

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Педагогическое введение в модель Сачдева – Йе – Китаева и двумерную дилатонную гравитацию

Д.А. Трунин

В последнее время модель Сачдева – Йе – Китаева и двумерная дилатонная гравитация привлекают повышенное внимание сообществ физики высоких энергий и физики конденсированного состояния. Успех этих моделей обусловлен их замечательными свойствами. Следуя оригинальным работам, мы широко обсуждаем свойства указанных моделей, включая диаграммную технику в пределе большого числа степеней свободы, возникновение конформной симметрии в инфракрасном пределе, эффективное действие, четырёхточечные функции и хаос. Также мы кратко обсуждаем некоторые недавние результаты в этой области. С одной стороны, мы стараемся быть максимально строгими, т.е. рассматриваем все детали и пробелы в аргументации. С другой стороны, мы ожидаем, что обзор подойдёт даже для читателя, который не знаком с указанными моделями.

Ключевые слова: модель Сачдева – Йе – Китаева, двумерная гравитация, квантовый хаос, разложение по $1/N$, AdS/CFT-соответствие

PACS numbers: **03.70.+k**, **04.62.+v**, 04.70.Dy, 05.30.Fk, 05.45.Ac, 05.45.Mt, 11.10.Kk, 11.10.Wx

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.06.038805>

Содержание

1. Введение (225).
2. Мотивация (226).
 - 2.1. Квантовый хаос. 2.2. Быстрые скремблеры.
3. Основы модели Сачдева – Йе – Китаева (230).
 - 3.1. Основные определения. 3.2. Двухточечная функция и диаграммная техника. 3.3. Уравнение Дайсона – Швингера и инфракрасный предел. 3.4. Эффективное действие. 3.5. Шварцианное действие.
4. Спектр Сачдева – Йе – Китаева и четырёхточечные функции (238).
 - 4.1. Вклад мягкой моды. 4.2. Вклад конформного действия.
5. Двумерная дилатонная гравитация (247).
 - 5.1. Дилатонная гравитация как предел вблизи горизонта событий экстремальной чёрной дыры. 5.2. Чистое двумерное пространство анти-де-Ситтера и его симметрии. 5.3. Шварцианная теория. 5.4. Поля материи. 5.5. Четырёхточечная корреляционная функция, упорядоченный по времени и упорядоченный вне времени корреляторы.

6. Примеры хаотического поведения (вместо заключения) (253).
 - 6.1. Модель Сачдева – Йе – Китаева/двумерная дилатонная гравитация. 6.2. Обобщения модели Сачдева – Йе – Китаева. 6.3. Двумерная конформная теория поля с большим центральным зарядом и ударные волны в трёхмерном пространстве анти-де-Ситтера. 6.4. Эрмитова матричная модель с квартичным взаимодействием в пределе большого числа степеней свободы.
 7. Приложения (257).
 - А. Одномерные майорановские фермионы. Б. Функциональный интеграл по майорановским фермионам. В. Коррелятор флуктуаций энергии в модели Сачдева – Йе – Китаева. Г. Интеграл от произведения двух собственных функций.
- Список литературы (259).

1. Введение

Модель Сачдева – Йе – Китаева (Sachdev – Ye – Kitaev, SYK), предложенная А. Китаевым [1] в качестве обобщения модели Сачдева – Йе [2, 3], впервые была подробно изучена в работах [4–8]. С тех пор модель SYK привлекает значительное внимание сообществ физики высоких энергий и физики конденсированного состояния.

Успех модели SYK обусловлен её замечательными свойствами. Во-первых, эта модель точно решается в пределе большого числа степеней свободы N и малых энергий. Во-вторых, в этом пределе модель приобретает конформную симметрию, а её динамика приближённо описывается так называемым шварцианным действием. В-третьих, лидирующие поправки к "упорядоченным вне времени" (out-of-time ordered) четырёхточечным функциям экспоненциально возрастают со временем, причём показатель этого возрастания достигает максимального

Д.А. Трунин

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Институтский пер. 9, 141701 Долгопрудный, Московская обл.,
Российская Федерация;
Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт",
Институт теоретической и экспериментальной физики
им. А.И. Алиханова,
ул. Б. Черёмушkinsкая 25, 117218 Москва, Российская Федерация
E-mail: dmitriy.trunin@phystech.edu

Статья поступила 3 марта 2020 г.,
после доработки 28 июня 2020 г.

возможного значения, установленного в [9]. Такое поведение само по себе довольно необычно; более того, оно совпадает с поведением подобных функций на фоне чёрной дыры. Наконец, модель SYK тесно связана с двумерной (2D) дилатонной гравитацией, которая описывает возбуждения около горизонта экстремальной чёрной дыры [10–13]. Вместе эти свойства превращают модель SYK в прекрасную игрушечную модель для исследования многих физических явлений, в частности квантового хаоса [1, 9], скремблирования (перемешивания) информации [14–16], проходимость кротовых нор [17–20] и странностей металлов [21–23].

Настоящий обзор представляет собой педагогическое введение в модель SYK и двумерную дилатонную гравитацию. В основном мы будем следовать оригинальным работам [4–13] и постараемся закрыть все "белые пятна", т.е. рассмотреть все детали и недостатки рассуждений. Мы надеемся, что это позволит сделать рассуждения ясными и самосогласованными, в связи с чем настоящий обзор будет доступен даже для читателя, не знакомого с рассматриваемыми явлениями.

Обзор построен следующим образом. В разделе 2 кратко обсуждаются квантовый хаос и скремблирование — явления, которые имеют отношение к динамике квантовых чёрных дыр и мотивируют изучение модели SYK и 2D-дилатонной гравитации. В частности, вводятся упорядоченные вне времени корреляторы (Out-of-Time Ordered Correlators, OTOCs), которые служат основным инструментом для исследования этих явлений. Подчеркнём, что в разделе 2 мы пытаемся дать общую мотивацию, не останавливаясь на деталях. Для краткости обсуждение конкретных примеров отложено до следующих разделов.

В разделах 3 и 4 приводится всеобъемлющий обзор модели SYK. Обсуждается диаграммная техника в пределе больших N , возникновение конформной симметрии в инфракрасном (ИК) пределе, эффективное и шварццианное действия, точные двухточечные и четырёхточечные корреляционные функции. Некоторые технические детали вынесены в приложения. Также мы кратко упоминаем недавние достижения в данной области.

В разделе 5 мы пытаемся дать также всеобъемлющий обзор 2D-дилатонной гравитации (точнее, гравитации Джакива – Тейтельбойма). Мы показываем, что эта теория описывает возбуждения около горизонта событий экстремальной чёрной дыры, объясняем, что она эффективно сводится к одномерной теории с шварццианным действием, и вычисляем четырёхточечные функции полей материи, живущих на указанном фоне.

Наконец, вместо заключения в разделе 6 мы приводим краткий обзор наиболее примечательных примеров хаотических систем. К таким системам относятся модель SYK и 2D-дилатонная гравитация (мы кратко напомним основные свойства этих моделей), тензорные обобщения модели SYK, чёрная дыра Баньядоса – Тейтельбойма – Занелли (BTZ), двумерная конформная теория поля (Conformal Field Theory — CFT) с большим центральным зарядом и эрмитова матричная квантовая теория поля с квартичным самодействием.

2. Мотивация

Основная мотивация к изучению модели SYK и двумерной дилатонной гравитации обусловлена связью

этих моделей с квантовым хаосом (см. раздел 2.1) и скремблированием (см. раздел 2.2). Считается, что эти явления в свою очередь имеют отношение к информационному парадоксу Хокинга [14, 15], вследствие чего привлекают значительный интерес физического сообщества.

Мы качественно покажем, что оба указанных явления характеризуются экспоненциальным возрастанием OTOCs, которые впервые были вычислены в [24] и популяризованы работами [9, 25, 26]. Следовательно, системы с таким поведением корреляторов, часто называемые хаотическими, представляют особый интерес. Модель SYK и 2D-дилатонная гравитация относятся к системам именно такого типа. В разделе 6 мы кратко обсудим также другие хаотические системы.

Обратим внимание, что этот раздел может показаться недостаточно строгим, поскольку в нём не обсуждаются пределы применимости формулируемых утверждений и не приводятся конкретные примеры. Такие примеры будут подробно рассмотрены в разделах 3–6. На самом деле, первоначальная мотивация к изучению модели SYK частично состояла именно в том, чтобы найти удобный пример, для которого утверждения, сделанные в разделах 2.1, 2.2, можно проверить контролируемым образом [1].

2.1. Квантовый хаос

Обсудим предполагаемую связь между некоторыми определёнными корреляционными функциями и классическим хаосом [1, 9].

Прежде всего напомним, что обычно принято называть классическим хаосом. Рассмотрим классическую систему, динамика которой описывается уравнением движения

$$\dot{X}^i(t) = F^i[X^i(t)], \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{X}$ — вектор в N -мерном фазовом пространстве, $\mathbf{F}$ — гладкая векторная функция, $\dot{X}^i \equiv dX^i/dt$. Введём норму в фазовом пространстве, $\|\cdot\|$, и разложим функцию $\mathbf{F}$ около точки $\mathbf{X}_0$:

$$\delta \dot{X}^i = A_j^i \delta X^j + B^i(\delta X^i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

где $\delta X^i \equiv X^i - X_0^i$, $A_j^i \equiv (\partial F^i / \partial X^j)_{\delta \mathbf{X}=0}$, B — аналитическая функция, такая что $\|B(\delta \mathbf{X})\| \rightarrow 0$, когда $\|\delta \mathbf{X}\| \rightarrow 0$. Решение линеаризованного уравнения движения (т.е. уравнения с отброшенным членом B) очевидным образом представляется в следующем виде:

$$\delta \mathbf{X} = \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{h}_j \exp(\lambda_j t), \quad (2.3)$$

где λ_j и $\mathbf{h}_j$ — собственные значения и собственные векторы матрицы A (для простоты мы предположили, что все собственные подпространства одномерны), c_j — константы интегрирования, которые отвечают начальному условию $\delta \mathbf{X}(t=0) = \delta \mathbf{X}_0$. Легко увидеть, что для больших времён эволюции, но малых начальных отклонений $\delta \mathbf{X}_0$, таких что условие $\|B(\delta \mathbf{X})\| \ll \|A \delta \mathbf{X}\|$ всегда выполнено, норма конечного отклонения возрастает экспоненциально:

$$\|\delta \mathbf{X}(t)\| \leq \|\delta \mathbf{X}_0\| \exp(\lambda_{\max} t), \quad (2.4)$$

где $\lambda_{\max}$ — наибольшее собственное значение A . Если $\lambda_{\max}$ положительно, то фазовые траектории быстро расходятся, т.е. малое возмущение начальных условий приводит к существенным изменениям в поведении системы (по крайней мере, для некоторого набора начальных условий). Такую чувствительность к начальным условиям иногда называют "эффектом бабочки" или классическим хаосом.

Вообще говоря, собственные значения и собственные векторы зависят от точки $\mathbf{X}_0$ и выбора нормы $\|\cdot\|$. Тем не менее максимальное собственное значение, которое обычно называют максимальной ляпуновской экспонентой (максимальным показателем Ляпунова), можно рассматривать как общее свойство системы:

$$\lambda_{\max} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\|\delta \mathbf{X}\| \rightarrow 0} \sup \left(\frac{1}{t} \log \frac{\|\delta \mathbf{X}(t)\|}{\|\delta \mathbf{X}(0)\|} \right). \quad (2.5)$$

Это определение применимо и к линеаризованным (2.2), и к общим (2.1) системам. Поскольку экспонента (2.5) не зависит от определения нормы [27, 28], мы можем выбрать удобное для нас определение: $\|\mathbf{X}\| = \sum_{i=1}^N |X^i|$. Тогда чувствительность к начальным условиям можно переформулировать в виде следующего отношения:

$$\left| \frac{\partial X^i(t)}{\partial X^j(0)} \right| \approx \left| \frac{\delta X^i(t)}{\delta X^j(0)} \right| \sim \exp(\lambda t) \quad (2.6)$$

для некоторых компонент X^i и X^j вектора $\mathbf{X}(t)$, который описывает фазовую траекторию. Первое приближённое равенство выполняется для малых $\delta \mathbf{X}$.

Теперь рассмотрим некоторую систему, конфигурационное пространство которой совпадает с фазовым пространством исходной системы: $q^i = X^i$, $i = 1, \dots, N$. Здесь q^i — обобщённые координаты, соответствующие обобщённые импульсы обозначим как p^i . Введём скобку Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{\text{PB}}$ и перепишем отношение (2.6) в форме, подходящей для распространения на квантовый случай:

$$\begin{aligned} |\{q^i(t), p^j(0)\}_{\text{PB}}| &= \left| \sum_{k=1}^N \frac{\partial q^i(t)}{\partial q^k(0)} \frac{\partial p^j(0)}{\partial p^k(0)} - \frac{\partial q^i(t)}{\partial p^k(0)} \frac{\partial p^j(0)}{\partial q^k(0)} \right| = \\ &= \left| \frac{\partial q^i(t)}{\partial q^j(0)} \right| \sim \exp(\lambda t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

До сих пор мы рассматривали классическую механику. Теперь перейдём к квантово-механической ситуации. Напомним, что в квазиклассическом пределе скобка Пуассона совпадает с коммутатором соответствующих операторов:

$$\{q^i(t), p^j(0)\}_{\text{PB}} \sim -\frac{i}{\hbar} [\hat{q}^i(t), \hat{p}^j(0)], \quad \text{когда } \hbar \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Заметим, что операторы координаты и импульса в правой части (2.8) действуют в разные моменты времени, поэтому выражение (2.8) не является тривиальным.

Это соответствие позволяет распространить концепции классического хаоса и максимальной ляпуновской экспоненты на произвольные квантовые системы [1, 29–31]. Для этого надо построить величину, которая корректно отражает чувствительность квантовой системы к изменению начальных условий и воспроизводит экспоненциальное возрастание (2.6) в пределе $\hbar \rightarrow 0$, если соответствующая классическая система хаотична. Простейшим выражением такого рода является следующая

амплитуда:

$$A_{\text{in-out}} = \langle \text{out} | [q^i(t), p^j(0)] | \text{in} \rangle, \quad (2.9)$$

где $|\text{in}\rangle$ и $|\text{out}\rangle$ обозначают начальную и конечную волновую функцию системы. К сожалению, это выражение имеет два серьёзных недостатка. Во-первых, величина (2.9) зависит от выбора начального и конечного состояний, а потому может существенно изменяться в пределах одной и той же системы. Во-вторых, в квантовой теории поля обычно рассматривают аналоги (2.9) для вакуумного состояния или температурного распределения, для которых двухточечные функции экспоненциально убывают, а не возрастают (в квантовой механике корреляционные функции возрастают или убывают степенным образом). Поэтому нам хотелось бы исключить зависимость от $|\text{in}\rangle$ и $|\text{out}\rangle$.

С этой целью просуммируем по всем конечным состояниям и усредним по удобному начальному распределению, например по температурному:

$$\begin{aligned} C(t) &= \sum_n \sum_{\text{out}} \frac{1}{Z} \exp(-\beta E_n) \times \\ &\times \langle n | [q^i(t), p^j(0)]^\dagger | \text{out} \rangle \langle \text{out} | [q^i(t), p^j(0)] | n \rangle = \\ &= -\langle [q^i(t), p^j(0)]^2 \rangle_\beta, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где β — величина, обратная температуре, E_n — энергия n -го энергетического уровня, $Z = \sum_n \exp(-\beta E_n)$ — статистическая сумма, $\langle \dots \rangle_\beta$ обозначает усреднение по температурному распределению. Такое среднее впервые было рассмотрено в классической работе [24].

С одной стороны, согласно (2.8), мы ожидаем, что $C(t)$ экспоненциально возрастает: $C(t) \sim \hbar^2 \exp(2\lambda t)$. С другой стороны, квазиклассическое приближение применимо только для достаточно малых времён, $t < t_* \sim (1/\lambda) \log(1/\hbar)$, где t_* — время Эренфеста [31–34]. Можно ожидать, что на больших временах $C(t)$ выходит на некоторое постоянное значение [9, 25]. Заметим также, что $t_* \rightarrow \infty$, когда $\hbar \rightarrow 0$.

Более того, величину (2.10) можно легко обобщить для произвольной квантовой системы с большим числом степеней свободы, $N \gg 1$:

$$C(t) = -\langle [V(t), W(0)]^2 \rangle_\beta, \quad (2.11)$$

где V и W — некоторые эрмитовы операторы, каждый из которых имеет нулевую одноточечную функцию ($\langle V \rangle_\beta = \langle W \rangle_\beta = 0$) и отвечает $\mathcal{O}(1)$ степеням свободы¹. Квантовая система называется хаотической, если величина (2.11) экспоненциально возрастает для *всех возможных пар*² операторов V и W с упомянутыми свойствами. Наибольший показатель этого возрастания называют квантовой ляпуновской экспонентой, а время t_* , за которое насыщается $C(t)$ и которое является аналогом времени Эренфеста, — временем скремблирования. Происхождение этой терминологии мы обсудим более детально в разделе 2.2.

Заметим, что на практике коррелятор (2.11) необходимо регуляризовать, поскольку он содержит произведение операторов, взятых в совпадающие моменты

¹ Например, в модели SYK такими операторами служат майорановские фермионы: $V(t) = \chi_i(t)$, $W(0) = \chi_j(0)$.

² В интегрируемых системах функция $C(t)$ может возрастать для некоторых, но не для всех пар операторов (см., например, [35]).

времени. Как правило, регуляризацию проводят, равномерно "размывая" температурное распределение между двумя коммутаторами (что эквивалентно "размыванию" операторов в мнимом времени):

$$C(t) = -\text{tr} \left(\rho^{1/2} [V(t), W(0)] \rho^{1/2} [V(t), W(0)] \right), \quad (2.12)$$

где $\rho = (1/Z) \exp(-\beta H)$ — матрица плотности. Разумеется, с тем же успехом можно рассмотреть и другие виды "размывания", однако упомянутый выше способ имеет наиболее прозрачную физическую интерпретацию (для более подробного объяснения см. [36]). Таким образом, в настоящем обзоре интерес для нас в первую очередь представляют корреляторы вида (2.12). В разделах 3–6 мы увидим, как такие корреляторы возникают естественным образом.

Раскроем коммутаторы в (2.12) и представим $C(t)$ в виде суммы четырёх четырёхточечных функций:

$$\begin{aligned} C(t) &= 2 \text{tr} (V(t) \rho^{1/2} V(t) W \rho^{1/2} W) - \\ &- \text{tr} (\rho^{1/2} V(t) W \rho^{1/2} V(t) W) - \text{tr} (\rho^{1/2} W V(t) \rho^{1/2} V(t) W) = \\ &= 2 \text{ТОС}(t) - \text{ОТОС} \left(t - \frac{i\beta}{4} \right) - \text{ОТОС} \left(t + \frac{i\beta}{4} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где мы для краткости обозначили $W = W(0)$, ввели упорядоченный по времени коррелятор (Time-Ordered Correlator, ТОС) и упорядоченный вне времени коррелятор (ОТОС):

$$\begin{aligned} \text{ТОС}(t) &\equiv \text{tr} (V(t) \rho^{1/2} V(t) W \rho^{1/2} W), \\ \text{ОТОС}(t) &\equiv \text{tr} (\rho^{1/4} V(t) \rho^{1/4} W \rho^{1/4} V(t) \rho^{1/4} W). \end{aligned} \quad (2.14)$$

В зависимости $C(t)$ можно выделить два важных временных масштаба. Первый из них — это время диссипации t_d , которое определяет скорость затухания двухточечных корреляционных функций: $\langle V(t) V \rangle_\beta \sim \langle W(t) W \rangle_\beta \sim \langle V(t) W \rangle_\beta \sim \exp(-t/t_d)$. Как правило, $t_d \sim \beta$. На этом временном масштабе и ТОС, и ОТОС примерно равны произведению двух несвязных двухточечных функций, поэтому коммутатор $C(t)$ близок к нулю [9, 37, 38]:

$$\begin{aligned} \text{ТОС}(t) &\approx \text{ОТОС}(t) \approx \\ &\approx \langle VV \rangle_\beta \langle WW \rangle_\beta + \mathcal{O} \left(\exp \left(-\frac{t}{t_d} \right) \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N} \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где мы для краткости обозначили

$$\langle VV \rangle_\beta = \left\langle V \left(-\frac{i\beta}{2} \right) V \right\rangle_\beta = \text{tr} (\rho^{1/2} V \rho^{1/2} V).$$

Напомним, что мы рассматриваем предел больших N , поэтому число $1/N$ играет роль постоянной Планка $\hbar$.

Вторым временным масштабом является время скремблирования t_* . Как правило, t_* параметрически больше, чем t_d , а именно $t_* \sim \beta \log N$. Если система хаотична, то в течение длительного периода после времени диссипации и задолго до времени скремблирования коммутатор $C(t)$ экспоненциально возрастает, а ОТОС быстро убывает:

$$\begin{aligned} C(t) &\sim \frac{1}{N} \exp(\kappa t), \\ \text{ОТОС}(t) &\sim \langle VV \rangle_\beta \langle WW \rangle_\beta - \frac{A}{N} \exp(\kappa t), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где A — некоторый численный коэффициент. На больших временах $C(t)$ насыщается, а ОТОС стремится к нулю. Поскольку на таких временах ТОС практически не изменяется, возрастание $C(t)$ и убывание ОТОС фактически эквивалентны.

Таким образом, упомянутое выше поведение ОТОС и коммутатора $C(t)$ можно рассматривать в качестве признака квантового хаоса. В частности, оно позволяет рассчитать квантовую ляпуновскую экспоненту κ , которая, как ожидается, совпадёт с классической экспонентой (2.5) в квазиклассическом пределе.

Впрочем, мы бы хотели обратить внимание на два важных момента, касающихся ОТОС и квантового хаоса. Во-первых, необходимо иметь в виду, что аргументация этого раздела достаточно наивна и в действительности связь между экспоненциальным возрастанием $C(t)$ и классическим хаосом находится под вопросом. Существуют аргументы как в пользу указанной связи [39], так и против неё [40, 41]. По этой причине следует различать понятия "скремблирования" (экспоненциального возрастания ОТОС) и "хаоса" (экспоненциального возрастания среднего расстояния между фазовыми траекториями), несмотря на то что обычно их приравнивают друг к другу.

Во-вторых, ОТОС не являются единственной возможной мерой квантового хаоса; на самом деле, к настоящему моменту делалось несколько попыток распространить концепцию классического хаоса на квантовые системы. Наиболее примечательный альтернативный подход к квантовому хаосу³ основан на статистике близко расположенных энергетических уровней: если эта статистика согласуется с теорией случайных матриц, то систему можно считать хаотической [42–45]. Такой подход также тесно связан с гипотезой о термализации собственных состояний (Eigenstate Thermalization Hypothesis) [46–48], утверждающей, что при некоторых допущениях любой локальный оператор в изолированной квантовой системе стремится к тепловой форме:

$$V_{ij} = \langle E_i | V | E_j \rangle = \overline{V}(E) \delta_{ij} + \exp \left(-\frac{1}{2} S(E) \right) f(E, \omega) R_{ij}, \quad (2.17)$$

где $|E_i\rangle$ — состояние с энергией E_i , $S(E) = -\text{tr}(\rho \log \rho)$, $\overline{V}(E) = \text{tr}(\rho V)$, тепловая матрица плотности ρ фиксируется условием $E = \text{tr}(\rho H)$, $f(E, \omega) = f(E, -\omega)$ — гладкая действительная функция, R_{ij} — эрмитова случайная матрица с нулевым средним и единичной дисперсией. До сих пор неизвестно, связан ли этот старый подход с ОТОС, хотя существует несколько аргументов в пользу такого предположения [49–53]. В частности, показано, что модель SYK и двумерная конформная теория поля с большим центральным зарядом при некоторых допущениях ведут себя как теория случайных матриц [54–56], в то время как корреляционные функции в этих моделях имеют форму (2.16).

2.2. Быстрые скремблеры

Первоначальная мотивация к изучению ОТОС была основана на гипотезе о быстрых скремблерах, которая была предложена в [14, 15], доказана в [16] и переформу-

³ Вообще говоря, эта идея достаточно стара и хорошо разработана, так что она уже включена в учебники по хаосу (см., например, [43–45]).

лирована на языке корреляторов в [9]. Кратко обсудим эту гипотезу. Обратим внимание, что рассуждения данного раздела могут показаться довольно невнятными, если не иметь в виду конкретный пример. Такие примеры приведены в разделах 3–6.

Прежде всего рассмотрим некоторую сложную квантовую систему с большим числом степеней свободы N , приготовим чистое состояние $|\Psi\rangle$ и позволим этому состоянию свободно эволюционировать под действием унитарного оператора U . Согласно гипотезе о термализации собственных состояний можно ожидать, что после достаточно длительного промежутка времени система "термализуется", хотя её состояние остаётся чистым. Под "термализацией" мы понимаем ситуацию, в которой матрица плотности каждой малой подсистемы (с числом степеней свободы $m < N/2$) близка к тепловой матрице плотности или, что эквивалентно, энтропия запутывания⁴ каждой малой подсистемы близка к максимальному значению [57, 58]. Грубо говоря, по прошествии указанного времени информация о начальном состоянии размывается по всей системе, так что для её восстановления необходимо измерить $\mathcal{O}(N)$ степеней свободы. По аналогии с техническим термином такой процесс называют скремблированием [14].

Далее возмущим небольшое число степеней свободы скремблированной системы и снова позволим ей свободно эволюционировать. Мы ожидаем, что через некоторое время информация о возмущении опять распределится по всем степеням свободы и система вернётся в скремблированное состояние. Время, в течение которого это произойдёт, называют временем скремблирования.

Гипотеза о быстрых скремблерах [14–16] утверждает, что время скремблирования не может быть меньше $t_*^{\min} \sim \beta \log N$. Более того, это ограничение насыщается для чёрных дыр (если они удовлетворяют всем явным и неявным предположениям гипотезы), что превращает их в "быстрейшие с большим преобладанием скремблеры в природе"⁵. Некоторое время также предполагалось, что пространства Риндлера и де Ситтера насыщают ограничение наравне с чёрными дырами [15], однако последовавшие прямые вычисления⁶ не подтвердили это предположение [59, 60]. Гипотеза о быстрых скремблерах имеет большое значение для информационного клонирования и информационного парадокса чёрных дыр [61–63].

Для того чтобы оценить время скремблирования, надо выяснить, как быстро малое возмущение распространяется по всей системе. В некоторых специальных случаях за этим процессом можно проследить непосредственно [64, 65], однако гораздо чаще приходится полагаться на неявные признаки скремблирования. В сущности, таких признаков два.

⁴ Напомним, что энтропия запутывания подсистемы L определяется как $S_L = -\text{tr}_L(\rho_L \log \rho_L)$, где след берётся по гильбертову пространству L , $\rho_L = \text{tr}_R |\Psi\rangle\langle\Psi|$, R — дополнение L .

⁵ Для конечномерных систем ограничение можно ужесточить: $t_*^{\min} \sim \beta N^{2/d}$, где d — размерность пространства [14]. Например, в трёх измерениях $t_*^{\min} \sim \beta N^{2/3}$. Таким образом, с этой точки зрения чёрные дыры представляются бесконечномерными системами.

⁶ Первоначальная аргументация статьи [15] основывалась на том, что при приближении к горизонту часы идут как $\exp(2\pi t/\beta)$, где t — время бесконечно далёкого наблюдателя. Однако позднее выяснилось, что данное условие не является достаточным для насыщения ограничения. Это хорошее напоминание о том, как важно чётко проговаривать все предположения, в которых формулируется гипотеза.

Первый способ "ухватить" скорость скремблирования заключается в том, чтобы приготовить удвоенное термополевое (ThermoField Double, TFD) состояние, которое описывает две идентичные тепловые подсистемы:

$$|\text{TFD}\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_n \exp\left(-\frac{1}{2} \beta E_n\right) |n\rangle_L \otimes |n\rangle_R, \quad (2.18)$$

$$\text{так что } \rho_L = \rho_R = \frac{1}{Z} \sum_n \exp(-\beta E_n) |n\rangle\langle n|,$$

а затем возмутить одну подсистему некоторым локальным оператором и проверить, как изменяется со временем взаимная информация, $I_{LR} = S_L + S_R - S_{LR}$ (определение S дано в сноске 4). Обычно подсистемы называют "левой" (L) и "правой" (R), что объясняет нижние индексы у S . Перед возмущением обе подсистемы являются сильно коррелированными, поэтому взаимная информация отлична от нуля. Однако постепенно возмущение разрастается и затрагивает всё больше степеней свободы. Например, для локального оператора V и обобщённого гамильтониана H , описывающего локальное взаимодействие, k -й член в разложении проэволюционировавшего оператора $V(t) = \exp(iHt)V\exp(-iHt)$ может сводиться к произведению k локальных операторов:

$$V(t) = V + it[H, V] + \frac{(it)^2}{2!} [H, [H, V]] + \dots + \frac{(it)^k}{k!} [H, [H, \dots [H, V]]] + \dots \quad (2.19)$$

Таким образом, можно ожидать, что рано или поздно возмущение распространится по всей системе, запутанность между левой и правой подсистемами исчезнет и взаимная информация устремится к нулю. Следовательно, момент времени t_* , в который $I_{LR}(t_*) \approx 0$, можно рассматривать в качестве оценки времени скремблирования. Пример подобного вычисления можно найти, например, в [26, 35, 66–68]. В частности, это вычисление воспроизводит предложенное ограничение $t_* \sim \beta \log N$ для чёрных дыр [26, 35].

Второй способ оценить t_* основан на вычислении упорядоченных вне времени корреляторов (ОТОС), определённых в разделе 2.1. Попробуем качественно объяснить, почему такие корреляторы чувствительны к скремблированию. Как замечено в [9, 25, 26, 35], ОТОС можно представить в виде двухсторонней корреляционной функции в возмущённом состоянии TFD:

$$\begin{aligned} \text{ОТОС}(t) &= \left\langle V\left(t - \frac{i\beta}{4}\right) W(0) V\left(t + \frac{i\beta}{4}\right) W\left(\frac{i\beta}{2}\right) \right\rangle_\beta = \\ &= \langle \psi | W_L W_R | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где V и W — локальные эрмитовы операторы, $W_L = W^\dagger \otimes 1$ действует на левую подсистему, $W_R = 1 \otimes W$ — на правую, возмущённое состояние выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= V_L\left(t + \frac{i\beta}{4}\right) |\text{TFD}\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_{nm} \exp\left[-\frac{\beta}{4}(E_m + E_n)\right] V(t)_{nm} |m\rangle_L \otimes |n\rangle_R. \end{aligned} \quad (2.21)$$

На малых временах действие V затрагивает только $\mathcal{O}(1)$ степеней свободы и не может существенно изменить глобальную картину корреляций, поэтому возмущённое

состояние близко к чистому $|TFD\rangle$. Таким образом, левая и правая подсистемы сильно запутаны, а коррелятор велик, т.е. $OTOC(t) \approx \langle VV \rangle_\beta \langle WW \rangle_\beta$. Тем не менее со временем возмущение захватывает другие степени свободы и разрушает хрупкую картину корреляций, так что в конечном итоге ОТОС стремится к нулю. В такой постановке время скремблирования — это время, в течение которого насыщается ОТОС: $OTOC(t_*) \approx 0$ или $C(t_*) \approx 2\langle VV \rangle_\beta \langle WW \rangle_\beta$.

Что здесь действительно представляет интерес — так это скорость, с которой ОТОС приближается к нулю. Из общих соображений можно ожидать, что в пределе больших N и малых времён эволюции первая поправка к ОТОС по порядку совпадает с $\mathcal{O}(1/N)$:

$$\frac{OTOC(t)}{\langle VV \rangle_\beta \langle WW \rangle_\beta} = 1 - \frac{A}{N} f(t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad (2.22)$$

где A — некоторый положительный множитель порядка $\mathcal{O}(1)$, $f(t)$ — некоторая монотонно возрастающая функция. Распространяя это приближение на большие времена, можно качественно оценить время скремблирования как $t_* \sim f^{-1}(N/A)$, где f^{-1} — обратная функция к f , $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1$. В то же время гипотеза о быстрых скремблерах утверждает, что $t_* \gtrsim \beta \log N$. Следовательно, функция f не может возрастать со временем быстрее, чем экспоненциально, $f(t) \lesssim \exp(\kappa t)$. Показатель возрастания также ограничен, $\kappa \leq B/\beta$, где B — некоторая универсальная положительная постоянная порядка $\mathcal{O}(1)$. Этот аналог гипотезы о быстрых скремблерах доказан в [9] и назван "ограничением на хаос"⁷:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\langle VV \rangle_\beta \langle WW \rangle_\beta - OTOC(t)] &\leq \\ &\leq \frac{2\pi}{\beta} [\langle VV \rangle_\beta \langle WW \rangle_\beta - OTOC(t)], \quad \text{т.е. } \kappa \leq \frac{2\pi}{\beta}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Заметим, что для системы, которая насыщает ограничение на f , число κ можно рассматривать как аналог классической ляпуновской экспоненты из раздела 2.1.

Более того, ОТОС оказывается очень удобной мерой пространственного роста операторов. В $(d > 1)$ -мерных хаотических системах (т.е. системах с $f(t) \sim \exp(\kappa t)$) экспоненциальное возрастание со временем, как правило, дополняется [70] зависящим от пространственной координаты затухающим множителем: $f(t) \sim \exp[\kappa(t - |x|/v_B)]$, где $|x|$ — расстояние до исходного возмущения, вызванного оператором V , v_B — некоторая положительная постоянная. Легко увидеть, что ОТОС существенно отличается от нуля только внутри шара радиусом $r < v_B t$. Этот шар можно интерпретировать как область, затронутую возмущением, т.е. "размер" проэволюционировавшего оператора V . По этой причине постоянную v_B называют "скоростью бабочки". Обсуждение и примеры пространственного роста операторов можно найти, например, в [26, 70–74].

Разумеется, по сравнению со взаимной информацией ОТОС — это очень грубая мера скремблирования. В частности, I_{LR} убывает до нуля практически сразу после t_* , тогда как ОТОС на таких временах едва начинают затухать [26]. Однако на практике вычислить

корреляционные функции гораздо легче, чем взаимную информацию, и это делает ОТОС очень популярным инструментом. К настоящему моменту ОТОС вычислены для огромного числа систем, включая чёрную дыру BTZ [26, 74–76], двумерную CFT [35, 77, 78], пространство де Ситтера (AdS) [59, 60], модель SYK [1, 4–8] и её аналоги [79–82], двумерную дилатонную гравитацию [10, 11], матричные модели [27, 83] и, разумеется, множество различных квантовых многочастичных систем [29, 30, 71–73, 84–94]. Далее мы более подробно рассмотрим два наиболее примечательных примера: модель SYK (см. разделы 3 и 4) и 2D-дилатонную гравитацию (см. раздел 5).

Наконец, подчеркнём, что рассуждения, приведённые в статьях [9, 14–16], справедливы только для близких к равновесию систем (например, большой квазиклассической чёрной дыры или чёрной дыры в пространстве AdS), таких, в которых слабое возмущение, вызванное оператором V , не может существенно повлиять на основное состояние. Как правило, ОТОС вычисляют именно для таких систем. Указанное предположение позволяет использовать равновесную (мадубаровскую) диаграммную технику и применять процедуру аналитического продолжения к корреляционным функциям. Тем не менее эта интуиция не работает, если возмущение слишком сильное или система далека от равновесия (например, для малых чёрных дыр). В последнем случае необходимо использовать неравновесную диаграммную технику (Швингера–Келдыша) и учитывать, что основное состояние системы может изменяться со временем [95, 96]. Примеры таких вычислений для чёрных дыр и пространства де Ситтера можно найти в [20, 97–101], а обобщение неравновесной техники для ОТОС описывается в [84, 102]. Тем не менее до сих пор неизвестно, можно ли распространить аргументацию [9, 14–16] на случай неравновесных систем.

3. Основы модели Сачдева–Йе–Китаева

Модель SYK является одной из самых примечательных моделей квантового хаоса и голографии. Благодаря своим замечательным свойствам она служит прекрасной игрушечной моделью для большого числа физических явлений, включая проходимость кротовые норы [17–20] и странные металлы [21–23]. По этой причине рассмотрим модель SYK подробно.

По большей части этот раздел основан на пионерских работах [4–6] и докладах А. Китаева [1]. Обзоры [103, 104] также содержат некоторые полезные рассуждения. Для простоты мы рассматриваем модель с четырёхфермионным взаимодействием ($q = 4$), которая является простейшим нетривиальным и невырожденным случаем. Обобщение для других случаев ($q \geq 2$) практически очевидно и может быть найдено в упомянутых работах.

В этом разделе мы обсуждаем самые простые и самые важные свойства модели SYK: диаграммную технику в пределе больших N , возникновение конформной симметрии в ИК-пределе, эффективное и шварцианное действия. Вычисление четырёхточечной функции ввиду его громоздкости помещено в раздел 4.

3.1. Основные определения

Модель SYK — это квантово-механическая модель, которая описывает $N \gg 1$ майорановских фермионов со

⁷ На самом деле, для гравитационного рассеяния массивных частиц со спином $J > 2$ можно ожидать, что $\kappa \sim (2\pi/\beta)(J - 1)$. Тем не менее доказано, что такие процессы нарушают причинность и унитарность [9, 69].

взаимодействием все-со-всеми:

$$I_{\text{SYK}} = \int d\tau \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \chi_i(\tau) \dot{\chi}_i(\tau) - \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N J_{ijkl} \chi_i(\tau) \chi_j(\tau) \chi_k(\tau) \chi_l(\tau) \right], \quad (3.1)$$

где $\dot{\chi}_i = d\chi_i/d\tau$, τ — евклидово (мнимое) время, связанное с лоренцевым (действительным) временем t поворотом Вика: $\tau = it$. В этом разделе мы работаем в евклидовом времени, если не оговорено особо. Операторы χ_i эрмитовы, $\chi_i = \chi_i^\dagger$, и удовлетворяют обычным антикоммутационным соотношениям:

$$\{\chi_i, \chi_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

Дополнительная информация о представлениях одномерной алгебры Клиффорда дана в приложении А. Заметим, что в одномерном случае майорановские фермионы безразмерны. Константы связи J_{ijkl} распределены случайно и независимо, т.е. в соответствии с распределением Гаусса⁸ со следующей плотностью вероятности (вычисление математического ожидания таких величин будем называть усреднением по беспорядку):

$$P(J_{ijkl}) = \exp\left(-\frac{N^3 J_{ijkl}^2}{12J^2}\right) \text{ для каждого } J_{ijkl}. \quad (3.3)$$

Подчеркнём, что суммирование по i, j, k и l не подразумевается. Такое распределение приводит к нескольким замечательным свойствам. Во-первых, оно фиксирует средние и средние квадраты констант связи:

$$\overline{J_{ijkl}} = 0, \quad \overline{J_{ijkl}^2} = \frac{3!J^2}{N^3}, \quad (3.4)$$

где J — постоянная с размерностью массы. Во-вторых, чётные моменты разбиваются на сумму всех возможных произведений вторых моментов (средних квадратов), что напоминает теорему Вика для среднего от чётного числа констант связи. Например,

$$\begin{aligned} \overline{J_{i_1 i_2 i_3 i_4} J_{j_1 j_2 j_3 j_4} J_{k_1 k_2 k_3 k_4} J_{l_1 l_2 l_3 l_4}} &= \overline{J_{i_1 i_2 i_3 i_4} J_{j_1 j_2 j_3 j_4}} \overline{J_{k_1 k_2 k_3 k_4} J_{l_1 l_2 l_3 l_4}} + \\ &+ \overline{J_{i_1 i_2 i_3 i_4} J_{k_1 k_2 k_3 k_4}} \overline{J_{j_1 j_2 j_3 j_4} J_{l_1 l_2 l_3 l_4}} + \overline{J_{i_1 i_2 i_3 i_4} J_{l_1 l_2 l_3 l_4}} \overline{J_{j_1 j_2 j_3 j_4} J_{k_1 k_2 k_3 k_4}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Чтобы выполнить упомянутое выше усреднение на практике, необходимо сгенерировать много копий системы со случайно выбранными константами связи⁹, вычислить нужную величину и усреднить результат, подсчитанный для разных копий. Причина, по которой необходимо требовать свойства (3.4) и (3.5), объяснена¹⁰ в разделе 3.2.

⁸ Обобщение на негауссовы распределения можно найти в работе [105].

⁹ Вообще говоря, если вычислять только экстенсивные величины, такие как энергия и энтропия, то в пределе больших N достаточно рассмотреть только одну конкретную реализацию случайно распределённых констант связи. В самом деле, систему с большим числом степеней свободы N можно разделить на большое число больших подсистем, по которым экстенсивные величины автоматически производят усреднение.

¹⁰ Также можно рассмотреть обобщения этой модели с динамическими константами связи. В частности, фермионные тензорные модели в пределе больших N воспроизводят все основные свойства модели SYK, без привлечения усреднения по беспорядку. Обзор этих моделей можно найти в разделе 6.2 и работах [106–111].

Заметим, что из антикоммутационных соотношений (3.2) следует антисимметричность констант связи:

$$J_{ijkl} = \text{sgn } \sigma J_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)\sigma(l)}, \quad (3.6)$$

где $\sigma: i \rightarrow \sigma(i)$, $i = 1, \dots, N$.

Во-первых, это снижает число независимых компонент тензора J_{ijkl} до $N!/[(N-4)!]$. Во-вторых, позволяет определить усреднённое по беспорядку произведение двух произвольных констант связи:

$$\overline{J_{i_1 i_2 i_3 i_4} J_{j_1 j_2 j_3 j_4}} = \frac{3!J^2}{N^3} \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \delta_{i_1 \sigma(j_1)} \delta_{i_2 \sigma(j_2)} \delta_{i_3 \sigma(j_3)} \delta_{i_4 \sigma(j_4)}, \quad (3.7)$$

где суммирование выполняется по всем возможным перестановкам индексов. В сущности, эта сумма просто проверяет, совпадают ли переменные $J_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ и $J_{j_1 j_2 j_3 j_4}$.

Важным частным случаем этого соотношения, с которым мы столкнёмся ниже, является случай трёх совпадающих индексов:

$$\begin{aligned} \sum_{k,l,m=1}^N \overline{J_{iklm} J_{jklm}} &= \frac{3!J^2}{N^3} \sum_{k,l,m=1}^N \delta_{ij} \delta_{kk} \delta_{ll} \delta_{mm} + \dots = \\ &= \frac{3!J^2}{N^3} (N^3 \delta_{ij} + \mathcal{O}(N^2)) = 3!J^2 \delta_{ij} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Стоит также уточнить интервал изменения евклидова времени τ . Здесь мы рассматриваем два тесно связанных случая: евклидову прямую, $\tau_{\text{line}} \in (-\infty, \infty)$, и евклидову окружность: $\tau_{\text{circle}} \in [-\beta/2, \beta/2]$, $\tau + \beta \sim \tau$. Первый случай описывает квантовую механику при нулевой температуре, тогда как второй отвечает тепловому состоянию с обратной температурой $\beta = 1/T$. Ниже мы будем использовать следующее отображение, чтобы переключаться между евклидовыми прямой и окружностью:

$$\tau_{\text{line}} = \tan \frac{\pi \tau_{\text{circle}}}{\beta}. \quad (3.9)$$

Заметим, что отображающая функция действительна и монотонна, т.е. сохраняет порядок времён: $d\tau_{\text{line}}/d\tau_{\text{circle}} > 0$.

Наконец, заметим, что в свободной теории гамильтониан равен нулю, $H_0(\tau) = 0$. Это означает, что операторы постоянны даже в представлении Гейзенберга: $\chi_i(\tau) = \exp(\tau H_0) \chi_i(0) \exp(-\tau H_0) = \chi_i(0)$. Следовательно, с помощью антикоммутационных соотношений (3.2) можно найти двухточечную корреляционную функцию в свободной теории при нулевой температуре:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \chi_i(\tau) \chi_j(0) | 0 \rangle &\equiv \theta(\tau) \langle 0 | \chi_i \chi_j | 0 \rangle - \theta(-\tau) \langle 0 | \chi_j \chi_i | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \text{sgn } \tau \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

и при конечной температуре:

$$\langle T \chi_i(\tau) \chi_j(0) \rangle_{\beta} = \frac{1}{2} \text{sgn} \left(\sin \frac{\pi \tau}{\beta} \right) \delta_{ij}. \quad (3.11)$$

Здесь $|0\rangle$ обозначает вакуумное состояние в свободной теории, а $\langle \dots \rangle_{\beta}$ — усреднение по тепловому распределению, дополненное квантовым усреднением:

$$\langle \dots \rangle_{\beta} \equiv \frac{\text{tr} [\exp(-\beta H) \dots]}{\text{tr} [\exp(-\beta H)]}. \quad (3.12)$$

Более строгий вывод пропагаторов дан в приложении А.

Заметим, что тепловой пропагатор фермионов анти-периодичен благодаря антикоммутиационному правилу (3.2). Например, для $\tau > 0$:

$$\begin{aligned} \text{tr} [\exp(-\beta H) \chi(\tau + \beta) \chi(0)] &= \text{tr} [\chi(\tau) \exp(-\beta H) \chi(0)] = \\ &= \text{tr} [\exp(-\beta H) \chi(0) \chi(\tau)] = -\text{tr} [\exp(-\beta H) \chi(\tau) \chi(0)]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Наконец, оказывается удобным определить усреднённые корреляционные функции:

$$G_0(\tau) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{T} \chi_i(\tau) \chi_i(0) \rangle = \frac{1}{2} \text{sgn } \tau, \quad (3.14)$$

$$G_0^\beta(\tau) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{T} \chi_i(\tau) \chi_i(0) \rangle_\beta = \frac{1}{2} \text{sgn} \left(\sin \frac{\pi \tau}{\beta} \right). \quad (3.15)$$

Заметим, что для $\tau \in [-\beta/2, \beta/2)$ тепловой пропагатор (3.15) совпадает с пропагатором при нулевой температуре (3.14). Также заметим, что любая функция Грина фермионов антисимметрична: $G(\tau) = -G(-\tau)$.

3.2. Двухточечная функция и диаграммная техника

Включим член взаимодействия

$$H(\tau) = \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l} J_{ijkl} \chi_i(\tau) \chi_j(\tau) \chi_k(\tau) \chi_l(\tau) \quad (3.16)$$

и вычислим усреднённые по беспорядку петлевые поправки к пропагаторам. Для большей ясности сначала вернёмся к лоренцеву времени, разложим оператор эволюции и вычислим несколько первых порядков по J . Оператор эволюции даётся следующим выражением:

$$\begin{aligned} U(t_1, t_2) &\equiv \mathcal{T} \exp \left[-i \int_{t_2}^{t_1} dt H(t) \right] = \\ &= 1 - i \int_{t_2}^{t_1} dt H(t) - \int_{t_2}^{t_1} dt \int_{t_2}^t dt' H(t) H(t') + \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

Точный пропагатор $G(t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} G(t) \delta_{ij} &= \langle \mathcal{T} U^\dagger(t, -\infty) \chi_i(t) U(t, 0) \chi_j(0) U(0, -\infty) \rangle = \\ &= \frac{\langle \mathcal{T} \chi_i(t) \chi_j(0) U(+\infty, -\infty) \rangle}{\langle U(+\infty, -\infty) \rangle}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Здесь мы использовали унитарность $U(t_1, t_2)$ и предположили, что вакуумное состояние не возмущается при адиабатическом включении и выключении взаимодействия [98, 112]. Заметим, что переходить в представление взаимодействия не обязательно, поскольку $H_0 = 0$. Теперь разложим представленное выше выражение и усредним его по беспорядку:

$$\begin{aligned} G(t) \delta_{ab} &= \left\langle \mathcal{T} \left[\chi_a(t) \chi_b(0) - \right. \right. \\ &- \frac{i}{4!} \sum_{i,j,k,l} \overline{J_{ijkl}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \chi_a(t) \chi_b(0) \chi'_i(t') \chi'_j(t') \chi'_k(t') \chi'_l(t') - \\ &- \frac{1}{2} \frac{1}{(4!)^2} \sum_{i,j,k,l,p,q,r,s} \overline{J_{ijkl} J_{pqrs}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \times \\ &\times \left. \left. \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' \chi_a(t) \chi_b(0) \chi'_i(t') \chi'_j(t') \chi'_k(t') \chi'_l(t') \chi''_p(t'') \chi''_q(t'') \chi''_r(t'') \chi''_s(t'') + \mathcal{O}(J^3) \right] \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.19)$$

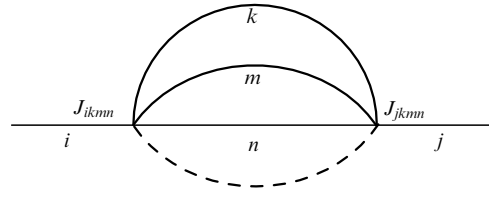


Рис. 1. Мелонная диаграмма.

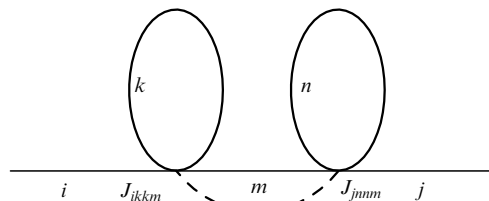


Рис. 2. Диаграмма "двойной головастик", которая тождественно равна нулю.

где для краткости мы обозначили $\chi_i(t') \equiv \chi'_i$ и $\chi_i(t'') \equiv \chi''_i$. Мы также использовали, что в пределе больших N усреднение по беспорядку в числителе и знаменателе (3.19) можно выполнить независимо.

Теперь можно заметить, что правила (3.4), (3.5) и (3.7) выделяют довольно специальный тип вакуумных средних. Во-первых, несвязная часть средних факторизуется как обычно. Во-вторых, нечётные степени J_{ijkl} исчезают после усреднения по беспорядку. В-третьих, связанная часть (3.19) сводится к следующему выражению:

$$\begin{aligned} G(t) - G_0(t) &= \frac{2 \times 4 \times 4!}{2(4!)^2} \frac{1}{N} \sum_{i,j,k,m,n} \overline{J_{ikmn} J_{jkmn}} \delta_{ij} \times \\ &\times \int dt' dt'' G_0(t-t') G_0^3(t'-t'') G_0(t'') + \mathcal{O}(J^4) = \\ &= J^2 \int dt' dt'' G_0(t-t') G^3(t'-t'') G(t'') + \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{J^2}{N}\right) + \mathcal{O}(J^4). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь мы применили теорему Вика к вакуумным средним, свернули константы связи с символами Кронекера, которые приходят из свободных пропагаторов (3.10), воспользовались антисимметрией J_{ijkl} , чтобы найти численные коэффициенты¹¹ и применили соотношение (3.8), чтобы выделить лидирующий порядок по N . Выражение (3.20) можно наглядно представить с помощью так называемых мелонных (или дынных) диаграмм (рис. 1). Вторая диаграмма второго порядка (рис. 2) тождественно равна нулю, поскольку она содержит константы связи с совпадающими индексами. На этих диаграммах сплошные линии обозначают фермионные пропагаторы, штриховые — усреднение по хаосу.

Используя теорему Вика и соотношение (3.7), можно также найти поправки более высоких порядков, которые описываются соответствующими диаграммами (рис. 3). Каждая диаграмма пропорциональна определённой сте-

¹¹ Все возможные свёртки дают $4 \times 4 \times 3 \times 2$, и антисимметрия при замене $t' \leftrightarrow t''$ даёт 2.

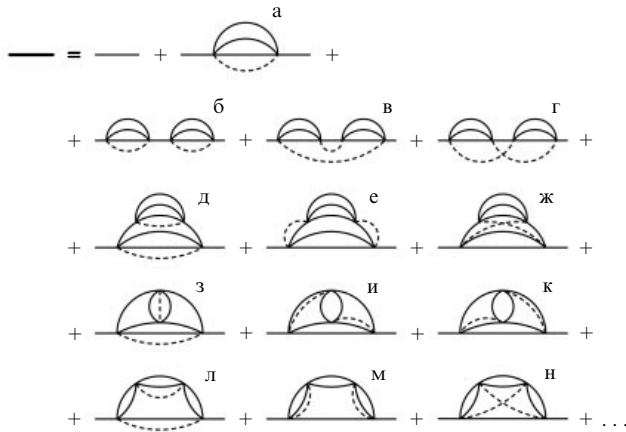


Рис. 3. Поправки к пропагаторам второго (а) и четвертого (б–н) порядка. Единственные диаграммы, которые выживают в пределе $N \rightarrow \infty$, — диаграммы (а), (б) и (д).

пени J и N . Степень J просто равна количеству вершин диаграммы (вершина взаимодействия пропорциональна J). Между степенью N и формой диаграммы простой связи нет. Тем не менее легко увидеть, что единственные диаграммы, которые выживают в пределе $N \rightarrow \infty$ — это мелонные диаграммы, поскольку выражение (3.8) — единственное выражение порядка $J^2 N^0$. Грубо говоря, все символы Кронекера в (3.8) сворачиваются напрямую (произведения вида δ_{ii}), тогда как в других средних они сворачиваются через другие дельта-символы (произведения вида $\delta_{ij}\delta_{ji}$). Чем длиннее "путь" для сворачивания индексов, тем меньше степень N .

Для примера сравним двойную мелонную (рис. 3б или 3д) и немелонную диаграммы (например, рис. 3з). Двойная мелонная диаграмма содержит следующее усреднение по беспорядку:

$$\frac{J^4}{N^6} \sum J_{iklm} J_{nklm} J_{npqr} J_{jpqr} \propto \frac{J^4}{N^6} \sum \delta_{in} \delta_{kk} \delta_{ll} \delta_{mm} \delta_{jn} \delta_{pp} \delta_{qq} \delta_{rr} + \dots = J^4 + \mathcal{O}\left(\frac{J^4}{N}\right). \quad (3.21)$$

Очевидно, что свёртка шести дельта-символов вида δ_{mn} даст N^6 , так что общий порядок диаграммы равен $J^4 N^0$. В то же время диаграмма на рис. 3з содержит немного изменённое среднее:

$$\frac{J^4}{N^6} \sum J_{iklm} J_{jqrm} J_{krnp} J_{qlnp} \propto \frac{J^4}{N^6} \sum \delta_{ij} \delta_{kq} \delta_{lr} \delta_{mm} \delta_{kq} \delta_{lr} \delta_{nn} \delta_{pp} + \dots = \mathcal{O}\left(\frac{J^4}{N}\right). \quad (3.22)$$

Здесь степень N^5 обеспечивается свёрткой δ_{mm} , δ_{nn} , δ_{pp} , $\delta_{kq}\delta_{kq}$ и $\delta_{lr}\delta_{lr}$. Можно заметить, что два "пути" свёртки удлинились и один "путь" свёртки укоротился, так что общая степень по N сократилась на единицу. Другие возможные произведения символов Кронекера, которые следуют из (3.7), приводят к не менее длинным "путям" свёртки.

Таким образом, единственный тип диаграмм, который выживает в пределе $N \rightarrow \infty$, — это мелонные диаграммы (рис. 3а, б, д и т.д.). Более того, нет нужды бес-



Рис. 4. Уравнение Дайсона – Швингера, которое суммирует мелонные диаграммы. Тонкие линии отвечают древесным пропагаторам, жирные — точным.

покоиться о знаках и численных коэффициентах перед такими диаграммами, поскольку все "дыни" приходят из выражений вида (3.20) с одним и тем же численным коэффициентом. В сущности, поправку (см. рис. 1) можно представлять себе как цельный блок, который можно вставить в любую древесную линию (в том числе внутри самого себя).

Недавно доминирование мелонных диаграмм также было строго доказано [113] с помощью комбинаторного анализа и обобщений модели [114]. Мы не будем обсуждать эти доказательства.

Заметим, что в этом разделе мы работали в пределе нулевой температуры, $\beta = \infty$, т.е. вычисляли вакуумные средние. Тем не менее полученные результаты легко обобщить для случая конечных температур, поскольку усреднение по беспорядку не зависит от температуры и всегда выделяет мелонные диаграммы. Неважно, какую технику использовать: Фейнмана или Мацубары — произведения символов Кронекера и численные множители перед диаграммами будут одинаковыми.

3.3. Уравнение Дайсона – Швингера и инфракрасный предел

Используя результаты раздела 3.2, можно легко выписать уравнение Дайсона – Швингера (ДШ) в пределе $N \rightarrow \infty$:

$$G(\tau_1, \tau_2) = G_0(\tau_1, \tau_2) + \int d\tau_3 d\tau_4 G_0(\tau_1, \tau_3) \Sigma(\tau_3, \tau_4) G(\tau_4, \tau_2), \quad (3.23)$$

$$\Sigma(\tau_1, \tau_2) \equiv J^2 G^3(\tau_1, \tau_2).$$

Уравнение (3.23) суммирует только мелонные диаграммы, которые доминируют в указанном пределе. Здесь мы для удобства вернулись обратно к евклидову времени и учли, что поправки к каждой древесной линии "дыни" могут бесконечно расти вверх (как на рис. 3д) и вправо (как на рис. 3б), в результате чего древесные линии заменяются точными (рис. 4). Это уравнение (с соответствующими пределами интегрирования по τ) выполняется и при нулевой, и при конечной температуре.

Благодаря трансляционной инвариантности точный пропагатор зависит только от разницы времён: $G(\tau_1, \tau_2) = G(\tau_1 - \tau_2)$, $\Sigma(\tau_1, \tau_2) = \Sigma(\tau_1 - \tau_2)$. Следовательно, можно сделать преобразование Фурье уравнения (3.23):

$$G^{-1}(\omega) = -i\omega - \Sigma(\omega), \quad (3.24)$$

где мы подставили явный вид древесного пропагатора:

$$G_0(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(i\omega\tau) \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \tau = \frac{i}{\omega + i0}, \quad (3.25)$$

$$\text{т.е. } G_0^{-1}(\omega) = -i\omega.$$

Уравнение (3.23) можно решить численно. Кроме того, в пределе низких частот, $\omega \ll J$ (т.е. $J\tau \gg 1$), и сильной

связи, $\beta J \gg 1$, также можно приближённо найти его аналитическое решение. Для простоты сначала рассмотрим случай нулевой температуры, $\beta = \infty$. Из анализа размерностей можно ожидать, что в указанном пределе точный пропагатор убывает как $G(\tau) \sim \tau^{-1/2}$. Следовательно, левой частью уравнения (3.23) можно пренебречь, после чего уравнение сведётся к следующему (ниже мы покажем, что это приближение действительно выполняется):

$$0 = G_0(\tau_1, \tau_2) + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_3 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_4 G_0(\tau_1, \tau_3) \Sigma(\tau_3, \tau_4) G(\tau_4, \tau_2), \quad (3.26)$$

отсюда

$$\int d\tau \Sigma(\tau_1, \tau) G(\tau, \tau_2) = -\delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (3.27)$$

Чтобы получить второе равенство, мы продифференцировали соотношение (3.26) по τ_1 , учли равенство $\partial_1 G_0(\tau_1, \tau_2) = \delta(\tau_1 - \tau_2)$ и взяли интеграл по τ_3 . Очевидно, что это уравнение можно также получить, просто отбросив обратный древесный пропагатор в (3.24):

$$G^{-1}(\omega) \approx -\Sigma(\omega), \text{ или } \Sigma(\omega)G(\omega) \approx -1. \quad (3.28)$$

Это просто преобразование Фурье уравнения (3.27). Заметим, что в обсуждаемом пределе уравнение (3.26) инвариантно относительно репараметризаций времени, $\tau \rightarrow f(\tau)$, $f'(\tau) > 0$:

$$G(\tau_1, \tau_2) \rightarrow G[f(\tau_1), f(\tau_2)] f'(\tau_1)^A f'(\tau_2)^A, \quad (3.29)$$

$$\Sigma(\tau_1, \tau_2) \rightarrow \Sigma[f(\tau_1), f(\tau_2)] f'(\tau_1)^{3A} f'(\tau_2)^{3A},$$

где $A = 1/4$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int df(\tau) \Sigma[f(\tau'), f(\tau)] G[f(\tau), f(\tau'')] &= \\ &= \frac{\int d\tau \Sigma(\tau', \tau) G(\tau, \tau'')}{f'(\tau')^{1/4} f'(\tau'')^{3/4}} = \\ &= \frac{-\delta(\tau' - \tau'')}{f'(\tau')} = -\delta[f(\tau') - f(\tau'')]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Подчёркнём, что репараметризации должны сохранять ориентацию евклидовой окружности — в противном случае последнее равенство в (3.30) не выполняется.

Таким образом, мы получили, что в ИК-пределе фермионы приобретают аномальную конформную размерность¹² $A = 1/4$. Это указывает на следующий анзац, решающий уравнение ДШ:

$$G_c(\tau_1, \tau_2) = B \frac{\text{sgn } \tau_{12}}{|J\tau_{12}|^{2A}}, \quad (3.31)$$

где $\tau_{12} \equiv \tau_1 - \tau_2$ и B — некоторый численный коэффициент, который определён ниже. Индекс s означает "конформный". Принимая во внимание следующий интеграл, который сводится к гамма-функции после поворота на $\pi/2$ в комплексной плоскости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(i\omega\tau) \frac{\text{sgn } \tau}{|\tau|^{2D}} = 2i\Gamma(1 - 2D) \cos(\pi D) |\omega|^{2D-1} \text{sgn } \omega, \quad (3.32)$$

¹² Вообще говоря, в модели с q -фермионным взаимодействием фермионы приобретают размерность $A = 1/q$.

можно показать, что предложенный анзац действительно решает уравнение (3.26), а также найти коэффициент B :

$$G_c(\tau) = \frac{1}{(4\pi)^{1/4}} \frac{\text{sgn } \tau}{|J\tau|^{2A}}. \quad (3.33)$$

Заметим, что решение стремится к нулю в пределе $J(\tau_1 - \tau_2) \rightarrow \infty$, что подтверждает самосогласованность приближения, в котором получено уравнение (3.26). Впервые это решение было найдено Сачдевом и Йе для системы случайно связанных спинов [2].

Наконец, репараметризационная инвариантность (3.29) позволяет найти точный пропагатор при конечной температуре, не решая соответствующее уравнение ДШ [115]. В самом деле, пропагаторы при нулевой и конечной температурах связаны отображением (3.9), которое удовлетворяет условию $f'(\tau) > 0$. Следовательно, мы можем просто применить это отображение к выражению (3.33):

$$G_c^\beta(\tau) = \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{2\beta J}} \frac{\text{sgn}[\sin(\pi\tau/\beta)]}{|\sin(\pi\tau/\beta)|^{2A}}, \quad \tau \in \left[-\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}\right). \quad (3.34)$$

Здесь мы подставили правильную функцию sgn из раздела 3.1, что позволяет обобщить (3.34) для произвольных времён. В то же время очевидно, что $\text{sgn}[\sin(\pi\tau/\beta)] = \text{sgn}[\tan(\pi\tau/\beta)] = \text{sgn } \tau$ для $\tau \in [-\beta/2, \beta/2)$. Также заметим, что в пределе $\tau \ll \beta$ выражения (3.33) и (3.34) совпадают.

Напомним, что $G_c(\tau)$ и $G_c^\beta(\tau)$ приблизительно равны точным пропагаторам $G(\tau)$ и $G^\beta(\tau)$ только для достаточно больших времён $\tau \gg 1/J$. В то же время в ультрафиолетовом (УФ) пределе ($\tau \ll 1/J$) точные пропагаторы приблизительно равны древесным, $G_0(\tau)$ и $G_0^\beta(\tau)$ соответственно. В промежуточной области $G(\tau)$ и $G^\beta(\tau)$ интерполируют между этими функциями (пример приведён на рис. 5).

После аналитического продолжения в лоренцево время $t = -i\tau$ (3.34) превращается в следующую двухточечную функцию¹³:

$$G_c^\beta(t) = \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{2\beta J}} \frac{1}{|\sinh(\pi t/\beta)|^{2A}} \propto \exp\left(-\frac{2\pi A}{\beta} t\right), \quad t \gg \frac{1}{J}. \quad (3.35)$$

Эта функция становится экспоненциально малой по истечении времени $t_d = \beta/(2\pi A) \sim \beta$, которое обычно называют временем диссипации. Мы вернёмся к этому выражению, когда будем обсуждать четырёхточечные функции (см. раздел 4).

Вообще говоря, для одномерной системы такое поведение довольно необычно, однако подчеркнём, что мы рассматриваем предел $N \rightarrow \infty$. В самом деле, в работе [116] показано, что экспоненциальное убывание сменяется степенным: $G_c^\beta(t) \sim (t/t_M)^{-3/2}$, для времён, превышающих $t_M \sim N/J$.

¹³ Заметим, что в лоренцевой сигнатуре необходимо уточнить пропагатор (т.е. порядок операторов в корреляционной функции) [5, 112]. Аналитическое поведение разных пропагаторов различно, однако общий экспоненциально убывающий множитель всегда один и тот же.

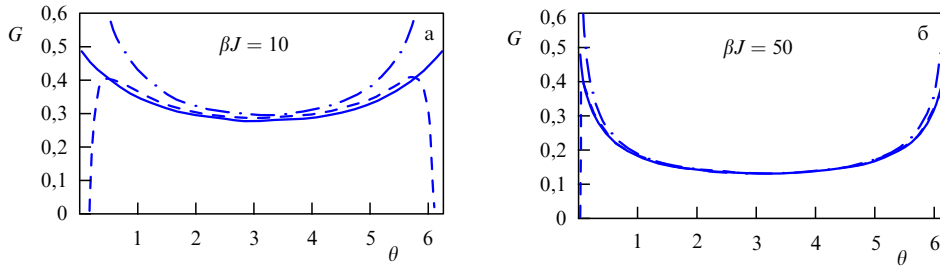


Рис. 5. Решения уравнения Дайсона – Швингера (3.23) в пределе больших N , численно рассчитанные в работе [5] для (а) $\beta J = 10$ и (б) $\beta J = 50$. Сплошные линии обозначают точное решение, штрихпунктирные — конформное приближение, штриховые — конформное приближение плюс первая поправка (не инвариантная относительно репараметризаций). Для удобства введена переменная $\theta = 2\pi\tau/\beta$.

3.4. Эффективное действие

Получим эффективное действие и уравнение ДШ (3.23) непосредственно из функционального интеграла. Будем предполагать гауссово распределение для констант связи J_{ijkl} , что приводит к следующему правилу для усреднения по беспорядку:

$$\overline{f(J_{ijkl})} = \int \mathcal{D}J_{ijkl} f(J_{ijkl}), \quad (3.36)$$

$$\mathcal{D}J_{ijkl} \equiv \exp\left(-\frac{N^3}{12J^2} \sum_{i<j<k<l} J_{ijkl}^2\right) \prod_{i<j<k<l} \sqrt{\frac{N^3}{3!J^2}} \frac{dJ_{ijkl}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Впрочем, это правило не определяет, какие именно величины следует усреднять, а потому на практике усреднение по беспорядку можно реализовать двумя разными способами. Во-первых, можно усреднить статистическую сумму, т.е. найти $\overline{Z}$. Во-вторых, с помощью так называемого метода реплик можно усреднить свободную энергию:

$$\beta \overline{F} \equiv -\overline{\log Z} = -\lim_{M \rightarrow 0} \partial_M \overline{Z^M}. \quad (3.37)$$

В этом подходе необходимо ввести M копий системы ($\chi_i \rightarrow \chi_i^\alpha, i = 1, \dots, N, \alpha = 1, \dots, M$), вычислить расширенную статистическую сумму Z^M , усреднить её по беспорядку, аналитически продолжить на нецелые M и взять формальный предел (3.37). Если наибольший интерес для вычисления представляют свободная энергия, энтропия или другие термодинамические функции — величины, которые в каком-то смысле можно измерить непосредственно, то следует выбирать второй способ усреднения по беспорядку. Если основной целью является поиск корреляционных функций, то целесообразно выбрать первый, более простой, способ.

Впрочем, в модели SYK оба метода усреднения приводят к одному и тому же результату [7, 23, 103], поскольку недиагональные по репликам вклады в эффективное действие подавлены степенями $1/N$, вследствие чего общая статистическая сумма распадается на произведение M наивно усреднённых статистических сумм: $\overline{Z^M} = (\overline{Z})^M + \mathcal{O}(1/N)$. Подробности вычисления с репликами можно найти в работах [6, 7, 117, 118]. Таким образом, для простоты достаточно рассмотреть усреднённую по беспорядку статистическую сумму оригинальной системы:

$$\overline{Z} = \int \mathcal{D}J_{ijkl} \mathcal{D}\chi_i \exp \left[\int d\tau \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \chi_i \partial \chi_i - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N J_{ijkl} \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l \right) \Big] =$$

$$= \int \mathcal{D}\chi_i \exp \left[\frac{1}{2} \sum_i \int d\tau \chi_i \partial \chi_i + \frac{3!J^2}{2N^3} \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l} \left(\int d\tau \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l \right)^2 \right] =$$

$$= \int \mathcal{D}\chi_i \exp \left[\frac{1}{2} \sum_i \int d\tau \chi_i \partial \chi_i + \frac{NJ^2}{8} \int d\tau d\tau' \left(\frac{1}{N} \sum_i \chi_i(\tau) \chi_i(\tau') \right)^4 \right] =$$

$$= \int \mathcal{D}\chi_i \exp \left[\int d\tau d\tau' \left(\frac{N}{2} G_0^{-1}(\tau, \tau') \Xi(\tau, \tau') + \frac{NJ^2}{8} \Xi^4(\tau, \tau') \right) \right]. \quad (3.38)$$

Здесь мы проинтегрировали по переменным J_{ijkl} , реорганизовали интегралы по $d\tau$ и просуммировали по фермионным индексам. Для удобства мы также ввели обратный древесный пропагатор $G_0^{-1}(\tau, \tau')$ и переменную среднего поля $\Xi(\tau, \tau')$:

$$G_0^{-1}(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') \partial_\tau, \quad (3.39)$$

$$\Xi(\tau, \tau') = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_i(\tau) \chi_i(\tau').$$

Теперь применим формальное тождество

$$f(\Xi) = \int dx f(x) \delta(x - \Xi) =$$

$$= \frac{N}{2\pi} \int dx dy f(x) \exp[iN(x - \Xi)y] \quad (3.40)$$

к функциональным переменным

$$x = G(\tau, \tau'), \quad y = i\Sigma(\tau, \tau') \quad (3.41)$$

со следующим условием нормировки:

$$\int \mathcal{D}G \mathcal{D}\Sigma \exp \left[-\frac{N}{2} \int d\tau d\tau' \Sigma(\tau, \tau') G(\tau, \tau') \right] = 1, \quad (3.42)$$

к функции

$$\exp \left[\frac{NJ^2}{8} \int d\tau d\tau' \Xi^4(\tau, \tau') \right] =$$

$$= \int \mathcal{D}G \mathcal{D}\Sigma \exp \left\{ \frac{N}{2} \int d\tau d\tau' \left[\frac{J^2}{4} G^4(\tau, \tau') - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \Sigma(\tau, \tau') (G(\tau, \tau') - \Xi(\tau, \tau')) \right] \right\}. \quad (3.43)$$

Таким образом мы преобразуем нелинейный член $\Xi^4(\tau, \tau')$ в (3.38):

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \int \mathcal{D}G \mathcal{D}\Sigma \int \mathcal{D}\chi_i \exp \left\{ \frac{N}{2} \int d\tau d\tau' \left[(G_0^{-1}(\tau, \tau') + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Sigma(\tau, \tau')) \Xi(\tau, \tau') + \frac{J^2}{4} G^4(\tau, \tau') - \Sigma(\tau, \tau') G(\tau, \tau') \right] \right\} = \\ &= \int \mathcal{D}G \mathcal{D}\Sigma \int \mathcal{D}\chi_i \exp \left[\frac{1}{2} \sum_i \int d\tau d\tau' \chi_i(\tau) (\delta(\tau - \tau') \partial_\tau + \right. \\ &\quad \left. + \Sigma(\tau, \tau')) \chi_i(\tau') + \right. \\ &\quad \left. + \frac{N}{2} \int d\tau d\tau' \left(\frac{J^2}{4} G^4(\tau, \tau') - \Sigma(\tau, \tau') G(\tau, \tau') \right) \right]. \quad (3.44) \end{aligned}$$

В последнем выражении в квадратных скобках мы подставили явную форму обратного древесного пропагатора и переменной среднего поля (3.39). Наконец, возьмём интеграл по $\chi_i(\tau)$ и получим следующее эффективное действие:

$$\bar{Z} = \int \mathcal{D}G \mathcal{D}\Sigma \exp(-I_{\text{eff}}[G, \Sigma]), \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{I_{\text{eff}}}{N} &= -\frac{1}{2} \log \det [-\delta(\tau - \tau') \partial_\tau - \Sigma(\tau, \tau')] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d\tau d\tau' \left[\Sigma(\tau, \tau') G(\tau, \tau') - \frac{J^2}{4} G^4(\tau, \tau') \right]. \quad (3.46) \end{aligned}$$

Легко увидеть, что это эффективное действие воспроизводит уравнения (3.23), которые фактически являются уравнениями движения для G и Σ . В самом деле, варьирование по G даёт уравнение для собственной энергии, тогда как варьирование по Σ даёт собственно уравнение ДШ¹⁴:

$$\begin{aligned} \delta_\Sigma I_{\text{eff}} &= -\frac{1}{2} \text{tr} \log (1 - (-\partial_\tau - \Sigma)^{-1} \delta \Sigma) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d\tau d\tau' G(\tau, \tau') \delta \Sigma(\tau, \tau') = \\ &= \frac{1}{2} \int d\tau d\tau' \left\{ G(\tau, \tau') - [G_0^{-1}(\tau, \tau') - \Sigma(\tau, \tau')]^{-1} \right\} \delta \Sigma(\tau, \tau'), \end{aligned}$$

следовательно, $G^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma$. (3.47)

На практике это означает, что строгость (и даже справедливость) проделанных выше преобразований можно не доказывать: единственное важное свойство, которое мы требуем от эффективного действия, — это уравнения движения, которые воспроизводят уравнение ДШ. Как только мы получили такое действие, мы полностью определили теорию в пределе $N \rightarrow \infty$. В принципе мы могли просто угадать действие (3.46) из уравнения (3.23).

Подчёркнём, что решение уравнения ДШ (3.23) является настоящей седловой точкой эффективного действия (3.46), т.е. максимумом по G и минимумом по Σ . Это обусловлено специфическим выбором переменной интегрирования y , которая оказывается чисто мнимой (3.41). С такой седловой точкой следует обращаться осторожно, поскольку в её окрестности поведение системы может быть неустойчивым. Тем не менее численный расчёт

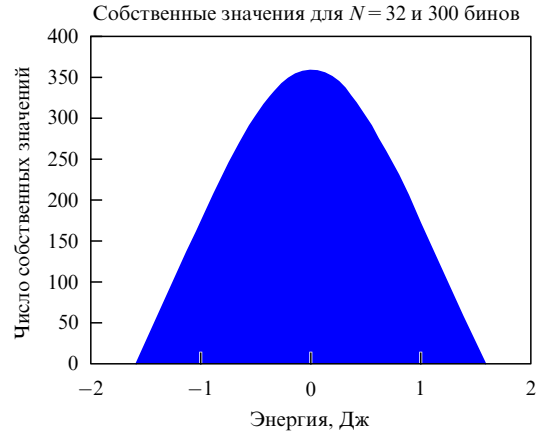


Рис. 6. Энергетический спектр, численно рассчитанный в работе [5] для единственной реализации модели (3.1) с $N = 32$ фермионами.

показывает, что решение уравнения ДШ действительно сходится к этой точке [5, 7, 8, 118, 119].

Отметим, что на первый взгляд функциональный интеграл по одномерным майорановским фермионам плохо определён, поскольку такие фермионы нельзя описать ни обычными, ни грассмановыми числами. Чтобы взять такой интеграл на практике, необходимо переопределить майорановские фермионы в терминах дираковских фермионов и свести интеграл (3.38) к интегралу по грассмановым переменным. Подробности этого вычисления можно найти в приложении Б.

Также заметим, что число $1/N$ играет роль постоянной Планка $\hbar$ в функциональном интеграле (3.45), т.е. предел $N \rightarrow \infty$ эквивалентен классическому пределу $\hbar \rightarrow 0$.

Наконец, с помощью эффективного действия (3.46) можно вычислить энтропию и свободную энергию системы — функции, которые определяют её термодинамические свойства [5, 8, 120]:

$$\begin{aligned} \beta F &= \beta E_0 + N \left[-S_0 - \frac{2\pi^2 C}{\beta J} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\beta J)^2}\right) \right] + \\ &\quad + \frac{3}{2} \log(\beta J) + \text{const} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad (3.48) \end{aligned}$$

где E_0 — энергия основного состояния, $S_0 \approx 0,232$ — удельная энтропия при нулевой температуре, C — численный коэффициент, происхождение которого будет прояснено в разделе 3.5. Заметим, что энтропия системы велика ($S \sim N$) даже при низких температурах, что довольно необычно. Это свойство обусловлено специфической плотностью состояний, которая напоминает полукруг ансамбля случайных матриц и плавно стремится к нулю в пределе низких энергий (рис. 6). Другими словами, даже вблизи основного состояния плотность состояний велика ($\rho \sim \exp(S_0 N)$), а расстояние между энергетическими уровнями мало ($\sim \exp(-S_0 N)$).

3.5. Шварцианное действие

Как мы увидели в разделе 3.3, обратный древесный пропагатор в (3.23) нарушает репараметризационную инвариантность инфракрасного уравнения ДШ (3.29). Изучим это нарушение более аккуратно. Прежде всего сделаем замену $\Sigma \rightarrow \Sigma - G_0^{-1}$ в эффективном действии

¹⁴ В (3.47) в выражении после последнего знака равенства мы использовали свойства $G_0^{-1}(\tau', \tau) = G_0^{-1}(\tau, \tau')$ и $\Sigma(\tau', \tau) = -\Sigma(\tau, \tau')$.

(3.46) и выделим конформно-инвариантную и неинвариантную части: $I_{\text{eff}} = I_{\text{CFT}} + I_S$,

$$\frac{I_{\text{CFT}}}{N} = -\frac{1}{2} \log \det (-\Sigma(\tau, \tau')) + \frac{1}{2} \int d\tau d\tau' \left[\Sigma(\tau, \tau') G(\tau, \tau') - \frac{J^2}{4} G^4(\tau, \tau') \right], \quad (3.49)$$

$$\frac{I_S}{N} = -\frac{1}{2} \int d\tau d\tau' G_0^{-1}(\tau, \tau') G(\tau, \tau'). \quad (3.50)$$

Теперь легко увидеть, что конформная часть I_{CFT} воспроизводит уравнение ДШ (3.26) или (3.28), которое инвариантно относительно репараметризаций $\tau \rightarrow f(\tau)$, $f'(\tau) > 0$. Более того, дельта-функция в $G_0^{-1}(\tau, \tau')$ выделяет только малые разницы времён, $|\tau - \tau'| \ll J^{-1}$, и, следовательно, пренебрежимо мала в ИК-пределе. Таким образом, конформная инвариантность возникает в глубоком ИК-пределе и исчезает, когда мы от него отходим.

Тем не менее неинвариантную часть в эффективном действии нельзя отбросить даже в этом пределе, поскольку она по-прежнему содержит важную информацию о теории. Чтобы показать это, рассмотрим флуктуации эффективного действия (3.46) около седловой точки $(\tilde{G}, \tilde{\Sigma})$. Подчеркнём, что $\tilde{G} \neq G_c$; G_c — это всего лишь ИК-предел $\tilde{G}$. Флуктуации удобно параметризовать¹⁵ в виде $G = \tilde{G} + \delta G / |\tilde{G}|$, $\Sigma = \tilde{\Sigma} + |\tilde{G}| \delta \Sigma$:

$$\begin{aligned} \frac{I_{\text{eff}}}{N} &\approx \frac{1}{4} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \delta \Sigma(\tau_1, \tau_2) \times \\ &\times \left(|\tilde{G}(\tau_1, \tau_2)| \tilde{G}(\tau_1, \tau_3) \tilde{G}(\tau_2, \tau_4) |\tilde{G}(\tau_3, \tau_4)| \right) \delta \Sigma(\tau_3, \tau_4) + \\ &+ \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \left[\delta G(\tau_1, \tau_2) \delta \Sigma(\tau_1, \tau_2) - \frac{3J^2}{2} \delta G^2(\tau_1, \tau_2) \right] \equiv \\ &\equiv -\frac{1}{12J^2} \langle \delta \Sigma | K | \delta \Sigma \rangle + \frac{1}{2} \langle \delta G | \delta \Sigma \rangle - \frac{3J^2}{4} \langle \delta G | \delta G \rangle. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Здесь K — оператор, который действует на пространстве антисимметричных двухточечных функций (и генерирует лестничные диаграммы, как мы увидим в разделе 4.2). Интегральное ядро этого оператора выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} K(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) &\equiv -3J^2 |\tilde{G}(\tau_1, \tau_2)| \tilde{G}(\tau_1, \tau_3) \tilde{G}(\tau_2, \tau_4) |\tilde{G}(\tau_3, \tau_4)|, \\ K|A\rangle &= \int d\tau_3 d\tau_4 K(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) A(\tau_3, \tau_4). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Очевидно, что это ядро антисимметрично относительно замен $\tau_1 \leftrightarrow \tau_2$ и $\tau_3 \leftrightarrow \tau_4$, но симметрично относительно одновременной замены $(\tau_1, \tau_2) \leftrightarrow (\tau_3, \tau_4)$ (напомним, что $G(\tau_2, \tau_1) = -G(\tau_1, \tau_2)$). Определим также единичный оператор [6, 121]:

$$\begin{aligned} I(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) &\equiv \frac{1}{2} [\delta(\tau_1 - \tau_3) \delta(\tau_2 - \tau_4) - \delta(\tau_1 - \tau_4) \delta(\tau_2 - \tau_3)], \\ I|A\rangle &= |A\rangle, \end{aligned} \quad (3.53)$$

и скалярное произведение двухточечных функций:

$$\langle A|B\rangle \equiv \int d\tau_1 d\tau_2 A^*(\tau_1, \tau_2) B(\tau_1, \tau_2). \quad (3.54)$$

Напомним, что Σ — это просто лагранжев множитель, т.е. он не появляется в физических величинах. Следовательно, в функциональном интеграле с полным действием (3.46) можно проинтегрировать по флуктуациям Σ , что приведёт к следующему квазиклассическому приближению:

$$\begin{aligned} \frac{I_{\text{eff}}[\delta G]}{N} &= -\log \int \mathcal{D}\delta \Sigma \exp(-I_{\text{eff}}[\delta G, \delta \Sigma]) \simeq \\ &\simeq \frac{3J^2}{4} \langle \delta G | (K^{-1} - I) | \delta G \rangle. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Проверим, что происходит с действием (3.55) в конформном (ИК) пределе. Казалось бы, можно ожидать, что неинвариантная часть действия пренебрежимо мала в этом пределе, т.е. действие (3.46) приблизительно равно (3.49). Это означало бы, что конформно-инвариантные пропагаторы замещают точные пропагаторы, $\tilde{G} \approx G_c$. Тогда флуктуации эффективного действия выглядели бы так:

$$\frac{I_{\text{eff}}[\delta G]}{N} \approx \frac{I_{\text{CFT}}[\delta G]}{N} \approx \frac{3J^2}{4} \langle \delta G | K_c^{-1} - I | \delta G \rangle, \quad (3.56)$$

где оператор K_c имеет вид (3.52) с функциями G_c вместо $\tilde{G}$. К сожалению, такое наивно обрезанное эффективное действие некорректно обращается с некоторыми флуктуациями около седловой точки. В самом деле, рассмотрим такие флуктуации δG , которые сохраняют конформную симметрию (3.29). В этом случае $G = G_c + \delta G / |G_c|$ и $\Sigma = J^2 G_c^3 + 3J^2 |G_c| \delta G$ решают конформное уравнение Дайсона – Швингера (3.27):

$$\begin{aligned} &\int d\tau_4 \left(\Sigma_c(\tau_3, \tau_4) + 3J^2 |G_c(\tau_3, \tau_4)| \delta G(\tau_3, \tau_4) \right) \times \\ &\times \left(G_c(\tau_4, \tau_2) + \frac{\delta G(\tau_4, \tau_2)}{|G_c(\tau_4, \tau_2)|} \right) = -\delta(\tau_3 - \tau_2). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Вычитая уравнение ДШ для конформных функций G_c и Σ_c , умножая на $G_c(\tau_3, \tau_1)$ и интегрируя по τ_3 , получаем тождество

$$\begin{aligned} &\int d\tau_3 d\tau_4 \left(\frac{\delta G(\tau_4, \tau_2)}{|G_c(\tau_4, \tau_2)|} \Sigma_c(\tau_3, \tau_4) G_c(\tau_3, \tau_1) + \right. \\ &\left. + 3J^2 G_c(\tau_1, \tau_3) G_c(\tau_2, \tau_4) |G_c(\tau_3, \tau_4)| \delta G(\tau_3, \tau_4) \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

которое очевидным образом сводится к

$$(I - K_c) \delta G = 0. \quad (3.59)$$

Таким образом, на этих флуктуациях конформно-инвариантное действие (3.56) или (3.49) тождественно равно нулю и неинвариантной частью (3.50) пренебречь нельзя. Следовательно, необходимо отойти от глубокого ИК-предела и оценить, как действие (3.50) изменяется при конформных преобразованиях (3.29).

Сначала рассмотрим случай нулевой температуры ($\beta = \infty$). В качестве первого приближения разложим конформный пропагатор:

$$\begin{aligned} G_c(\tau_1, \tau_2) &\rightarrow G_c[f(\tau_1), f(\tau_2)] \approx \\ &\approx \frac{\text{sgn}(\tau_1 - \tau_2)}{(4\pi)^{1/4} J^{2d}} \frac{f'^A(\tau_1) f'^A(\tau_2)}{|f(\tau_1) - f(\tau_2)|^{2d}}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

¹⁵ Заметим, что мера функционального интеграла не изменится, если выбрать флуктуации в таком виде.

около $\tau = (\tau_1 + \tau_2)/2$ по степеням $\tau_{12} = \tau_1 - \tau_2$:

$$G(\tau_1, \tau_2) = G_c(\tau_1, \tau_2) \left(1 + \frac{A}{6} \tau_{12}^2 \text{Sch}[f(\tau), \tau] + \mathcal{O}(\tau_{12}^3) \right),$$

$$\text{Sch}[f(\tau), \tau] \equiv \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2. \quad (3.61)$$

Такое разложение оправданно, поскольку дельта-функция из $G_0^{-1}(\tau_1, \tau_2)$ в (3.50) выделяет значения около $\tau_{12} \approx 0$. Ниже мы ещё используем это свойство. Затем вычтем не изменившуюся часть из (3.61) и подставим конечный результат в действие (3.50), чтобы получить

$$\begin{aligned} \frac{I_S}{N} &= -\frac{1}{2} \langle G_0^{-1} | \delta G \rangle = -\frac{1}{2} \int d\tau d\tau_{12} G_0^{-1}(\tau_{12}) \tilde{G}(\tau_{12}) \times \\ &\times \left[\frac{A}{6} \tau_{12}^2 \text{Sch}[f(\tau), \tau] + \mathcal{O}(\tau_{12}^3) \right] \approx \\ &\approx -\frac{A}{12} \int d\tau_{12} \delta(\tau_{12}) \partial_{\tau_{12}} (\tau_{12}^2 \tilde{G}(\tau_{12})) \int d\tau \text{Sch}[f(\tau), \tau] = \\ &= -\frac{1}{J} \frac{A}{12} \underbrace{\int d\eta \delta(\eta) \partial_{\eta} (\eta^2 \tilde{G}(\eta))}_{C} \int d\tau \text{Sch}[f(\tau), \tau], \quad (3.62) \end{aligned}$$

где для удобства мы ввели безразмерную переменную $\eta = J\tau_{12}$. Теперь легко заметить, что интеграл по $d\eta$ неопределён:

$$\begin{aligned} C &= \frac{A}{12} \int d\eta \delta(\eta) [(\eta^2 g(\eta))' \text{sgn } \eta + \eta^2 g(\eta) \delta(\eta)] = \\ &= \frac{A}{12} \int d\eta g(\eta) \eta^2 \delta(\eta)^2 = \frac{A}{12} \delta(0) g(0) \times 0^2 = 0 \times \infty, \quad (3.63) \end{aligned}$$

где мы выделили релевантную часть точного пропагатора, $\tilde{G}(\eta) = g(\eta) \text{sgn } \eta$.

Простого способа разрешить эту неопределённость не существует, поскольку аналитически установить поведение функции $g(\eta)$ для всех времён невозможно. Тем не менее проблему можно решить, если размыть дельта-функцию (т.е. заменить член G_0^{-1} другим подходящим источником, который велик на малых временах, $\eta \ll 1$) и ввести мягкое УФ- и ИК-обрезание интеграла (3.63). Этот подход реализован в [6].

Альтернативное решение предлагает вычислить лидирующие неконформные поправки к собственным значениям и собственным функциям оператора K , подставить их в действие (3.55) и непосредственно оценить $I_S = I_{\text{eff}} - I_{\text{CFT}} \approx \delta I_{\text{CFT}}$. Такой расчёт выполнен в [5, 8]. Оба этих метода приводят к действию вида (3.62) с коэффициентом $C \approx 0,48 A/12 > 0$. Таким образом, для теории при нулевой температуре получаем

$$\frac{I_S}{N} \approx -\frac{C}{J} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sch}[f(\tau), \tau] d\tau. \quad (3.64)$$

Как обычно, с помощью отображения (3.9) можно перейти к конечно-температурной версии (3.64):

$$\frac{I_S}{N} = -\frac{C}{J} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \text{Sch} \left[\tan \frac{\pi \varphi(\tau)}{\beta}, \tau \right] d\tau. \quad (3.65)$$

В этом случае значения эффективного действия около седловой точки параметризуются функцией $\varphi(\tau)$, которая отображает временную окружность сама в себя с

сохранением ориентации. Заметим, что коэффициент C представляет собой в точности коэффициент в термодинамическом тождестве (3.48). Это объясняется тем, что при низких энергиях динамика модели SYK приближённо описывается шварцианным действием.

Заметим, что даже при отклонении от ИК-предела конформная инвариантность не исчезает полностью. В самом деле, точные пропагаторы и эффективное действие должны быть инвариантны относительно преобразований из группы $SL(2, \mathbb{R})$: эти преобразования поворачивают временной круг (или временную прямую в пределе $\beta \rightarrow \infty$) и не отвечают каким-либо физическим степеням свободы. Поэтому не удивительно, что и действие (3.55), и шварцианное действие (3.65) обращаются в нуль на репараметризациях из группы $SL(2, \mathbb{R})$.

Таким образом, кажущаяся конформная симметрия ИК-теории в действительности нарушается до симметрии относительно преобразований из группы $SL(2, \mathbb{R})$. Динамику псевдоголдстоуновского бозона, который ассоциируется с этой нарушенной симметрией (так называемой мягкой моды), приближённо описывает шварцианное действие (3.65).

4. Спектр Сачдева – Йе – Китаева и четырёхточечные функции

Этот раздел преследует две важные цели. Во-первых, на простом примере мы покажем, как можно вычислить квантовые поправки (подавленные степенями $1/N$) к многоточечным корреляционным функциям. Исходя из педагогических целей мы постараемся обсудить это вычисление как можно более подробно. Во-вторых, мы покажем, что ОТОС экспоненциально убывает со временем, причём основной вклад в этот эффект обеспечивает шварцианное действие. Такое поведение насыщает так называемое ограничение на хаос и совпадает с поведением корреляторов, рассчитанных на фоне чёрной дыры, что превращает его в одно из самых примечательных свойств модели SYK (см. раздел 2.2 и работу [9]). В основном этот раздел основан на пионерских работах [4–6]. Обобщение для n -точечных функций с произвольными n можно найти в [122].

Рассмотрим следующую четырёхточечную корреляционную функцию:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \langle T \chi_i(\tau_1) \chi_i(\tau_2) \chi_j(\tau_3) \chi_j(\tau_4) \rangle &= \\ &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}G \mathcal{D}\Sigma \left[G(\tau_1, \tau_2) G(\tau_3, \tau_4) + \frac{1}{N} (G(\tau_1, \tau_4) G(\tau_2, \tau_3) - \right. \\ &\left. - G(\tau_1, \tau_3) G(\tau_2, \tau_4)) \right] \exp(-I_{\text{eff}}[G, \Sigma]), \quad (4.1) \end{aligned}$$

где мы использовали подход раздела 3.4, чтобы преобразовать функциональный интеграл по $\mathcal{D}\chi_i$ в левой части в интеграл по $\mathcal{D}G$ и $\mathcal{D}\Sigma$ в правой части; Z обозначает статистическую сумму (3.45). Как обычно, мы работаем в пределе $J\tau \gg 1$, $N \gg 1$ и удерживаем лидирующие квантовые поправки ($\sim 1/N$) к классическим выражениям:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) &\equiv \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \langle T \chi_i(\tau_1) \chi_i(\tau_2) \chi_j(\tau_3) \chi_j(\tau_4) \rangle - \\ &- \tilde{G}(\tau_1, \tau_2) \tilde{G}(\tau_3, \tau_4), \quad (4.2) \end{aligned}$$

где $\tilde{G}$ обозначает седловую точку эффективного действия (3.46) и в ИК-пределе приблизительно равняется конформному пропагатору (3.34). Для наглядности мы рассматриваем теорию при конечной температуре, т.е. $\tau_{1,2,3,4} \in [-\beta/2, \beta/2]$.

Более того, без потери общности можно ограничиться областью $\tau_1 > \tau_2$, $\tau_3 > \tau_4$ и $\tau_1 > \tau_3$. Во-первых, функция $\mathcal{F}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ не зависит от выбора координат на временном круге, т.е. не изменяется при циклической перестановке аргументов. Во-вторых, из антикоммутационных соотношений для χ_i следует, что эта функция антисимметрична относительно замен $\tau_1 \leftrightarrow \tau_2$ и $\tau_3 \leftrightarrow \tau_4$, но симметрична относительно одновременной замены $(\tau_1, \tau_2) \leftrightarrow (\tau_3, \tau_4)$. Вместе эти две симметрии позволяют восстановить поведение функции в областях с другим порядком $\tau_{1,2,3,4}$.

Как замечено в разделе 3.5, при вычислениях удобно разделять конформно-инвариантные и неинвариантные флуктуации около седловой точки $\tilde{G}$. Обозначим такие флуктуации как $\delta G^\parallel$ и $\delta G^\perp$ соответственно. В этом разделе мы не умножаем флуктуации на $\tilde{G}^{-1}$, как это мы делали ранее в разделе 3.5. Другими словами, флуктуации $\delta G^\parallel$ определены таким образом, что функция $G_c + \delta G^\parallel$ решает конформное уравнение ДШ (3.27), а подпространство неинвариантных флуктуаций $\delta G^\perp$ представляет собой ортогональное дополнение к подпространству конформно-инвариантных флуктуаций. Заметим, что благодаря симметрии (3.29) все конформные флуктуации можно параметризовать функцией $\varphi(\tau)$, которая отображает временной круг сама в себя с сохранением ориентации:

$$\delta G_\varphi^\parallel(\tau_1, \tau_2) = G_c^\beta[\varphi(\tau_1), \varphi(\tau_2)] - G_c^\beta(\tau_1, \tau_2) \quad (4.3)$$

для некоторой репараметризации $\tau \rightarrow \varphi(\tau)$.

В этих обозначениях функциональный интеграл для четырёхточечной функции выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\approx \mathcal{F}_0 + \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\delta G^\parallel \mathcal{D}\delta G^\perp \mathcal{D}\Sigma (\delta G^\parallel(\tau_1, \tau_2) + \delta G^\perp(\tau_1, \tau_2)) \times \\ &\times (\delta G^\parallel(\tau_3, \tau_4) + \delta G^\perp(\tau_3, \tau_4)) \exp(-I_{\text{CFT}} - I_S) = \\ &= \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_S + \mathcal{F}_{\text{CFT}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где мы разложили подынтегральное выражение около седловой точки и ввели следующие обозначения:

$$\mathcal{F}_0 \equiv \frac{1}{N} (\tilde{G}(\tau_1, \tau_4) \tilde{G}(\tau_2, \tau_3) - \tilde{G}(\tau_1, \tau_3) \tilde{G}(\tau_2, \tau_4)), \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_S &\equiv \langle \delta G^\parallel(\tau_1, \tau_2) \delta G^\parallel(\tau_3, \tau_4) \rangle_S = \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\varphi \delta G_\varphi^\parallel(\tau_1, \tau_2) \delta G_\varphi^\parallel(\tau_3, \tau_4) \exp(-I_S[\varphi])}{\int \mathcal{D}\varphi \exp(-I_S[\varphi])}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{CFT}} &\equiv \langle \delta G^\perp(\tau_1, \tau_2) \delta G^\perp(\tau_3, \tau_4) \rangle_{\text{CFT}} = \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\delta G^\perp \delta G^\perp(\tau_1, \tau_2) \delta G^\perp(\tau_3, \tau_4) \exp(-I_{\text{eff}}[\delta G^\perp])}{\int \mathcal{D}\delta G^\perp \exp(-I_{\text{eff}}[\delta G^\perp])}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Смысл этих обозначений будет прояснён в разделах 4.1 и 4.2. Чтобы получить среднее (4.6), мы учли, что

якобиан

$$J = \left[\frac{\mathcal{D}G_\varphi^\parallel}{\mathcal{D}\varphi} \right]_{\varphi(\tau)=2\pi\tau/\beta} \quad (4.8)$$

постоянен и отличен от нуля, поскольку для преобразований, инфинитезимально близких к тождественному, $\varphi(\tau) = 2\pi\tau/\beta + \delta\varphi(\tau)$, флуктуации $\delta G_\varphi^\parallel$ зависят только от $\delta\varphi$ (см. уравнение (4.11)). Интеграл $\int \mathcal{D}\delta G^\perp \mathcal{D}\Sigma \exp(-I_{\text{CFT}})$ в числителе и знаменателе (4.6) также постоянен и отличен от нуля. Для среднего (4.7) мы повторили аргументацию, приведённую в разделе 3.5 при рассмотрении формулы (3.55), и использовали действие I_{eff} , в которое подставили конформные функции $\tilde{G} = G_c^\beta$. Напомним, что для конформно-инвариантных флуктуаций $(I - K)\delta G^\parallel = 0$, следовательно, $I_{\text{eff}}[\delta G^\perp + \delta G^\parallel] = I_{\text{eff}}[\delta G^\perp]$.

Для удобства в этом разделе мы перемасштабировали поля и отобразили временную окружность при конечной температуре в единичную окружность:

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow \frac{2\pi\tau}{\beta}, \quad \chi_i \rightarrow \left(\frac{\beta J}{2\pi}\right)^A \chi_i, \\ G(\tau, \tau') &\rightarrow \left(\frac{\beta J}{2\pi}\right)^{2A} G(\tau, \tau'), \quad \Sigma(\tau, \tau') \rightarrow \frac{1}{J^2} \left(\frac{\beta J}{2\pi}\right)^{6A} \Sigma(\tau, \tau'). \end{aligned} \quad (4.9)$$

В этом случае конформно-инвариантное и шварцианное действия приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{I_{\text{CFT}}}{N} &= -\frac{1}{2} \log \det(-\Sigma(\tau, \tau')) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \int_{-\pi}^{\pi} d\tau' \left(\Sigma(\tau, \tau') G(\tau, \tau') - \frac{1}{4} G^4(\tau, \tau') \right), \\ \frac{I_S}{N} &= -\frac{2\pi C}{\beta J} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Sch} \left(\tan \frac{\varphi(\tau)}{2}, \tau \right) d\tau. \end{aligned} \quad (4.10)$$

В (4.10) зависимости от N , J и β явно вынесены в множители перед интегралами, тогда как остальные величины безразмерны. Благодаря такому представлению легко увидеть, что учёт конформно-инвариантных и неинвариантных флуктуаций при вычислении корреляционных функций приводит к поправкам порядка $\mathcal{O}(1/N)$, поскольку и I_S , и I_{CFT} пропорциональны N . Тем не менее в случае сильной связи, $\beta J \gg 1$, лидирующий вклад в поправки обеспечивается шварцианным действием, которое умножается на дополнительный малый множитель. Грубо говоря, благодаря малому множителю флуктуации мягкой моды легче всего возбудить. Мы вычислим вклад этих флуктуаций в разделе 4.1 и сравним его со вкладом конформной части в разделе 4.2.

4.1. Вклад мягкой моды

Вычислим коррелятор (4.6) в пределе $1 \ll \tau J < \beta J \ll N$, полагаясь на аргументацию работы [6]. В указанном пределе флуктуации малы, поэтому в функциональных интегралах можно использовать гауссово приближение. Заметим, что это приближение не справедливо в случае нулевой температуры. В действительности мы вынуждены ограничиться малыми, но всё-таки отличными от нуля температурами: $J/N \ll T \ll J$.

Рассмотрим конформно-инвариантные флуктуации около седловой точки $\tilde{G} \approx G_c^\beta$. Для инфинитезимальных отображений $\delta\varphi(\tau) \equiv \varphi(\tau) - \tau$ флуктуации выглядят сле-

дующим образом:

$$\begin{aligned} \delta G_{\phi}^{\parallel}(\tau_1, \tau_2) &= G_c^{\beta}[\phi(\tau_1), \phi(\tau_2)] - G_c^{\beta}(\tau_1, \tau_2) = \\ &= \left[\delta\phi(\tau_1) \partial_{\tau_1} + \frac{1}{4} \delta\phi'(\tau_1) + \delta\phi(\tau_2) \partial_{\tau_2} + \frac{1}{4} \delta\phi'(\tau_2) \right] G_c^{\beta}(\tau_1, \tau_2) = \\ &= \frac{1}{4} \left[\delta\phi'(\tau_1) + \delta\phi'(\tau_2) - \frac{\delta\phi(\tau_1) - \delta\phi(\tau_2)}{\tan[(\tau_1 - \tau_2)/2]} \right] G_c^{\beta}(\tau_1, \tau_2). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Чтобы получить выражение после последнего знака равенства, мы использовали (3.34).

Разложим функцию $\delta\phi$ в ряд Фурье:

$$\delta\phi(\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\delta\phi)_m \exp(im\tau), \quad (4.12)$$

и представим выражение (4.11) как

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{\phi}^{\parallel}(\tau_1, \tau_2)}{G_c^{\beta}(\tau_1, \tau_2)} &= -\frac{i}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp\left(im \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) \times \\ &\times \left[\frac{\sin(m\tau_{12}/2)}{\tan(\tau_{12}/2)} - m \cos\left(\frac{m\tau_{12}}{2}\right) \right] (\delta\phi)_m, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\tau_{12} \equiv \tau_1 - \tau_2$. Затем используем интеграл

$$\begin{aligned} \int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{s_{10}s_{02}}{s_{12}} \exp(im\tau_0) \frac{d\tau_0}{2\pi} &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{m(m^2 - 1)} \exp\left(im \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) \times \\ &\times \left[\frac{\sin(m\tau_{12}/2)}{\tan(\tau_{12}/2)} - m \cos\left(\frac{m\tau_{12}}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

с помощью которого перепишем ряд:

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{\phi}^{\parallel}(\tau_1, \tau_2)}{G_c^{\beta}(\tau_1, \tau_2)} &= -\frac{i\pi}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{s_{10}s_{02}}{s_{12}} m(m^2 - 1) (\delta\phi)_m \times \\ &\times \exp(im\tau_0) \frac{d\tau_0}{2\pi}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь мы обозначили $s_{12} \equiv 2 \sin[(\tau_1 - \tau_2)/2]$ и предположили, что $2\pi > \tau_1 - \tau_2 > 0$. Наконец, введём $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантную наблюдаемую:

$$\begin{aligned} O(\tau) &= \text{Sch}\left(\tan \frac{\phi(\tau)}{2}, \tau\right) = \frac{1}{2} + \delta\phi' + \delta\phi''' + \frac{1}{2} (\delta\phi')^2 - \\ &- (\delta\phi')(\delta\phi''') - \frac{3}{2} (\delta\phi'')^2 + \mathcal{O}(\delta\phi^3), \end{aligned} \quad (4.16)$$

сделаем преобразование Фурье неинвариантной части:

$$\begin{aligned} \delta O(\tau) &\equiv O(\tau) - \frac{1}{2} = \\ &= -i \sum_{m \in \mathbb{Z}} m(m^2 - 1) (\delta\phi)_m \exp(im\tau) + \mathcal{O}(\delta\phi^2), \end{aligned} \quad (4.17)$$

и сравним полученное выражение с (4.15). В результате приходим к следующему интегральному представлению для вариации переменной G :

$$\frac{\delta G_{\phi}^{\parallel}(\tau_1, \tau_2)}{G_c^{\beta}(\tau_1, \tau_2)} = \frac{\pi}{2} \int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{s_{10}s_{02}}{s_{12}} \delta O(\tau_0) \frac{d\tau_0}{2\pi}. \quad (4.18)$$

Используя это представление, перепишем коррелятор (4.6):

$$\frac{\mathcal{F}_S(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)}{G_c^{\beta}(\tau_1, \tau_2) G_c^{\beta}(\tau_3, \tau_4)} = \frac{\langle \delta G_{\phi}^{\parallel}(\tau_1, \tau_2) \delta G_{\phi}^{\parallel}(\tau_3, \tau_4) \rangle_S}{G_c^{\beta}(\tau_1, \tau_2) G_c^{\beta}(\tau_3, \tau_4)} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{d\tau_5}{2\pi} \int_{\tau_4}^{\tau_3} \frac{d\tau_6}{2\pi} \langle \delta O(\tau_5) \delta O(\tau_6) \rangle_S \frac{s_{15}s_{52}}{s_{12}} \frac{s_{36}s_{64}}{s_{34}}. \quad (4.19)$$

Напомним, что мы ограничиваемся областью $\tau_1 > \tau_2$, $\tau_3 > \tau_4$ и $\tau_1 > \tau_3$, поскольку результаты для других областей можно получить с помощью тривиального преобразования.

Оценим корреляционную функцию двух δO в гауссовом приближении. Используя разложение (4.16), найдём шварцманное действие (3.65) с точностью до граничного члена и членов порядка $\mathcal{O}(\delta\phi^3)$:

$$\begin{aligned} \frac{I_S}{N} &= -\frac{2\pi C}{\beta J} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{(\delta\phi')^2 - (\delta\phi'')^2}{2} \right] d\tau = \\ &= -\frac{\pi C}{\beta J} + \frac{\pi C}{\beta J} \sum_{m \in \mathbb{Z}} m^2(m^2 - 1) (\delta\phi)_m (\delta\phi)_{-m}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Следовательно, в гауссовом приближении корреляционная функция двух $\delta\phi$ имеет вид

$$\langle (\delta\phi)_m (\delta\phi)_n \rangle_S = \frac{1}{2\pi C} \frac{\beta J}{N} \frac{\delta_{m,-n}}{m^2(m^2 - 1)}, \quad m, n \neq -1, 0, 1. \quad (4.21)$$

Заметим, что моды с $m = -1, 0, 1$ являются генераторами группы $SL(2, \mathbb{R})$, т.е. отвечают нефизическим степеням свободы и сокращаются во всех физических наблюдаемых. Это нулевые моды шварцманного действия, которые мы упомянули в конце раздела 3.5.

Используя тождество (4.21), находим корреляционную функцию двух δO :

$$\begin{aligned} \langle \delta O(\tau_5) \delta O(\tau_6) \rangle_S &= - \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} m(m^2 - 1) n(n^2 - 1) \times \\ &\times \langle (\delta\phi)_m (\delta\phi)_n \rangle_S \exp(im\tau_5 + in\tau_6) = \\ &= \frac{1}{2\pi C} \frac{\beta J}{N} \sum_{m \neq 0} (m^2 - 1) \exp[im(\tau_5 - \tau_6)] = \\ &= \frac{1}{2\pi C} \frac{\beta J}{N} [1 - 2\pi\delta(\tau_{56}) - 2\pi\delta''(\tau_{56})], \end{aligned} \quad (4.22)$$

где мы использовали $\delta(\tau) = (1/2\pi) \sum \exp(im\tau)$. Обратим внимание, что дельта-функции в (4.22) обращаются в нуль, если интервалы интегрирования по $d\tau_5$ и $d\tau_6$ не перекрываются. Следовательно, имеет смысл отдельно рассмотреть два возможных упорядочения времён:

$$\text{ОРЕ: } 2\pi > \tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \tau_4 > 0, \quad (4.23)$$

$$\text{ОТО: } 2\pi > \tau_1 > \tau_3 > \tau_2 > \tau_4 > 0.$$

ОРЕ (Operator Product Expansion) — операторное разложение, которое применимо при соответствующем упорядочении времён (см. работы [5, 103, 123] и раздел 4.2.4 для дальнейших подробностей). ОТО (Out of Time Ordered) означает "упорядоченный вне времени".

При упорядочении ОРЕ интегралы по $d\tau_5$ и $d\tau_6$ разделяются и результат интегрирования (4.19) сводится к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_S(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)}{G_c^{\beta}(\tau_1, \tau_2) G_c^{\beta}(\tau_3, \tau_4)} &= \\ &= \frac{1}{8\pi C} \frac{\beta J}{N} \left(\frac{\tau_{12}}{2 \tan(\tau_{12}/2)} - 1 \right) \left(\frac{\tau_{34}}{2 \tan(\tau_{34}/2)} - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

На самом деле, этот коррелятор описывает флуктуации полной энергии системы в температурном ансамбле,

поэтому можно было ожидать его факторизации. (Более детальное рассуждение см. в приложении В и работе [5].)

С другой стороны, при упорядочении ОТО получаем¹⁶ вклад (4.24) плюс дополнительный член, связанный с дельта-функциями (4.22):

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_S(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)}{G_c^\beta(\tau_1, \tau_2)G_c^\beta(\tau_3, \tau_4)} &= \frac{1}{8\pi C} \frac{\beta J}{N} \left[-\frac{3\pi}{8} \frac{\sin(\Delta\tau)}{\sin(\tau_{12}/2)\sin(\tau_{34}/2)} + \right. \\ &+ \frac{\pi}{16} \frac{\sin(\Delta\tau - \tau_{12})}{\sin(\tau_{12}/2)\sin(\tau_{34}/2)} + \frac{\pi}{16} \frac{\sin(\Delta\tau - \tau_{34})}{\sin(\tau_{12}/2)\sin(\tau_{34}/2)} - \\ &- \frac{\pi}{8} \frac{2\Delta\tau - \tau_{12} - \tau_{34}}{\tan(\tau_{12}/2)\tan(\tau_{34}/2)} + \frac{3\pi}{8} \frac{1}{\tan(\tau_{12}/2)} + \frac{3\pi}{8} \frac{1}{\tan(\tau_{34}/2)} + \\ &\left. + \left(\frac{\tau_{12}}{2\tan(\tau_{12}/2)} - 1 \right) \left(\frac{\tau_{34}}{2\tan(\tau_{34}/2)} - 1 \right) \right], \quad (4.25) \end{aligned}$$

где мы ввели время $\Delta\tau \equiv (\tau_1 + \tau_2)/2 - (\tau_3 + \tau_4)/2$. Для наглядности удобно выбрать $\tau_1 - \tau_2 = \pi$ и $\tau_3 - \tau_4 = \pi$, потому что тогда коррелятор (4.25) существенно упрощается:

$$\frac{\mathcal{F}_S(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)}{G_c^\beta(\beta/2)G_c^\beta(\beta/2)} = \frac{1}{8\pi C} \frac{\beta J}{N} \left[1 - \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{2\pi\Delta\tau}{\beta}\right) \right]. \quad (4.26)$$

Здесь мы восстановили в показателе экспоненты β , т.е. отобразили единичную окружность обратно в окружность длиной β (4.9).

Чтобы понять физический смысл полученного результата, аналитически продолжим четырёхточечную функцию в лоренцево время и проверим, как коррелятор ведёт себя при больших значениях $t = -i\Delta\tau \gg J^{-1}$. Одним из важных частных случаев является $\tau_1 = \beta/4 + it$, $\tau_2 = -\beta/4 + it$, $\tau_3 = 0$, $\tau_4 = -\beta/2$, что описывает регуляризованный ОТОС (см. раздел 2.1):

$$\begin{aligned} \text{ОТОС}(t) &\equiv \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \text{tr} [\rho^{1/4} \chi_i(t) \rho^{1/4} \chi_j(0) \rho^{1/4} \chi_i(t) \rho^{1/4} \chi_j(0)] = \\ &= \tilde{G}\left(\frac{\beta}{2}\right) \tilde{G}\left(\frac{\beta}{2}\right) + \mathcal{F}\left(\frac{\beta}{4} + it, -\frac{\beta}{4} + it, 0, -\frac{\beta}{2}\right) = \\ &= \tilde{G}\tilde{G} + \mathcal{F}_S + \mathcal{F}_{\text{CFT}} + \mathcal{F}_0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad (4.27) \end{aligned}$$

где мы определили матрицу плотности $\rho \equiv (1/Z) \times \exp(-\beta H)$. Для краткости в (4.27) в выражении после последнего знака равенства мы опустили аргументы корреляционных функций. При $t = 0$ этот выбор отвечает области ОТО, поэтому коррелятор даётся аналитическим продолжением (4.26) на ненулевые действительные t . Теперь легко увидеть, что в лидирующем порядке скорректированный ОТОС быстро убывает:

$$\begin{aligned} \text{ОТОС}(t) &\approx \tilde{G}\left(\frac{\beta}{2}\right) \tilde{G}\left(\frac{\beta}{2}\right) + \mathcal{F}_S\left(\frac{\beta}{4} + it, -\frac{\beta}{4} + it, 0, -\frac{\beta}{2}\right) \approx \\ &\approx \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta J} \left[1 + \frac{1}{8\pi C} \frac{\beta J}{N} \left(1 - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{2\pi it}{\beta}\right) \right) \right] \approx \\ &\approx \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta J} \left[1 - \frac{\Delta^2}{2C} \frac{\beta J}{N} \exp\left(\frac{2\pi}{\beta} t\right) \right] \quad \text{для } \beta \ll t \ll \beta \log \frac{N}{\beta J}. \quad (4.28) \end{aligned}$$

Здесь мы восстановили конформную размерность $\Delta = 1/4$ и подставили приближённое седловое значение, $\tilde{G} \approx G_c^\beta$. Тем не менее надо иметь в виду, что на больших временах гауссово приближение нарушается, и результат (4.28) оказывается недостаточно точным. Вообще говоря, можно ожидать, что на таких временах основной вклад определяется множественными параллельными "лестницами", в результате чего затухание рано или поздно насыщается (см. раздел 4.2). Впрочем, мы не будем обсуждать эту идею.

В то же время вклад мягкой моды в регуляризованный упорядоченный по времени коррелятор (ТОС) не зависит от t :

$$\begin{aligned} \text{ТОС}(t) &\equiv \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \text{tr} [\chi_i(t) \rho^{1/2} \chi_i(t) \chi_j(0) \rho^{1/2} \chi_j(0)] = \\ &= \tilde{G}\left(\frac{\beta}{2}\right) \tilde{G}\left(\frac{\beta}{2}\right) + \mathcal{F}\left(\frac{\beta}{2} + it, it, 0, -\frac{\beta}{2}\right) \approx \\ &\approx \tilde{G}\left(\frac{\beta}{2}\right) \tilde{G}\left(\frac{\beta}{2}\right) + \mathcal{F}_S\left(\frac{\beta}{2} + it, it, 0, -\frac{\beta}{2}\right) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta J} + \frac{\text{const}}{N}. \quad (4.29) \end{aligned}$$

Этот вклад мал по сравнению с древесным значением даже для достаточно больших времён.

Наконец, для полноты картины необходимо учесть поправки к четырёхточечной функции вида $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_{\text{CFT}}$, которые также пропорциональны $\mathcal{O}(1/N)$. Впрочем, в конце раздела 3.3 мы показали, что двухточечные корреляционные функции экспоненциально убывают для больших лоренцевых времён $t \gg \beta$, следовательно, вклады $\mathcal{F}_0$ в ОТОС и ТОС также экспоненциально убывают и ими можно пренебречь. Вклад $\mathcal{F}_{\text{CFT}}$ обсуждается в разделе 4.2.

4.2. Вклад конформного действия

Оценим конформный вклад в четырёхточечную функцию, который определяется формулой (4.7). Как обычно, будем работать в пределе низких энергий и больших N . Напомним, что в этом пределе теория приобретает конформную инвариантность в смысле (3.29), благодаря чему можно свободно переключаться между случаями нулевой и конечной температуры, используя отображение (3.9). По этой причине в большей части данного раздела мы работаем с теорией при нулевой температуре.

Кроме того, подынтегральные выражения в числителе и знаменателе (4.7) инвариантны относительно произвольных репараметризаций, а I_S отлично от нуля для всех репараметризаций, не входящих в группу $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Следовательно, можно проинтегрировать по таким репараметризациям и получить отличный от нуля множитель, одинаковый для числителя и знаменателя. Таким образом, полная репараметризационная симметрия четырёхточечной (вообще говоря, любой n -точечной) функции эффективно нарушается до $\text{SL}(2, \mathbb{R})$.

Вычисляя интеграл по флуктуациям¹⁷ переменной G в функциональном интеграле (4.7) с эффективным дей-

¹⁶ Полезно иметь в виду соотношение $\partial_{\tau_{56}}^2 = (1/4)\partial_{\tau_5}^2 + (1/4)\partial_{\tau_6}^2 - (1/2)\partial_{\tau_5}\partial_{\tau_6}$.

¹⁷ Напомним, что в этом разделе мы параметризуем флуктуации как $G = \tilde{G} + \delta G$, тогда как в разделе 3.5 мы использовали нотацию $G = \tilde{G} + \delta G/|\tilde{G}|$.

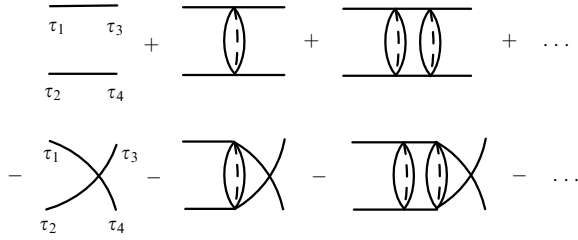


Рис. 7. Сумма лестничных диаграмм, которые вносят вклад в $\mathcal{F}_{\text{CFT}}$.

свием (3.55), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{CFT}} &= \frac{2}{3J^2N} \frac{(K_c^{-1} - I)^{-1} I}{|G_c(\tau_1, \tau_2) G_c(\tau_3, \tau_4)|} = \\ &= \frac{2}{3J^2N} \frac{(I - K_c)^{-1} K_c I}{|G_c(\tau_1, \tau_2) G_c(\tau_3, \tau_4)|}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Здесь K_c обозначает конформное ядро, которое определяется формулой (3.52) с двухточечными конформными функциями $\tilde{G} = G_c$. Из соотношений (3.52), (3.53) и (4.5) следует

$$K_c I = \frac{3J^2N}{2} \mathcal{F}_0(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) |G_c(\tau_1, \tau_2) G_c(\tau_3, \tau_4)|. \quad (4.31)$$

Легко увидеть, что $\mathcal{F}_{\text{CFT}}$ представляет собой просто сумму лестничных диаграмм (рис. 7):

$$\mathcal{F}_{\text{CFT}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n = (I - K_c)^{-1} \mathcal{F}_0, \quad (4.32)$$

где $\mathcal{F}_n \equiv K_c^n \mathcal{F}_0$ отвечает диаграмме с n "ступеньками". В самом деле, можно проверить, что в диаграммной технике, введенной в разделе 3.2, единственный тип диаграмм, который вносит в четырехточечную корреляционную функцию вклад порядка $1/N$, — это лестничные диаграммы, представленные на рис. 7.

Заметим, что ядро K_c , используемое нами, сопряжено с естественным ядром, которое следует из диаграмм рис. 7, степенью пропагатора:

$$\begin{aligned} K_c(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) &= \\ &= |G_c(\tau_1, \tau_2)| K_{\text{diagram}}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) |G_c(\tau_3, \tau_4)|^{-1}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Такое сопряжение необходимо, чтобы сделать явной симметрию $(\tau_1, \tau_2) \leftrightarrow (\tau_3, \tau_4)$. Кроме того, несложно проверить, что при репараметризациях $\tau \rightarrow f(\tau)$, $f'(\tau) > 0$ оператор K_c преобразуется как четырехточечная функция полей с конформной размерностью $\Delta = 1/2$.

Заметим, что диаграммная техника с конформными двухточечными функциями при бесхитростном использовании приводит к расходящимся выражениям, поскольку в конформном пределе оператор K имеет единичное собственное значение: $(I - K_c)\delta G = 0$ (см. раздел 3.5). В разделе 4.1 мы явно разрешили эти расходимости, отойдя от глубокого ИК-предела и рассмотрев неконформные поправки к эффективному действию. Эту проблему также можно решить альтернативным способом, вычислив лидирующие поправки к единичному собственному значению и соответствующим собственным функциям (такой способ реализован в работе [5]).

Чтобы оценить выражение (4.30), необходимо найти полный набор¹⁸ антисимметричных собственных функций $\Psi_h(\tau_1, \tau_2)$, рассчитать собственные значения $K_c \Psi_h = k(h) \Psi_h$ и вычислить следующую сумму:

$$(I - K_c)^{-1} K_c I = \sum_{k(h) \neq 1} \frac{k(h)}{1 - k(h)} \frac{1}{\langle \Psi_h | \Psi_h \rangle} |\Psi_h\rangle \langle \Psi_h|, \quad (4.34)$$

где h — некий абстрактный индекс, который нумерует собственные значения и собственные функции (значения, которые пробегает этот индекс, будут определены в разделе 4.2.3). Другими словами, необходимо найти спектр оператора K_c . Напомним, что подпространство с единичным собственным значением необходимо исключить, поскольку при интегрировании по этому подпространству эффективное действие (3.55) обращается в нуль и основной вклад в полную четырехточечную функцию определяется (4.6).

4.2.1. Генераторы $SL(2, \mathbb{R})$ и оператор Казимира. Непосредственно решить интегральное уравнение $K_c \Psi_h = k(h) \Psi_h$ сложно. К счастью, $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантность существенно упрощает эту задачу. В самом деле, инвариантность означает, что K_c коммутирует с оператором Казимира C группы $SL(2, \mathbb{R})$, следовательно, собственные функции K_c и C совпадают. Это позволяет найти собственные значения и собственные функции по отдельности: сначала решить более простое уравнение¹⁹ $C \Psi_h = h(h-1) \Psi_h$, а затем рассчитать собственные значения $k(h)$ для известных функций Ψ_h .

Группу $SL(2, \mathbb{R})$ можно задать с помощью следующих генераторов:

$$L_0^\tau = -\tau \partial_\tau - \Delta, \quad L_{-1}^\tau = \partial_\tau, \quad L_1^\tau = \tau^2 \partial_\tau + 2\Delta \tau. \quad (4.35)$$

Легко проверить, что эти операторы удовлетворяют правильным коммутационным соотношениям:

$$[L_m^\tau, L_n^\tau] = (m-n) L_{m+n}^\tau, \quad m, n = -1, 0, 1. \quad (4.36)$$

Заметим, что в этом определении оператор с конформной размерностью Δ аннигилируется генератором L_0^τ .

Также обратим внимание, что в случае $\Delta = 1/2$ упомянутые выше генераторы коммутируют с ядром K_c :

$$\begin{aligned} \langle (L_m^{\tau_1} + L_m^{\tau_2}) K_c(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) | \Psi_h(\tau_3, \tau_4) \rangle &= \\ &= \langle K_c(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) (L_m^{\tau_3} + L_m^{\tau_4}) | \Psi_h(\tau_3, \tau_4) \rangle + \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_4 [\tau_3^{m+1} K_c(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \Psi_h(\tau_3, \tau_4)]_{\tau_3=-\infty}^{\tau_3=\infty}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

где $\langle \cdot | \cdot \rangle$ обозначает собственное произведение (3.54). Это условие показывает, что генераторы группы $SL(2, \mathbb{R})$ являются нулевыми модами оператора K_c . Впрочем, для правильного коммутационного условия необходимо потребовать, чтобы члены в подынтегральном выражении в правой части обнулялись для всех базисных функций Ψ_h и всех генераторов. В разделе 4.2.2 мы увидим, что это условие накладывает важное ограничение на функции Ψ_h .

¹⁸ То есть такой набор, для которого $I = \sum_h (1/\langle \Psi_h | \Psi_h \rangle) |\Psi_h\rangle \langle \Psi_h|$.

¹⁹ Собственные значения оператора Казимира удобно, хотя и не обязательно, выбрать в виде $h(h-1)$.

Наконец, используя генераторы (4.35), можно построить оператор Казимира:

$$\begin{aligned} C &= (L_0^{\tau_1} + L_0^{\tau_2})^2 - \frac{1}{2}(L_{-1}^{\tau_1} + L_{-1}^{\tau_2})(L_1^{\tau_1} + L_1^{\tau_2}) - \\ &- \frac{1}{2}(L_1^{\tau_1} + L_1^{\tau_2})(L_{-1}^{\tau_1} + L_{-1}^{\tau_2}) = \\ &= 2(\Delta^2 - \Delta) + 2L_0^{\tau_1}L_0^{\tau_2} - L_{-1}^{\tau_1}L_1^{\tau_2} - L_1^{\tau_1}L_{-1}^{\tau_2}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

задающий дифференциальное уравнение для собственных функций.

4.2.2. Собственные функции и собственные значения. Решим уравнение $C\Psi_h = h(h-1)\Psi_h$. Подставляя генераторы (4.35) и $\Delta = 1/2$, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} [-(\tau_1 - \tau_2)^2 \partial_{\tau_1} \partial_{\tau_2} + (\tau_1 - \tau_2)(\partial_{\tau_1} - \partial_{\tau_2})] \Psi_h(\tau_1, \tau_2) = \\ = h(h-1)\Psi_h(\tau_1, \tau_2). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Чтобы решить уравнение, рассмотрим анзац

$$\begin{aligned} \Psi_{h\omega}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\text{sgn}(\tau_1 - \tau_2)}{\sqrt{|\tau_1 - \tau_2|}} \psi_h\left(\frac{|\omega(\tau_1 - \tau_2)|}{2}\right) \times \\ \times \exp\left(-i\omega \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Этот анзац инспирирован следующими свойствами оператора Казимира и функций Ψ_h . Во-первых, Ψ_h является антисимметричной функцией с конформным весом $\Delta = 1/2$, что объясняет множитель $\text{sgn}(\tau_1 - \tau_2)/\sqrt{|\tau_1 - \tau_2|}$. Во-вторых, структура уравнения (4.39) подсказывает, что от переменных τ_1 и τ_2 удобно перейти к переменным $\tau \equiv \tau_1 - \tau_2$ и $T \equiv (1/2)(\tau_1 + \tau_2)$. В-третьих, результат действия оператора Казимира (4.39) на (4.40) не зависит от ω . Наконец, функция ψ_h является решением уравнения Бесселя:

$$\left[x^2 \partial_x^2 + x \partial_x + \left(x^2 - h(h-1) - \frac{1}{4} \right) \right] \psi_h(x) = 0, \quad (4.41)$$

где $x \equiv \frac{|\omega\tau|}{2}$.

Следовательно, для каждого h существует бесконечный набор собственных функций, параметризованных частотой ω . При нулевой температуре частота непрерывна ($\omega \in \mathbb{R}$), при конечной температуре — дискретна ($\omega = (\pi/\beta)(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$). Кроме того, это означает, что в разложении (4.34) необходимо суммировать не по множеству Ψ_h , а по множеству $\Psi_{h\omega}$:

$$\begin{aligned} (I - K_c)^{-1} K_c I = \\ = \sum_{k(h) \neq 1} \sum_{\omega} \frac{k(h, \omega)}{1 - k(h, \omega)} \frac{1}{\langle \Psi_{h\omega} | \Psi_{h\omega} \rangle} |\Psi_{h\omega}\rangle \langle \Psi_{h\omega}|. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Общее решение уравнения (4.41) складывается из двух функций Бесселя:

$$\begin{aligned} \psi_h(x) &= -A_h J_{h-1/2}(x) - B_h Y_{h-1/2}(x) = \\ &= \frac{B_{1-h}}{\cos(\pi h)} J_{h-1/2}(x) - \frac{B_h}{\cos(\pi h)} J_{1/2-h}(x). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Здесь B_h — некоторая функция от h . Чтобы получить второе равенство, мы учли, что уравнение (4.41) не изменится при замене $h \rightarrow 1-h$, и потребовали выполнения равенства $\Psi_{1-h} = \Psi_h$. Также мы использовали следующее соотношение между функциями Бесселя первого и второго рода:

$$Y_{\alpha}(x) = \frac{J_{\alpha}(x) \cos(\pi\alpha) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\pi\alpha)}. \quad (4.44)$$

Теперь вспомним, что ядро K_c должно коммутировать с генераторами $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Отсюда следует, что последнее слагаемое в правой части (4.37) должно тождественно равняться нулю для $m = -1, 0, 1$ и всех h . Для $m = -1, 0$ это условие всегда выполнено и новой информации не сообщает. В самом деле, выражение в квадратных скобках пропорционально $|\tau_3|^{m-1}$, когда $\tau_3 \rightarrow \pm\infty$, т.е. для $m = -1, 0$ подынтегральное выражение тождественно равно нулю. Однако при подстановке $m = 1$ это условие накладывает дополнительное ограничение на коэффициенты B_h :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_4 \left[\tau_3^2 K(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \times \right. \\ \times \left. \frac{1}{\sqrt{|\tau_3 - \tau_4|}} \psi_{h\omega}\left(\frac{|\omega(\tau_3 - \tau_4)|}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega(\tau_3 + \tau_4)}{2}\right) \right]_{\tau_3=-\infty}^{\tau_3=\infty} = \\ = -3\sqrt{\pi} J^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_4 \frac{\text{sgn}(\tau_2 - \tau_4)}{\sqrt{|\tau_1 - \tau_2|} |\tau_2 - \tau_4|} \times \\ \times \sin \frac{\omega\tau_4}{2} \left[\frac{B_h}{\cos(\pi h)} \cos \frac{\pi h}{2} - \frac{B_{1-h}}{\cos(\pi h)} \sin \frac{\pi h}{2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.45)$$

следовательно,

$$\frac{B_h}{B_{1-h}} = \tan \frac{\pi h}{2}. \quad (4.46)$$

Собирая все факты вместе, получаем, что собственные функции имеют следующий вид (с точностью до постоянного множителя, который будет определён ниже):

$$\begin{aligned} \Psi_{h\omega}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\text{sgn} \tau}{\sqrt{|\tau|}} \exp(-i\omega T) \left[\frac{\cos(\pi h/2)}{\cos(\pi h)} J_{h-1/2}\left(\frac{|\omega\tau|}{2}\right) - \right. \\ \left. - \frac{\sin(\pi h/2)}{\cos(\pi h)} J_{1/2-h}\left(\frac{|\omega\tau|}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Интегрируя функцию (4.47) вместе с ядром K_c (как в определении (3.52)), находим соответствующее собственное значение, $K_c \Psi_h = k(h, \omega) \Psi_h$:

$$k(h, \omega) = -\frac{3}{2} \frac{\tan[(\pi/2)(h-1/2)]}{h-1/2}. \quad (4.48)$$

Это вычисление громоздко, но тривиально, поэтому мы не будем приводить его здесь. Подробности вычисления²⁰ можно найти в приложениях C и D работы [4].

Заметим, что собственные значения (4.48) не зависят от частоты ω благодаря конформной инвариантности

²⁰ Авторы [4] используют другое ядро и получают немного другие собственные функции, однако интеграл для собственных значений совпадает с интегралом в нашем случае.

ядра. Тем не менее такая зависимость появляется, если отойти от глубокого ИК-предела. В работе [5] подобная зависимость установлена и использована для вычисления лидирующей неконформной поправки к четырёхточечной корреляционной функции. Результат этого вычисления совпадает с результатом, полученным в разделе 4.1.

4.2.3. Полный набор собственных функций. Собственные функции эрмитова оператора образуют полный набор (см., например, [124]). Имея в виду этот факт, потребуем, чтобы оператор Казимира был эрмитовым относительно скалярного произведения (3.54):

$$\langle C\Psi_{h\omega}(\tau_1, \tau_2) | \Psi_{h'\omega'}(\tau_1, \tau_2) \rangle = \langle \Psi_{h\omega}(\tau_1, \tau_2) | C\Psi_{h'\omega'}(\tau_1, \tau_2) \rangle. \quad (4.49)$$

С одной стороны, эрмитовость означает, что собственные значения оператора Казимира действительны:

$$\text{Im}[h(h-1)] = 0, \quad \text{т.е.} \quad \text{Im} h(2\text{Re} h - 1) = 0. \quad (4.50)$$

Другими словами, переменная h является либо чисто действительной, либо имеет фиксированную действительную часть: $h = 1/2 + is$, $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$ (без последнего неравенства собственные функции неоднозначны: $\Psi_{1/2+is, \omega} = \Psi_{1/2-is, \omega}$). С другой стороны, из равенства (4.49) следует, что соответствующие граничные члены обнуляются для произвольных ω , ω' и h , h' из спектра:

$$\begin{aligned} \langle C\Psi_{h\omega}(\tau_1, \tau_2) | \Psi_{h'\omega'}(\tau_1, \tau_2) \rangle - \langle \Psi_{h\omega}(\tau_1, \tau_2) | C\Psi_{h'\omega'}(\tau_1, \tau_2) \rangle = \\ = \frac{8\pi\delta(\omega - \omega')}{\omega} \left[x(\psi_{h'}(x)\partial_x \psi_h^*(x) - \psi_h^*(x)\partial_x \psi_{h'}(x)) \right]_{x=0}^{x=\infty} = 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Здесь мы подставили анзац (4.40) и обозначили $x = |\omega\tau|/2$. Подставляя асимптотики функций Бесселя [125], находим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x(\psi_{h'}(x)\partial_x \psi_h^*(x) - \psi_h^*(x)\partial_x \psi_{h'}(x)) \right] = 0 \quad (4.52)$$

для произвольных h и h' , а также

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[x(\psi_{h'}(x)\partial_x \psi_h^*(x) - \psi_h^*(x)\partial_x \psi_{h'}(x)) \right] = \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi h^*/2) \cos(\pi h'/2)}{\cos(\pi h^*) \cos(\pi h')} \times \\ \times \left[\frac{h^* - h'}{\Gamma(h^* + 1/2)\Gamma(h' + 1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{h^*+h'-1} - \right. \\ \left. - \tan \frac{\pi h^*}{2} \tan \frac{\pi h'}{2} \frac{h^* - h'}{\Gamma(3/2 - h^*)\Gamma(3/2 - h')} \left(\frac{x}{2}\right)^{1-h^*-h'} + \right. \\ \left. + \tan \frac{\pi h^*}{2} \frac{h^* + h' - 1}{\Gamma(3/2 - h^*)\Gamma(h' + 1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{h'-h^*} - \right. \\ \left. - \tan \frac{\pi h'}{2} \frac{h^* + h' - 1}{\Gamma(h^* + 1/2)\Gamma(3/2 - h')} \left(\frac{x}{2}\right)^{h^*+h'-1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

для значений вида $h = 1/2 + is$, $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$ (в этом случае получается осциллирующее выражение) или $h = 2n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (в этом случае расходящиеся члены умножаются на нули). Таким образом, мы заключаем, что вместе два указанных множества нумеруют полный

набор в пространстве антисимметричных двухточечных функций.

Наконец, найдём нормировочные множители в разложении (4.42), для чего вычислим скалярное произведение собственных функций:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{h\omega}(\tau_1, \tau_2) | \Psi_{h'\omega'}(\tau_1, \tau_2) \rangle = \\ = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dT \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \psi_h^* \left(\frac{|\omega|\tau}{2} \right) \psi_{h'} \left(\frac{|\omega'|\tau}{2} \right) \exp[i(\omega - \omega')T] = \\ = 4\pi\delta(\omega - \omega') \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \left[\frac{\sin(\pi h/2)}{\cos(\pi h)} J_{1/2-h} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\cos(\pi h/2)}{\cos(\pi h)} J_{h-1/2} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) \right]^* \times \\ \times \left[\frac{\sin(\pi h'/2)}{\cos(\pi h')} J_{1/2-h'} \left(\frac{\omega'\tau}{2} \right) - \frac{\cos(\pi h'/2)}{\cos(\pi h')} J_{h'-1/2} \left(\frac{\omega'\tau}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Для дискретного множества интеграл задаёт символ Кронекера:

$$\langle \Psi_{h\omega}(\tau_1, \tau_2) | \Psi_{h'\omega'}(\tau_1, \tau_2) \rangle = \frac{2\pi^2}{2h-1} \delta_{hh'} 2\pi\delta(\omega - \omega'), \quad (4.55)$$

а для непрерывного множества — дельта-функцию²¹:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{h\omega}(\tau_1, \tau_2) | \Psi_{h'\omega'}(\tau_1, \tau_2) \rangle = \\ = \frac{2\pi \tan(\pi h)}{2h-1} 2\pi\delta(h-h') 2\pi\delta(\omega - \omega'). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Следовательно, единичный оператор (3.53) на пространстве антисимметричных двухточечных функций можно разложить в следующую сумму:

$$\begin{aligned} I(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} \frac{ds}{2\pi} \frac{2h-1}{\pi \tan(\pi h)} \times \right. \\ \times \Psi_{h\omega}(\tau_1, \tau_2) \Psi_{h\omega}^*(\tau_3, \tau_4) \Big|_{h=1/2+is} + \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h-1}{\pi^2} \Psi_{h\omega}(\tau_1, \tau_2) \Psi_{h\omega}^*(\tau_3, \tau_4) \Big|_{h=2n} \right]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Подставляя анзац (4.47) и интегрируя по частотам, получаем разложение, которое явным образом определяет конформную четырёхточечную функцию полей размерностью $\Delta = 1$:

$$\begin{aligned} I(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = \frac{1}{2} \frac{\text{sgn}(\tau_{12}) \text{sgn}(\tau_{34})}{|\tau_{12}| |\tau_{34}|} \times \\ \times \left[\int_0^{\infty} \frac{ds}{2\pi} \frac{2h-1}{\pi \tan(\pi h)} \Psi_{1/2+is}(\chi) \Big|_{h=1/2+is} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h-1}{\pi^2} \Psi_{2n}(\chi) \Big|_{h=2n} \right], \end{aligned} \quad (4.58)$$

где мы обозначили $\tau_{12} \equiv \tau_1 - \tau_2$, ввели $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ -инвариантное двойное отношение:

$$\chi \equiv \frac{\tau_{12}\tau_{34}}{\tau_{13}\tau_{24}}, \quad (4.59)$$

²¹ Мы ввели УФ-обрезание $\epsilon \rightarrow 0$ и использовали равенство $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [2/(p-s)] \sin[(1/2)(s-p) \log(\epsilon/2)] = \pi\delta(s-p)$. Больше деталей можно найти в [4].

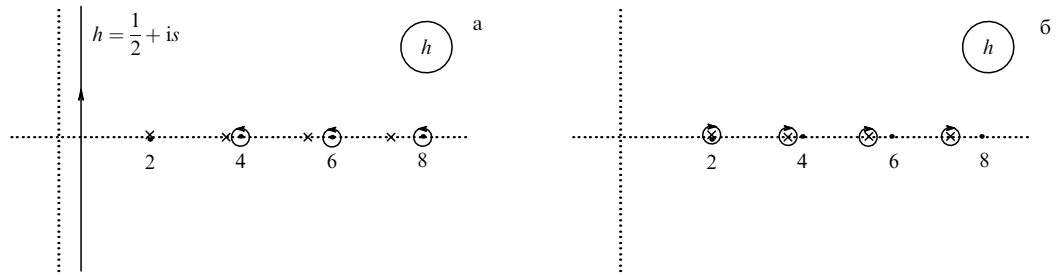


Рис. 8. (а) Контур C из суммы (4.65). (б) Контур из суммы (4.68). Тёмными кружками отмечены полюсы, которые отвечают решениям $\tan(\pi h/2) = 0$, крестами отмечены полюсы, отвечающие решениям $k(h) = 1$. Обратите внимание на двойной полюс в $h = 2$.

и определили функцию $\Psi_h(\chi)$:

$$\Psi_h(\chi) \equiv \begin{cases} \frac{\Gamma(h/2)\Gamma((1-h)/2)}{\sqrt{\pi}} {}_2F_1\left[\frac{h}{2}, \frac{1-h}{2}, \frac{1}{2}, \left(\frac{2-\chi}{\chi}\right)^2\right], & \text{если } \chi > 1, \\ \frac{\cos^2(\pi h/2)}{\cos(\pi h)} \frac{\Gamma^2(h)}{\Gamma(2h)} \chi^h {}_2F_1(h, h, 2h, \chi) + (h \rightarrow 1-h), & \text{если } 0 < \chi < 1, \end{cases} \quad (4.60)$$

где $\Gamma(\dots)$ — гамма-функция Эйлера, ${}_2F_1(\dots)$ — гипергеометрическая функция. Детали этого вычисления можно найти в приложении Г и работах [4, 5].

Наконец, разложение (4.58) можно представить в компактном виде с помощью единственного контурного интеграла:

$$I(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = \frac{1}{2} \frac{\text{sgn}(\tau_{12}) \text{sgn}(\tau_{34})}{\tau_{12}\tau_{34}} \times \int_C \frac{dh}{2\pi i} \frac{h-1/2}{\pi \tan(\pi h/2)} \Psi_h(\chi), \quad (4.61)$$

в котором контур C определяется следующим образом:

$$\int_C \frac{dh}{2\pi i} \equiv \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{dh}{2\pi i} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}_{h=2n}. \quad (4.62)$$

Чтобы переписать интеграл по ds , мы использовали симметрию подынтегрального выражения относительно замены $h \rightarrow 1-h$, а также следующее тригонометрическое тождество:

$$\frac{2}{\tan(\pi h)} = \frac{1}{\tan(\pi h/2)} - \frac{1}{\tan[\pi(1-h)/2]}. \quad (4.63)$$

Разумеется, разложение единичного оператора также можно получить с помощью теории представлений группы $SL(2, \mathbb{R})$. Подробности этого метода можно найти в работе [121].

4.2.4. Четырёхточечная функция и операторное разложение. Чтобы найти конформный вклад в четырёхточечную функцию, подставим собственные значения и разложение единичного оператора (4.61) в уравнение (4.30):

$$\mathcal{F}_{\text{CFT}}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = \frac{\sqrt{4\pi}}{3N} \frac{\text{sgn}(\tau_{12})}{|J\tau_{12}|^{2\Delta}} \frac{\text{sgn}(\tau_{34})}{|J\tau_{34}|^{2\Delta}} \mathcal{F}_{\text{CFT}}(\chi), \quad (4.64)$$

где $\Delta = 1/4$ и мы ввели $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантную функцию $\mathcal{F}_{\text{CFT}}(\chi)$:

$$\mathcal{F}_{\text{CFT}}(\chi) = \int_C \frac{dh}{2\pi i} \frac{k(h)}{1-k(h)} \frac{h-1/2}{\pi \tan(\pi h/2)} \Psi_h(\chi) \Big|_{h \neq 2}. \quad (4.65)$$

При конечной температуре функция (4.64) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{CFT}}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) &= \\ &= \frac{\sqrt{4\pi}}{3N} \frac{1}{\beta J} \frac{\text{sgn}[\sin(\pi\tau_{12}/\beta)]}{|\sin(\pi\tau_{12}/\beta)|^{2\Delta}} \frac{\text{sgn}[\sin(\pi\tau_{34}/\beta)]}{|\sin(\pi\tau_{34}/\beta)|^{2\Delta}} \mathcal{F}_{\text{CFT}}(\tilde{\chi}), \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\tilde{\chi} = \frac{\sin(\pi\tau_{12}/\beta) \sin(\pi\tau_{34}/\beta)}{\sin(\pi\tau_{13}/\beta) \sin(\pi\tau_{24}/\beta)}.$$

Мы исключили значение $h = 2$ в интеграле (4.62), так как оно отвечает нулевой моде оператора K_c , т.е. мягкой моде, обсуждавшейся в разделе 4.1. Впрочем, $h = 2$ — это не единственное решение уравнения $k(h) = 1$ с $k(h)$ вида (4.48). На самом деле это уравнение имеет бесконечно много решений вида $h_m = 2\Delta + 2m + 1 + \epsilon_m$, где ϵ_m стремится к нулю для больших m ,

$$\epsilon_m \approx \frac{3}{2\pi m} \quad \text{для } m \gg 1. \quad (4.67)$$

Эти решения не принадлежат спектру оператора K_c , однако отвечают простым полюсам функции $k(h)/(1-k(h))(h-1/2)/[\pi \tan(\pi h/2)] \Psi_h(\chi)$. Следовательно, мы можем сдвинуть контур C вправо (рис. 8) и получить альтернативное разложение для функции $\mathcal{F}_{\text{CFT}}$:

$$\mathcal{F}_{\text{CFT}}(\chi) = \sum_{m=0}^{\infty} \text{Res}_{h=h_m} \left[\frac{k(h)}{1-k(h)} \frac{h-1/2}{\pi \tan(\pi h/2)} \Psi_h(\chi) \right], \quad (4.68)$$

где $h_0 = 2$ и h_m для $m > 0$ имеют упомянутый выше вид. Вклад полюса $h_0 = 2$ сокращается, если отойти от глубокого ИК-предела и рассмотреть поправки к $k(h, \omega)$ около $h_0 = 2$ (мы не будем обсуждать, как это происходит; подробности можно найти в [5]). Таким образом, для $\chi < 1$ это разложение воспроизводит операторное разложение четырёхточечной функции [5, 103]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{CFT}}(\chi) &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \chi^{h_m} {}_2F_1(h_m, h_m, 2h_m, \chi) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 \text{Diagram}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

где h_m — конформные веса соответствующих промежуточных операторов, а коэффициенты c_m находятся из

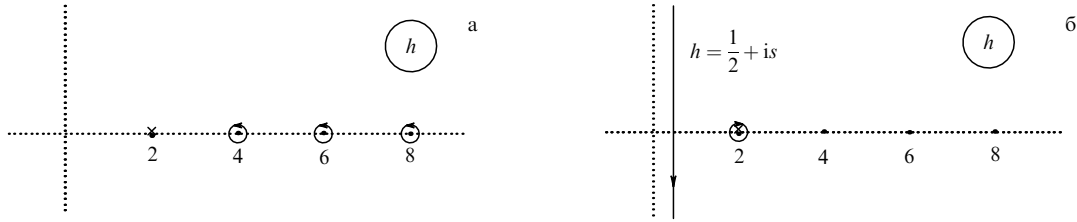


Рис. 9. (а) Сумма по полюсам в (4.65) с $k(h) \rightarrow k_R(h)$. (б) Результат перетягивания контура влево. Обратим внимание, что $k_R(h) = 1$ только для $h = 2$, поэтому вкладов, аналогичных вкладам на рис. 8б, нет.

разложения (4.61) около $\chi = 0$. Асимптотическое поведение конформных весов подсказывает, что операторы в операторном разложении построены из двух фермионных полей, $(2m+1)$ -й производной и аномальной части, описывающей гипотетическое взаимодействие:

$$\mathcal{O}_m \approx \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{2m+1} d_{mk} \hat{c}_\tau^k \chi_i \hat{\partial}_\tau^{2m+1-k} \chi_i, \quad (4.70)$$

где d_{mk} — некоторые численные коэффициенты. Явный вид операторов $\mathcal{O}_m$ приведён в [123].

4.2.5. ОТОС и ТОС. Оценим конформные вклады в ОТОС (4.27), который отвечает функции $\mathcal{F}(\beta/4 + it, -\beta/4 + it, 0, -\beta/2)$, и ТОС (4.29), который отвечает функции $\mathcal{F}(\beta/2 + it, it, 0, -\beta/2)$. На древесном уровне оба этих коррелятора ведут себя следующим образом:

$$\text{ОТОС}(t) = \text{ТОС}(t) = \tilde{G}\left(\frac{\beta}{2}\right) \tilde{G}\left(\frac{\beta}{2}\right) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta J} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad (4.71)$$

в пределе $t \rightarrow \infty$. В разделе 4.1 мы оценили лидирующую поправку, пропорциональную $1/N$ и обеспеченную так называемой мягкой модой. Здесь мы найдём сублидирующий вклад, который имеет тот же порядок по $1/N$, но подавлен малым множителем $1/(\beta J)$. Обозначим эти поправки как $\delta\text{ОТОС}(t)$ и $\delta\text{ТОС}(t)$.

В пределе $t \rightarrow \infty$ значения аргументов и для ОТОС, и для ТОС отвечают малым двойным отношениям (4.59), $\chi \rightarrow 0$. В то же время в пределе $t \rightarrow 0$ аргументы ОТОС отвечают отношению $\chi \rightarrow 2 - 4\pi it/\beta$, тогда как аргументы ТОС отвечают $\chi \rightarrow 1 - \pi^2 t^2/\beta^2$. Следовательно, для оценки ОТОС необходимо аналитически продолжить версию выражения (4.65), отвечающую $\chi > 1$, на малые мнимые двойные отношения $\chi \sim -4i \exp(-2\pi t/\beta)$:

$$\delta\text{ОТОС}(t) = \frac{\sqrt{4\pi}}{3N} \frac{1}{\beta J} \int_C \frac{dh}{2\pi i} \frac{k(h)}{1-k(h)} \frac{h-1/2}{\pi \tan(\pi h/2)} \times \\ \times \frac{\Gamma(h/2)\Gamma((1-h)/2)}{\sqrt{\pi}} {}_2F_1\left[\frac{h}{2}, \frac{1-h}{2}, \frac{1}{2}, \left(\frac{2-\chi}{\chi}\right)^2\right]_{h \neq 2}. \quad (4.72)$$

Для оценки ТОС достаточно взять предел $\chi \sim -4 \exp(-2\pi t/\beta) \rightarrow 0$:

$$\delta\text{ТОС}(t) = \frac{\sqrt{4\pi}}{3N} \frac{1}{\beta J} \int_C \frac{dh}{2\pi i} \frac{k(h)}{1-k(h)} \frac{h-1/2}{\pi \tan(\pi h/2)} \times \\ \times \left[\frac{\cos^2(\pi h/2)}{\cos(\pi h)} \frac{\Gamma^2(h)}{\Gamma(2h)} \chi^h {}_2F_1(h, h, 2h, \chi) + (h \rightarrow 1-h) \right]_{h \neq 2}. \quad (4.73)$$

Чтобы оценить интеграл по контуру $\mathcal{C}$, воспользуемся следующим приёмом. Прежде всего определим функцию $k_R(h)$:

$$k_R(h) \equiv \frac{\cos[\pi(2h-1)/4]}{\cos[\pi(2h+1)/4]} k(h), \quad (4.74)$$

которая имеет два важных свойства. С одной стороны, для любого целого чётного h эта функция совпадает с собственным значением $k(h)$, что позволяет сделать замену $k(h) \rightarrow k_R(h)$ в дискретной сумме (4.65). С другой стороны, $k_R(h) = 1$ в единственной точке комплексной плоскости, $h = 2$. Следовательно, контур, окружающий $h = 2, 4, 6, \dots$, можно беспрепятственно²² передвинуть на линию $h = 1/2 + is$ (рис. 9). После этого преобразования мы получим интеграл по прямой $h = 1/2 + is$ плюс единственный полюс в $h = 2$:

$$\mathcal{F}_{\text{CFT}}(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2\pi} \left[\frac{k(h)}{1-k(h)} - \frac{k_R(h)}{1-k_R(h)} \right] \times \\ \times \frac{h-1/2}{\pi \tan(\pi h/2)} \Psi_h(\chi) - \\ - \text{Res}_{h=2} \left[\frac{k_R(h)}{1-k_R(h)} \frac{h-1/2}{\pi \tan(\pi h/2)} \Psi_h(\chi) \right]. \quad (4.75)$$

Интеграл в правой части (4.75) быстро сходится и не возрастает в пределе $\chi \rightarrow 0$, поскольку в этом пределе функция $\Psi_{1/2+s}(\chi) \sim \chi^{1/2}$ (эта асимптотика выполняется и для ТОС, и для ОТОС). Следовательно, для наших целей этим интегралом можно пренебречь.

В то же время полюс в правой части (4.75) приводит к возрастающему со временем вкладу в ОТОС. Более того, этот полюс является двойным и поэтому выражается через сумму функции Ψ_h и её производной $\partial_h \Psi_h$. Такая комбинация возрастает быстрее, чем экспоненциально:

$$\delta\text{ОТОС}(t) \approx \frac{C_1}{\beta J N} \exp\left(\frac{2\pi t}{\beta}\right) + \frac{C_2}{\beta J N} \frac{2\pi t}{\beta} \exp\left(\frac{2\pi t}{\beta}\right), \quad (4.76)$$

где C_1 и C_2 — некоторые положительные численные постоянные. На первый взгляд, такое быстрое возрастание нарушает ограничение [9], однако при более пристальном рассмотрении оказывается, что это не так. Мнимое противоречие объясняется знаком вклада (4.76) (мы ожидаем, что ОТОС убывает, а не возрастает) и малым множителем $1/(\beta J)$. Из-за этого множителя вклад конформной части параметрически меньше, чем вклад мягкой моды, по крайней мере до тех пор, пока

²² $\Psi_h(\chi)$ имеет простые полюсы в точках $h = 1, 3, 5, \dots$, однако эти полюсы сокращаются с нулями $[\tan(\pi h/2)]^{-1}$.

ОТОС не насыщается. Таким образом, выражение (4.76) можно интерпретировать как лидирующую поправку к ляпуновской экспоненте [5, 6, 103]:

$$\text{ОТОС}(t) \rightarrow \text{ОТОС}(t) + \delta \text{ОТОС}(t) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta J} \times \\ \times \left[1 - \text{const} \frac{\beta J}{N} \exp(\kappa t) \right] \quad \text{для} \quad \beta \ll t \ll \beta \log \frac{N}{\beta J}, \quad (4.77)$$

где const — положительный численный множитель порядка $\mathcal{O}(1)$, κ — показатель скорректированной ляпуновской экспоненты; и множитель, и показатель экспоненты совпадают с коэффициентами в равенстве (4.28) с точностью до $\mathcal{O}(1/(\beta J))$:

$$\kappa \approx \frac{2\pi}{\beta} \left(1 - \frac{6,05}{\beta J} + \dots \right). \quad (4.78)$$

Обратим внимание, что с учётом конформной поправки показатель ляпуновской экспоненты *меньше*, чем предсказанное в [9] предельное значение $\kappa = 2\pi/\beta$.

Аналогичным образом можно проверить, что полюс в правой части (4.75) не может генерировать возрастающие со временем вклады в ТОС. Как и в случае мягкой моды, этот вклад пропорционален $1/N$, т.е. приближённое равенство для полного ТОС с учётом конформных флуктуаций практически не отличается от (4.29).

Подчеркнём, что ОТОС быстро убывает только для времён, много меньших времени скремблирования $t_* \sim \beta \log [N/(\beta J)]$. На больших временах приближения этого раздела не работают и другие типы диаграмм (например, множественные параллельные "лестницы") также могут генерировать существенные вклады в (4.28). Таким образом, можно ожидать, что скорость убывания замедлится прежде, чем ОТОС окончательно насытится [5, 6, 9, 103]. Это предположение подтверждено в работе [126], в которой ОТОС модели SYK рассчитаны для произвольных времён. А именно, в этой работе обнаружен новый временной масштаб $t_M = N \log N / (64\sqrt{\pi}J)$, при превышении которого экспоненциальное убывание ОТОС сменяется степенным: $\text{ОТОС}(t) \sim (t/t'_M)^{-6}$, где $t'_M = t_M$, если $\beta \ll t_M$, и $t'_M = \beta^{-1}$ в противном случае.

Ещё раз подчеркнём, что равенства (4.77) и (4.78) получены в пределе $1 \ll \tau J < \beta J \ll N$, т.е. для малых, но отличных от нуля температур. Впрочем, недавно было показано, что при дополнительном условии $q \gg 1$, где q — число фермионов в вершине взаимодействия, похожие равенства также выполняются для произвольных температур и констант связи [127, 128].

5. Двумерная дилатонная гравитация

Ещё одна примечательная теория, демонстрирующая хаотическое поведение, — это двумерная дилатонная гравитация с материей. Корреляционные функции операторов на границе, отвечающих полям материи в объёме, в этой теории ведут себя так же, как и корреляционные функции фермионов в модели SYK. Впрочем, подчеркнём, что такое "соответствие" возникает только в пределе низких энергий. Этот аспект двумерной дилатонной гравитации тщательно изучен в работах [10–13]. В разделах 5.1–5.5 мы воспроизведём рассуждения указанных работ.

5.1. Дилатонная гравитация как предел вблизи горизонта событий экстремальной чёрной дыры

Прежде всего покажем, что вблизи горизонта событий пространство-время четырёхмерной экстремальной чёрной дыры факторизуется в произведение двумерного пространства анти-де-Ситтера (AdS_2) и двумерной сферы (S_2). Метрика и электромагнитное поле заряженной чёрной дыры Рейснера – Нордстрёма имеют следующий вид:

$$ds^2 = -\frac{(r-r_+)(r-r_-)}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{(r-r_+)(r-r_-)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (5.1)$$

$$r_{\pm} = Ql_P + El_P^2 \pm \sqrt{2QE l_P^3 + E^2 l_P^4}, \quad F_{rt} = \frac{Q}{r^2}.$$

Здесь M — масса чёрной дыры, Q — её электрический заряд, $d\Omega^2$ — метрика на двумерной сфере с единичным радиусом. Кроме того, $l_P = \sqrt{G}$ — планковская длина (G — обычная четырёхмерная постоянная Ньютона), а энергия возбуждений над экстремальностью $E = M - Q/l_P$. Очевидно, что для $E = 0$ горизонты r_+ и r_- совпадают и чёрная дыра становится экстремальной. Заметим, что в этом случае M и Q не являются независимыми, поэтому планковская длина оказывается единственным размерным параметром экстремальной чёрной дыры.

Чтобы перейти к пределу вблизи горизонта экстремальной чёрной дыры, введём переменную

$$z \equiv \frac{Q^2 l_P^2}{r - r_+} \quad (5.2)$$

и возьмём предел $r \rightarrow r_+$, $l_P \rightarrow 0$ при условии $z = \text{const}$. Указанная выше комбинация $r - r_+$ и l_P — это простейшая комбинация с размерностью длины, которая не исчезает в пределе $r \rightarrow r_+$ (для удобства мы также ввели безразмерный множитель Q^2). Очевидно, что в этом пределе метрика (5.1) факторизуется в произведение AdS_2 и S_2 :

$$ds^2 \approx Q^2 l_P^2 \left(\frac{-dt^2 + dz^2}{z^2} + d\Omega^2 \right). \quad (5.3)$$

Теперь покажем, что возбуждения вблизи горизонта событий экстремальной чёрной дыры (5.3) описываются двумерной дилатонной гравитацией [103, 129–131]. А именно, рассмотрим статичный, сферически-симметричный анзац для метрики:

$$ds^2 = h_{ij}(x^0, x^1) dx^i dx^j + \Phi^2(x^0, x^1) d\Omega^2, \quad (5.4)$$

где $i, j = 0, 1$, $x^0 = t$, $x^1 = r$, h_{ij} и Φ — некоторые функции, которые будут определены в дальнейшем. Детерминант метрики ($g = \det g_{\mu\nu}$), риччи-скаляр (R_g) и квадрат электромагнитного тензора ($F_{\mu\nu}^2$) выглядят следующим образом:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-h} \Phi^2 \sin \theta, \\ R_g = R_h + \frac{2}{\Phi^2} - 4\nabla^2 \log \Phi - 6h^{mn} \nabla_m \log \Phi \nabla_n \log \Phi, \quad (5.5)$$

$$F_{\mu\nu}^2 = \frac{2Q^2}{\Phi^4},$$

где ∇_k обозначает ковариантную производную по отношению к метрике h_{ij} . Во второй из формул (5.5) мы

использовали, что единичная сфера имеет постоянную кривизну $R_{(\theta, \phi)} = 2$. Подставляя эти формулы в действие Эйнштейна–Гильберта

$$I = -\frac{1}{16\pi l_p^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_h - \frac{l_p^2}{4} F_{\mu\nu}^2 \right], \quad (5.6)$$

используя теорему Стокса (предположим, что соответствующие граничные члены обнуляются на бесконечности, где пространство-время стремится к плоскому) и интегрируя по угловым степеням свободы, получаем следующую двумерную теорию²³:

$$I = -\frac{1}{4l_p^2} \int d^2x \sqrt{-h} \left[\Phi^2 R_h + 2(\nabla\Phi)^2 + 2 - \frac{2Q^2 l_p^2}{\Phi^2} \right]. \quad (5.7)$$

Как правило, поле Φ называют полем дилатона. Заметим, что преобразование Вейля сдвигает потенциал и коэффициент перед кинетическим членом:

$$h_{ij} \rightarrow h_{ij} \Phi^{-\lambda/2} \text{ приводит к } 2 \rightarrow 2 - \lambda, \\ 2 - \frac{2Q^2 l_p^2}{\Phi^2} \rightarrow \Phi^{-\lambda/2} \left(2 - \frac{2Q^2 l_p^2}{\Phi^2} \right), \quad (5.8)$$

поэтому от кинетического члена поля Φ можно избавиться:

$$I = -\frac{1}{4l_p^2} \int d^2x \sqrt{-h} \left[\Phi^2 R_h + 2 - \frac{2Q^2 l_p^2}{\Phi^2} \right]. \quad (5.9)$$

Поскольку теперь дилатон оказывается нединамическим, экстремум действия достигается на некотором постоянном значении Φ_0 , которое определяет кривизну пространства-времени. Более того, кривизна всегда отрицательна, т.е. экстремум отвечает пространству AdS_2 :

$$\delta_\Phi I = 0 \text{ при условии } R_h = -\frac{2Q^2 l_p^2}{\Phi_0^4} = -\frac{2}{L^2}, \quad (5.10)$$

где мы обозначили радиус AdS_2 как $L = \Phi_0^2/(|Q|l_p)$. Подставляя $L^2 \approx Q^2 l_p^2$ из (5.3), можно оценить критическое значение поля дилатона: $\Phi_0 \approx |Q|l_p$. Как и ожидалось, в лидирующем порядке эта теория воспроизводит предел вблизи горизонта экстремальной чёрной дыры с гравитационным радиусом $r_\pm \approx \Phi_0$. Теперь рассмотрим возбуждения над экстремальностью, которые в этой картине отвечают малым деформациям дилатонного поля:

$$\Phi^2 = \Phi_0^2 + \phi(x, t), \quad \phi(x, t) \ll \Phi_0^2, \quad (5.11)$$

и разложим действие (5.9) до второго порядка по ϕ/Φ_0^2 :

$$I \approx -\frac{1}{2l_p^2} \int d^2x \sqrt{-h} - \frac{\Phi_0^2}{4l_p^2} \left[\int d^2x \sqrt{-h} \left(R_h + \frac{2}{L^2} \right) + 2 \int_{\text{bdy}} \mathcal{K} \right] - \frac{1}{4l_p^2} \left[\int d^2x \sqrt{-h} \phi \left(R_h + \frac{2}{L^2} \right) + 2 \int_{\text{bdy}} \phi_b \mathcal{K} \right] \quad (5.12)$$

²³ Разумеется, наряду с этой теорией можно рассмотреть другие теории двумерной дилатонной гравитации, т.е. теории с другими видами потенциала. Исчерпывающий обзор таких теорий можно найти в работе [131].

(где bdy — сокращение от англ. boundary — граница). Здесь мы восстановили правильные граничные члены²⁴ в AdS_2 , чтобы сделать минимальное действие конечным (это условие будет проверено ниже), а также ввели след внешней кривизны:

$$\mathcal{K} = -\frac{h_{ab} T^a T^c \nabla_c n^b}{h_{ab} T^a T^b}, \quad (5.13)$$

где T^a и n^a — касательный и нормальный векторы²⁵ к границе AdS_2 . Для краткости мы также обозначили $\phi|_{\text{bdy}} = \phi_b$.

Первый член в (5.12) пропорционален объёму пространства AdS_2 , который бесконечен, но постоянен. Второй член описывает обычную двумерную гравитацию Эйнштейна. Это чисто топологическое выражение, так как в силу формулы Гаусса–Бонне оно равно эйлеровой характеристике многообразия. Следовательно, оба указанных члена не сказываются на уравнениях движения.

В то же время последний член в правой части (5.12) описывает нетривиальную динамику оставшихся полей. Соответствующее действие

$$I_{\text{JT}} = -\frac{1}{16\pi G} \left[\int d^2x \sqrt{-h} \phi \left(R_h + \frac{2}{L^2} \right) + 2 \int_{\text{bdy}} \phi_b \mathcal{K} \right] \quad (5.14)$$

обычно называют теорией двумерной гравитации Джакива–Тейтельбойма [132, 133]. Отметим, что мы перемасштабировали постоянную Ньютона. Также заметим, что ϕ и G^{-1} всегда встречаются вместе и образуют безразмерную комбинацию, поэтому удобно определить безразмерный дилатон и безразмерную постоянную Ньютона. В разделах 5.2–5.5 мы подробно изучим динамические следствия действия (5.14).

Более подробный вывод теории (5.14) из предела вблизи горизонта событий экстремальной чёрной дыры можно найти, например, в работах [129, 130]. Также заметим, что эту теорию можно получить редукцией некоторых других моделей более высокой размерности [131, 134].

5.2. Чистое двумерное пространство анти-де-Ситтера и его симметрии

Прежде чем обсуждать теорию Джакива–Тейтельбойма, рассмотрим чистое AdS_2 , чтобы определить обозначения и обсудить некоторые полезные свойства этого пространства.

Во-первых, удобно положить радиус пространства равным единице, $L = 1$, поскольку его можно легко восстановить из размерных соображений. Ниже мы будем рассматривать именно такое пространство, если не оговорено особо.

²⁴ Заметим, что это не то же самое, что граница в четырёхмерной теории.

²⁵ В теориях более высокой размерности граничная поверхность имеет два касательных вектора T_1^a и T_2^a , поэтому указанное выражение модифицируется следующим образом:

$$\mathcal{K} = -\frac{h_{ab} T_1^a T_2^c \nabla_c n^b}{h_{ab} T_1^a T_2^b}.$$

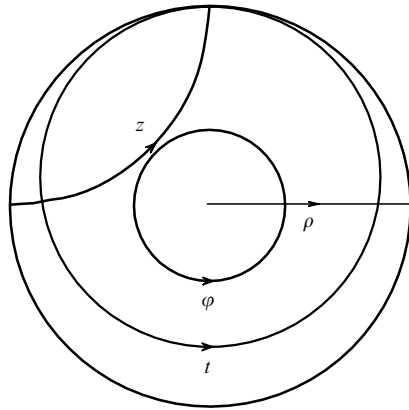


Рис. 10. Кривые постоянных t , z , φ и ρ . Стрелки показывают направление, в котором увеличивается дополнительная координата.

Во-вторых, мы будем работать в евклидовой сигнатуре. С одной стороны, этот выбор естествен с точки зрения голографии — в конечном счёте мы заинтересованы в корреляционных функциях операторов дуальной граничной теории (см. раздел 5.5). Так же как и в модели SYK (см. раздел 4), оценим некоторые типы корреляционных функций в евклидовой сигнатуре, а потом аналитически продолжим их на лоренцевы времена (см. [135] для обсуждения аналитического продолжения корреляционных функций в AdS).

С другой стороны, в евклидовой сигнатуре AdS_2 является обычным гиперболическим диском (пространством Лобачевского²⁶), который полностью покрывается координатами Пуанкаре и Риндлера (см. рис. 10):

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{dt^2 + dz^2}{z^2} \quad (\text{Пуанкаре}), \\ ds^2 &= d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\varphi^2 \quad (\text{Риндлер}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Между этими координатами можно переключаться с помощью следующих тождеств:

$$\begin{aligned} \tanh \frac{\rho}{2} \cos \varphi &= -\frac{2t}{t^2 + (z+1)^2}, \\ \tanh \frac{\rho}{2} \sin \varphi &= \frac{t^2 + z^2 - 1}{t^2 + (z+1)^2}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Заметим, что t изменяется от $-\infty$ до ∞ , а φ — от $-\pi$ до π (на самом деле эта координата периодична: $\varphi \sim \varphi + 2\pi$). Также заметим, что в лоренцевой сигнатуре координаты Пуанкаре ($ds^2 = (-\hat{d}t^2 + dz^2)/z^2$) покрывают только половину пространства-времени, а координаты Риндлера ($ds^2 = d\rho^2 - \sinh^2 \rho d\varphi^2$) — ещё меньшую область (см., например, [10, 136]).

Наконец, на практике пространство AdS_2 необходимо обрезать некоторой кривой, достаточно близко распо-

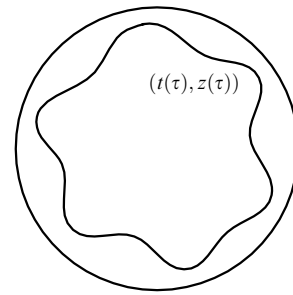


Рис. 11. Обрезанное пространство AdS_2 .

ложенной к границе (рис. 11). В противном случае объём пространства и длина геодезических граница–граница будут бесконечными. Такое обрезание отвечает УФ-обрезанию в предполагаемой дуальной граничной теории. Чтобы реализовать обрезание, фиксируем значение метрики на границе:

$$ds|_{\text{bdy}} = \sqrt{\frac{ds^2}{d\tau^2}} d\tau = \sqrt{\frac{(t')^2 + (z')^2}{z^2}} d\tau = \frac{d\tau}{\epsilon}, \quad (5.17)$$

что эквивалентно большой собственной длине граничной кривой:

$$S = \int ds = \int_0^\beta \frac{d\tau}{\epsilon} = \frac{\beta}{\epsilon} \rightarrow \infty, \quad (5.18)$$

где время в граничной теории принадлежит интервалу $\tau \in [0, \beta)$, а штрих обозначает производную по τ . Предел $S \rightarrow \infty$ отвечает $\epsilon \rightarrow 0$. Заметим, что в этом пределе координаты кривой не независимы:

$$\begin{aligned} \frac{(t')^2 + (z')^2}{z^2} &= \frac{1}{\epsilon^2}, \quad \text{следовательно,} \\ z(\tau) &= \epsilon t'(\tau) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Таким образом, функция $t(\tau)$ однозначно фиксирует граничную кривую.

Поскольку внутреннее пространство одинаково для всех граничных кривых, геометрия обрезанного пространства определяется формой граничной кривой, т.е. единственной функцией $t(\tau)$. Тем не менее напомним, что евклидово пространство AdS_2 инвариантно относительно преобразований из группы $\text{SO}(2, 1) \simeq \text{SL}(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$, т.е. относительно поворотов и трансляций. Следовательно, функции $t(\tau)$ и $\tilde{t}(\tau)$, связанные следующим преобразованием:

$$t(\tau) \rightarrow \tilde{t}(\tau) = \frac{at(\tau) + b}{ct(\tau) + d}, \quad \text{где } ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad (5.20)$$

описывают одну и ту же геометрию. Это утверждение очевидно, если переписать метрику Пуанкаре в терминах комплексной координаты $w = t + iz$. Тогда преобразования, которые отображают верхнюю полуплоскость саму в себя, сводятся к дробно-линейным преобразованиям:

$$w \rightarrow \frac{aw + b}{cw + d}, \quad \text{где } ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad (5.21)$$

что даёт (5.20) в пределе $\epsilon \rightarrow 0$.

²⁶ Мы не будем различать верхнюю полуплоскость и единичный диск, поскольку их можно однозначно отобразить друг в друга с помощью преобразования Мёбиуса: $w \rightarrow (iw + 1)/(w + i)$, где $w = t + iz$. Метрики на плоскости и диске связаны тем же самым преобразованием. В частности, кривые постоянных t и z на рис. 10 следует интерпретировать как отображения соответствующих кривых, лежащих на гиперболической плоскости.

5.3. Шварццианная теория

Рассмотрим теорию Джакива–Тейтельбойма (5.14) на обрезанном диске Пуанкаре и покажем, что она эффективно сводится к одномерной теории со шварццианным действием. Для начала рассмотрим пространственную часть действия (5.14):

$$I_{\text{bulk}} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^2x \sqrt{h} \phi(R_h + 2). \quad (5.22)$$

Уравнение движения для дилатона устанавливает ограничение $R_h + 2 = 0$, т.е., иными словами, говорит, что метрика совпадает с метрикой AdS_2 . По этой причине гравитацию Джакива–Тейтельбойма иногда называют "почти AdS_2 "-гравитацией. Уравнения движения метрики имеют следующий вид:

$$T_{ij}^\phi \equiv \frac{1}{8\pi G} (\nabla_i \nabla_j \phi - h_{ij} \nabla^2 \phi + h_{ij} \phi) = 0, \quad (5.23)$$

что определяет поведение дилатонного поля:

$$\phi = \frac{a + bt + c(t^2 + z^2)}{z}, \quad (5.24)$$

где a, b, c — постоянные интегрирования. Заметим, что около границы дилатон "взрывается":

$$\phi|_{\text{bdy}} \approx \frac{1}{\epsilon} \frac{a + bt(\tau) + ct^2(\tau)}{t'(\tau)} \equiv \frac{\phi_r(\tau)}{\epsilon}, \quad (5.25)$$

где мы использовали (5.19) и для удобства определили "перенормированное" граничное поле $\phi_r(\tau)$. Впрочем, мы предполагаем, что это большое поле всё-таки меньше, чем экстремальное значение дилатона в исходной теории, $\phi_r/\epsilon \ll \Phi_0^2 \approx Q^2 l_p^2$, ввиду (5.11).

Теперь оценим граничный член. Касательный и нормальный векторы к кривой $(t(\tau), z(\tau))$ в метрике Пуанкаре задаются равенствами

$$T^a = \begin{pmatrix} t' \\ z' \end{pmatrix}, \quad n^a = \frac{z}{\sqrt{(t')^2 + (z')^2}} \begin{pmatrix} -z' \\ t' \end{pmatrix}$$

соответственно. Следовательно, используя (5.13) и (5.19), можно непосредственно получить след внешней кривизны:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{t'(t'^2 + z'^2 + zz'') - zz't''}{(t'^2 + z'^2)^{3/2}} = \\ &= 1 + \epsilon^2 \text{Sch}[t(\tau), \tau] + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Подставляя (5.25) и (5.26) в граничную часть действия (5.14), а затем переходя к интегрированию по времени в граничной теории, получаем следующее действие:

$$\begin{aligned} I_{\text{JT}}^{\text{min}} &= 0 + I_{\text{bdy}} = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\text{bdy}} ds \frac{\phi_r(\tau)}{\epsilon} \mathcal{K} = \\ &= -\frac{1}{8\pi G} \int_0^\beta \frac{d\tau}{\epsilon} \frac{\phi_r(\tau)}{\epsilon} [1 + \epsilon^2 \text{Sch}[t(\tau), \tau] + \mathcal{O}(\epsilon^4)]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Расходящийся член (порядка $\mathcal{O}(\epsilon^{-2})$) вносит вклад в энергию основного состояния теории; избавиться от этой расходимости можно с помощью метода гологра-

фических перенормировок [137–139]. В применении к 2D-дилатонной гравитации этот метод широко изучен в работах [11, 140–142]. Здесь мы просто предположим, что расходящийся член можно отбросить²⁷. Таким образом, в лидирующем порядке по ϵ получаем следующее действие:

$$I_{\text{JT}}^{\text{min}} \approx -\frac{1}{8\pi G} \int_0^\beta d\tau \phi_r(\tau) \text{Sch}[t(\tau), \tau]. \quad (5.28)$$

Легко проверить, что вариация этого действия по $t(\tau)$ воспроизводит соотношение (5.25).

Более того, зависимость от времени $\phi_r(\tau)$ можно удалить, перемасштабировав время граничной теории. С этой целью определим новую координату $\tilde{\tau}$, такую что $d\tilde{\tau} = \bar{\phi}_r d\tau / \phi_r^2(\tau)$, где $\bar{\phi}_r$ — некоторая положительная безразмерная постоянная (напомним, что мы считаем дилатон и постоянную Ньютона безразмерными), и используем правило композиции для шварцциана²⁸:

$$I_{\text{bdy}} \approx -\frac{\bar{\phi}_r}{8\pi G} \int_0^{\tilde{\beta}} d\tilde{\tau} \text{Sch}[t(\tilde{\tau}), \tilde{\tau}]. \quad (5.29)$$

Интеграл от второго члена, $\phi_r \text{Sch}[\tilde{\tau}, \tau] = -2\phi_r''$, равен нулю ввиду периодичности $\phi_r'(\tau + \beta) = \phi_r'(\tau)$ (граничная кривая гладкая и замкнутая). Таким образом, в дальнейшем мы будем рассматривать постоянные значения дилатона без потери общности.

Также удобно перейти к риндлеровским координатам с помощью отображения $t(\tau) = \tan(\varphi(\tau)/2)$, которое следует из равенств (5.16) в пределе $z \rightarrow 0$:

$$\text{Sch}[t, \tau] = \text{Sch}[\varphi, \tau] + \frac{(\varphi')^2}{2}. \quad (5.30)$$

Варьируя соответствующее действие по φ , получим следующее уравнение движения:

$$\frac{\text{Sch}[\varphi, \tau]'}{\varphi'} - \varphi'' = 0, \quad (5.31)$$

которое имеет линейное по времени решение:

$$\varphi(\tau) = \frac{2\pi\tau}{\beta}. \quad (5.32)$$

Коэффициент линейной зависимости выбран таким образом, чтобы риндлеровское время было периодичным с периодом 2π : $\varphi \sim \varphi + 2\pi$. Это решение можно ассоциировать с граничной теорией при температуре β . В дальнейшем мы будем рассматривать возбуждения над этим решением. Для удобства положим $\beta = 2\pi$.

Заметим, что уравнение (5.31) — это нелинейное дифференциальное уравнение четвёртого порядка, которое в принципе может иметь много замысловатых решений. Мы не знаем, как они выглядят в общем виде. Поэтому мы не можем явно проверить, является ли решение (5.32) глобальным минимумом действия (5.29).

²⁷ Подчеркнём, что единственный безопасный способ получить правильное действие и наблюдаемые — это честные голографические перенормировки, поскольку упомянутый грубый метод иногда обманчив [140, 143]. Впрочем, для теории (5.14) этот грубый метод даёт правильный результат. Тщательное обсуждение граничных условий, граничных контрчленов, а также вывод шварццианного действия в 2D-дилатонной гравитации можно найти в [140, 141, 144–146].

²⁸ $\text{Sch}[f(g(\tau)), \tau] = (g')^2 \text{Sch}[f(g), g] + \text{Sch}[g, \tau]$.

Тем не менее из общезначимых соображений мы ожидаем, что это действительно так.

Наконец, рассмотрим колебания граничной кривой около минимального решения (5.32):

$$\varphi(\tau) \approx \tau + \delta\varphi(\tau). \quad (5.33)$$

Так же как и в случае модели SYK (см. раздел 4.1), можно найти приближённое эффективное действие для таких флуктуаций:

$$I_S = -\frac{\bar{\phi}_r}{16\pi G} \int_0^{2\pi} d\tau \left[(\delta\varphi')^2 - (\delta\varphi'')^2 \right] + \mathcal{O}(\delta\varphi^3), \quad (5.34)$$

и оценить их корреляционные функции (ср. с (4.21)):

$$\begin{aligned} \langle \delta\varphi(\tau)\delta\varphi(0) \rangle_S &\approx \frac{4G}{\bar{\phi}_r} \sum_{m \neq -1, 0, 1} \frac{\exp(im\tau)}{m^2(m^2 - 1)} = \\ &= \frac{4G}{\bar{\phi}_r} \left[-\frac{(|\tau| - \pi)^2}{2} + (|\tau| - \pi) \sin |\tau| + 1 + \frac{\pi^2}{6} + \frac{5}{2} \cos |\tau| \right]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Заметим, что мы исключили моды, которые отвечают трансляциям и поворотам (т.е. $SL(2, \mathbb{R})$ -преобразованиям), поскольку они отвечают нединамическим степеням свободы. Это выражение понадобится нам, чтобы оценить поправки к корреляторам в граничной теории (см. раздел 5.5).

5.4. Поля материи

Добавим материю к теории (5.14). Простейшее действие материи имеет вид

$$I_m = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{h} [h^{ab} \partial_a \xi \partial_b \xi + m^2 \xi^2]. \quad (5.36)$$

Решение соответствующих уравнений движения, которое конечно в объёме, но расходится в пределе $z \rightarrow 0$, выглядит следующим образом:

$$\xi(t, z) = z^{1-\Delta} \xi_r(t) + \dots, \quad \text{где} \quad \Delta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + m^2}, \quad (5.37)$$

$\xi_r(t)$ — граничное значение поля $\xi(t, z)$; функция $\xi_r(t)$ однозначно определяет поле $\xi(t, z)$, конечное в объёме пространства. Сублидирующий вклад в пределе $z \rightarrow 0$ мы обозначили многоточием. Согласно словарю AdS/CFT-соответствия [147–150], функцию $\xi_r(t)$ можно интерпретировать как источник, отвечающий оператору с конформной размерностью Δ . Следовательно, эффективная теория полей материи²⁹, которые распространяются в AdS_2 и удовлетворяют граничным условиям (5.37), выглядит следующим образом (для вывода см., например, работу [151]):

$$I_{m\text{-bdy}} = -D \int dt dt' \frac{\xi_r(t) \xi_r(t')}{|t - t'|^{2\Delta}}, \quad \text{где} \quad D = \frac{(\Delta - 1/2)\Gamma(\Delta)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\Delta - 1/2)}. \quad (5.38)$$

Это действие неявно зависит от формы граничной кривой. Чтобы сделать эту зависимость явной, используем (5.19) и перепишем граничное условие в терминах

времени на границе:

$$\xi_r(t, z) \approx z^{1-\Delta} \xi_r(t) = \epsilon^{1-\Delta} [t'(\tau)]^{1-\Delta} \xi_r[t(\tau)] = \epsilon^{1-\Delta} \xi_r(\tau), \quad (5.39)$$

где мы ввели "перенормированное" поле $\xi_r(\tau) \equiv [t'(\tau)]^{1-\Delta} \xi_r[t(\tau)]$. Подставляя это определение в действие (5.38), получаем

$$I_{m\text{-bdy}} = -D \int d\tau d\tau' \left[\frac{t'(\tau)t'(\tau')}{(t(\tau) - t(\tau'))^2} \right]^\Delta \xi_r(\tau) \xi_r(\tau'). \quad (5.40)$$

Таким образом, в квазиклассическом пределе $G \rightarrow 0$ граничный производящий функционал с источником $\xi_r(\tau)$ имеет вид

$$Z[\xi_r(\tau)] = \exp(-I_0 - I_{\text{Sch}} - I_{m\text{-bdy}}), \quad (5.41)$$

где I_0 — энергия основного состояния. На первый взгляд, этот член расходится (в частности, он включает в себя расходящиеся члены, полученные в разделе 5.3), поэтому его необходимо перенормировать [11, 103, 142]. Тем не менее он не зависит от формы границы и поэтому в дальнейшем может быть опущен.

Более того, в пределе $G \rightarrow 0$ вклад полей материи пренебрежимо мал (по крайней мере если Δ возрастает медленнее, чем $G^{-2/3}$ (см. [10, 103])), поэтому статистическая сумма (5.41) набирается на экстремуме шварцшианного действия. Этот предел отвечает пределу больших N в дуальной граничной конформной теории поля. Следовательно, двухточечная корреляционная функция операторов в дуальной теории в лидирующем порядке выглядит так:

$$\begin{aligned} \langle V(\tau)V(\tau') \rangle &= \frac{1}{Z[\xi_r]} \frac{\partial^2 Z[\xi_r]}{\partial \xi_r(\tau) \partial \xi_r(\tau')} \Big|_{\xi_r=0} = \\ &= \left[\frac{t'(\tau)t'(\tau')}{(t(\tau) - t(\tau'))^2} \right]^\Delta = \frac{1}{\{2 \sin[(\tau - \tau')/2]\}^{2\Delta}}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

где мы подставили седловое решение (5.32) и положили $\beta = 2\pi$. Здесь оператор $V(\tau)$ сопряжён $\xi_r(\tau)$ в соответствии с терминологией AdS/CFT. Разумеется, аналогичные рассуждения справедливы также для многоточечных корреляционных функций.

Существует два вида поправок к этому выражению. Первый вид обусловлен взаимодействиями в объёме, включая взаимодействие между полями материи и обратное действие, искажающее очертания границы. Второй вид — это петлевые поправки "квантовой гравитации", обусловленные флуктуациями $t(\tau)$ и $\xi(t, z)$ около классических значений (напомним, что для конечной G правая часть (5.41) представляет собой функциональный интеграл по полям в объёме). Причём в пределе $G \rightarrow 0$ доминируют поправки, связанные с флуктуациями границы (5.33). В разделе 5.5 мы оценим вклад этих флуктуаций в четырёхточечные функции.

5.5. Четырёхточечная корреляционная функция, упорядоченный по времени

и упорядоченный вне времени корреляторы

Следуя [10, 11], оценим первую поправку "квантовой гравитации" к "почти AdS_2 "-теории. Вычисления этого раздела очень похожи на обсуждавшиеся для модели SYK в разделе 4. Как и в модели SYK, удобно опреде-

²⁹ Напомним, что поля материи не сказываются на ограничении $R_h + 2 = 0$ (см. начало раздела 5.3).

лить связную часть четырёхточечной функции:

$$\mathcal{F}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \equiv \langle V(\tau_1) V(\tau_2) W(\tau_3) W(\tau_4) \rangle - \langle V(\tau_1) V(\tau_2) \rangle \langle W(\tau_3) W(\tau_4) \rangle. \quad (5.43)$$

Для простоты мы рассматриваем операторы V и W , которые имеют конформную размерность Δ и дуальны разным полям в объёме. Во-первых, таким образом мы избегаем кроссканалов. Во-вторых, двухточечные корреляционные функции таких операторов экспоненциально убывают с возрастанием лоренцева времени: $\langle V(\tau_1 + it) W(\tau_2) \rangle \sim \exp[(-2\pi\Delta/\beta)t] \approx 0$ для $t \gg \beta$ (здесь мы восстановили β в (5.42)). Нам понадобится это свойство, чтобы оценить ОТОС и ТОС.

Найдём поправку первого порядка по G к функции $\mathcal{F}$. Для этого рассмотрим малые флуктуации³⁰ поверх "классической" граничной кривой:

$$t(\tau) = \tan \frac{\varphi(\tau)}{2} = \tan \frac{\tau + \delta\varphi(\tau)}{2}, \quad (5.44)$$

и разложим двухточечную функцию (5.42) до третьего порядка по $\delta\varphi$:

$$\left[\frac{t'(\tau)t'(\tau')}{(t(\tau) - t(\tau'))^2} \right]^{\Delta} = \frac{1}{\{2 \sin[(\tau - \tau')/2]\}^{2\Delta}} \times [1 + \mathcal{B}(\tau, \tau') + \mathcal{C}(\tau, \tau') + \mathcal{O}(\delta\varphi^3)], \quad (5.45)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\tau_1, \tau_2) &= \Delta \left(\delta\varphi'(\tau_1) + \delta\varphi'(\tau_2) - \frac{\delta\varphi(\tau_1) - \delta\varphi(\tau_2)}{\tan(\tau_{12}/2)} \right), \\ \mathcal{C}(\tau_1, \tau_2) &= \frac{\Delta}{[2 \sin(\tau_{12}/2)]^2} \left[(1 + \Delta + \Delta \cos \tau_{12}) \times \right. \\ &\times (\delta\varphi(\tau_1) - \delta\varphi(\tau_2))^2 + 2\Delta \sin \tau_{12} (\delta\varphi(\tau_1) - \delta\varphi(\tau_2)) \times \\ &\times (\delta\varphi'(\tau_1) + \delta\varphi'(\tau_2)) - (\cos \tau_{12} - 1) \times \\ &\times \left. \left(\Delta(\delta\varphi'(\tau_1) + \delta\varphi'(\tau_2))^2 - \delta\varphi'^2(\tau_1) - \delta\varphi'^2(\tau_2) \right) \right]. \quad (5.46) \end{aligned}$$

Здесь мы обозначили $\tau_{12} = \tau_1 - \tau_2$. Используя это разложение, усредним производящий функционал (5.41) по флуктуациям формы границы и найдём эффективное действие:

$$\begin{aligned} -I_{\text{eff}}[\xi_V, \xi_W] &= \log \left\langle \exp(-I_{\text{m-bdy}}[\xi_V] - I_{\text{m-bdy}}[\xi_W]) \right\rangle_S = \\ &= D \int d\tau_1 d\tau_2 \left[1 + \langle \mathcal{C}(\tau_1, \tau_2) \rangle_S \right] \times \\ &\times \frac{\xi_V(\tau_1)\xi_V(\tau_2) + (\xi_V \leftrightarrow \xi_W)}{\{2 \sin[(\tau_1 - \tau_2)/2]\}^{2\Delta}} + \\ &+ \frac{D^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \langle \mathcal{B}(\tau_1, \tau_2)\mathcal{B}(\tau_3, \tau_4) \rangle_S \times \\ &\times \frac{\xi_V(\tau_1)\xi_V(\tau_2)\xi_V(\tau_3)\xi_V(\tau_4) + (\xi_V \leftrightarrow \xi_W)}{\{2 \sin[(\tau_1 - \tau_2)/2]\}^{2\Delta} \{2 \sin[(\tau_3 - \tau_4)/2]\}^{2\Delta}} + \\ &+ D^2 \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \langle \mathcal{B}(\tau_1, \tau_2)\mathcal{B}(\tau_3, \tau_4) \rangle_S \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{\xi_V(\tau_1)\xi_V(\tau_2)\xi_W(\tau_3)\xi_W(\tau_4)}{\{2 \sin[(\tau_1 - \tau_2)/2]\}^{2\Delta} \{2 \sin[(\tau_3 - \tau_4)/2]\}^{2\Delta}} + \mathcal{O}(G^2), \quad (5.47)$$

где источники ξ_V, ξ_W дуальны операторам V, W соответственно, $\langle \dots \rangle_S$ обозначает усреднение по линейризованному шварцианному действию (5.34):

$$\langle O \rangle_S \equiv \frac{\int \mathcal{D}\delta\varphi O \exp(-I_{\text{Sch}}[\delta\varphi])}{\int \mathcal{D}\delta\varphi \exp(-I_{\text{Sch}}[\delta\varphi])}. \quad (5.48)$$

Заметим, что $\langle \mathcal{B}(\tau_1, \tau_2) \rangle_S = 0$, поскольку $\mathcal{B}$ линейно по $\delta\varphi$. Дифференцируя эффективный производящий функционал, находим связную четырёхточечную функцию:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) &= \frac{\partial^4 \exp(-I_{\text{eff}}[\xi_V, \xi_W])}{\partial \xi_V(\tau_1) \partial \xi_V(\tau_2) \partial \xi_W(\tau_3) \partial \xi_W(\tau_4)} \Big|_{\xi_V=0, \xi_W=0} = \\ &= \frac{\langle \mathcal{B}(\tau_1, \tau_2)\mathcal{B}(\tau_3, \tau_4) \rangle_S}{\{2 \sin[(\tau_1 - \tau_2)/2]\}^{2\Delta} \{2 \sin[(\tau_3 - \tau_4)/2]\}^{2\Delta}}. \quad (5.49) \end{aligned}$$

Таким образом, нам надо вычислить среднее от произведения двух $\mathcal{B}$. Используя пропагатор (5.35) и учитывая соотношение

$$\begin{aligned} \langle \delta\varphi'(\tau_1)\delta\varphi(\tau_2) \rangle_S &= \text{sgn}(\tau_1 - \tau_2) \langle \delta\varphi(\tau_1)\delta\varphi(\tau_2) \rangle'_S, \\ \langle \delta\varphi'(\tau_1)\delta\varphi'(\tau_2) \rangle_S &= \langle \delta\varphi(\tau_1)\delta\varphi(\tau_2) \rangle''_S, \end{aligned} \quad (5.50)$$

получаем, что из-за функций знака среднее существенно зависит от порядка евклидовых времён. Как и в модели SYK, существует два принципиально разных упорядочения (выражения для других упорядочений следуют из симметрий $\mathcal{F}$, обсуждавшихся в начале раздела 4):

$$\text{ОРЕ: } 2\pi > \tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \tau_4 > 0, \quad (5.51)$$

$$\text{ОТО: } 2\pi > \tau_1 > \tau_3 > \tau_2 > \tau_4 > 0.$$

Для упорядочения первого типа связная четырёхточечная функция задаётся следующим выражением:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)}{G(\tau_1, \tau_2)G(\tau_3, \tau_4)} &= \frac{16G\Delta^2}{\bar{\phi}_r} \left(\frac{\tau_{12}}{2 \tan(\tau_{12}/2)} - 1 \right) \times \\ &\times \left(\frac{\tau_{34}}{2 \tan(\tau_{34}/2)} - 1 \right) + \mathcal{O}(G^2). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Здесь $G(\tau_1, \tau_2)$ обозначает древесные двухточечные функции (5.42) операторов V и W . Для упорядочения второго типа связная четырёхточечная функция выглядит более громоздко:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)}{G(\tau_1, \tau_2)G(\tau_3, \tau_4)} &= \frac{16G\Delta^2}{\bar{\phi}_r} \left(\frac{\tau_{12}}{2 \tan(\tau_{12}/2)} - 1 \right) \times \\ &\times \left(\frac{\tau_{34}}{2 \tan(\tau_{34}/2)} - 1 \right) + \\ &\times \frac{8\pi G\Delta^2}{\bar{\phi}_r} \left(\frac{\sin[(\tau_{12} + \tau_{34})/2] - \sin[(\tau_{13} + \tau_{24})/2]}{\sin(\tau_{12}/2) \sin(\tau_{34}/2)} + \right. \\ &\left. + \frac{\tau_{23}}{\tan(\tau_{12}/2) \tan(\tau_{34}/2)} \right) + \mathcal{O}(G^2). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Аналогичным образом мы также находим поправки порядка $\mathcal{O}(G)$ к двухточечным функциям:

³⁰ Из действия (5.34) следует, что амплитуда таких флуктуаций порядка $\delta\varphi \sim \sqrt{G/\bar{\phi}_r}$.

$$\frac{\langle V(\tau_1)V(\tau_2) \rangle}{G(\tau_1, \tau_2)} = 1 + \frac{G\Delta}{\phi_r} \frac{1}{[\sin(\tau_{12}/2)]^2} \left[2 + 4\Delta + \right. \\ \left. + \tau_{12}(\tau_{12} - 2\pi)(\Delta + 1) + (\Delta\tau_{12}(\tau_{12} - 2\pi) - 4\Delta - 2) \cos \tau_{12} + \right. \\ \left. + 2(\pi - \tau_{12})(2\Delta + 1) \sin \tau_{12} \right] + \mathcal{O}(G^2). \quad (5.54)$$

Поправки к коррелятору $\langle WW \rangle$ выглядят так же.

Наконец, восстановим β , подставим подходящие евклидовы времена в коррелятор (5.43) и аналитически продолжим (5.52) и (5.53) на ненулевые лоренцевы времена, чтобы получить ТОС и ОТОС. Для ОТОС рассмотрим следующий выбор комплексных времён:

$$\tau_1 = \frac{\beta}{4} + it, \quad \tau_2 = -\frac{\beta}{4} + it, \quad \tau_3 = 0, \quad \tau_4 = -\frac{\beta}{2}. \quad (5.55)$$

В чисто мнимом случае ($t = 0$) этот выбор отвечает упорядочению ОТО, поэтому надо аналитически продолжить (5.53):

$$\text{ОТОС}(t) \equiv \text{tr} [\rho^{1/4} V(t) \rho^{1/4} W(0) \rho^{1/4} V(t) \rho^{1/4} W(0)] = \\ = \mathcal{F}\left(\frac{\beta}{4} + it, -\frac{\beta}{4} + it, 0, -\frac{\beta}{2}\right) + \\ + \left\langle V\left(\frac{\beta}{2}\right) V(0) \right\rangle \left\langle W\left(\frac{\beta}{2}\right) W(0) \right\rangle \approx \\ \approx \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{4\Delta} \left[1 - 2\Delta^2 \frac{\beta G}{\phi_r} \exp\left(\frac{2\pi t}{\beta}\right) \right] \text{ для } \beta \ll t \ll \beta \log \frac{\bar{\phi}_r}{\beta G}. \quad (5.56)$$

Здесь ρ обозначает матрицу плотности в соответствующей граничной СФТ. Заметим, что мы пренебрегли вкладами из (5.53) и (5.54), которые пропорциональны G , но не возрастают со временем t . Предел $t \gg \beta$ нужен, чтобы исключить вклады "смешанных" корреляторов вида $\langle VW \rangle$, которые на таких временах экспоненциально убывают. Кроме того, заметим, что гауссово приближение, в котором мы получили упомянутый результат, справедливо только для сравнительно малых времён, т.е. до тех пор, пока ОТОС не насыщается. Для больших времён коррелятор необходимо вычислять более аккуратно.

Для ТОС рассмотрим другой выбор времён:

$$\tau_1 = \frac{\beta}{2} + it, \quad \tau_2 = it, \quad \tau_3 = 0, \quad \tau_4 = -\frac{\beta}{2}, \quad (5.57)$$

который при малых лоренцевых временах, $t = 0$, отвечает упорядочению ОРЕ. Таким образом, аналитически продолжаем коррелятор (5.52) и получаем выражение

$$\text{ТОС}(t) \equiv \text{tr} [V(t) \rho^{1/2} V(t) W(0) \rho^{1/2} W(0)] \approx \\ \approx \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{4\Delta} \left[1 + \text{const} \frac{G}{\phi_r} \right], \quad (5.58)$$

которое слабо отклоняется от древесного значения даже для очень больших лоренцевых времён.

6. Примеры хаотического поведения (вместо заключения)

Вместо заключения кратко обсудим наиболее примечательные примеры хаотических систем, т.е. моделей, в

которых экспоненциально возрастают коммутаторы $C(t)$ и быстро убывают ОТОСs. Все такие модели рассматриваются в квазиклассическом пределе (больших N или малых G) и тем или иным образом моделируют взаимодействие вида все-со-всеми; кроме того, как правило, в этих моделях обсуждаются только малые флуктуации над равновесным состоянием. Поэтому вычисления корреляционных функций во всех случаях очень похожи. В частности, в этих моделях лидирующий вклад в ОТОСs обеспечивают лестничные диаграммы.

6.1. Модель Сачдева – Йе – Китаева/двумерная дилатонная гравитация

Прежде всего кратко напомним основные свойства модели SYK. Это квантово-механическая модель $N \gg 1$ майорановских фермионов с взаимодействием все-со-всеми и константами связи J_{ijkl} , которые распределены случайно и независимо, т.е. в соответствии с гауссовым распределением со средним квадратом $\overline{J_{ijkl}^2} = 3!J^2/N^3$ (сумма не подразумевается). Такой выбор констант связи позволяет определить своеобразное $1/N$ -разложение для усреднённых по беспорядку корреляционных функций (т.е. функций, усреднённых по разным реализациям констант связи). В частности, усреднённые по беспорядку двухточечные и четырёхточечные функции определяются так называемыми мелонными (см. рис. 1) и лестничными (см. рис. 7) диаграммами.

С помощью этой диаграммной техники можно показать, что в пределе $1 \ll \beta J \ll N$, который отвечает малым, но ненулевым температурам ($T = 1/\beta$), точная двухточечная функция экспоненциально убывает в лоренцевом времени:

$$G_c^\beta(t) \approx \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{2\beta J}} \frac{\text{sgn } t}{|\sinh(\pi t/\beta)|^{1/2}} \sim \exp\left(-\frac{t}{t_d}\right) \\ \text{для } t \gg t_d = \frac{2\beta}{\pi}, \quad (6.1)$$

упорядоченный по времени коррелятор приблизительно равен произведению двух двухточечных функций:

$$\text{ТОС}(t) \approx G_c^\beta\left(-\frac{i\beta}{2}\right) G_c^\beta\left(-\frac{i\beta}{2}\right) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta J} \text{ для } t \gg t_d, \quad (6.2)$$

а упорядоченный вне времени коррелятор быстро убывает и насыщается:

$$\text{ОТОС}(t) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta J} \left[1 - \frac{\Delta^2 \beta J}{2C N} \exp(\kappa t) \right] \\ \text{для } t_d \ll t \ll t_* = \beta \log \frac{N}{\beta J}, \quad (6.3)$$

где C — некоторый положительный численный коэффициент, $\Delta = 1/4$ — эффективная конформная размерность фермионов, $\kappa \approx (2\pi/\beta)(1 - 6,05/(\beta J) + \dots)$ — показатель ляпуновской экспоненты. Таким образом, квантовое среднее квадрата коммутатора экспоненциально возрастает:

$$C(t) = 2 \text{ТОС}(t) - \text{ОТОС}\left(t - \frac{i\beta}{4}\right) - \text{ОТОС}\left(t + \frac{i\beta}{4}\right) \approx \\ \approx \frac{\text{const}}{N} 2 \cos\left(\frac{\beta\kappa}{4}\right) \exp(\kappa t) \approx \frac{\text{const}}{N} \frac{6\pi}{\beta J} \exp(\kappa t). \quad (6.4)$$

Заметим, что коэффициент перед возрастающей экспонентой отличен от нуля, поскольку κ немного отклоняется от максимального возможного значения $2\pi/\beta$.

Более подробный вывод приведённых равенств представлен в разделах 3, 4, а также в работах [4–8, 103, 104] и докладах [1].

Стоит отметить, что чисто бозонный аналог модели SYK:

$$I = \int d\tau \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{d\phi^i}{d\tau} \right)^2 + \sum_{i,j,k,l=1}^N J_{ijkl} \phi^i \phi^j \phi^k \phi^l \right], \quad (6.5)$$

не является самосогласованным; в частности, для него не удаётся найти адекватного точного решения [79]. В то же время суперсимметричные аналоги модели SYK хорошо определены [79, 80].

Модель SYK также тесно связана с гравитацией Джакива – Тейтельбойма (JT), т.е. двумерной "почти AdS_2 "-гравитацией с дилатоном [10–12]. Можно показать, что эта теория эффективно является одномерной, поскольку её динамика определяется формой границы. Более того, в ИК-пределе эффективное действие этой теории совпадает с эффективным действием модели SYK. В обоих случаях форма действия обусловлена симметрией теории относительно преобразований из группы $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Таким образом, не удивительно, что в квазиклассическом пределе поведение корреляционных функций в JT-гравитации напоминает поведение аналогичных величин в модели SYK:

$$G(t) \approx \left(\frac{\pi}{\beta \sinh(\pi t/\beta)} \right)^{2A} \sim \exp\left(-\frac{t}{t_d}\right) \quad (6.6)$$

$$\text{для } t \gg t_d = \frac{\beta}{2\pi A},$$

$$\text{ТОС}(t) \approx \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{4A} \quad \text{для } t \gg t_d, \quad (6.7)$$

$$\text{ОТОС}(t) \approx \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{4A} \left[1 - 2A^2 \frac{\beta G}{\bar{\phi}_r} \exp(\kappa t) \right] \quad (6.8)$$

$$\text{для } t_d \ll t \ll t_* = \beta \log \frac{\bar{\phi}_r}{\beta G},$$

где A — конформная размерность операторов, дуальных полям материи в объёме, G — двумерная постоянная Ньютона, $\bar{\phi}_r$ — значение дилатона на границе, $\kappa \approx 2\pi/\beta$ — показатель ляпуновской экспоненты.

Более подробное вычисление корреляционных функций и других свойств 2D-дилатонной гравитации можно найти в разделе 5, а также в работах [10–13, 103] и докладах [1].

Заметим, что JT-гравитация описывает возбуждения около горизонта экстремальной чёрной дыры [130, 134], а AdS_2 обладает теми же причинными свойствами, что и чёрные дыры в пространствах AdS более высокой размерности. Эти наблюдения позволяют использовать JT-гравитацию и модель SYK в качестве игрушечных моделей для изучения многих сложных явлений на фоне чёрных дыр, например проходимых кротовых нор [17–20].

Тем не менее стоит подчеркнуть, что JT-гравитация хорошо описывает только низкоэнергетические особенности модели SYK (которые определяются шварццианым действием) и, следовательно, не может считаться полноценной гравитационно-дуальной теорией. Более того, в настоящее время есть только смутные намёки на

полноценную дуальную теорию. Основная проблема заключается в том, что дуальная теория должна воспроизводить нелокальное действие (3.46), которое описывает динамику билинейных полей G и Σ . Для этого необходимо добавить в теорию бесконечный набор массивных полей (массой порядка $\mathcal{O}(1)$), однако способа последовательно построить такую теорию в настоящее время не существует. Более подробное обсуждение предполагаемой теории, дуальной модели SYK, можно найти в работах [103, 122, 123].

6.2. Обобщения модели Сачдева – Йе – Китаева

Все замечательные свойства модели SYK, включая точную решаемость в пределе больших N , возникновение конформной симметрии в ИК-пределе и насыщение "ограничения на хаос", основаны на усреднении корреляционных функций по беспорядку, т.е. по случайным реализациям констант связи. Это означает, что модель SYK не является квантово-механической в полном смысле этого слова; в частности, в этой модели невозможно найти унитарный оператор, который описывает эволюцию во времени. Поэтому обобщения модели SYK, которые имитируют её свойства в пределе больших N , не прибегая к усреднению по беспорядку, представляют большой интерес. Мы рассмотрим три примера таких моделей.

Первый пример — модель Гурау – Виттена, предложенная в работах [106, 107]:

$$I_{\text{GW}} = \int_0^\beta d\tau \left[\frac{1}{2} \sum_{c=0}^3 \left(\sum_{\mathbf{a}^c} \chi_{\mathbf{a}^c}^c \frac{d}{d\tau} \chi_{\mathbf{a}^c}^c \right) + \frac{J}{N^{3/2}} \sum_{\mathbf{a}^0 \mathbf{a}^1 \mathbf{a}^2 \mathbf{a}^3} \chi_{\mathbf{a}^0}^0 \chi_{\mathbf{a}^1}^1 \chi_{\mathbf{a}^2}^2 \chi_{\mathbf{a}^3}^3 \prod_{c_1 < c_2} \delta_{a^{c_1 c_2} a^{c_2 c_1}} \right], \quad (6.9)$$

где χ^c — действительные фермионные поля, τ — евклидово время. Для каждого цвета c поле χ^c "живёт" в векторном представлении группы $\text{O}(N^3)$, т.е. представляет собой тензор третьего ранга с индексами $\mathbf{a}^c = \{a^{cd}, d \neq c\}$, каждый из которых пробегает интервал $1, \dots, N$. Полная группа симметрий теории совпадает с $\text{O}(N^6)$. Для простоты мы приводим только модель с четырёхфермионной вершиной, общие выражения можно найти в [106, 107].

Второй пример — это "обесцвеченная" фермионная тензорная модель, или модель Клебанова – Тарнопольского [108–110]:

$$I_{\text{KT}} = \int_0^\beta d\tau \left[\frac{i}{2} \sum_{abc} \chi^{abc} \frac{d\chi^{abc}}{d\tau} - \frac{g}{4} \sum_{a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2} \chi^{a_1 b_1 c_1} \chi^{a_1 b_2 c_2} \chi^{a_2 b_1 c_2} \chi^{a_2 b_2 c_1} \right], \quad (6.10)$$

где χ^{abc} — фермионный тензор третьего ранга, индексы a, b, c неразличимы и пробегают интервал $1, \dots, N$. Полная группа симметрий модели совпадает с $\text{O}(N^3)$.

Третья модель (модель Нисинаки – Тирасимы [111]) имитирует модель SYK, замещая константы связи J_{ijkl} лёгким бозонным тензорным полем:

$$I_{\text{NT}} = \int_0^\beta d\tau \sum_{i < j < k < l} \frac{1}{2\epsilon} \left[\left(\frac{d\phi_{ijkl}}{d\tau} \right)^2 + m^2 (\phi_{ijkl})^2 \right] + I_{\text{SYK}}, \quad (6.11)$$

где $\epsilon = (3!/\pi)(mJ^2/N^3)$, $m\beta \ll 1$, I_{SYK} — стандартное действие модели SYK (3.1) с $J_{ijkl} = \phi_{ijkl}$.

Мы не будем подробно обсуждать модели (6.9)–(6.11); единственный важный для нас момент заключается в том, что все эти модели воспроизводят диаграммную технику SYK в пределе больших N и лидирующем порядке по $1/N$. Следовательно, можно ожидать, что эти модели описываются тем же эффективным действием и имеют те же самые свойства, что и оригинальная модель SYK. Вывод указанного и других замечательных свойств SYK-подобных тензорных моделей можно найти в работах [106–111, 152–164].

Ещё одним примечательным обобщением модели SYK является комплексная модель SYK (CSYK) [23, 165, 166]:

$$I_{\text{CSYK}} = \int_0^\beta dt \left[\sum_{i=1}^N \chi_i^\dagger(\tau) \dot{\chi}_i(\tau) - \sum_{j_1 < j_2, k_1 < k_2} J_{j_1 j_2, k_1 k_2} \mathcal{A} \{ \chi_{j_1}^\dagger \chi_{j_2}^\dagger \chi_{k_1} \chi_{k_2} \} \right], \quad (6.12)$$

где $\mathcal{A}\{\dots\}$ обозначает антисимметризованное произведение операторов, а случайно распределённые константы связи $J_{j_1 j_2, k_1 k_2}$ имеют нулевое среднее и дисперсию

$$\overline{|J_{j_1 j_2, k_1 k_2}|^2} = \frac{2J^2}{N^3}.$$

Эта теория обладает и $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ -симметрией, и $\text{U}(1)$ -симметрией. Так же как и её чисто действительный предшественник, в ИК-пределе комплексная модель SYK описывается шварццианым действием с дополнительным членом, отвечающим моде $\text{U}(1)$. Скрупулёзное обсуждение модели CSYK и её приложений представлено в работах [23, 165–167].

6.3. Двумерная конформная теория поля с большим центральным зарядом и ударные волны в трёхмерном пространстве анти-де-Ситтера

Одними из первых систем, для которых были вычислены ОТОС, стали чёрная дыра BTZ и 2D-CFT с большим центральным зарядом [26, 35, 74–76]. Ниже кратко обсудим это вычисление.

Прежде всего, напомним, что ОТОС локальных операторов V и W можно представить в виде двухсторонней корреляционной функции в возмущённом состоянии TFD (см. формулы (2.20) и (2.21)). Если в качестве левой и правой подсистем выбрать конформные теории, дуальные некоторым гравитационным теориям в AdS, то чистое состояние (2.18) будет дуально вечной чёрной дыре Шварцшильда в пространстве AdS с обратной температурой β [168]. В частности, если обе системы являются 2D-CFT, то $|\text{TFD}\rangle$ описывает чёрную дыру BTZ.

В этой картине оператор $V_L(t)$, который действует на чистое $|\text{TFD}\rangle$, дуален частице, инжектированной около левой границы в прошлом в момент времени t . В соответствии с голографическим словарём [147–150] масса частицы равна $m_V = \Delta_V/(2L)$, где L — радиус пространства AdS, Δ_V — конформная размерность V (мы считаем, что $\Delta_V \gg 1$). Вообще говоря, такое возбуждение искажает геометрию пространства. Чтобы вычислить двухсторонний коррелятор и ОТОС, это искажение необходимо оценить.

Не вдаваясь в подробности, можно показать, что возмущённая геометрия описывается так называемой ударной волной [26, 75, 169]. Чтобы получить это решение, нужно склеить метрику исходной чёрной дыры (массой M) и чёрной дыры, проглотившей инжектированную частицу (массой $M + m_V$), таким образом, чтобы время в граничной теории текло непрерывно, а радиус единичной окружности не изменялся вдоль поверхности склеивания. Для малых масс инжектированной частицы, $m_V \ll M$, метрика ударной волны выглядит следующим образом:

$$ds^2 = -\frac{4L^2}{(1+UV)^2} dU dV + R^2 \left(\frac{1-UV}{1+UV} \right)^2 d\phi^2 + \frac{4L^2}{(1+UV)^2} \frac{m_V}{4M} \exp\left(\frac{Rt}{L^2}\right) \delta(U) dU^2, \quad (6.13)$$

где $U = u$, $V = v + m_V/(4M) \exp(Rt/L^2)\theta(u)$, u и v — стандартные координаты Крускала, R — радиус исходной чёрной дыры. В этой метрике геодезическое расстояние между двумя точками, близко расположенными к левой и правой границе, задаётся следующей формулой:

$$\frac{d}{L} \approx 2 \log \frac{2r}{R} + 2 \log \left[\cosh \frac{R(t_R - t_L)}{2L^2} + \frac{m_V}{8M} \exp\left(\frac{Rt}{L^2} - \frac{R(t_R + t_L)}{2L^2}\right) \right], \quad (6.14)$$

где t_L , t_R — временные координаты, r — радиальная координата левой и правой точки геодезической. Для простоты мы предположили, что угловые координаты точек совпадают. Вычитая расходящийся вклад (не зависящий от формы геодезической) и полагая $t_L = t_R = 0$, получаем следующую двухстороннюю корреляционную функцию в квазиклассическом пределе ($G \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \text{ОТОС}(t) &\approx \langle \text{TFD} | V_L^\dagger(t) W_L(0) W_R(0) V_L(t) | \text{TFD} \rangle \sim \\ &\sim \exp(-m_W d) \sim \left[1 + \frac{m_V}{8M} \exp\left(\frac{Rt}{L^2}\right) \right]^{-2Lm_W} \sim \\ &\sim \left[1 + C_1 \frac{m_V L}{S} \exp\left(\frac{2\pi t}{\beta}\right) \right]^{-2Lm_W} \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\text{для } t \ll t_* = \frac{\beta}{2\pi} \log S,$$

где $m_W = \Delta_W/(2L)$, $\Delta_W \gg 1$ — конформная размерность оператора W , C_1 — положительный численный коэффициент. Здесь мы использовали тождества для температуры $\beta = 2\pi L^2/R$, массы $M = R^2/(8GL^2)$ и энтропии $S = \pi R/(2G)$ чёрной дыры BTZ. Также мы предположили, что чёрная дыра велика, $R \sim L$, так что $S \sim R^2/(GL)$ и $C_1 = \mathcal{O}(1)$. Подробный вывод и обсуждение (6.15) можно найти в работах [26, 74, 76].

Наконец, при указанных предположениях можно получить корреляционную функцию в граничной CFT с большим центральным зарядом $c = 3L/(2G)$:

$$\begin{aligned} \text{ОТОС}(t) &\sim \left[1 + C_2 \frac{\Delta_V}{c} \exp\left(\frac{2\pi t}{\beta}\right) \right]^{-\Delta_W} \\ \text{для } t \ll t_* &\sim \frac{\beta}{2\pi} \log c, \end{aligned} \quad (6.16)$$

где C_2 — другой положительный численный коэффициент порядка $\mathcal{O}(1)$. Разумеется, этот результат можно также получить без голографии, рассматривая различные аналитические продолжения евклидовой четырёхточечной функции и используя конформный блок Вирасоро для единичного оператора [35, 77, 78].

Заметим, что и энтропия чёрной дыры, и центральный заряд измеряют число степеней свободы соответствующей теории; следовательно, и для (6.15), и для (6.16) время скремблирования $t_* \sim \beta \log N$. Это насыщает ограничение гипотезы о быстрых скремблерах. Ляпуновская экспонента $\kappa = 2\pi/\beta$ также насыщает соответствующее ограничение. Тем не менее напомним, что результат (6.15) воспроизводит только лидирующий вклад в пределе $G \rightarrow 0$, тогда как полный результат должен также учитывать квантовые поправки. Как показано в [76], такие поправки увеличивают время скремблирования и уменьшают скорость возрастания ОТОС.

6.4. Эрмитова матричная модель с квартичным взаимодействием в пределе большого числа степеней свободы

Примечательным примером хаотичной, но не максимально хаотичной модели является скалярная матричная квантовая теория поля с квартичным взаимодействием, рассмотренная в работе [83]:

$$I = \int d^4x \frac{1}{2} \text{tr} [(\partial_\mu \Phi)^2 - m^2 \Phi^2 - g^2 \Phi^4], \quad (6.17)$$

где Φ — эрмитова матрица размером $N \times N$, $N \gg 1$. Константа связи 'т Хоофта $\lambda = g^2 N \ll 1$. Суммируя лидирующие диаграммы в пределе $N \rightarrow \infty$, $g \rightarrow 0$, $\lambda = \text{const}$ и интегрируя по пространственным координатам, можно получить интегро-дифференциальное уравнение для усреднённого квадрата коммутатора:

$$\frac{dC(t)}{dt} = M \circ C(t), \quad (6.18)$$

где M — некоторый интегральный оператор, определённый в [83],

$$C(t) = \frac{1}{N^4} \sum_{abcd} \int d^3x \text{tr} \left(\rho^{1/2} [\Phi_{ab}(\mathbf{x}), \Phi_{cd}(0)] \times \right. \\ \left. \times \rho^{1/2} [\Phi_{ab}(\mathbf{x}), \Phi_{cd}(0)] \right). \quad (6.19)$$

Как и в конформной части четырёхточечной функции модели SYK (см. раздел 4.2), основной вклад в (6.19) обеспечивается лестничными диаграммами, причём оператор M добавляет к произвольной лестнице дополнительную "ступеньку". Самое большое собственное значение уравнения (6.18) — это не что иное, как ляпуновская экспонента κ , которая определяет скорость возрастания $C(t) \sim \exp(\kappa t)$. Численно диагонализуя (6.18), можно показать, что при малой обратной температуре, $m\beta \ll 1$, показатель экспоненты задаётся примерным равенством

$$\kappa \approx 0,025 \frac{\lambda^2}{\beta^2 m}. \quad (6.20)$$

В случае нулевой древесной массы, $m = 0$, в (6.20) следует подставить тепловую массу $m_{\text{th}}^2 = 2\lambda/(3\beta^2)$, которая генерируется однопетлевыми поправками к двухточеч-

ной функции:

$$\kappa \approx 0,025 \frac{\lambda^2}{\beta^2 m_{\text{th}}} \approx 0,031 \frac{\lambda^{3/2}}{\beta}. \quad (6.21)$$

Кроме того, существует альтернативный способ найти ляпуновскую экспоненту (6.20), который полагается на аналогию между скремблированием и ростом эпидемии. Посмотрим на теорию (6.17) с точки зрения описания газа N^2 взаимодействующих частиц. Одночастичная функция распределения $f(t, \mathbf{p})$ такого газа удовлетворяет (в лидирующем порядке) линеаризованному уравнению Больцмана:

$$\frac{\partial f(t, \mathbf{p})}{\partial t} = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}} [R^\wedge(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - R^\vee(\mathbf{p}, \mathbf{q})] f(t, \mathbf{q}), \quad (6.22)$$

где $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$, $\mathbf{p}$ — трёхмерный импульс, а функции $R^\wedge(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ и $R^\vee(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ измеряют приращение и убывание плотности частиц в фазовой ячейке $\mathbf{p}$, ассоциированный с фазовой ячейкой $\mathbf{q}$. Заметим, что потеря частиц обусловлена двумя отдельными процессами: аннигиляцией и оттоком частиц в другие фазовые ячейки. Эти процессы описываются функциями $2\Gamma_{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ и $R^\vee(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - 2\Gamma_{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ соответственно. Приращение частиц обусловлено исключительно притоком из других фазовых ячеек. Для простоты мы считаем, что система пространственно однородна.

Воспользуемся этой качественной моделью, чтобы оценить, как быстро локальное возмущение распространяется по системе (т.е. как быстро система скремблируется). Представим, что мы инжестировали в систему заражённую частицу, которая заражает другие частицы при столкновении. На ранних стадиях эпидемии скорость её роста определяется суммарным потоком, проходящим через фазовую ячейку, т.е. суммой (по модулю) притока и оттока частиц:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{\text{отос}}(t, \mathbf{p}) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{q}}} \frac{\sinh(\beta E_{\mathbf{q}}/2)}{\sinh(\beta E_{\mathbf{p}}/2)} \times \\ \times [R^\wedge(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + R^\vee(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - 4\Gamma_{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})] f_{\text{отос}}(t, \mathbf{q}). \quad (6.23)$$

Чтобы получить это уравнение, мы поменяли знак члена (6.22), описывающего отток частиц, и поделили функцию $f(t, \mathbf{p})$ на $\sinh(\beta E_{\mathbf{p}}/2)$. Таким образом, функция $f_{\text{отос}}(t, \mathbf{p})$ измеряет плотность заражённых частиц. Если такая качественная картина применима к системе (6.17), а заражённые частицы являются аналогами частиц, затронутых возбуждением, то рост эпидемии эквивалентен скремблированию. Следовательно, можно ожидать, что скорость возрастания $f_{\text{отос}}(t, \mathbf{p})$ совпадает со скоростью возрастания $C(t)$.

В самом деле, в работах [84, 170] показано, что уравнение (6.23) можно вывести как ИК-предел уравнения Бете–Солпитера для ОТОС (в этом пределе уравнения Бете–Солпитера разделяются). Следовательно, можно оценить ляпуновскую экспоненту, диагонализуя (6.23) вместо (6.18). В частности, данный метод воспроизводит результат (6.20) в пределе $N \gg 1$, $m\beta \ll 1$. Разумеется, этот подход также можно применить и к другим системам со слабой связью.

Благодарности. Автор благодарит Ф.К. Попова, А. Милехина, А.Ю. Морозова, В.А. Рубакова, П.И. Арсеева,

В.В. Лосякова, У. Москелла, А.С. Горского, А. Дымарского, Д. Грумиллера, Д.А. Галанте, Л.А. Акопян, Е.Н. Ланину, Р.О. Шарипова и Е.С. Трунину за полезные комментарии и обсуждения. Особую благодарность мы бы хотели выразить Э.Т. Ахмедову за многочисленные обсуждения и поддержку на протяжении всей работы над обзором. Мы также признательны Херманну Николаю и Штефану Тайсену за приглашение в Институт Альберта Эйнштейна (Гольм), где была частично выполнена работа над этим проектом. Работа поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики БАЗИС.

7. Приложения

А. Одномерные майорановские фермионы

Рассмотрим представления одномерных майорановских фермионов [1, 103, 171, 172]:

$$\{\chi_i, \chi_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (\text{A.1})$$

где $\chi_i = \chi_i^\dagger$. Для удобства ограничимся чётными числами³¹ $N = 2K$. В этом случае можно объединить чётные и нечётные операторы в неэрмитовы комбинации:

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{2i} - i\chi_{2i+1}), \quad c_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{2i} + i\chi_{2i+1}), \quad (\text{A.2})$$

$$i = 1, \dots, K,$$

которые подчиняются стандартным антикоммутиационным соотношениям вследствие (A.1):

$$\{c_i, c_j\} = \{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = 0, \quad \{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij}. \quad (\text{A.3})$$

Фактически эти комбинации являются операторами рождения и уничтожения дираковского поля. Следовательно, с помощью этих операторов можно построить стандартное представление для фермионных мод. А именно, определим вакуумное состояние как состояние, которое аннигилируется всеми операторами уничтожения: $c_i|0\rangle = 0$, и построим k -частичные состояния с помощью операторов рождения: $(c_1^\dagger)^{n_1}, \dots, (c_K^\dagger)^{n_K}|0\rangle$, где $n_i = 0, 1, n_1 + \dots + n_K = k$. Всего получаем 2^K состояний. Кроме того, можно построить явное представление для таких операторов [103], используя матрицы размером $2^K \times 2^K$, однако нам такое представление не понадобится.

Вычислим с помощью этого представления двухточечные корреляционные функции при конечной температуре. Напомним, что в свободной теории (3.1), $J_{ijkl} = 0$, гамильтониан тождественно равен нулю, поэтому среднее по температурному ансамблю можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T} \chi_i(\tau) \chi_j(0) \rangle_\beta &= \frac{\text{tr} [\mathcal{T} \exp(-\beta H_0) \chi_i(\tau) \chi_j(0)]}{\text{tr} [\exp(-\beta H_0)]} = \\ &= \frac{\text{tr} [\mathcal{T} \chi_i(\tau) \chi_j(0)]}{\text{tr} [1]} = \theta(\tau) \frac{\text{tr} [\chi_i \chi_j]}{\text{tr} [1]} + \theta(-\tau) \frac{\text{tr} [\chi_j \chi_i]}{\text{tr} [1]}, \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

где след обозначает суммирование по всем возможным квантовым состояниям. Последнее тождество верно для $\tau \in [-\beta/2, \beta/2)$; чтобы получить выражения для других временных отрезков, необходимо использовать антипериодичность пропагатора при замене $\tau \rightarrow \tau + \beta$. Очевидно, что выражение (A.4) равно нулю, если $|i - j| > 1$, поскольку в этом случае оно содержит только произведения различных операторов рождения и уничтожения, которые друг с другом антикоммутируют (например, $\langle c_1 c_2 \rangle_\beta$ или $\langle c_1 c_2^\dagger \rangle_\beta$). Случай $|i - j| \leq 1$ менее тривиален. Рассмотрим по отдельности четыре выражения, которые отвечают этому случаю:

$$\text{tr} [\chi_{2i} \chi_{2i}] = \frac{1}{2} \text{tr} [c_i c_i^\dagger + c_i^\dagger c_i] = \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{1}{2} 2^{K-1} [\langle 0 | c_i c_i^\dagger + c_i^\dagger c_i | 0 \rangle + \langle 1_i | c_i c_i^\dagger + c_i^\dagger c_i | 1_i \rangle] = 2^{K-1},$$

$$\text{tr} [\chi_{2i+1} \chi_{2i+1}] = \frac{1}{2} \text{tr} [c_i c_i^\dagger + c_i^\dagger c_i] = \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{1}{2} 2^{K-1} [\langle 0 | c_i c_i^\dagger + c_i^\dagger c_i | 0 \rangle + \langle 1_i | c_i c_i^\dagger + c_i^\dagger c_i | 1_i \rangle] = 2^{K-1},$$

$$\text{tr} [\chi_{2i} \chi_{2i+1}] = \frac{i}{2} \text{tr} [c_i c_i^\dagger - c_i^\dagger c_i] = \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{i}{2} 2^{K-1} [\langle 0 | c_i c_i^\dagger - c_i^\dagger c_i | 0 \rangle + \langle 1_i | c_i c_i^\dagger - c_i^\dagger c_i | 1_i \rangle] = 0,$$

$$\text{tr} [\chi_{2i+1} \chi_{2i}] = \frac{i}{2} \text{tr} [c_i^\dagger c_i - c_i c_i^\dagger] = \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{i}{2} 2^{K-1} [\langle 0 | c_i^\dagger c_i - c_i c_i^\dagger | 0 \rangle + \langle 1_i | c_i^\dagger c_i - c_i c_i^\dagger | 1_i \rangle] = 0,$$

где мы обозначили $|1_i\rangle \equiv c_i^\dagger|0\rangle$ и использовали соотношения (A.2). Теперь можно легко восстановить общий вид свободной функции Вайтмана:

$$\langle \chi_i \chi_j \rangle_\beta = \frac{\text{tr} [\chi_i \chi_j]}{\text{tr} [1]} = \frac{1}{2} \delta_{ij}. \quad (\text{A.9})$$

Вычисляя формальный предел $\beta \rightarrow \infty$, находим фейнмановский пропагатор при нулевой температуре:

$$\langle \mathcal{T} \chi_i(\tau) \chi_j(0) \rangle = \frac{1}{2} \text{sgn } \tau \delta_{ij}. \quad (\text{A.10})$$

Это выражение также описывает свободный фейнмановский пропагатор при конечной температуре и $\tau \in [-\beta/2, \beta/2)$. В то же время пропагатор антипериодичен при замене $\tau \rightarrow \tau + \beta$, что позволяет восстановить его вид при любых евклидовых временах τ :

$$\langle \mathcal{T} \chi_i(\tau) \chi_j(0) \rangle = \frac{1}{2} \text{sgn} \left(\sin \frac{\pi \tau}{\beta} \right) \delta_{ij}. \quad (\text{A.11})$$

Наконец, с помощью представления (A.2) и стандартной аргументации из учебников [112, 174] можно доказать теорему Вика для n -точечных корреляционных функций. Впрочем, отметим, что для неравновесного начального состояния теорема Вика неприменима (для примера см. работу [175]). Это является особенностью $(0+1)$ -мерной квантовой теории поля.

Б. Функциональный интеграл по майорановским фермионам

Разные одномерные майорановские фермионы антикоммутируют, однако квадрат отдельного фермиона не

³¹ Как показано в работах [120, 173], спектр модели SYK также отличается для разных значений $N \bmod 8$, однако мы не будем обсуждать здесь этот нюанс.

равен нулю (см. соотношения (3.2)). Следовательно, эти фермионы нельзя описать ни обычными, ни грассмановыми числами. Неясен и смысл наивного определения функционального интеграла по майорановским фермионам (например, формула (3.38)): как можно вычислить интеграл по переменным χ_i , если непонятно даже, какой алгебре они подчиняются?

Тем не менее в приложении А мы показали, что набор из $N = 2K$ одномерных майорановских фермионов можно представить в терминах обычных дираковских фермионов:

$$\chi_{2i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_i + \bar{\psi}_i), \quad \chi_{2i+1} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\psi_i - \bar{\psi}_i), \quad i = 1, \dots, K, \quad (\text{Б.1})$$

которые при квантовании становятся грассмановыми (А.3). Следовательно, меру интегрирования можно определить как

$$\mathcal{D}\chi_{2i}\mathcal{D}\chi_{2i+1} = \left| \frac{\partial(\chi_{2i}, \chi_{2i+1})}{\partial(\psi_i, \bar{\psi}_i)} \right| \mathcal{D}\psi_i \mathcal{D}\bar{\psi}_i = \mathcal{D}\psi_i \mathcal{D}\bar{\psi}_i. \quad (\text{Б.2})$$

Вычислим с помощью этих определений гауссов интеграл из раздела 3.4. Вместо загадочного интеграла по майорановским фермионам получаем обыкновенный интеграл по грассмановым переменным:

$$\begin{aligned} & \int \left(\prod_{i=1}^{2K} \mathcal{D}\chi_i \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2K} \int d\tau d\tau' \chi_i(\tau) A(\tau, \tau') \chi_i(\tau') \right] = \\ & = \int \left(\prod_{i=1}^K \mathcal{D}\psi_i \mathcal{D}\bar{\psi}_i \right) \exp \left[-\sum_{i=1}^K \int d\tau d\tau' \bar{\psi}_i(\tau) A(\tau, \tau') \psi_i(\tau') \right] = \\ & = \text{tr} \log \sqrt{A(\tau, \tau')}. \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Здесь мы использовали, что функция $A(\tau, \tau') = -\delta(\tau - \tau')\partial_\tau - \Sigma(\tau, \tau')$ антисимметрична при замене $\tau \leftrightarrow \tau'$. Заметим, что множитель $1/2$ сократился, как и ожидалось.

В. Коррелятор флуктуаций энергии в модели Сачдева–Йе–Китаева

Следуя работе [5], покажем, что выражение (4.24) представляет собой не что иное, как коррелятор флуктуаций энергии. Для этого нам понадобится следующее термодинамическое соотношение:

$$\begin{aligned} -\log Z = \beta F = N \left[-S_0 - \frac{2\pi^2 C}{\beta J} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\beta J)^2}\right) \right] + \\ + \beta E_0 + \frac{3}{2} \log(\beta J) + \text{const} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

где E_0 — энергия основного состояния, S_0 — энтропия (удельная) при нулевой температуре, C — численный коэффициент из шварцианного действия (3.64). Вывод этого соотношения можно найти в работах [5, 8, 120].

Варьируя (Б.1), в лидирующем порядке по N и βJ находим

$$\delta E = 4\pi^2 C \frac{N\delta\beta}{\beta^3 J}. \quad (\text{Б.2})$$

Теперь рассмотрим малые вариации температуры в пропагаторе (3.34):

$$\frac{G_c^{\beta+\delta\beta}(\tau)}{G_c^\beta(\tau)} = 1 - \frac{2\Delta}{\beta} \left[1 - \frac{\pi\tau}{\beta \tan(\pi\tau/\beta)} \right] \delta\beta. \quad (\text{Б.3})$$

Подставляя (Б.2) и усредняя по квантовым флуктуациям, получаем связную четырёхточечную функцию:

$$\begin{aligned} & \frac{\langle G_c^{\beta+\delta\beta}(\tau_1, \tau_2) G_c^{\beta+\delta\beta}(\tau_3, \tau_4) \rangle}{G_c^\beta(\tau_1, \tau_2) G_c^\beta(\tau_3, \tau_4)} - 1 = \frac{\Delta^2}{4\pi^4 C^2} \times \\ & \times \left[1 - \frac{\pi\tau_{12}}{\beta \tan(\pi\tau_{12}/\beta)} \right] \left[1 - \frac{\pi\tau_{34}}{\beta \tan(\pi\tau_{34}/\beta)} \right] \frac{\beta^4 J^2}{N^2} \langle (\delta E)^2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

С другой стороны, средний квадрат флуктуаций энергии можно найти из соотношения (Б.1):

$$\langle (\delta E)^2 \rangle = \partial_\beta^2 \log Z = \frac{4\pi^2 C}{\beta^3 J}, \quad (\text{Б.5})$$

поэтому корреляционная функция приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\langle G_c^{\beta+\delta\beta}(\tau_1, \tau_2) G_c^{\beta+\delta\beta}(\tau_3, \tau_4) \rangle}{G_c^\beta(\tau_1, \tau_2) G_c^\beta(\tau_3, \tau_4)} - 1 = \\ & = \frac{\Delta^2}{\pi^2 C} \frac{\beta J}{N} \left[1 - \frac{\pi\tau_{12}}{\beta \tan(\pi\tau_{12}/\beta)} \right] \left[1 - \frac{\pi\tau_{34}}{\beta \tan(\pi\tau_{34}/\beta)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

Это выражение совпадает с (4.24) для $\Delta = 1/4$.

Г. Интеграл от произведения двух собственных функций

Чтобы получить явно $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ -инвариантное разложение для единичного оператора и четырёхточечной функции, необходимо вычислить интеграл

$$A(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \Psi_{h\omega}(\tau_1, \tau_2) \Psi_{h\omega}^*(\tau_3, \tau_4). \quad (\text{Г.1})$$

Используя симметрию интеграла относительно замены $h \rightarrow 1-h$, $\omega \rightarrow -\omega$ и подставляя собственные функции (4.47), получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} A(h) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\omega \cos[\omega(\tau_{13} + \tau_{24})] \times \\ \times \begin{cases} \frac{\cos^2(\pi h/2)}{\cos^2(\pi h)} J_{h-1/2}(\omega|\tau_{12}|) J_{h-1/2}(\omega|\tau_{34}|) + (h \rightarrow 1-h), & h = 2n, \\ \frac{\sin^2(\pi s/2)}{\sin^2(\pi s)} J_{is}(\omega|\tau_{12}|) J_{is}(\omega|\tau_{34}|) + (s \rightarrow -s), & h = 1/2 + is. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{Г.2})$$

Затем используем установленное в приложении D работы [4] тождество и обобщающее уравнение 6.612 справочника [125]:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dx \cos(ax) J_\nu(bx) J_\nu(cx) = \\ & = \frac{1}{\pi\sqrt{bc}} \begin{cases} Q_{\nu-1/2}(z), & z > 1, \\ \tilde{Q}_{\nu-1/2}(z), & |z| < 1, \\ -\sin(\pi\nu) Q_{\nu-1/2}(z), & z < -1, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{Г.3})$$

где мы ввели переменную

$$z = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \quad (\text{Г.4})$$

и определили функцию $\tilde{Q}_v(z)$, аналитичную на действительном интервале $z \in (-1, 1)$:

$$\tilde{Q}_v(z) \equiv \frac{1}{2} [Q_v(z + i0) + Q_v(z - i0)]. \quad (\text{Г.5})$$

Здесь $Q_v(z)$ — обычная функция Лежандра второго рода, тогда как $\tilde{Q}_v(z)$ иногда называют функцией Лежандра на разрезе. Применяя это тождество к интегралу (Г.2) и используя уравнения 8.335, 8.820, 9.134 из [125], получаем требуемую формулу:

$$A(h) = \frac{1}{\sqrt{|\tau_{12}\tau_{34}|}} \times \begin{cases} \frac{\Gamma(h/2)\Gamma((1-h)/2)}{\sqrt{\pi}} {}_2F_1\left[\frac{h}{2}, \frac{1-h}{2}, \frac{1}{2}, \left(\frac{2-\chi}{\chi}\right)^2\right], & \text{если } \chi > 1, \\ \frac{\cos^2(\pi h/2)}{\cos(\pi h)} \frac{\Gamma^2(h)}{\Gamma(2h)} \chi^h {}_2F_1(h, h, 2h, \chi) + (h \rightarrow 1-h), & \text{если } 0 < \chi < 1, \end{cases} \quad (\text{Г.6})$$

где χ — $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантное двойное отношение. Заметим, что функция (Г.6) инвариантна относительно преобразований $\chi \rightarrow \chi/(\chi - 1)$, что позволяет вычислить $A(h)$ для отрицательных двойных отношений.

Список литературы

- Kitaev A "Hidden correlations in the Hawking radiation and thermal noise", in *Fundamental Physics Prize Symp., November 10, 2014*; <https://www.youtube.com/embed/OQ9qN8j7EZI>; "A simple model of quantum holography, Pt. 1", in *Kavli Institute for Theoretical Physics, Univ. of California, Santa Barbara, CA, USA, April 7, 2015*; <https://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev/>; "A simple model of quantum holography, Pt. 2", in *Kavli Institute for Theoretical Physics, Univ. of California, Santa Barbara, CA, USA, May 7, 2015*, <https://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev2/>
- Sachdev S, Ye J *Phys. Rev. Lett.* **70** 3339 (1993); cond-mat/9212030
- Sachdev S *Phys. Rev. Lett.* **105** 151602 (2010); arXiv:1006.3794
- Polchinski J, Rosenhaus V *J. High Energ. Phys.* **2016** 1 (2016); arXiv: 1601.06768
- Maldacena J, Stanford D *Phys. Rev. D* **94** 106002 (2016); arXiv: 1604.07818
- Kitaev A, Suh S J *J. High Energ. Phys.* **2018** 183 (2018); arXiv:1711.08467
- Jevicki A, Suzuki K, Yoon J *J. High Energ. Phys.* **2016** 7 (2016); arXiv:1603.06246
- Jevicki A, Suzuki K *J. High Energ. Phys.* **2016** 046 (2016); arXiv:1608.07567
- Maldacena J, Shenker S H, Stanford D *J. High Energ. Phys.* **2016** 106 (2016); arXiv:1503.01409
- Maldacena J, Stanford D, Yang Z *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2016** 12C104 (2016); arXiv:1606.01857
- Jensen K *Phys. Rev. Lett.* **117** 111601 (2016); arXiv:1605.06098
- Almheiri A, Polchinski J *J. High Energ. Phys.* **2015** 14 (2015); arXiv:1402.6334
- Engelsöy J, Mertens T G, Verlinde H *J. High Energ. Phys.* **2016** 139 (2016); arXiv:1606.03438
- Sekino Y, Susskind L *J. High Energ. Phys.* **2008** (10) 065 (2008); arXiv:0808.2096
- Susskind L, arXiv:1101.6048
- Lashkari N et al. *J. High Energ. Phys.* **2013** 22 (2013); arXiv:1111.6580
- Maldacena J, Stanford D, Yang Z *Fortschr. Phys.* **65** 1700034 (2017); arXiv:1704.05333
- Maldacena J, Qi X-L, arXiv:1804.00491
- Maldacena J, Milekhin A, Popov F, arXiv:1807.04726
- Maldacena J, Milekhin A, arXiv:1912.03276
- Hartnoll S A, Lucas A, Sachdev S, arXiv:1612.07324
- Song X-Y, Jian C-M, Balents L *Phys. Rev. Lett.* **119** 216601 (2017); arXiv:1705.00117
- Sachdev S *Phys. Rev. X* **5** 041025 (2015); arXiv:1506.05111
- Ларкин А И, Овчинников Ю Н *ЖЭТФ* **55** 2262 (1968); Larkin A I, Ovchinnikov Yu N *Sov. Phys. JETP* **28** 1200 (1969)
- Almheiri A et al. *J. High Energ. Phys.* **2013** 18 (2013); arXiv:1304.6483
- Shenker S H, Stanford D *J. High Energ. Phys.* **2014** 67 (2014); arXiv:1306.0622
- Gur-Ari G, Hanada M, Shenker S H *J. High Energ. Phys.* **2016** 91 (2016); arXiv:1512.00019
- Eichhorn R, Linz S J, Hänggi P *Chaos Solitons Fractals* **12** 1377 (2001)
- de Wijn A S, Hess B, Fine B V *Phys. Rev. Lett.* **109** 034101 (2012); arXiv:1205.2901
- Fine B V et al. *Phys. Rev. E* **89** 012923 (2014); arXiv:1305.2817
- Aleiner I L, Larkin A I *Phys. Rev. B* **54** 14423 (1996); cond-mat/9603121
- Silvestrov P G, Beenakker C W J *Phys. Rev. E* **65** 035208(R) (2002); nlin/0111042
- Berman G P, Zaslavsky G M *Physica A* **91** 450 (1978)
- Zaslavsky G M *Phys. Rep.* **80** 157 (1981)
- Roberts D A, Stanford D *Phys. Rev. Lett.* **115** 131603 (2015); arXiv:1412.5123
- Romero-Bermúdez A, Schalm K, Scopelliti V *J. High Energ. Phys.* **2019** 107 (2019); arXiv:1903.09595
- Polyakov A M *Gauge Fields and Strings* (Chur: Harwood Acad. Publ., 1987); Пер. на русск. яз.: Поляков А М *Калибровочные поля и струны* (Ижевск: Удмуртский университет, 1999)
- Makeenko Y, in *M-Theory and Quantum Geometry* (NATO Science Ser. C, Vol. 556, Eds L Thorlacius, T Jonsson) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000) p. 285; hep-th/0001047
- Cotler J S, Ding D, Penington G R *Ann. Physics* **396** 318 (2018); arXiv:1704.02979
- Xu T, Scaffidi T, Cao X *Phys. Rev. Lett.* **124** 140602 (2020); arXiv:1912.11063
- Hashimoto K, Murata K, Yoshii R *J. High Energ. Phys.* **2017** 138 (2017); arXiv:1703.09435
- Gharibyan H et al. *J. High Energ. Phys.* **2018** 124 (2018); arXiv:1803.08050; *J. High Energ. Phys.* **2019** 197 (2019) Erratum
- Haake F *Quantum Signatures of Chaos* (Berlin: Springer, 2010)
- Ott E *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012)
- Stöckmann H-J *Quantum Chaos: An Introduction* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999)
- Srednicki M *Phys. Rev. E* **50** 888 (1994); cond-mat/9403051
- Deutsch J M *Rep. Prog. Phys.* **81** 082001 (2018); arXiv:1805.01616
- D'Alessio L et al. *Adv. Phys.* **65** 239 (2016); arXiv:1509.06411
- Foini L, Kurchan J *Phys. Rev. E* **99** 042139 (2019); arXiv: 1803.10658
- Murthy C, Srednicki M *Phys. Rev. Lett.* **123** 230606 (2019); arXiv:1906.10808
- Parker D E et al. *Phys. Rev. X* **9** 041017 (2019); arXiv:1812.08657
- Avdoshkin A, Dymarsky A *Phys. Rev. Res.* **2** 043234 (2020); arXiv:1911.09672
- Huang Y, Brandão F G S L, Zhang Y-L *Phys. Rev. Lett.* **123** 010601 (2019); arXiv:1705.07597
- Sonner J, Vielma M *J. High Energ. Phys.* **2017** (11) 149 (2017); arXiv:1707.08013
- Nayak P, Sonner J, Vielma M *J. High Energ. Phys.* **2019** (10) 19 (2019); arXiv: 1903.00478
- Anous T, Sonner J *SciPost Phys.* **7** 003 (2019); arXiv:1903.03143
- Page D N *Phys. Rev. Lett.* **71** 1291 (1993); gr-qc/9305007
- Nishioka T, Ryu S, Takayanagi T *J. Phys. A* **42** 504008 (2009); arXiv:0905.0932

59. Anninos D, Galante D A, Hofman D M *J. High Energ. Phys.* **2019** (07) 38 (2019); arXiv:1811.08153
60. Aalsma L, Shiu G *J. High Energ. Phys.* **2020** (05) 152 (2020); arXiv:2002.01326
61. Hayden P, Preskill J *J. High Energ. Phys.* **2007** (09) 120 (2007); arXiv:0708.4025
62. Almheiri A et al. *J. High Energ. Phys.* **2013** (02) 62 (2013); arXiv:1207.3123
63. Mathur S D *Class. Quantum Grav.* **26** 224001 (2009); arXiv:0909.1038
64. Roberts D A, Stanford D, Streicher A *J. High Energ. Phys.* **2018** (06) 122 (2018); arXiv:1802.02633
65. Qi X-L, Streicher A *J. High Energ. Phys.* **2019** (08) 12 (2019); arXiv:1810.11958
66. Hartman T, Maldacena J *J. High Energ. Phys.* **2013** (05) 14 (2013); arXiv:1303.1080
67. Asplund C T et al. *J. High Energ. Phys.* **2015** (09) 110 (2015); arXiv:1506.03772
68. Aref'eva I Ya, Khramtsov M A, Tikhonovskaya M D *J. High Energ. Phys.* **2017** (09) 115 (2017); arXiv:1706.07390
69. Camanho X O et al. *J. High Energ. Phys.* **2016** (02) 20 (2016); arXiv:1407.5597
70. Roberts D A, Swingle B *Phys. Rev. Lett.* **117** 091602 (2016); arXiv:1603.09298
71. Hosur P et al. *J. High Energ. Phys.* **2016** (02) 4 (2016); arXiv:1511.04021
72. Nahum A, Vijay S, Haah J *Phys. Rev. X* **8** 021014 (2018); arXiv:1705.08975
73. Mezei M, Stanford D *J. High Energ. Phys.* **2017** (05) 65 (2017); arXiv:1608.05101
74. Roberts D A, Stanford D, Susskind L *J. High Energ. Phys.* **2015** (03) 51 (2015); arXiv:1409.8180
75. Shenker S H, Stanford D *J. High Energ. Phys.* **2014** (12) 46 (2014); arXiv:1312.3296
76. Shenker S H, Stanford D *J. High Energ. Phys.* **2015** (05) 132 (2015); arXiv:1412.6087
77. Turiaci G J, Verlinde H *J. High Energ. Phys.* **2016** (12) 110 (2016); arXiv:1603.03020
78. Fitzpatrick A L, Kaplan J *J. High Energ. Phys.* **2016** (05) 70 (2016); arXiv:1601.06164
79. Murugan J, Stanford D, Witten E *J. High Energ. Phys.* **2017** (08) 146 (2017); arXiv:1706.05362
80. Fu W et al. *Phys. Rev. D* **95** 026009 (2017); *Phys. Rev. D* **95** 069904 (2017) Erratum; arXiv:1610.08917
81. Gross D J, Rosenhaus V *J. High Energ. Phys.* **2017** (02) 93 (2017); arXiv:1610.01569
82. Gu Y, Qi X-L, Stanford D *J. High Energ. Phys.* **2017** (05) 125 (2017); arXiv:1609.07832
83. Stanford D *J. High Energ. Phys.* **2016** (10) 9 (2016); arXiv:1512.07687
84. Aleiner I L, Faoro L, Ioffe L B *Ann. Physics* **375** 378 (2016); arXiv:1609.01251
85. Yao N Y et al., arXiv:1607.01801
86. Huang Y, Zhang Y-L, Chen X *Ann. Physik* **529** 1600318 (2017); arXiv:1608.01091
87. Swingle B, Chowdhury D *Phys. Rev. B* **95** 060201(R) (2017); arXiv:1608.03280
88. Shen H et al. *Phys. Rev. B* **96** 054503 (2017); arXiv:1608.02438
89. Dóra B, Moessner R *Phys. Rev. Lett.* **119** 026802 (2017); arXiv:1612.00614
90. Bohrdt A et al. *New J. Phys.* **19** 063001 (2017); arXiv:1612.02434
91. Patel A A, Sachdev S *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **114** 1844 (2017); arXiv:1611.00003
92. Patel A A et al. *Phys. Rev. X* **7** 031047 (2017); arXiv:1703.07353
93. Lin C-J, Motrunich O I *Phys. Rev. B* **97** 144304 (2018); arXiv:1801.01636
94. von Keyserlingk C W et al. *Phys. Rev. X* **8** 021013 (2018); arXiv:1705.08910
95. Арсеев П И *УФН* **185** 1271 (2015); Arseev P I *Phys. Usp.* **58** 1159 (2015)
96. Kamenev A *Field Theory of Non-Equilibrium Systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011); cond-mat/0412296
97. Krotov D, Polyakov A M *Nucl. Phys. B* **849** 410 (2011); arXiv:1012.2107
98. Akhmedov E T *Int. J. Mod. Phys. D* **23** 1430001 (2014); arXiv:1309.2557
99. Akhmedov E T, Godazgar H, Popov F K *Phys. Rev. D* **93** 024029 (2016); arXiv:1508.07500
100. Akhmedov E T et al. *Phys. Rev. D* **96** 025002 (2017); arXiv:1701.07226
101. Akhmedov E T, Moschella U, Popov F K *Phys. Rev. D* **99** 086009 (2019); arXiv:1901.07293
102. Haehl F M et al. *SciPost Phys.* **6** 001 (2019); arXiv:1701.02820
103. Sárosi G *PoS Modave2017* 001 (2018); arXiv:1711.08482
104. Rosenhaus V *J. Phys. A* **52** 323001 (2019); arXiv:1807.03334
105. Krajewski T et al. *Phys. Rev. D* **99** 126014 (2019); arXiv:1812.03008
106. Witten E *J. Phys. A* **52** 474002 (2019); arXiv:1610.09758
107. Gura R *Nucl. Phys. B* **916** 386 (2017); arXiv:1611.04032
108. Klebanov I R, Tarnopolsky G *Phys. Rev. D* **95** 046004 (2017); arXiv:1611.08915
109. Klebanov I R, Popov F, Tarnopolsky G *PoS TASI2017* 004 (2018); arXiv:1808.09434
110. Klebanov I R, Pallegar P N, Popov F K *Phys. Rev. D* **100** 086003 (2019); arXiv:1905.06264
111. Nishinaka T, Terashima S *Nucl. Phys. B* **926** 321 (2018); arXiv:1611.10290
112. Peskin M E, Schroeder D V *An Introduction to Quantum Field Theory* (Reading, Mass.: Addison-Wesley Publ. Co., 1995); Пер. на русск. яз.: Пескин М, Шредер Д *Введение в квантовую теорию поля* (Ижевск: РХД, 2001)
113. Bonzom V, Nador V, Tanasa A *Lett. Math. Phys.* **109** 2611 (2019); arXiv:1808.10314
114. Gura R *Europhys. Lett.* **119** 30003 (2017); arXiv:1702.04228
115. Parcollet O, Georges A *Phys. Rev. B* **59** 5341 (1999); cond-mat/9806119
116. Lunkin A V, Tikhonov K S, Feigel'man M V *Phys. Rev. Lett.* **121** 236601 (2018); arXiv:1806.11211
117. Bagrets D, Altland A, Kamenev A *Nucl. Phys. B* **911** 191 (2016); arXiv:1607.00694
118. Aref'eva I et al. *J. High Energ. Phys.* **2019** (07) 113 (2019); arXiv:1811.04831
119. Wang H et al. *J. High Energ. Phys.* **2019** (09) 57 (2019); arXiv:1812.02666
120. Cotler J S et al. *J. High Energ. Phys.* **2017** (05) 118 (2017); Erratum: *J. High Energ. Phys.* **2018** (09) 2 (2018); arXiv:1611.04650
121. Kitaev A, arXiv:1711.08169
122. Gross D J, Rosenhaus V *J. High Energ. Phys.* **2017** (12) 148 (2017); arXiv:1710.08113
123. Gross D J, Rosenhaus V *J. High Energ. Phys.* **2017** (05) 92 (2017); arXiv:1702.08016
124. Reed M, Simon B *Methods of Modern Mathematical Physics Vol. 1 Functional Analysis* (New York: Academic Press, 1980)
125. Градштейн И С, Рыжик И М *Таблицы интегралов, рядов и произведений* (СПб.: БХВ-Петербург, 2011); Пер. на англ. яз.: Gradshteyn I S, Ryzhik I M *Tables of Integrals, Series, and Products* (San Diego, CA: Associated Press, 2007)
126. Bagrets D, Altland A, Kamenev A *Nucl. Phys. B* **921** 727 (2017); arXiv:1702.08902
127. Streicher A *J. High Energ. Phys.* **2020** (02) 48 (2020); arXiv:1911.10171
128. Choi C, Mezei M, Sárosi G, CERN-TH-2019-206 (Geneva: CERN, 2019); arXiv:1912.00004
129. Thoma P, Isaak B, Hajicek P *Phys. Rev. D* **30** 1168 (1984)
130. Nayak P et al. *J. High Energ. Phys.* **2018** (09) 48 (2018); arXiv:1802.09547
131. Grumiller D, Kummer W, Vassilevich D V *Phys. Rep.* **369** 327 (2002); hep-th/0204253
132. Jackiw R *Nucl. Phys. B* **252** 343 (1985)
133. Teitelboim C *Phys. Lett. B* **126** 41 (1983)
134. Kolekar K S, Narayan K *Phys. Rev. D* **98** 046012 (2018); arXiv:1803.06827
135. Akhmedov E T, Moschella U, Popov F K *J. High Energ. Phys.* **2018** (03) 183 (2018); arXiv:1802.02955
136. Spradlin M, Strominger A *J. High Energ. Phys.* **1999** (11) 021 (1999); hep-th/9904143

137. Akhmedov E T *Phys. Lett. B* **442** 152 (1998); hep-th/9806217
138. de Boer J, Verlinde E P, Verlinde H L J. *High Energ. Phys.* **2000** (08) 003 (2000); hep-th/9912012
139. Skenderis K *Class. Quantum Grav.* **19** 5849 (2002); hep-th/0209067
140. Grumiller D, McNees R J. *High Energ. Phys.* **2007** (04) 074 (2007); hep-th/0703230
141. Grumiller D et al. *J. High Energ. Phys.* **2017** (10) 203 (2017); arXiv:1708.08471
142. Cvetič M, Papadimitriou I J. *High Energ. Phys.* **2016** (12) 008 (2016); *J. High Energ. Phys.* **2017** (01) 120 (2017) Erratum; arXiv:1608.07018
143. Davis J L, McNees R J. *High Energ. Phys.* **2005** (09) 072 (2005); hep-th/0411121
144. González H A, Grumiller D, Salzer J J. *High Energ. Phys.* **2018** (05) 83 (2018); arXiv:1802.01562
145. Grumiller D, Leston M, Vassilevich D. *Phys. Rev. D* **89** 044001 (2014); arXiv:1311.7413
146. Grumiller D, Salzer J, Vassilevich D J. *High Energ. Phys.* **2015** (12) 015 (2015); arXiv:1509.08486
147. Maldacena J *Int. J. Theor. Phys.* **38** 1113 (1999); *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 231 (1998); hep-th/9711200
148. Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M. *Phys. Lett. B* **428** 105 (1998); hep-th/9802109
149. Aharony O et al. *Phys. Rep.* **323** 183 (2000); hep-th/9905111
150. Witten E. *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 253 (1998); hep-th/9802150
151. Freedman D Z et al. *Nucl. Phys. B* **546** 96 (1999); hep-th/9804058
152. Krishnan C, Sanyal S, Bala Subramanian P N. *J. High Energ. Phys.* **2017** (03) 56 (2017); arXiv:1612.06330
153. Bonzom V, Lionni L, Tanasa A J. *Math. Phys.* **58** 052301 (2017); arXiv:1702.06944
154. Choudhury S et al. *J. High Energ. Phys.* **2018** (06) 94 (2018); arXiv:1707.09352
155. Bulycheva K et al. *Phys. Rev. D* **97** 026016 (2018); arXiv:1707.09347
156. Klebanov I R et al. *Phys. Rev. D* **97** 106023 (2018); arXiv:1802.10263
157. Giombi S et al. *Phys. Rev. D* **98** 105005 (2018); arXiv:1808.04344
158. Pakrouski K et al. *Phys. Rev. Lett.* **122** 011601 (2019); arXiv:1808.07455
159. Popov F K. *Phys. Rev. D* **101** 026020 (2020); arXiv:1907.02440
160. Gaiian G et al. *Phys. Rev. D* **101** 126002 (2020); arXiv:2002.02066
161. Ferrari F. *Ann. Inst. Henri Poincaré D* **6** 427 (2019); arXiv:1701.01171
162. Azeyanagi T et al. *Ann. Physics* **393** 308 (2018); arXiv:1710.07263
163. Ferrari F, Rivasseau V, Valette G. *Commun. Math. Phys.* **370** 403 (2019); arXiv:1709.07366
164. Azeyanagi T, Ferrari F, Schaposnik Massolo F I. *Phys. Rev. Lett.* **120** 061602 (2018); arXiv:1707.03431
165. Gu Y et al. *J. High Energ. Phys.* **2020** (02) 157 (2020); arXiv:1910.14099
166. Bulycheva K J. *High Energ. Phys.* **2017** (12) 69 (2017); arXiv:1706.07411
167. Davison R A et al. *Phys. Rev. B* **95** 155131 (2017); arXiv:1612.00849
168. Maldacena J J. *High Energ. Phys.* **2003** (04) 021 (2003); hep-th/0106112
169. Cornalba L et al. *J. High Energ. Phys.* **2007** (08) 019 (2007); hep-th/0611122
170. Grozdanov S, Schalm K, Scopelliti V. *Phys. Rev. E* **99** 012206 (2019); arXiv:1804.09182
171. Kitaev A Yu. *УФН* **171** (Suppl. 10) 131 (2001); Kitaev A Yu. *Phys. Usp.* **44** (10S) 131 (2001); cond-mat/0010440
172. Kourkoulou I, Maldacena J. arXiv:1707.02325
173. García-García A M, Verbaarschot J J M. *Phys. Rev. D* **94** 126010 (2016); arXiv:1610.03816
174. Evans T S, Steer D A. *Nucl. Phys. B* **474** 481 (1996); hep-ph/9601268
175. Trunin D A. *Int. J. Mod. Phys. A* **33** 1850140 (2018); arXiv:1805.04856

Pedagogical introduction to the Sachdev–Ye–Kitaev model and two-dimensional dilaton gravity

D.A. Trunin

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
 Institutskii per. 9, 141701 Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation;
 National Research Center ‘Kurchatov Institute’, Alikhanov Institute of Theoretical and Experimental Physics,
 ul. B. Cherenushkinskaya 25, 117218 Moscow, Russian Federation
 E-mail: dmitriy.trunin@phystech.edu

The Sachdev–Ye–Kitaev model and two-dimensional dilaton gravity have recently been attracting increasing attention of the high-energy and condensed-matter physics communities. The success of these models is due to their remarkable properties. Following the original papers, we broadly discuss the properties of these models, including the diagram technique in the limit of a large number of degrees of freedom, the emergence of conformal symmetry in the infrared limit, effective action, four-point functions, and chaos. We also briefly discuss some recent results in this field. On the one hand, we attempt to be maximally rigorous, which means considering all the details and gaps in the argument; on the other hand, we believe that this review can be suitable for those who are not familiar with the relevant models.

Keywords: Sachdev–Ye–Kitaev model, two-dimensional gravity, quantum chaos, $1/N$ expansion, AdS/CFT correspondence

PACS numbers: **03.70.+k**, **04.62.+v**, 04.70.Dy, 05.30.Fk, 05.45.Ac, 05.45.Mt, 11.10.Kk, 11.10.Wx

Bibliography — 175 references

Received 3 March 2020, revised 28 June 2020

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **191** (3) 225–261 (2021)

Physics – Uspekhi **64** (3) (2021)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.06.038805>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2020.06.038805>