mop043.pdf>
31. Temnykh A B *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **11** 120702 (2008)
32. Nuhn H-D et al., in *Proc. of the 37th Intern. Free Electron Laser Conf., FEL 2015, Daejeon, Korea, 23–28 August 2015* (Editorial Board: H S Kang, D-E Kim, V R W Schaa) (Daejeon: JACoW, 2015) p. 757; <http://accelconf.web.cern.ch/FEL2015/papers/wed01.pdf>
33. Henderson J R et al. *New J. Phys.* **18** 062003 (2016)
34. Emma P, in *Proc. of the 23rd Particle Accelerator Conf. 4–8 May 2009, Vancouver, British Columbia, Canada* (Vancouver: TRIUMF, 2010) p. 3115; <http://accelconf.web.cern.ch/PAC2009/papers/th3pb01.pdf>
35. Emma P et al. *Nat. Photon.* **4** 641 (2010)
36. Ratner D et al. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **14** 060701 (2011)
37. Milton S V et al. *Science* **292** 2037 (2001)
38. Biedron S G et al. *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **483** 94 (2002)
39. Алферов Д Ф, Башмаков Ю А, Бессонов Е Г *ЖТФ* **43** 2126 (1973); Alferov D F, Bashmakov Yu A, Bessonov E G *Sov. Phys. Tech. Phys.* **18** 1336 (1974)
40. Алферов Д Ф, Башмаков Ю А, Черенков П А *УФН* **157** 389 (1989); Alferov D F, Bashmakov Yu A, Cherenkov P A *Sov. Phys. Usp.* **32** 200 (1989)
41. Багров В Г и др. *Теория излучения релятивистских частиц* (Под ред. В А Бордовицына) (М.: Физматлит, 2002)
42. Багров В Г, Тернов И М, Холомай Б В *Излучение релятивистских электронов в продольном периодическом электрическом поле кристалла* (Томск: ТФ СО АН СССР, 1987)
43. Dattoli G, Mikhailin V V, Ottaviani P L, Zhukovsky K V *J. Appl. Phys.* **100** 084507 (2006)
44. Винокуров Н А, Левичев Е Б *УФН* **185** 917 (2015); Vinokurov N A, Levichev E B *Phys. Usp.* **58** 850 (2015)
45. Бессонов Е Г "К теории источников ондуляторного излучения", Препринт № 18 (М.: ФИАН СССР, 1982)
46. Алексеев В И, Бессонов Е Г, в сб. *Труды VI Всесоюзного совещания по использованию синхротронного излучения "СИ-84"* (Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1985) с. 92
47. Черенков П А (Отв. ред.) *Ондуляторное излучение, лазеры на свободных электронах* (Труды ФИАН, Т. 214) (М.: Наука, 1993); <http://proceedings.lebedev.ru/0214-1993/>
48. Bessonov E G *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **282** 405 (1989)
49. Alekseev V I, Bessonov E G *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **308** 140 (1991)
50. Калитенко А М, Жуковский К В *ЖЭТФ* **157** 394 (2020); Kalitenko A M, Zhukovskii K V *J. Exp. Theor. Phys.* **130** 327 (2020)
51. Zhukovsky K *Results Phys.* **13** 102248 (2019)
52. Zhukovsky K *J. Synchrotron Rad.* **26** 1481 (2019)
53. Jeevakhan H, Mishra G *Opt. Commun.* **335** 126 (2015)
54. Zhukovsky K *J. Electromagn. Waves Appl.* **28** 1869 (2014)
55. Zhukovsky K V *Prog. Electromagn. Res. B* **59** 245 (2014)
56. Gould H W, Hopper A T *Duke Math. J.* **29** 51 (1962)
57. Dattoli G, Renieri A, Torre A *Lectures on the Free Electron Laser Theory and Related Topics* (Singapore: World Scientific, 1993)
58. Dattoli G *J. Appl. Phys.* **84** 2393 (1998)
59. Dattoli G, Ottaviani P L *Opt. Commun.* **204** 283 (2002)
60. Dattoli G, Ottaviani P L, Pagnutti S "Booklet for FEL desing: a collection of practical formulae", ENEA Report RT/2007/40/FIM (2007)
61. Inoue I et al. *Nat. Photon.* **13** 319 (2019)
62. Zhukovsky K *Results Phys.* **19** 103361 (2020)
63. Zhukovsky K *Symmetry* **12** 1258 (2020)
64. Zhukovsky K *J. Synchrotron Rad.* **27** 1648 (2020)

Undulator and free-electron laser radiation with field harmonics and off-axis effects taken into account analytically

K.V. Zhukovsky

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
Leninskie gory 1, str. 2, 119991 Moscow, Russian Federation
E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru

We present an analytic description of the generation of undulator radiation (UR) harmonics in a generalized elliptic undulator with field harmonics. The obtained analytic expressions for generalized Bessel and Airy functions describe the UR spectral lines and radiation intensity in the general and particular cases of two-frequency planar and helical undulators and also for other elliptic and planar undulators. We analytically describe the effect of finite electron beam size, beam emittance, off-axis deflection of electrons, electron energy spread, and beam-bending permanent magnetic components. The obtained analytic expressions distinguish the contributions made by each field component and by the beam and undulator parameters to the generation of radiation harmonics. Using an analytic model of single-pass free-electron lasers (FELs), we analyze the power evolution of harmonics in the LCLS, LEUTL, and SACLA FEL experiments. We discuss the effect that the beam and undulator parameters have on the generation of harmonics. It is shown that the strong second harmonics of radiation observed in experiments are caused by the detected beam deviation from the axis by 15 μm over one gain length of 1.5 m in the X-ray LCLS FEL and by the large beam cross section of $\sim 200 \mu\text{m}$ in the LEUTL FEL. The results of modeling are fully consistent with experiments, which confirms the validity of the presented theoretical description of FEL power and radiation spectral density.

Keywords: undulator, magnetic field, free-electron laser, harmonic generation

PACS numbers: **41.60.** – m, 41.60.Ap, 41.60.Cr

Bibliography — 64 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **191** (3) 318–330 (2021)
DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.06.038803>

Received 26 December 2019, revised 2 April 2020
Physica – Uspekhi **64** (3) (2021)
DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2020.06.038803>