

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

Задача Гуревича – Питаевского и её развитие

А.М. Камчатнов

Дано введение в теорию дисперсионных ударных волн в рамках подхода, сформулированного Гуревичем и Питаевским [ЖЭТФ, т. 65, с. 590 (1973)] на основе теории Уизема для модуляций нелинейных волн. Изложен вывод уравнений Уизема для периодического решения уравнения Кортевега–де Фриза, а также приведены элементарные сведения о способе их решения. В качестве иллюстрации этого подхода даны решения основных задач, рассматривавшихся Гуревичем и Питаевским. Обсуждается обобщение теории для систем со слабой диссипацией. Изложена теория дисперсионных ударных волн для уравнения Гросса – Питаевского.

Ключевые слова: солитоны, дисперсионные ударные волны, конденсат Бозе–Эйнштейна, нелинейная оптика, задача Гуревича – Питаевского, метод Уизема

PACS numbers: 03.75.Kk, 03.75.Lm, 05.45.Yv, **42.65.**–k,
42.65.Tg, 47.35.Fg, 67.85.Fg

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.08.038815>

Содержание

Посвящается 90-летию А.В. Гуревича

1. Введение (52).
 2. Уравнение Кортевега–де Фриза (54).
 3. Модуляции линейных волн (56).
 4. Теория Уизема (58).
 5. Обобщённый метод голографа (61).
 6. Формулировка задачи Гуревича – Питаевского (62).
 7. Эволюция начального разрыва в теории Кортевега – де Фриза (63).
 8. Опрокидывание волны с параболическим профилем (65).
 9. Опрокидывание кубического профиля (66).
 10. Движение краёв дисперсионных ударных волн (68).
 11. Теорема о числе осцилляций в дисперсионных ударных волнах (71).
 12. Теория дисперсионных ударных волн для уравнения Кортевега – де Фриза с диссипацией (72).
 13. Уравнение Гросса – Питаевского (74).
 14. Распад начального разрыва в теории Гросса – Питаевского (77).
 15. Задача о поршне (80).
 16. Задача о равноускоренном поршне (81).
 17. Движение краёв "квазипростых" дисперсионных ударных волн (82).
 18. Опрокидывание кубического профиля в теории Гросса – Питаевского (84).
 19. Заключение (84).
- Список литературы (86).

1. Введение

Любая физическая теория вырастает из частных наблюдений и попыток их интерпретации, решений конкретных задач и их постепенных обобщений. Но в то же время в развитии каждой теории можно выделить работы, появление которых превращало набор частных результатов и смутных идей в отдельную область науки, обладающую своими физическими представлениями и аппаратом, позволяющими ставить и решать задачи, специфические именно для этой области. В области нелинейной физики, получившей современное название теории *дисперсионных ударных волн* (ДУВ), такая роль принадлежит работе А.В. Гуревича и Л.П. Питаевского [1] 1973 года. В ней был сформулирован общий подход к теоретической картине образования и эволюции волн такого рода на основе теории модуляции нелинейных волн, принадлежащей Дж.Б. Уизему [2], и решено несколько характерных задач, дающих количественное описание типичных для ДУВ структур.

Поэтому под задачей Гуревича – Питаевского можно понимать как предложенный А.В. Гуревичем и Л.П. Питаевским общий подход к теории ДУВ, так и те конкретные проблемы, которые в работе [1] были поставлены и решены, а в дальнейшем получили многочисленные приложения к объяснению различных физических наблюдений и послужили также основой для последующего развития теории.

Целью настоящей статьи является дать достаточно подробное введение в эту область нелинейной науки, сконцентрированное на детальном изложении работы А.В. Гуревича и Л.П. Питаевского [1] и примыкающих к ней исследований. Но сначала мы обсудим основные этапы формирования теории ДУВ, приведшие в конечном счёте к появлению работы [1].

А.М. Камчатнов. Институт спектроскопии РАН,
ул. Физическая 5, 108840 Троицк, Москва, Российская Федерация;
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Институтский пер. 9, 141701 Долгопрудный, Московская обл.,
Российская Федерация
E-mail: kamch@isan.troitsk.ru

Статья поступила 21 июля 2020 г.

В окружающей нас природе ДУВ не являются очень распространённым явлением. По-видимому, первые их наблюдения были связаны с формированием волнообразных структур вблизи фронта приливной волны, достаточно быстро втекающей в русла рек или в узкие проливы. Это явление получило название *ундулярной боры* и в течение длительного времени изучалось, по-видимому, лишь узким сообществом учёных и инженеров, занимавшихся речной гидродинамикой. Тем не менее некоторые фундаментальные факты о таких борах были выяснены. В частности, лидирующее возвышение воды на фронте боры было отождествлено с уединённой волной, впервые наблюдавшейся Скоттом Расселом [3] и получившей объяснение в работах Бусинеска [4], Рэля [5] и Кортвега и де Фриза [6].

Попытка выяснить условия, при которых ундулярная бора может быть описана как модулированное периодическое решение уравнения Кортвега – де Фриза (КдФ), была сделана Бенджаменом и Лайтхиллом [7]. При этом предполагалось, что модуляции периодического решения, названного авторами [6] "кноидальной волной", вызывались диссипативными процессами в волновом течении жидкости.

Тем не менее из этих, носящих предварительный характер, работ стало ясно, что для объяснения явления образования ундулярной боры необходимо учесть совместное действие эффектов дисперсии и нелинейности для волн на мелкой воде, причём подразумевалась существенная роль диссипативных эффектов, объясняющих как модуляцию волны, так и формирование турбулентных бор при достаточно большой амплитуде приливной волны. Однако за пределами сообщества специалистов проблема теоретического описания ундулярных бор не привлекала большого внимания. Например, в классических монографиях [8, 9], подробно описывающих разнообразные явления в волнах на воде, они даже не упоминаются.

Положение изменилось в связи с развитием современной нелинейной физики. Уже в начале 1960-х годов стало ясно, что уединённые волны, или "солитоны" по современной терминологии, могут распространяться в различных физических системах, в частности в плазме [10, 11], а уравнение КдФ имеет универсальный характер и находит применение в самых разнообразных физических ситуациях при учёте слабой дисперсии и малой нелинейности.

Солитонные решения уравнений динамики плазмы как в их исходной форме, так и в приближении КдФ, но без учёта диссипации, распространяются без изменения формы. Если в системе имеется диссипация, то в ней возможно распространение ударных волн, в которых ширина переходного слоя пропорциональна величине диссипации. Поэтому ширина такого слоя может оказаться порядка характерной ширины солитона. Тогда возникает конкуренция дисперсионных и диссипативных эффектов и переходный слой формируется также посредством образования области нелинейных осцилляций солитонного типа.

В результате мы приходим к картине *ударной волны*, в которой переход от одного состояния плазмы к другому происходит через стационарную волновую структуру интенсивных нелинейных колебаний. Длина волны в этой структуре определяется балансом дисперсии и нелинейности, а общая ширина ударной волны, т.е. характерная

длина, на которой происходит модуляция колебаний, обратно пропорциональна величине диссипативных эффектов. Такая картина ударных волн была предложена Р.З. Сагдеевым [12], и она наблюдалась при эволюции ионно-звуковых импульсов в плазме [13, 14].

Гуревич и Питаевский подошли к этой проблеме с несколько другой стороны. Во второй половине 1960-х и начале 1970-х годов они опубликовали (частично вместе с Л.В. Парийской) цикл работ [15–18], посвящённых динамике разрежённой плазмы в рамках кинетической теории. В этой теории состояние плазмы описывается функцией распределения ионов по пространству и скоростям, а горячие электроны находятся в тепловом равновесии и распределены по пространству согласно распределению Больцмана с потенциалом, определяемым уравнением Пуассона, в котором плотность заряда равна разности распределений зарядов ионов и электронов. Столкновения частиц в этой теории не учитываются, так что диссипативные эффекты отсутствуют, однако очевидно, что нелинейные и дисперсионные эффекты наличествуют в полной мере. Спецификой такой постановки задачи по сравнению с рассмотренной выше являлось то, что центр тяжести переносится на нестационарную динамику, отличную от стационарного распространения периодических волн, солитонов или стационарных ДУВ, в которых модуляция осциллирующей структуры обусловлена диссипацией.

Рассматривая последовательно задачи — начиная от простого автотельного разлёта плазмы в вакуум [15, 16] и переходя к более сложной динамике простых волн [17], в которой уже был отмечен факт образования фронта бесконечной крутизны в функции распределения, Гуревич и Питаевский пришли в [18] к выводу о том, что опрокидывание аналога гидродинамической простой волны в кинетике разрежённой плазмы приводит к образованию эволюционирующей области осцилляций с длиной волны порядка радиуса Дебая, причём если амплитуда волны мала (но не бесконечно мала), то динамика этой области описывается уравнением КдФ, которое при пренебрежении дисперсией также ведёт к опрокидывающимся решениям.

Отсюда делается естественный вывод, что при учёте дисперсии вместо области многозначности образуется область осцилляций, на фронте которой имеет последовательность солитонов, соответствующих балансу нелинейных и дисперсионных эффектов, а при удалении от фронта амплитуда осцилляций уменьшается и решение приближается к бездисперсионному. В списке работ по теории уравнения КдФ, перечисленных в [18], имеется ссылка на статью Уизема [2].

Таким образом, всё было подготовлено к созданию теории ДУВ в [1]: с одной стороны, сведение задачи к теории волн, подчиняющихся уравнению КдФ, включило эту проблему в контекст бурно развивавшейся в те годы теории нелинейных волн, с другой стороны, новая постановка задачи перенесла в центр внимания вопрос о нестационарной эволюции волны после её опрокидывания без учёта диссипативных процессов. Именно эта задача и была решена в [1] для волн, эволюция которых подчиняется уравнению КдФ. В дальнейшем эта теория была распространена на многие другие уравнения и получила многочисленные приложения, от физики волн на воде до нелинейной оптики и динамики бозе-эйнштейновского конденсата.

Помимо того, задача Гуревича – Питаевского имела важное для математической физики развитие, которое продолжается до сих пор с открытием всё новых глубоких результатов. Поэтому на работу [1] имеются многочисленные ссылки как в физической, так и в математической литературе. В настоящей статье мы изложим основные представления подхода Гуревича и Питаевского к теории ДУВ, не выходя за рамки стандартных в теоретической физике методов.

2. Уравнение Кортевега – де Фриза

Как отмечено во введении, уравнение КдФ является весьма универсальным уравнением для нелинейных волн, часто возникающим в основном по малой нелинейности и слабой дисперсии приближении. Поскольку работы Гуревича и Питаевского, приведшие к созданию теории ДУВ, написаны в контексте физики волн в плазме, здесь мы приведём простой вывод уравнения КдФ для случая ионно-звуковых волн в двухтемпературной плазме, когда температура электронов T_e много больше температуры ионов. Тогда тепловым движением ионов можно пренебречь и их динамика описывается обычными гидродинамическими уравнениями с учётом разделения зарядов ионов и электронов.

Обозначим число ионов на единицу объёма как ρ , их массу — как M и для простоты предположим, что они имеют единичный заряд e , а движение плазмы происходит вдоль оси x со скоростью u . Как известно (см., например, [19]), в такой плазме имеется характерный параметр с размерностью длины — дебаевский радиус

$$r_D = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi e^2 \rho_0}}, \quad (1)$$

отношение которого к характерной длине волны определяет величину дисперсионных эффектов (ρ_0 — равновесная плотность в отсутствие волны). Для удобства обсудим по отдельности нелинейные и дисперсионные эффекты.

Малые отклонения от равновесия описывают линейные гармонические волны с $\rho - \rho_0, u, \propto \exp[i(kx - \omega t)]$, и мы легко находим закон дисперсии [19]:

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{T_e}{M}} \frac{k}{\sqrt{1 + r_D^2 k^2}}, \quad (2)$$

где выбор знака определяется направлением распространения волны. Отсюда ясно, что дисперсионные эффекты малы, когда длина волны $2\pi/k$ много больше дебаевского радиуса r_D . Первые члены разложения по малому параметру kr_D дают

$$\omega = \pm c_0 k \left(1 - \frac{1}{2} r_D^2 k^2 \right), \quad kr_D \ll 1, \quad (3)$$

где параметр $c_0 = \sqrt{T_e/M}$ является скоростью ионно-звуковых волн в длинноволновом пределе. Каждая гармоника с законом дисперсии (3) подчиняется уравнению

$$u_t \pm \left(c_0 u_x + \frac{1}{2} c_0 r_D^2 u_{xxx} \right) = 0, \quad (4)$$

где под u мы по-прежнему понимаем скорость течения плазмы. Поскольку в линейном приближении любой импульс можно представить в виде суммы гармоник, эволюция любой распространяющейся в определённом направлении волны подчиняется уравнению (4) в главном по учёту дисперсионных эффектов приближении. При этом возмущение плотности плазмы ρ' связано со скоростью течения u соотношением

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \pm \frac{u}{c_0} \quad (5)$$

с тем же выбором знака, что и в (3).

Если длина волны много больше дебаевского радиуса, то разделением зарядов можно пренебречь, плотности электронов и ионов совпадают друг с другом и их отклонение от равновесной плотности ρ_0 связано с электрическим потенциалом формулой Больцмана $\rho = \rho_0 \exp(e\phi/T_e)$. Исключение с её помощью потенциала ϕ из уравнений динамики приводит к системе гидродинамических уравнений [19]:

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{T_e}{M} \frac{\rho_x}{\rho} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

соответствующей динамике изотермического газа, когда зависимость давления p от плотности ρ выражается как $p = (T_e/M)\rho$. Локальная скорость звука, определяемая формулой $c^2 = dp/d\rho = T_e/M = c_0^2$, совпадает с указанной выше скоростью длинных линейных волн и не зависит от локальной плотности.

Если рассмотреть теперь какой-либо достаточно произвольный начальный локализованный импульс, то, как известно из элементарных сведений из газовой динамики, через некоторое время он разделится на два импульса, бегущих в противоположных направлениях. В каждой такой волне локальное изменение плотности $\delta\rho$ на фоне ρ связано с локальным изменением скорости течения δu соотношением $\delta\rho \approx \pm(\rho/c_0)\delta u$, следующим из (5), так что $\rho_x = \pm(\rho/c_0)u_x$, причём благодаря постоянству скорости звука её зависимость от плотности в нашем случае учитывать не приходится. Подстановка этого выражения в (6) даёт нелинейное уравнение для плавных импульсов при пренебрежении дисперсией:

$$u_t \pm (c_0 + u)u_x = 0. \quad (7)$$

Таким образом, мы нашли два уравнения, (4) и (7), описывающих по отдельности эволюцию ионно-звуковых волн с учётом либо малой дисперсии, либо малой нелинейности. В обоих случаях дисперсионная или нелинейная поправка сводится к добавлению малого в соответствующем приближении члена к простейшему уравнению $u_t \pm c_0 u_x = 0$ для однонаправленного распространения волны. Поэтому учёт обеих поправок одновременно в их ведущем приближении сводится к их объединению в одном уравнении. Принимая для определённости, что волна распространяется в положительном направлении оси x , приходим к уравнению КдФ для ионно-звуковых волн в плазме:

$$u_t + (c_0 + u)u_x + \frac{1}{2} c_0 r_D^2 u_{xxx} = 0. \quad (8)$$

Для упрощения обозначений это уравнение удобно преобразовать, введя следующие безразмерные переменные: $x' = (x - c_0 t)/r_D$, $t' = c_0 t/(2r_D)$, $u = 3c_0 u'$. Подставляя их в (8) и опуская штрихи у новых переменных, приходим к наиболее употребительному в настоящее время безразмерному виду уравнения КдФ:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (9)$$

Коэффициент 6 перед нелинейным членом здесь выбран для упрощения последующих формул.

При пренебрежении дисперсией уравнение (9) сводится к уравнению Хопфа

$$u_t + 6uu_x = 0, \quad (10)$$

представляющему собой безразмерную форму уравнения (7). Как легко увидеть, значения u постоянны вдоль характеристик $x - 6ut = \text{const}$, являющихся решением уравнения $dx/dt = 6u$. Поэтому если при $t = 0$ распределение u описывается функцией $u = u_0(x)$, а $x = \bar{x}(u)$ является обратной к ней функцией, то решение уравнения Хопфа даётся неявно формулой

$$x - 6ut = \bar{x}(u), \quad (11)$$

которая описывает распределение $u(x, t)$ в последующие моменты времени.

Наиболее существенной чертой этих решений является то, что скорость переноса значений u возрастает с увеличением u и для типичных начальных распределений $u_0(x)$ решение после некоторого момента $t = t_b$ становится многозначным, как это показано на рис. 1. Ясно, что при этом мы выходим из области применимости бездисперсионного приближения: в момент опрокидывания $t = t_b$ производная распределения по x становится бесконечно большой в точке x_b и в окрестности x_b дисперсионный член с производной третьего порядка в уравнении КдФ (9) никак не может считаться малым.

Как указывалось во введении, учёт дисперсии устраняет такое нефизическое поведение и вместо области многозначности в решении полного уравнения КдФ возникает эволюционирующая со временем область осцилляций — *дисперсионная ударная волна*. Гуревич и Питаев-

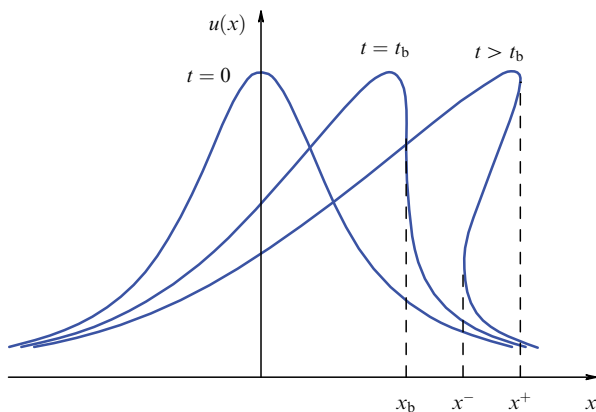


Рис. 1. Эволюция типичного импульса согласно уравнению Хопфа (10). После момента опрокидывания $t > t_b$ распределение $u(x, t)$ становится формально трёхзначной функцией координаты x в области $x^- < x < x^+$.

ский предположили, что эту область осцилляций можно приближённо представить в виде модулированного периодического решения уравнения КдФ, так что следующим шагом в построении теории ДУВ должно стать получение таких периодических решений, и это было сделано самими Кортевегом и де Фризом в [6]. Здесь мы приведём необходимые для последующего сведения.

Как обычно, ищем решение уравнения (9) в виде бегущей волны $u = u(\xi)$, $\xi = x - Vt$, где V — скорость распространения волны, и находим, что $u(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $u_{\xi\xi\xi} = Vu_{\xi} - 6uu_{\xi}$, которое после двух элементарных интегрирований преобразуется в уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_{\xi}^2 &= -A + Bu + \frac{1}{2} Vu^2 - u^3 = \\ &= -\mathcal{R}(u) = -(u - v_1)(u - v_2)(u - v_3), \end{aligned} \quad (12)$$

где A и B — постоянные интегрирования. Это уравнение имеет действительные решения, если многочлен $\mathcal{R}(u)$ имеет три действительных нуля: v_1, v_2, v_3 , $v_1 \leq v_2 \leq v_3$. Ясно, что осциллирующее решение соответствует движению переменной u между двумя нулями в интервале

$$v_2 \leq u \leq v_3, \quad (13)$$

где $\mathcal{R}(u) \leq 0$. Постоянные A, B, V выражаются через v_1, v_2, v_3 следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= -v_1 v_2 v_3, \quad B = -(v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_3 v_1), \\ V &= 2(v_1 + v_2 + v_3). \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда из уравнения (12) следует, что периодическое решение уравнения КдФ выражается формулой

$$\sqrt{2} \xi = \int_u^{v_3} \frac{du'}{\sqrt{(u' - v_1)(u' - v_2)(v_3 - u')}}}, \quad (15)$$

где аддитивная по отношению к ξ постоянная интегрирования выбрана так, что $u(\xi)$ принимает максимальное значение v_3 при $\xi = 0$. Интеграл (15) выражается через эллиптические интегралы стандартным образом, а их обращение даёт зависимость $u = u(\xi)$ через эллиптические функции. Опуская эти рутинные в нелинейной физике вычисления, приводим их результат:

$$u = v_3 - (v_3 - v_2) \text{sn}^2 \left(\sqrt{\frac{v_3 - v_1}{2}} (x - Vt), m \right), \quad (16)$$

где sn — эллиптический синус, а параметр m определён как

$$m = \frac{v_3 - v_2}{v_3 - v_1} \quad (17)$$

в соответствии с обозначениями справочника [20]. С помощью тождества $\text{sn}^2 z + \text{cn}^2 z = 1$ это решение может быть выражено через эллиптический косинус cn , поэтому Кортевег и де Фриз назвали своё решение "кноидальной волной" по аналогии с косинусоидальной волной линейной теории. Свойства такой кноидальной волны определяются тремя нулями, v_1, v_2, v_3 , многочлена $\mathcal{R}(u)$. В частности, скорость волны V и параметр m выражаются формулами (14) и (17) соответственно. Длина волны L может быть определена как расстояние между двумя

соседними максимумами функции $u(\xi)$, и она выражается через полный эллиптический интеграл первого рода $K(m)$ в виде

$$L = \oint \frac{du}{\sqrt{-2\mathcal{R}(u)}} = \frac{2K(m)}{\sqrt{v_3 - v_1}}. \quad (18)$$

Амплитуду кноидальной волны можно определить соотношением

$$a = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{2} = \frac{v_3 - v_2}{2}. \quad (19)$$

Решение (16) переходит в гармоническую волну линейного приближения

$$u \simeq v_2 + \frac{1}{2}(v_3 - v_2) \cos [\sqrt{2(v_2 - v_1)}(x - Vt)] \quad (20)$$

при малой амплитуде волны $a \ll v_2 - v_1$, когда $m \ll 1$. При этом волновое число $k = 2\pi/L = \sqrt{2(v_2 - v_1)}$ и фазовая скорость волны $V = 2v_1 + 4v_2 = 6v_2 - k^2$ связаны соотношением $V = \omega/k$, следующим из закона дисперсии $\omega = 6v_2k - k^3$, который отвечает линеаризованному уравнению КдФ $u_t' + 6v_2u_x' + u_{xxx}' = 0$ для волн, распространяющихся вдоль однородного состояния $u = v_2$.

В противоположном пределе, $v_2 \rightarrow v_1$ и $m \rightarrow 1$, длина волны стремится к бесконечности, а $\text{sn}(z, 1) = \tanh z$, так что решение (16) превращается в

$$u = v_1 + \frac{v_3 - v_1}{\cosh^2 [\sqrt{(v_3 - v_1)/2}(x - Vt)]}. \quad (21)$$

В этом случае профиль $u = u(x - Vt)$ имеет форму уединённой волны, распространяющейся вдоль однородного состояния $u = v_1$. Таким образом, в пределе $m \rightarrow 1$ периодическая волна переходит в уединённые импульсы, или *солитоны* (21), разнесённые друг от друга на бесконечное расстояние.

Фундаментальное предположение подхода Гуревича и Питаевского к теории ДУВ заключается в том, что при достаточно больших временах после момента опрокидывания, когда длина образовавшейся области осцилляций становится много больше локальных значений длины волны L , эволюцию ДУВ можно представить как медленное изменение параметров v_1, v_2, v_3 в модулированной кноидальной волне (16). Условие "медленности" здесь означает, что относительное изменение модуляционных параметров v_1, v_2, v_3 или эквивалентных им переменных мало на расстояниях порядка длины волны L или за время порядка одного периода колебаний.

Таким образом, задача построения теории ДУВ сводится к выводу уравнений, описывающих эволюцию модуляционных параметров, и получению их решений в конкретных физических ситуациях. По счастливому стечению обстоятельств модуляционные уравнения для случая модуляций кноидальной волны КдФ уже были выведены к тому времени Уиземом [2]. К сожалению, как в работе [2], так и в более поздней книге [21] Уизем привёл лишь окончательный результат своих вычислений, опустив все детали. Поскольку эти вычисления весьма нетривиальны, для полноты мы их кратко изложим в разделе 4, но сначала остановимся в методических целях на аналоге модуляционной теории Уизема в линейном приближении.

3. Модуляции линейных волн

Одним из хорошо известных результатов теории модуляции линейных волн является то, что огибающая модулированного пакета волн распространяется с групповой скоростью несущей волны. Детально разработаны также методы получения асимптотических решений линейных уравнений, описывающих подобное поведение волн. Однако мы подойдём к рассмотрению задач такого рода с несколько другой точки зрения, представляющей физически очень ясной и допускающей распространение на динамику нелинейных волн.

Рассмотрим в качестве примера эволюцию волны, описываемой линеаризованным уравнением КдФ $u_t' + 6v_2u_x' + u_{xxx}' = 0$ и имеющей начальную форму "ступеньки". Поскольку от члена $6v_2u_x'$ легко избавиться, перейдя в систему отсчёта $x' = x - 6v_2t, t' = t$, мы запишем линейное уравнение КдФ в виде

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad (22)$$

а в качестве начального условия возьмём

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (23)$$

Эту задачу легко решить точно методом Фурье, и результат можно привести к следующему виду:

$$u(x, t) = \int_{x/(3t)^{1/3}}^{\infty} \text{Ai}(z) dz, \quad (24)$$

где $\text{Ai}(z)$ — стандартное обозначение функции Эйри [20]. Как видно, профиль волны зависит только от автомодельной переменной $z = x/(3t)^{1/3}$ (рис. 2). При больших x , когда $z \gg 1$, амплитуда волны спадает экспоненциально в область "тени", а в противоположном пределе больших отрицательных значений x с использованием известной асимптотики функции Эйри находим ($-z \gg 1$)

$$u(z) \simeq 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-z)^{-3/4} \cos \left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (25)$$

Полученные результаты подтверждают общую идею о том, что дисперсионные эффекты проявляются в формировании осциллирующих волновых структур из импульсов с достаточно резкими фронтами. Но вид получаю-

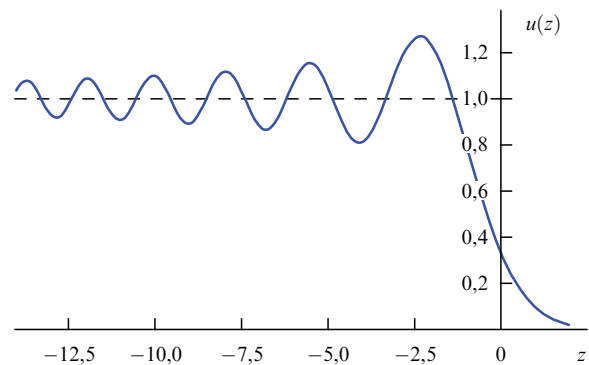


Рис. 2. График профиля волны (24) в зависимости от автомодельной переменной $z = x/(3t)^{1/3}$.

щейся волновой структуры наводит на мысль о другом подходе к её описанию.

И рисунок 2, и формула (25) подсказывают, что эту волну можно истолковать при $x \rightarrow -\infty$ как модулированную гармоническую волну с переменными волновым числом, частотой колебаний и амплитудой. Представим такую волну в виде

$$u(x, t) = 1 + a(x, t) \cos [\theta(x, t) + \theta_0], \quad (26)$$

где мы ввели фазу волны

$$\theta(x, t) = \frac{2}{3} \left(\frac{-x}{(3t)^{1/3}} \right)^{3/2}, \quad (27)$$

исключив для простоты из её определения постоянное слагаемое $\theta_0 = \pi/4$. В такой модулированной волне естественно определить волновое число $k(x, t)$ и частоту $\omega(x, t)$ как

$$k(x, t) = \theta_x(x, t) = - \left(\frac{-x}{3t} \right)^{1/2}, \quad (28)$$

$$\omega(x, t) = -\theta_t(x, t) = \left(\frac{-x}{3t} \right)^{3/2},$$

которые локально связаны дисперсионным соотношением $\omega = -k^3$, следующим из линейного уравнения КдФ (22), т.е. волна (26) локально представляет собой гармоническую волну, являющуюся при пренебрежении модуляцией точным решением этого уравнения. Если рассмотреть участок структуры с фиксированным волновым числом $k(x, t)$, то из первой формулы (28) сразу же следует, что этот участок перемещается вдоль оси x с групповой скоростью

$$v_g = -3k^2 = \frac{d\omega}{dk} \quad (29)$$

согласно известному свойству групповой скорости. Ясно, что такое введение групповой скорости в теорию модуляции линейных волн имеет общий характер.

Пусть модулированная линейная волна представлена в виде

$$u(x, t) = a(x, t) \cos [\theta(x, t)], \quad (30)$$

и мы предполагаем, что локально с хорошей точностью эта волна является гармонической с локальными значениями волнового числа и частоты колебаний, определёнными согласно

$$k(x, t) = \theta_x(x, t), \quad \omega(x, t) = -\theta_t(x, t), \quad (31)$$

причём они связаны между собой законом дисперсии для гармонических волн

$$\omega = \omega(k). \quad (32)$$

Условие согласования перекрёстных производных фазы $(\theta_x)_t = (\theta_t)_x$ приводит в силу (31) к уравнению

$$k_t + \omega_x = 0 \quad \text{или} \quad k_t + (kV)_x = 0, \quad (33)$$

где $V = V(k)$ — фазовая скорость волны. Поскольку число длин волн на единицу длины вдоль оси x равно

$1/L = k/(2\pi)$, уравнение (33) можно истолковать как закон сохранения числа волн, причём k играет роль их плотности, а $\omega = kV$ — потока. Подставив в (33) закон дисперсии (32), придём к уравнению

$$k_t + v_g(k)k_x = 0, \quad (34)$$

которое снова говорит о том, что волновое число k распространяется со скоростью $v_g(k) = \omega'(k)$ и сохраняет своё значение вдоль характеристики $x - v_g(k)t = \text{const}$. Поэтому волновой пакет, составленный из гармоник с волновыми числами, близкими к значению $k = k_0$, будет распространяться, если пренебречь изменением формы пакета, с групповой скоростью $v_g(k_0) = \omega'(k_0)$.

Теперь мы можем вернуться к задаче о распаде ступеньки с начальным распределением (23) и вместо её точного решения с помощью функции Эйри применить уравнение (34). Ключевым здесь является замечание, что начальное распределение не содержит параметров с размерностью длины, однако исходная задача имеет некоторое характерное значение скорости c_0 . Поэтому решение уравнения (34) может зависеть лишь от автомодельной переменной $\xi = x/t$ (в размерных единицах — от $\xi = x/(c_0 t)$). Подставляя $k = k(\xi)$ в (34), находим $(dk/d\xi)(v_g(k) - \xi) = 0$. Поскольку вдоль модулированной волны $dk/d\xi \neq 0$, зависимость $k = k(\xi)$ неявно определена уравнением

$$v_g(k) = \xi = \frac{x}{t}. \quad (35)$$

Найдя отсюда $k = k(x/t)$, мы можем выразить фазу $\theta(x, t)$ с помощью уравнения $\theta_x = k$ с учётом того, что частота $\omega = -\theta_t$, являющаяся функцией от k , тоже может зависеть лишь от автомодельной переменной. Применительно к линейному уравнению КдФ полученные результаты легко воспроизводят уже известные соотношения $-3k^2 = x/t$, $k = \theta_x = -(-x/(3t))^{1/2}$, $\theta = (2/3)(-x/(3t)^{1/3})^{3/2}$. Итак, модуляционное уравнение (34) позволило легко найти некоторые характеристики возникающей волновой структуры.

Для вывода модуляционного уравнения для амплитуды $a(x, t)$ волны (30) естественно использовать закон сохранения энергии, так как расширение волновой структуры со временем приводит к распределению энергии по всё большему объёму, а плотность энергии в линейных системах пропорциональна квадрату амплитуды. Принимая, что после усреднения по длине волны локальная плотность энергии $a^2(x, t)$ переносится с групповой скоростью v_g , отвечающей локальному значению волнового числа k , мы можем записать закон сохранения энергии в виде

$$\frac{\partial(a^2)}{\partial t} + \frac{\partial(v_g a^2)}{\partial x} = 0. \quad (36)$$

В случае линейного уравнения КдФ и асимптотического режима (35) эволюции волнового пакета уравнение (36) превращается в $ta_t + xa_x = -a/2$. Последнее легко решается с помощью стандартного метода характеристик, что даёт $a(x, t) = (1/\sqrt{t})f(x/t)$, где f — произвольная функция. Принимая, что в задаче об эволюции ступеньки амплитуда также зависит лишь от той же автомодельной переменной $z = -x/(3t)^{1/3}$, от которой зависит волновое число k , легко находим, что $f(x/t) = \text{const}(-x/t)^{-3/4}$ и

форма модулированной волны оказывается определённой с точностью до постоянного множителя:

$$u(x, t) \cong \frac{\text{const}}{\sqrt{t}} \left(\frac{-x}{t} \right)^{-3/4} \cos \left[\frac{2}{3} \frac{(-x)^{3/2}}{(3t)^{1/2}} \right].$$

Таким образом, мы воспроизвели основные характеристики решения (25), не используя какую-либо информацию о свойствах функции Эйри, а решая вместо этого модуляционные уравнения (34) и (36) линейной теории. Ясно, что идея этого подхода с использованием закона сохранения числа волн и других законов сохранения с усреднёнными плотностями и потоками допускает обобщение для нелинейных волн. Именно это было сделано Уиземом для модулированных кноидальных волн уравнения КдФ, и мы обратимся к его теории в разделе 4.

4. Теория Уизема

Мы ограничимся изложением общей идеи Уизема [2] об усреднении законов сохранения для простого случая, в котором эволюция волны описывается нелинейным уравнением для единственной переменной u :

$$\Phi(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}, \dots) = 0. \quad (37)$$

Мы предполагаем, что уравнение (37) имеет решения в виде бегущей волны, когда $u(x, t)$ зависит от x и t только в комбинации $\xi = x - Vt$, $u = u(\xi)$, и для таких решений уравнение (37) может быть сведено к виду

$$u_\xi^2 = F(u, V, A_i), \quad (38)$$

где A_i — набор параметров, возникающих при выводе (38) из (37). В периодической бегущей волне переменная u осциллирует между двумя нулями функции $F(u)$. Обозначим эти нули как $u_1(V, A_i)$ и $u_2(V, A_i)$, $u_1 < u_2$, причём функция F должна быть положительной в интервале $u_1 < u < u_2$. Очевидно, что длина волны определяется выражением

$$L = L(V, A_i) = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{F(u; V, A_i)}}, \quad (39)$$

а волновое число k и частота ω имеют следующий вид:

$$k = k(V, A_i) = \frac{1}{L(V, A_i)}, \quad (40)$$

$$\omega = \omega(V, A_i) = V k(V, A_i),$$

причём мы опустили множитель 2π в определении волнового числа, так как его введение в нелинейной теории нужно лишь для согласования с малоамплитудным пределом и при необходимости этот множитель может быть легко восстановлен. В результате волновое число k становится в точности равным плотности числа волн. В модулированной волне $u(\xi; V, A_i)$ параметры V и A_i являются медленными функциями x и t , мало изменяющимися на расстояниях порядка одной длины волны L и за время порядка одного периода $1/\omega$. Это означает, что существует интервал Δ много больше длины волны L , но много меньше некоего размера l , характеризующего волновую структуру в целом: $L \ll \Delta \ll l$. Ясно, что с точностью до малых величин порядка $\varepsilon \sim \Delta/l$ усредне-

ние по интервалу Δ эквивалентно усреднению по длине волны L . Поэтому усреднять физические величины по быстрым осцилляциям в волне мы будем согласно правилу

$$\langle \mathcal{F} \rangle \approx \frac{1}{L} \int_0^L \mathcal{F}(x', t) dx'. \quad (41)$$

Если известен закон сохранения $\mathcal{P}_t + \mathcal{Q}_x = 0$, то после усреднения он примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathcal{P} \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \mathcal{Q} \rangle = 0, \quad (42)$$

где зависимость от x и t имеется лишь в медленно изменяющихся модуляционных параметрах V и A_i , входящих в усреднённые величины. Мы можем рассматривать уравнения (42) как дифференциальные уравнения для этих параметров, подобно тому как мы рассматривали модуляционные уравнения в линейной теории.

Теперь мы можем обратиться к выводу модуляционных уравнений для кноидальной волны КдФ. В слабо модулированной волне параметры A , B , V или v_1 , v_2 , v_3 становятся медленными функциями от x и t , и мы хотим найти уравнения, определяющие эволюцию этих параметров. Вычисления можно упростить, приняв во внимание, что одно из модуляционных уравнений нам уже известно. Заменяя в периодическом решении (16) аргумент эллиптической функции фазой θ , которую можно определить с точностью до подходящего численного множителя, мы, как и в линейном случае, вводим локальные значения волнового числа и частоты формулами (31), и тогда они должны удовлетворять закону сохранения числа волн (33). В слабо модулированной волне значения k и ω даются выражениями (40) с переменными параметрами V , A_i , так что изменение этих параметров при эволюции волны должно подчиняться уравнению

$$k_t + (kV)_x = 0, \quad k = \frac{1}{L}. \quad (43)$$

В качестве недостающих двух модуляционных уравнений мы используем усреднённые законы сохранения:

$$u_t + (3u^2 + u_{xx})_x = 0, \quad (44)$$

$$\left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t + \left(2u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right)_x = 0,$$

которые нетрудно проверить подстановкой в них u_t из уравнения КдФ.

Сначала мы выведем модуляционные уравнения для параметров A , B , V . Следуя Уизему, выразим средние величины через функцию

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= -\sqrt{2} \oint \sqrt{-A + Bu + \frac{1}{2} Vu^2 - u^3} du = \\ &= -\sqrt{2} \oint \sqrt{-\mathcal{R}(u)} du, \end{aligned} \quad (45)$$

где интеграл берётся по замкнутому контуру вокруг интервала $v_2 \leq u \leq v_3$. Длина волны $L = 1/k$ выражается через \mathcal{W} как

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \oint \frac{du}{\sqrt{-\mathcal{R}(u)}} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial A} \equiv \mathcal{W}_A. \quad (46)$$

Легко вычислить средние величины:

$$\begin{aligned}\langle u \rangle &= k \int_0^L u d\xi = \frac{k}{\sqrt{2}} \oint \frac{u du}{\sqrt{-\mathcal{R}(u)}} = -k\mathcal{W}_B, \\ \left\langle \frac{1}{2} u^2 \right\rangle &= k \int_0^L \frac{(1/2)u^2 du}{u_\xi} = -k\mathcal{W}_V, \\ \langle u_\xi^2 \rangle &= k \oint \frac{u_\xi^2 du}{u_\xi} = -k\mathcal{W}.\end{aligned}\quad (47)$$

Вторые производные $u_{\xi\xi}$ могут быть исключены из законов сохранения с помощью формулы $u_{\xi\xi} = B + Vu - 3u^2$. После простых вычислений с использованием соотношения $k\mathcal{W}_A = 1$ и найденных средних значений получаем усреднённые законы сохранения в виде

$$\begin{aligned}(k\mathcal{W}_B)_t + (kV\mathcal{W}_B - B)_x &= 0, \\ (k\mathcal{W}_V)_t + (kV\mathcal{W}_V - A)_x &= 0.\end{aligned}\quad (48)$$

После подстановки $k = 1/\mathcal{W}_A$ и введения "длинной" производной $D/Dt = \partial/\partial t + V\partial/\partial x$ мы приходим к модуляционным уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{D\mathcal{W}_A}{Dt} &= \mathcal{W}_A \frac{\partial V}{\partial x}, & \frac{D\mathcal{W}_B}{Dt} &= \mathcal{W}_A \frac{\partial B}{\partial x}, \\ \frac{D\mathcal{W}_V}{Dt} &= \mathcal{W}_A \frac{\partial A}{\partial x},\end{aligned}\quad (49)$$

первое из которых представляет собой закон сохранения (43) с подставленным в него волновым числом $k = 1/\mathcal{W}_A$.

Несмотря на кажущуюся простоту полученных уравнений, они не слишком полезны на практике. Поэтому приведём их к переменным v_1, v_2, v_3 . Из (14) мы находим соотношения между дифференциалами:

$$\begin{aligned}dV &= 2(dv_1 + dv_2 + dv_3), \\ dB &= -[(v_2 + v_3)dv_1 + (v_1 + v_3)dv_2 + (v_1 + v_2)dv_3], \\ dA &= -(v_2v_3dv_1 + v_1v_3dv_2 + v_1v_2dv_3).\end{aligned}$$

Следовательно, уравнения (49) в переменных v_1, v_2, v_3 приобретают вид

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{A,v_1} \frac{Dv_1}{Dt} + \mathcal{W}_{A,v_2} \frac{Dv_2}{Dt} + \mathcal{W}_{A,v_3} \frac{Dv_3}{Dt} &= \\ &= 2\mathcal{W}_A(v_{1,x} + v_{2,x} + v_{3,x}), \\ \mathcal{W}_{B,v_1} \frac{Dv_1}{Dt} + \mathcal{W}_{B,v_2} \frac{Dv_2}{Dt} + \mathcal{W}_{B,v_3} \frac{Dv_3}{Dt} &= \\ &= -\mathcal{W}_A[(v_2 + v_3)v_{1,x} + (v_1 + v_3)v_{2,x} + (v_1 + v_2)v_{3,x}], \\ \mathcal{W}_{V,v_1} \frac{Dv_1}{Dt} + \mathcal{W}_{V,v_2} \frac{Dv_2}{Dt} + \mathcal{W}_{V,v_3} \frac{Dv_3}{Dt} &= \\ &= -\mathcal{W}_A[v_2v_3v_{1,x} + v_1v_3v_{2,x} + v_1v_2v_{3,x}],\end{aligned}\quad (50)$$

где все производные функции \mathcal{W} представляются интегралами, подобными (45), (47).

Указанием для последующих преобразований служит то, что правые части уравнений (50) имеют один и тот же множитель \mathcal{W}_A . Поэтому можно подобрать такие их линейные комбинации, чтобы коэффициент перед одной из производных обратился в нуль, а другие два коэффициента стали равными друг другу. В самом деле, умножим первое уравнение (50) на p , второе — на q , третье —

на r , сложим их и подберём параметры p, q, r так, чтобы коэффициент перед $v_{1,x}$ обратился в нуль, а коэффициенты перед $v_{2,x}$ и $v_{3,x}$ стали равными между собой:

$$\begin{aligned}2p - q(v_2 + v_3) - rv_2v_3 &= 0, \\ 2p - q(v_1 + v_3) - rv_1v_3 &= 2p - q(v_1 + v_2) - rv_1v_2.\end{aligned}$$

Из этих условий сразу следует

$$q = -rv_1, \quad p = -\frac{1}{2}r(v_1v_2 + v_1v_3 - v_2v_3),$$

так что мы можем положить $r = -2$ и получить $p = v_1v_2 + v_1v_3 - v_2v_3$, $q = 2v_1$, $r = -2$. Тогда правая часть этой линейной комбинации уравнений (50) приобретает вид

$$-2(v_2 - v_1)(v_3 - v_1)\mathcal{W}_A \frac{\partial(v_2 + v_3)}{\partial x}.\quad (51)$$

Отсюда следует, что если в такой же линейной комбинации левых частей уравнений (50) коэффициент перед Dv_1/Dt обратился в нуль, а коэффициенты перед Dv_2/Dt и Dv_3/Dt окажутся равными друг другу, то модуляционные уравнения примут чрезвычайно простой "диагональный" вид.

С помощью легко проверяемого тождества

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} \left(2\sqrt{\frac{(u-v_2)(u-v_3)}{-(u-v_1)}} \right) &= \\ &= -\frac{u^2 - 2v_1u + v_1v_2 + v_1v_3 - v_2v_3}{(u-v_1)\sqrt{-\mathcal{R}(u)}}\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}p\mathcal{W}_{A,v_1} + q\mathcal{W}_{B,v_1} + r\mathcal{W}_{V,v_1} &= \\ &= -\frac{1}{\sqrt{8}} \oint \frac{d}{du} \left(2\sqrt{\frac{(u-v_2)(u-v_3)}{-(u-v_1)}} \right) du = 0,\end{aligned}$$

так как подынтегральная функция является полной производной периодической функции, и первое условие оказалось выполненным.

Коэффициенты перед Dv_2/Dt и Dv_3/Dt соответственно имеют вид

$$\begin{aligned}K_2 &= p\mathcal{W}_{A,v_2} + q\mathcal{W}_{B,v_2} + r\mathcal{W}_{V,v_2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \oint \frac{u^2 - 2v_1u + v_1v_2 + v_1v_3 - v_2v_3}{(u-v_2)\sqrt{-\mathcal{R}(u)}} du, \\ K_3 &= p\mathcal{W}_{A,v_3} + q\mathcal{W}_{B,v_3} + r\mathcal{W}_{V,v_3} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \oint \frac{u^2 - 2v_1u + v_1v_2 + v_1v_3 - v_2v_3}{(u-v_3)\sqrt{-\mathcal{R}(u)}} du,\end{aligned}$$

и их разность равна нулю как интеграл по периоду от производной периодической функции:

$$K_2 - K_3 = \frac{v_2 - v_3}{\sqrt{8}} \oint \frac{d}{du} \left(2\sqrt{\frac{-(u-v_1)}{(u-v_2)(u-v_3)}} \right) du = 0.$$

Таким образом, $K_2 = K_3$ и комбинация $v_2 + v_3$ является удобной модуляционной переменной, для которой модуляционные уравнения чрезвычайно упрощаются. Возникший здесь коэффициент $K_2 = K_3$ перед $D(v_2 + v_3)/Dt$

также может быть выражен через функцию \mathcal{W}_A . В самом деле, K_2 и K_3 можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{v_2 - v_1}{\sqrt{2}} \oint \frac{(u - v_3) du}{(u - v_2)\sqrt{-\mathcal{R}(u)}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{8}} \oint \frac{u^2 - 2v_2u + v_1v_2 + v_2v_3 - v_1v_3}{(u - v_2)\sqrt{-\mathcal{R}(u)}} du, \\ K_3 &= \frac{v_3 - v_1}{\sqrt{2}} \oint \frac{(u - v_2) du}{(u - v_3)\sqrt{-\mathcal{R}(u)}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{8}} \oint \frac{u^2 - 2v_3u + v_1v_3 + v_2v_3 - v_1v_2}{(u - v_3)\sqrt{-\mathcal{R}(u)}} du. \end{aligned}$$

Но вторые члены в правых частях равны нулю в силу тождеств, аналогичных использованным выше, а оставшиеся ненулевые члены легко приводятся к виду

$$\begin{aligned} K_2 &= (v_2 - v_1)\mathcal{W}_A - 2(v_2 - v_1)(v_3 - v_2)\mathcal{W}_{A,v_2}, \\ K_3 &= (v_3 - v_1)\mathcal{W}_A + 2(v_3 - v_1)(v_3 - v_2)\mathcal{W}_{A,v_3}. \end{aligned} \quad (52)$$

Тогда равенство $K_2 = K_3$ приводит к тождеству

$$\mathcal{W}_A = -2[(v_2 - v_1)\mathcal{W}_{A,v_2} + (v_3 - v_1)\mathcal{W}_{A,v_3}],$$

подстановка которого в любое из уравнений (52) даёт

$$\begin{aligned} K_2 = K_3 &= -2(v_2 - v_1)(v_3 - v_1)(\mathcal{W}_{A,v_2} + \mathcal{W}_{A,v_3}) = \\ &= 2(v_2 - v_1)(v_3 - v_1)\mathcal{W}_{A,v_1} \end{aligned}$$

в силу

$$\mathcal{W}_{A,v_1} + \mathcal{W}_{A,v_2} + \mathcal{W}_{A,v_3} = \frac{1}{\sqrt{8}} \oint \frac{-\mathcal{R}'(u) du}{(-\mathcal{R})^{3/2}(u)} = 0.$$

Теперь приравниваем левую часть нашей линейной комбинации

$$2(v_1 - v_2)(v_1 - v_3)\mathcal{W}_{A,v_1} \frac{D(v_2 + v_3)}{Dt}$$

её правой части (51) и получаем уравнение

$$\frac{D(v_2 + v_3)}{Dt} + \frac{\mathcal{W}_A}{\mathcal{W}_{A,v_1}} \frac{\partial(v_2 + v_3)}{\partial x} = 0. \quad (53)$$

Циклическая перестановка переменных v_1, v_2, v_3 даёт два других модуляционных уравнения Уизема:

$$\begin{aligned} \frac{D(v_3 + v_1)}{Dt} + \frac{\mathcal{W}_A}{\mathcal{W}_{A,v_2}} \frac{\partial(v_3 + v_1)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{D(v_1 + v_2)}{Dt} + \frac{\mathcal{W}_A}{\mathcal{W}_{A,v_3}} \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (54)$$

В каждое из полученных Уиземом уравнений входят производные только от одной из величин $v_2 + v_3, v_3 + v_1, v_1 + v_2$, т.е. уравнения приобрели диагональный вид. Поэтому проведённое преобразование аналогично переходу от стандартной формы уравнений газовой динамики к их диагональной форме для других переменных, называемых *инвариантами Римана* (см., например, [22]). Поэтому мы определяем новые модуляционные переменные, римановы инварианты $r_1 \leq r_2 \leq r_3$ модуляцион-

ных уравнений Уизема, как

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \quad r_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_3), \quad r_3 = \frac{1}{2}(v_2 + v_3), \\ v_1 &= r_1 + r_2 - r_3, \quad v_2 = r_1 + r_3 - r_2, \quad v_3 = r_2 + r_3 - r_1, \end{aligned} \quad (55)$$

и выражаем через них остальные переменные. В частности, находим $\mathcal{W}_{A,r_1} = \mathcal{W}_{A,v_1} + \mathcal{W}_{A,v_2} - \mathcal{W}_{A,v_3} = -2\mathcal{W}_{A,v_3}$, $\mathcal{W}_{A,r_2} = -2\mathcal{W}_{A,v_2}$, $\mathcal{W}_{A,r_3} = -2\mathcal{W}_{A,v_1}$. Учитывая, что $\mathcal{W}_A = L$, получаем

$$\frac{\mathcal{W}_A}{\mathcal{W}_{A,v_1}} = -\frac{2\mathcal{W}_A}{\mathcal{W}_{A,r_3}} = -\frac{2L}{\partial L/\partial r_3}$$

и аналогичные формулы для $\mathcal{W}_A/\mathcal{W}_{A,v_2}$ и $\mathcal{W}_A/\mathcal{W}_{A,v_3}$. Наконец, поскольку

$$V = 2(v_1 + v_2 + v_3) = 2(r_1 + r_2 + r_3), \quad (56)$$

мы можем представить уравнения Уизема в виде

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + v_i(r_1, r_2, r_3) \frac{\partial r_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (57)$$

где характеристические скорости

$$\begin{aligned} v_i &= 2(r_1 + r_2 + r_3) - \frac{2L}{\partial L/\partial r_i} = \\ &= \left(1 - \frac{L}{\partial_i L} \partial_i\right) V, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (58)$$

$\partial_i \equiv \partial/\partial r_i$. Поскольку формула (18) для длины волны превращается в

$$L = \frac{2K(m)}{\sqrt{r_3 - r_1}}, \quad m = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1}, \quad (59)$$

подстановка (59) в (58) с учётом известного выражения для производной эллиптического интеграла $K(m)$ (см., например, [20]) даёт выражения для скоростей v_i в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= 2(r_1 + r_2 + r_3) + \frac{4(r_2 - r_1)K(m)}{E(m) - K(m)}, \\ v_2 &= 2(r_1 + r_2 + r_3) - \frac{4(r_2 - r_1)(1 - m)K(m)}{E(m) - (1 - m)K(m)}, \\ v_3 &= 2(r_1 + r_2 + r_3) + \frac{4(r_3 - r_1)(1 - m)K(m)}{E(m)}, \end{aligned} \quad (60)$$

где $E(m)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Именно к такому виду модуляционных уравнений для кноидальной волны КдФ пришёл Уизем в работе [2].

Возможность преобразования системы трёх уравнений первого порядка в диагональный вид является в высшей степени нетривиальным фактом. К счастью, Уизем не знал теоремы, утверждающей, что в системах более чем двух уравнений такой переход, вообще говоря, невозможен (см., например, [23]). Сам Уизем называет в книге [21] возможность такого преобразования "удивительной". Впоследствии выяснилось, что в данном случае возможность указанного преобразования обусловлена замечательным математическим свойством "полной интегрируемости" уравнения КдФ, которое было открыто двумя годами позднее [24].

Если решение $r_i = r_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$, уравнений Уизема для какой-то конкретной задачи найдено, то профиль волны в ДУВ определяется подстановкой этого решения

в периодическое решение, которое в новых переменных (инвариантах Римана для системы модуляционных уравнений Уизема) приобретает вид

$$u = r_2 + r_3 - r_1 - 2(r_2 - r_1) \operatorname{sn}^2(\sqrt{r_3 - r_1}(x - Vt), m) \quad (61)$$

с длиной волны (59). При $r_2 \rightarrow r_3$, когда $L \rightarrow \infty$, мы приходим к солитонному пределу:

$$u(x, t)|_{r_2=r_3} = r_1 + \frac{2(r_3 - r_1)}{\cosh^2[\sqrt{r_3 - r_1}(x - V_s t)]}, \quad (62)$$

$$V_s = 2(r_1 + 2r_3),$$

а в пределе малых амплитуд, $r_2 - r_1 \ll r_2$, кноидальная волна превращается в гармоническую:

$$u(x, t) = r_3 + (r_2 - r_1) \cos[2\sqrt{r_3 - r_1}(x - Vt)], \quad (63)$$

$$V = 2(2r_1 + r_3),$$

с длиной волны $\pi/\sqrt{r_3 - r_1}$, что, как и должно быть, совпадает с пределом $m \rightarrow 0$ выражения (59).

Уравнения Уизема позволяют, даже если ограничиться только их использованием, существенно продвинуться в описании формирования ДУВ в конкретных задачах, и исследования такого рода были начаты в работе Гуревича и Питаевского [1]. Однако, прежде чем перейти к таким задачам, мы опишем в разделе 5 общий метод решения уравнений Уизема, развитый в основном в более поздних работах Гуревича с сотрудниками [25–29] (см. также [30–35]).

5. Обобщённый метод годографа

Ещё Риманом было замечено, что если в уравнениях газовой динамики для произвольных одномерных течений, в которых плотность газа $\rho = \rho(x, t)$ и скорость течения $u = u(x, t)$ являются функциями координаты x и времени t , сделать так называемое *преобразование годографа*, при котором x и t становятся функциями выраженных через ρ и u римановых инвариантов, то уравнения для x и t оказываются линейными и допускают достаточно удобную для приложений форму решения.

Модуляционные уравнения Уизема (57) по форме аналогичны уравнениям газовой динамики после их приведения к диагональному виду, поэтому естественно попытаться применить для решения уравнений Уизема аналогичный метод. Такой "обобщённый метод годографа" был предложен в весьма общей форме С.П. Царёвым [36] как способ решения уравнений гидродинамического типа с числом независимых переменных более двух. Мы приведём некоторые элементарные сведения об этом методе, которые были использованы Гуревичем с сотрудниками для решения уравнений Уизема (57) в задаче Гуревича – Питаевского.

В простейшем случае уравнения Хопфа (10), являющегося бездисперсионным пределом уравнения КдФ, решение (11) легко выражается через начальное распределение переменной u . Теперь у нас имеются три уравнения (57) аналогичного вида и мы можем попытаться искать их решение в аналогичной форме:

$$x - v_i(r)t = w_i(r), \quad i = 1, 2, 3, \quad (64)$$

где функции $w_i(r)$ подлежат определению. Дифференцирование этих выражений по r_j даёт соотношения

$-(\partial v_i / \partial r_j)t = \partial w_i / \partial r_j$, $i \neq j$, из которых можно исключить t с помощью (64), $t = -(w_i - w_j)/(v_i - v_j)$, и в результате мы приходим к выводу, что функции w_i должны удовлетворять уравнениям Царёва

$$\frac{1}{w_i - w_j} \frac{\partial w_i}{\partial r_j} = \frac{1}{v_i - v_j} \frac{\partial v_i}{\partial r_j}, \quad i \neq j. \quad (65)$$

Следовательно, если мы найдём общее решение $w_i(r)$ этих уравнений при заданных $v_i(r)$, то получим общее решение (64) уравнений Уизема (57), которое затем можно будет конкретизировать для какой-то частной задачи.

Подход к решению уравнений (65) можно найти, если заметить, что эти уравнения могут быть представлены как условия совместности уравнений Уизема (57) и неких дополнительных уравнений

$$\frac{\partial r_i}{\partial \tau} + w_i(r_j) \frac{\partial r_i}{\partial x} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (66)$$

для эволюции римановых инвариантов в зависимости от фиктивного "времени" τ с формальными "скоростями" $w_i(r_j)$. Тогда условие $\partial^2 r_i / \partial \tau \partial t = \partial^2 r_i / \partial t \partial \tau$ после простых преобразований даёт уравнение $w_j \partial v_i / \partial r_j + v_i \partial w_i / \partial r_j = v_j \partial w_i / \partial r_j + w_i \partial v_i / \partial r_j$, эквивалентное (65). Считая $w_i(r)$ аналогом уиземовских скоростей, естественно искать решение w_i уравнений Царёва в виде [26]

$$w_i = (1 - (\partial_i \ln L)^{-1} \partial_i) W, \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial r_i}, \quad (67)$$

аналогичном (58). Используя выражения $v_i = 2\sigma_1 - 2(\partial_i \ln L)^{-1}$, $\sigma_1 = r_1 + r_2 + r_3$, мы представляем уравнения (67) в виде

$$w_i = W + \left(\frac{1}{2} v_i - \sigma_1\right) \partial_i W, \quad (68)$$

и в результате простого вычисления находим

$$w_i - w_j = \left(\frac{1}{2} v_j - \sigma_1\right) (\partial_i W - \partial_j W) + \frac{1}{2} (v_i - v_j) \partial_i W,$$

$$\partial_j w_i = \partial_j W - \partial_i W + \left(\frac{1}{2} v_i - \sigma_1\right) \partial_{ij} W + \frac{1}{2} \partial_j v_i \partial_i W,$$

где $\partial_{ij} = \partial^2 / \partial r_i \partial r_j$. Подстановка этих выражений в уравнения (65) приводит к уравнениям для W :

$$\partial_j W - \partial_i W + \left(\frac{1}{2} v_i - \sigma_1\right) \partial_{ij} W =$$

$$= \left(\frac{1}{2} v_j - \sigma_1\right) (\partial_i W - \partial_j W) \frac{\partial_j v_i}{v_i - v_j}. \quad (69)$$

Чтобы сделать дальнейшие упрощения, определим многочлен

$$Q(r) = (r - r_1)(r - r_2)(r - r_3) =$$

$$= r^3 - \sigma_1 r^2 + \sigma_2 r - \sigma_3, \quad (70)$$

$$\sigma_1 = \sum_i r_i, \quad \sigma_2 = \sum_{i < j} r_i r_j, \quad \sigma_3 = r_1 r_2 r_3,$$

где r — произвольный параметр, и используем легко проверяемое тождество

$$\partial_{ij} \frac{1}{\sqrt{Q(r)}} = \frac{1}{2(r_i - r_j)} \left(\partial_i \frac{1}{\sqrt{Q(r)}} - \partial_j \frac{1}{\sqrt{Q(r)}} \right), \quad (71)$$

Из формулы (18) следует, что с точностью до несущественного множителя длина волны $L = \oint dr/\sqrt{Q(r)}$, где интегрирование проводится по замкнутому контуру, окружающему интервал между двумя нулями, r_1 и r_2 , многочлена $Q(r)$. Поэтому интегрирование уравнения (71) по тому же контуру даёт соотношение

$$\frac{\partial_{ij}L}{\partial_i L - \partial_j L} = \frac{1}{2(r_i - r_j)}. \quad (72)$$

Подстановка выражения (58) в правую часть (65) после простых преобразований с использованием найденных тождеств приводит к системе уравнений для потенциала W :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r_i \partial r_j} - \frac{1}{2(r_i - r_j)} \left(\frac{\partial W}{\partial r_i} - \frac{\partial W}{\partial r_j} \right) = 0, \quad i \neq j. \quad (73)$$

Эти уравнения называются *уравнениями Эйлера–Пуассона*, и им посвящена обширная математическая литература. Мы ограничимся здесь простейшими фактами, которые позволят нам решить несколько интересных задач из теории Гуревича–Питаевского для динамики ДУВ.

Прежде всего заметим, что из сравнения уравнения (73) с тождеством (71) следует, что

$$W(r, r_1, r_2, r_3) = \frac{r^{3/2}}{\sqrt{Q(r)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{W^{(k)}(r_1, r_2, r_3)}{r^k} \quad (74)$$

является зависящим от произвольного параметра r решением уравнений (73). Отсюда сразу заключаем, что (74) можно считать производящей функцией частных решений $W^{(k)}(r_1, r_2, r_3)$, представляемых коэффициентами разложения W по обратным степеням r . После их подстановки в (68) получаем частные решения (64) уравнений Уизема в неявном виде. Уже эти простейшие решения позволяют описать поведение ДУВ в нескольких характерных примерах задачи Гуревича–Питаевского, которыми мы ограничимся в настоящей статье.

6. Формулировка задачи Гуревича–Питаевского

Для того чтобы получить общее физическое представление о постановке задач в подходе Гуревича–Питаевского в теории ДУВ, рассмотрим результаты численного решения уравнения КдФ с начальным распределением в виде "столика" с немного сглаженными краями:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq l_0, \\ 0, & |x| > l_0. \end{cases} \quad (75)$$

В наших безразмерных переменных дисперсионный размер равен единице, поэтому выбрана достаточно большая начальная ширина столика $2l_0$, чтобы ширина образовавшейся ДУВ также могла стать большой и условие применимости метода усреднения Уизема выполнялось достаточно хорошо при $t \gg 1$. Как видно из рис. 3, в результате эволюции начального распределения, близкого к (75), на его краях сформировались две структуры. На заднем крае образовалась волна разрежения, которая при пренебрежении дисперсией описывалась бы гидродинамическим решением $u(x, t) = (x + l_0)/(6t)$ при $-l_0 \leq x \leq -l_0 + 6t$. Передний край распределения (75) трансформировался в область осцил-

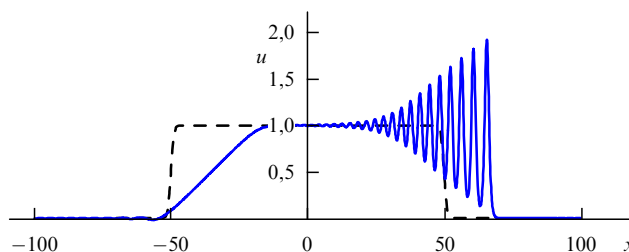


Рис. 3. Эволюция импульса с начальным распределением (75) (штриховая кривая) за время $t = 5$ согласно уравнению КдФ (9).

ляций, т.е. в ДУВ, и нам необходимо сформулировать корректный способ её описания в гидродинамическом пределе исчезающе малой дисперсии.

Здесь полезно кратко остановиться на том, как аналогичная проблема решается в теории вязких ударных волн (см., например, [22]). Как известно, в средах со слабой диссипацией показанное на рис. 1 опрокидывание волны устраняется формированием очень узкой области перехода от одного состояния течения среды к другому. Внутри этой области происходят интенсивные необратимые процессы, обусловленные, например, вязкостью и теплопроводностью газа, но при удалении от такой переходной области течение быстро приобретает характер течения идеального газа, в котором можно пренебречь какими-либо необратимыми процессами. В пределе исчезающе малых вязкости, теплопроводности и других характеристик диссипативных процессов толщина переходной области в нашем макроскопическом описании стремится к нулю и мы можем заменить её поверхностью разрыва гидродинамических переменных, по разные стороны от которой течение можно считать бездиссипативным. Характеристики течения и термодинамического состояния газа при переходе через разрыв должны удовлетворять условиям сохранения массы, импульса и энергии, что определяет закон движения разрыва.

В интересующем нас случае ДУВ мы должны совершить аналогичный переход к гидродинамическому пределу исчезающе малой дисперсии. Теперь вместо поверхности разрыва мы имеем область осцилляций с исчезающе малой длиной волны внутри неё, и динамика этой области описывается модуляционными уравнениями Уизема, которые также в "макроскопическом" масштабе имеют вид гидродинамических уравнений в частных производных первого порядка. По аналогии с обычной ударной волной нам необходимо построить решение этих уравнений в решение бездисперсионного уравнения Хопфа так, чтобы гладкое бездисперсионное решение непрерывным образом сшивалось с усреднёнными характеристиками осциллирующего модулированного решения.

Очевидно, что на солитонном крае ДУВ это означает, что ведущий солитон должен распространяться по фону, описываемому в точке сшивания гладким решением. Ситуация оказывается более деликатной на малоамплитудном крае, где, казалось бы, следует ожидать сшивания с решением линейных модуляционных уравнений (33) и (36). Однако в пределе исчезающе малой дисперсии амплитуда волны в точке сшивания стремится к нулю и уравнение (36) выполняется в этом пределе автоматически. Тем не менее использованный нами при выводе уравнений Уизема закон сохранения числа волн (43) пе-

реходит, очевидно, в точке сшивания в свой линейный предел (33). Поэтому указанный край ДУВ движется по гладкому фону с некой групповой скоростью, которая в модуляционной теории Уизема становится гидродинамической переменной, характеризующей ДУВ.

Действительно, переход к пределу исчезающе малой дисперсии можно представить формально как изменение масштаба, т.е. переход к "медленным" переменным $X = \varepsilon x$, $T = \varepsilon t$, так что уравнение КдФ превращается в $u_T + 6uu_X + \varepsilon^2 u_{XXX} = 0$, длина волны приобретает порядок величины $L \sim \varepsilon$ и в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ последнее уравнение переходит в уравнение Хопфа. В этом же пределе параметр ε исчезает из выражения для групповой скорости $v_g = -3\varepsilon^2 k^2 \sim (\varepsilon/L)^2 \sim 1$, так что скорость малоамплитудного края ДУВ определяется лишь значениями модуляционных параметров, характеризующих огибающую ДУВ.

Следует подчеркнуть, что описанная здесь картина ДУВ, предложенная Гуревичем и Питаевским, существенно отличается от более ранних представлений Бенджамена – Лайтхилла или Сагдеева, согласно которым ДУВ имела стационарный характер и её характеристики в целом определялись неперменным наличием слабой диссипации, конкурирующей с дисперсией. Мы вернёмся к этой картине перехода к стационарной ДУВ при учёте диссипации в разделе 12.

Итак, мы предполагаем, что дисперсионные эффекты так модифицируют опрокидывающееся нелинейное решение (11) бездисперсионного уравнения Хопфа, что вместо многозначной области возникает область $x_L < x < x_R$ волновых колебаний в распределении $u(x, t)$, эволюция которой подчиняется модуляционным уравнениям Уизема. Вне области $x_L < x < x_R$ волну можно описать плавным решением (11) уравнения Хопфа, а внутри неё ДУВ с хорошей точностью описывается выражением (61), где параметры r_1, r_2, r_3 являются решением уравнений Уизема (57). Это решение должно удовлетворять граничными условиями, обеспечивающим сшивание с плавным решением. Для выяснения условий сшивания заметим, что усреднённое по длине волны значение $u(x, t)$,

$$\langle u \rangle = 2(r_3 - r_1) \frac{E(m)}{K(m)} + r_1 + r_2 - r_3, \quad (76)$$

в этих предельных точках выражается как

$$\langle u \rangle_{r_1=r_2} = r_3, \quad \langle u \rangle_{r_2=r_3} = r_1, \quad (77)$$

т.е. на правом крае фоновое значение r_1 , по которому движется солитон (62), равняется значению $u(x_R, t)$ бездисперсионного решения в этой точке, а на левом крае фоновое значение r_3 малоамплитудного предела (63) равняется значению $u(x_L, t)$ того же бездисперсионного решения. Согласно сформулированным выше предположениям, на правом крае $x_R(t)$ ДУВ превращается в последовательность солитонов и здесь $r_2 = r_3$ ($m = 1$). На левом крае $x_L(t)$ с малой амплитудой колебаний мы принимаем $r_2 = r_1$ ($m = 0$).

Совпадение двух римановых инвариантов приводит к равенству соответствующих уиземовских скоростей (60) на краях ДУВ. Мы получаем соответственно

$$v_1|_{r_2=r_1} = v_2|_{r_2=r_1} = 12r_1 - 6r_3, \quad v_3|_{r_2=r_1} = 6r_3, \quad (78)$$

$$v_1|_{r_2=r_3} = 6r_1, \quad v_2|_{r_2=r_3} = v_3|_{r_2=r_3} = 2r_1 + 4r_3. \quad (79)$$

Следовательно, на заднем крае $x = x_L(t)$, где волна $u(x, t)$ и её среднее значение совпадают с римановым инвариантом r_3 , его эволюция определяется пределом уравнения Уизема

$$\frac{\partial r_3}{\partial t} + 6r_3 \frac{\partial r_3}{\partial x} = 0, \quad r_2 = r_1, \quad x = x_L(t), \quad (80)$$

совпадающим с уравнением Хопфа (10) для переменной $u(x, t)$ в бездисперсионном пределе. Аналогичным образом, на переднем фронте $x = x_R(t)$, где среднее значение $\langle u(x, t) \rangle$ совпадает с римановым инвариантом r_1 , его эволюция определяется таким же уравнением Хопфа:

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} + 6r_1 \frac{\partial r_1}{\partial x} = 0, \quad r_2 = r_3, \quad x = x_R(t). \quad (81)$$

Таким образом, мы приходим к выводу о том, что на заднем крае ДУВ выполняется граничное условие

$$v_1|_{r_1=r_2} = v_2|_{r_1=r_2}, \quad v_3|_{r_1=r_2} = 6r_L, \quad (82)$$

а на переднем крае — условие

$$v_1|_{r_2=r_3} = 6r_R, \quad v_2|_{r_2=r_3} = v_3|_{r_2=r_3}. \quad (83)$$

Здесь r_L и r_R — значения решения (11) уравнения Хопфа, отвечающего начальному профилю $r = u_0(x)$, в точках сшивания с ДУВ. Для решения в форме (64) конечные точки ДУВ должны сшиваться с решением (11) уравнения Хопфа и граничные условия (82) и (83) могут быть представлены в виде

$$w_1|_{r_1=r_2} = w_2|_{r_1=r_2}, \quad w_3|_{r_1=r_2} = \bar{x}(r_3), \quad (84)$$

$$w_1|_{r_2=r_3} = \bar{x}(r_1), \quad w_2|_{r_2=r_3} = w_3|_{r_2=r_3}. \quad (85)$$

соответственно. Если нам удастся найти решение уравнений Уизема (57), удовлетворяющее указанным условиям, то мы получим функции r_1, r_2, r_3 во всей области $x_L(t) < x < x_R(t)$ и, следовательно, опишем огибающие осциллирующей волны во всей ДУВ.

Прежде чем перейти к решению конкретных задач, отметим, что уравнения Уизема, как следует из их однородности, имеют автомодельные решения в виде

$$r_i(x, t) = t^\gamma R_i(xt^{-1-\gamma}), \quad (86)$$

где γ — произвольный индекс автомодельности, $R_i(z)$ — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$[(1 + \gamma)z - v_i(R)]R'_i = \gamma R_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (87)$$

где $z = xt^{-1-\gamma}$, $R'_i \equiv dR_i/dz$, и $v_i(R) = t^{-\gamma}v_i(r)$, т.е. $v_i(R)$ выражаются через R_i такими же формулами, какими $v_i(r)$ выражаются через r_i . Это замечание позволяет находить полезные классы решений, описывающих ДУВ, для некоторого специального выбора начальных условий.

7. Эволюция начального разрыва в теории Кортевега – де Фриза

Начнём с простейшего примера [1], аналогичного задаче об эволюции ступеньки (23) в теории линейного уравнения КдФ. Для упрощения формул воспользуемся тем, что уравнение КдФ инвариантно относительно преобра-

зования Галилея $x \rightarrow x + 6At$, $t \rightarrow t$, $u \rightarrow u + A$ и масштабного преобразования $x \rightarrow x/B^{1/2}$, $t \rightarrow t/B^{3/2}$, $u \rightarrow Bu$, где A и B являются постоянными параметрами. С помощью этих преобразований начальную ступеньку с любой амплитудой можно представить в виде

$$u_0(x) = u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (88)$$

В бездисперсионном приближении мы получаем формальное решение уравнения Хопфа

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x < 6t, \\ \frac{x}{6t}, & 0 \leq x \leq 6t, \\ 0, & x > 6t, \end{cases}$$

которое является многозначным в области $0 < x < 6t$. Согласно Гуревичу и Питаевскому, при учёте дисперсии вместо этой области возникает ДУВ, эволюция которой определяется уравнениями Уизема.

Поскольку в гидродинамическом приближении Уизема в начальном условии отсутствуют параметры с размерностью длины, решение модуляционных уравнений должно быть автомодельным (см. (86) с $\gamma = 0$), т.е. $r_i = r_i(z)$, $z = x/t$, где $r_i(z)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (см. (87)) $(v_i - z) dr_i/dz = 0$. На заднем крае $z = z_L$, где амплитуда осцилляций стремится к нулю, имеем $r_1 = r_2$ и среднее значение $\langle u \rangle$ совпадает с $u = 1$ (см. (77)), должно выполняться граничное условие $r_1(z_L) = r_2(z_L)$, $r_3(z_L) = 1$. На переднем солитонном фронте $z = z_R$, где $r_2 = r_3$ и среднее значение $\langle u \rangle = r_1$ обращается в нуль, имеем другое граничное условие: $r_2(z_R) = r_3(z_R)$, $r_1(z_R) = 0$. Легко увидеть, что мы получим решение, удовлетворяющее обоим граничным условиям, если возьмём

$$r_1 \equiv 0, \quad r_3 \equiv 1, \quad v_2 = z. \quad (89)$$

Тогда $m = (r_2 - r_1)/(r_3 - r_1) = r_2$ и последнее уравнение (89) определяет зависимость автомодельной переменной $z = x/t$ от r_2 ,

$$z = \frac{x}{t} = 2(1 + r_2) - \frac{4r_2(1 - r_2)K(r_2)}{E(r_2) - (1 - r_2)K(r_2)}. \quad (90)$$

Взяв предел $r_2 \rightarrow 0$, находим значение автомодельной переменной на заднем крае:

$$z_L = -6 \quad \text{или} \quad x_L = -6t, \quad (91)$$

т.е. область осцилляций распространяется в невозмущённую область импульса со скоростью $s_L = v_g = -6$, равной групповой скорости линейных волн на постоянном фоне $u = 1$ с законом дисперсии $\omega = 6k - k^3$. Действительно, групповая скорость $d\omega/dk = 6 - 3k^2$ равна $v_g = -6$ при длине волны, равной, согласно (59), величине $L(0) = \pi$, т.е. при $k = 2\pi/L = 2$.

На переднем фронте мы имеем $r_2 \rightarrow 1$ и уравнение (90) даёт

$$z_R = 4 \quad \text{или} \quad x_R = 4t, \quad (92)$$

т.е. этот край дисперсионной ударной волны движется с солитонной скоростью $s_R = V_s = 4r_3 = 4$. Амплитуда переднего солитона вдвое больше амплитуды ступеньки. Зависимость $r_2 = m$ от переменной $z'' = 4 - z$,

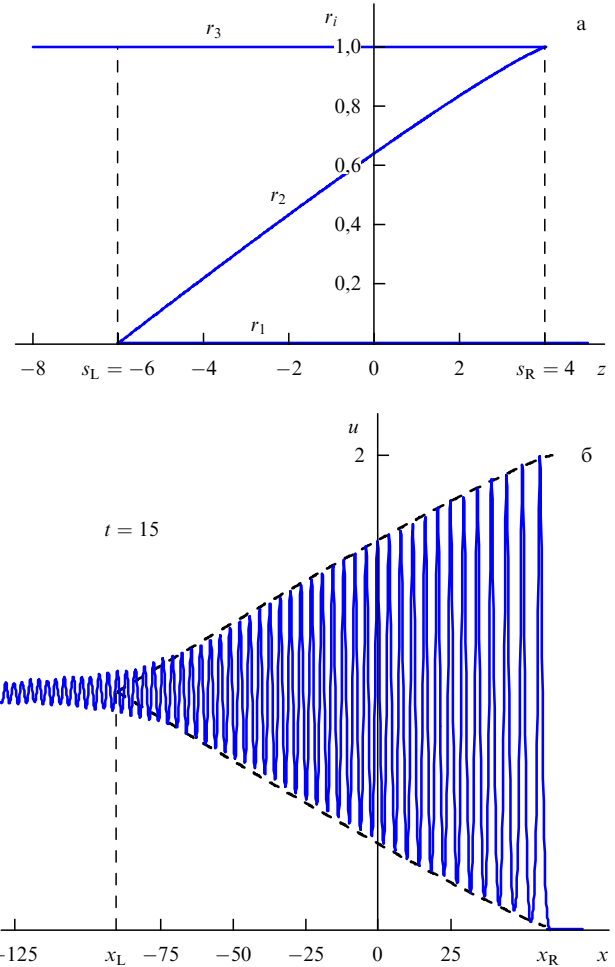


Рис. 4. (а) Римановы инварианты в задаче о ступеньке. Зависимость r_2 от z определяется уравнением (90). (б) Эволюция импульса с начальным распределением в виде ступеньки (88) согласно уравнению КдФ (сплошная линия). Огибающие амплитуды ДУВ показаны штриховыми линиями.

$|z''| \ll 1$, вблизи переднего фронта определяется уравнением $z'' \simeq 2(1 - m) \ln(16/(1 - m))$, что даёт с логарифмической точностью $1 - m \simeq z''/2 \ln(1/z'')$. Следовательно, расстояние между солитонами вблизи переднего фронта (где $4t - x \sim 1$ или $4 - z = z'' \sim 1/t$) возрастает со временем согласно закону

$$L = \frac{2K(m)}{\sqrt{r_3 - r_1}} \simeq \pi \ln \frac{1}{z''} = \pi \ln t. \quad (93)$$

В целом зависимость $r_2 = m$ от z показана на рис. 4а. Подстановка найденных значений римановых инвариантов в формулу (61) даёт выражение для $u(x, t)$ в дисперсионной ударной волне:

$$u(x, t) = 1 + r_2 - 2r_2 \operatorname{sn}^2(x(r_2) - 2(1 + r_2)t, r_2), \quad (94)$$

причём зависимость $x(r_2)$ в фиксированный момент t определяется уравнением (90). Поэтому огибающая максимумов даётся функцией $u_{\max} = 1 + r_2$, а минимумов — функцией $u_{\min} = 1 - r_2$. На рисунке 4б они показаны штриховыми линиями. Как видно, теория Уизема весьма хорошо описывает дисперсионную ударную волну уже при не слишком большом значении $t = 15$,

причём можно убедиться, что точность возрастает с увеличением t . При этом теория Уизема правильно предсказывает значение волнового числа, соответствующего малоамплитудной границе ДУВ.

8. Опрокидывание волны с параболическим профилем

В разделе 7 мы рассмотрели простейшую задачу Гуревича – Питаевского о формировании ДУВ из весьма специфического начального профиля — скачкообразного разрыва. Хотя к этому идеализированному случаю можно свести некоторые интересные задачи, в частности задачу о генерации ДУВ при обтекании препятствия [37, 38], тем не менее он далёк от типичных картин опрокидывания волны. Как известно (см., например, [22, § 101]), имеются два основных сценария опрокидывания простой волны. В первом сценарии волна распространяется в неподвижную среду и в момент опрокидывания распределение волнового возмущения приобретает вертикальную касательную на границе с неподвижной средой. Тогда в наиболее типичном случае обращение амплитуды волны в нуль происходит по корневому закону. Во втором, более общем, сценарии опрокидывание происходит вследствие эволюции распределения, имеющего точку перегиба: в момент опрокидывания этот профиль в бездисперсионном приближении также приобретает в точке перегиба вертикальную касательную и в типичных ситуациях может быть представлен кубической параболой. В этом разделе мы рассмотрим первый сценарий опрокидывания волны, а в разделе 9 обратимся ко второму.

Итак, мы предполагаем, что в момент опрокидывания $t = 0$ амплитуда импульса обращается в нуль по корневому закону,

$$u_0(x) = u(x, 0) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \tag{95}$$

причём с помощью преобразования Галилея и масштабного преобразования мы можем привести $x|_{t=0} \propto -u^2$ к указанному здесь простому безразмерному виду. Решение уравнения Хопфа с начальным условием (95) выражается в виде (см. (11))

$$x - 6ut = -u^2, \tag{96}$$

т.е. это решение имеет область многозначности при $0 < x < 9t^2$ после момента опрокидывания $t > 0$. Согласно теории Гуревича – Питаевского при учёте дисперсионных эффектов вместо этой области многозначности возникнет ДУВ, занимающая область $x_L \leq x \leq x_R$. На своём малоамплитудном заднем крае x_L ДУВ сшивается с решением (96) (см. (84)),

$$w_3|_{r_1=r_2} = -u^2, \quad u = r_3^L. \tag{97}$$

Отсюда следует, что мы должны искать решение (64) с функциями w_i , квадратичными по римановым инвариантам в пределе $m \rightarrow 0$. Скорости такого типа со степенными зависимостями от римановых инвариантов при $m \rightarrow 0$ возникают при использовании производящей функции (74), и необходимая нам квадратичная зависимость соответствует коэффициенту с $W^{(2)}(r_1, r_2, r_3)$ при

r^{-2} . Таким образом, мы берём в качестве $w_i(r)$ функции (68) с $W = W^{(2)}$, которые ввиду линейности уравнений Эйлера – Пуассона можно умножить на произвольный постоянный множитель C :

$$w_i = C \left(1 - \frac{L}{\partial_i L} \partial_i \right) W^{(2)}(r_1, r_2, r_3),$$

$$W^{(2)}(r_1, r_2, r_3) = 2\sigma_2 - \frac{3}{2} \sigma_1^2, \tag{98}$$

$$\sigma_2 = r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1, \quad \sigma_1 = r_1 + r_2 + r_3.$$

Конкретное значение C определяется условием сшивания с гладким решением на малоамплитудном крае ДУВ, где $r_3 = u_L$. При этом на переднем солитонном крае x_R средняя амплитуда обращается в нуль, и это условие даёт $r_1 = 0$ и $r_2 = r_3$. Поэтому мы удовлетворим граничным условиям задачи, если возьмём $r_1 \equiv 0$ и подберём постоянную C так, чтобы выполнялось условие (97). Вычисление w_3 при $m \rightarrow 0$ даёт $w_3 = -(15/2)Cr_3^2$, так что из условия сшивания следует, что $C = 2/15$. В результате мы приходим к окончательным формулам для решения уравнений Уизема [25, 30]:

$$x - v_2 t = \frac{2}{15} \left[W + \left(\frac{1}{2} v_2 - \sigma_1 \right) \frac{\partial W}{\partial r_2} \right],$$

$$x - v_3 t = \frac{2}{15} \left[W + \left(\frac{1}{2} v_3 - \sigma_1 \right) \frac{\partial W}{\partial r_3} \right], \tag{99}$$

где $W = 2r_2 r_3 - (3/2)(r_2 + r_3)^2$, $\sigma_1 = r_2 + r_3$.

На малоамплитудном крае эти уравнения сводятся к

$$x_L + 6r_3^L t = \frac{1}{3}(r_3^L)^2, \quad x_L - 6r_3^L t = -(r_3^L)^2,$$

откуда сразу следует параметрическое представление $x_L = -(1/3)(r^L)^2$, $t = (1/9)r^L$, для закона движения этого края, так что исключение r^L приводит к

$$x_L = -27t^2. \tag{100}$$

На солитонном крае при $r_2 = r_3$ оба уравнения (99) стремятся к одному и тому же пределу $x_R - 4r_3 t = -(8/15)r_3^2$, значение r_3^R определяется максимальным значением x в области ДУВ, откуда $r_3^R = 15t/4$ и

$$x_R = \frac{15}{2} t^2. \tag{101}$$

Это закон движения переднего солитонного края.

Из полученных формул следует, что мы пришли к автомодельному решению уравнений Уизема (см. (86)) с $\gamma = 1$, где римановы инварианты имеют вид

$$r_1 = R_1 \equiv 0, \quad r_2 = tR_2(z), \quad r_3 = tR_3(z) \tag{102}$$

с автомодельной переменной $z = x/t^2$. Зависимость римановых инвариантов R_i от z показана на рис. 5а. Ясно, что R_3 сшивается с решением уравнения Хопфа, показанным на этом рисунке штриховой линией. Подстановка найденных r_2, r_3 вместе с $r_1 = 0$ в уравнения (61) даёт параметрическую форму функции $u(x, t)$ от координат и времени в области ДУВ. Пример такой зависимости $u(x, t)$ в фиксированный момент времени t приведён на рис. 5б.

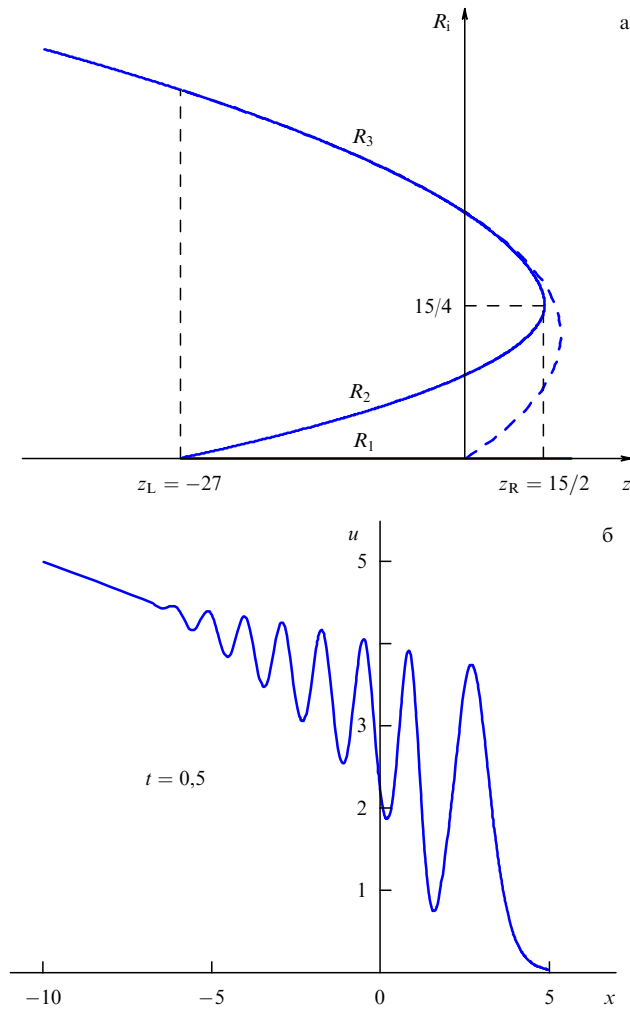


Рис. 5. (а) Римановы инварианты в задаче об опрокидывании импульса с параболическим профилем. Штриховой линией показано соответствующее решение $z - 6R = -R^2$ уравнения Хопфа. (б) Эволюция импульса с начальным профилем (95) согласно теории Гуревича – Питаевского для уравнения КдФ.

9. Опрокидывание кубического профиля

Как ранее было указано, типичное опрокидывание волны происходит тогда, когда начальный профиль волны имеет точку перегиба и в бездисперсионном пределе решение уравнения Хопфа приобретает в некоторый момент вертикальную касательную. Поскольку эта точка опрокидывания остаётся точкой перегиба, вторая производная профиля в ней также обращается в нуль. Предполагая, что третья производная профиля в этой точке не равна нулю, а также выбирая начало координат в точке опрокидывания и начало отсчёта времени в момент опрокидывания, мы можем аппроксимировать профиль вблизи точки перегиба кубической параболой. В результате приходим к решению бездисперсионного уравнения Хопфа, соответствующего начальному условию $\bar{x}(u) = -u^3$ при $t = 0$, в виде

$$x - 6ut = -u^3. \tag{103}$$

Из приведённых рассуждений ясно, что такое распределение в момент опрокидывания является наиболее типичным, и здесь мы обсудим эволюцию соответствующей

шей ДУВ. Основные черты этого решения исследованы в [1], а точное аналитическое решение получено в [39].

Для решения задачи заметим, что скорости $w_i(r)$ из (68), соответствующие третьему члену $W = W^{(3)}$ в разложении производящей функции (74), имеют в конечных точках с $m = 0$ и $m = 1$ кубическую зависимость от r_i . С помощью формулы (см. (67))

$$w_i = \left(1 - \frac{L}{\partial_i L} \partial_i\right) W^{(3)}(r_1, r_2, r_3), \tag{104}$$

где

$$W^{(3)}(r_1, r_2, r_3) = -\frac{5}{4} \sigma_1^3 + 3\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_3 \tag{105}$$

и σ_i являются коэффициентами многочлена (70), легко вычислить

$$w_3 = -\frac{35}{4} r_3^3 \text{ при } m \rightarrow 0, \tag{106}$$

$$w_1 = -\frac{35}{4} r_1^3 \text{ при } m \rightarrow 1.$$

Умножив w_i на $-4/35$, мы удовлетворяем граничным условиям сшивания ДУВ на её краях с гладким бездисперсионным решением (103) и находим решение уравнений Уизема (57) в виде

$$x - 6v_i(r_1, r_2, r_3) t = \frac{4}{35} w_i(r_1, r_2, r_3), \quad i = 1, 2, 3, \tag{107}$$

где функции w_i , $i = 1, 2, 3$, определяются уравнениями (104), (105). Величины v_i и w_i можно выразить, хотя и в несколько громоздком виде, через эллиптические интегралы как функции от римановых инвариантов (явные формулы представлены ниже в автомоделном виде, см. (134)–(136)). Поэтому система (107) позволяет найти r_i как функции от x и t . До перехода к автомоделному виду мы рассмотрим характерные свойства полученного решения.

На малоамплитудном крае имеем $r_1 = r_2$ ($m = 0$) и уравнение (107) с $i = 3$ превращается в

$$x - 6r_3 t = -r_3^3 \text{ при } r_1 = r_2. \tag{108}$$

Аналогичным образом, на солитонном крае имеем $r_2 = r_3$ и уравнение (107) с $i = 1$ превращается в

$$x - 6r_1 t = -r_1^3 \text{ при } r_2 = r_3. \tag{109}$$

Следовательно, как и должно быть, эти римановы инварианты сшиваются на краях ДУВ с гладким решением:

$$r_3 = u \text{ при } r_1 = r_2, \tag{110}$$

$$r_1 = u \text{ при } r_2 = r_3,$$

где u — решение (103) уравнения Хопфа. В окрестности заднего малоамплитудного края вводим локальную координату x' ,

$$x = x_L + x', \tag{111}$$

и малые отклонения r'_i римановых инвариантов от их предельных значений,

$$r_1 = r_1^L + r'_1, \quad r_2 = r_1^L + r'_2, \quad r_3 = r_3^L + r'_3. \tag{112}$$

Разложение уравнений (107) по степеням r'_i в фиксированный момент t даются выражениями

$$\begin{aligned} x^L + x' - (12r_1 - 6r_3)t - (9r'_1 + 3r'_2 - 6r'_3)t &= \\ &= \frac{1}{5}(-16r_1^3 + 8r_1^2r_3 + 2r_1r_3^2 + r_3^3) - \\ &- \frac{3}{10}(24r_1^2 - 8r_1r_3 - r_3^2)r'_1 - \frac{1}{10}(24r_1^2 - 8r_1r_3 - r_3^2)r'_2 + \\ &+ \frac{1}{5}(8r_1^2 + 4r_1r_3 + 3r_3^2)r'_3, \\ x^L + x' - (12r_1 - 6r_3)t - (3r'_1 + 9r'_2 - 6r'_3)t &= \\ &= \frac{1}{5}(-16r_1^3 + 8r_1^2r_3 + 2r_1r_3^2 + r_3^3) - \\ &- \frac{1}{10}(24r_1^2 - 8r_1r_3 - r_3^2)r'_1 - \frac{3}{10}(24r_1^2 - 8r_1r_3 - r_3^2)r'_2 + \\ &+ \frac{1}{5}(8r_1^2 + 4r_1r_3 + 3r_3^2)r'_3, \\ x^L + x' - 6r_3t - 6r'_3t &= -r_3^3 - 3r_3^2r'_3, \end{aligned} \quad (113)$$

где мы ввели временные обозначения $r_1 \equiv r_1^L$, $r_3 \equiv r_3^L$. Вычитая второе уравнение из первого, получим соотношение

$$t = \frac{1}{30}(24r_1^2 - 8r_1r_3 - r_3^2). \quad (114)$$

Отсюда следует, что коэффициенты перед r'_1 и r'_2 в первых двух уравнениях (113) равны нулю и поэтому x' является квадратичной функцией от r'_1, r'_2 :

$$x' \propto r_1'^2, r_2'^2, r_3'.$$

В точке x^L эти два уравнения дают

$$x^L - (12r_1 - 6r_3)t = \frac{1}{5}(-16r_1^3 + 8r_1^2r_3 + 2r_1r_3^2 + r_3^3), \quad (115)$$

а третье уравнение (113) сводится, как отмечалось, к решению $x^L - 6r_3t = -r_3^3$ уравнения Хопфа. Отсюда мы можем найти закон движения заднего края. После вычитания уравнения (108) с $x = x^L$ из (115) и деления затем результата на $(r_1 - r_3)$ получим соотношение

$$t = \frac{1}{30}(8r_1^2 + 4r_1r_3 + 3r_3^2),$$

сопоставляя которое с (114), определяем связь между значениями римановых инвариантов на заднем крае:

$$r_1^L = r_2^L = -\frac{1}{4}r_3^L. \quad (116)$$

Тогда из уравнений (114) и (108) находим

$$t = \frac{1}{12}(r_3^L)^2, \quad x^L = -\frac{1}{2}(r_3^L)^3, \quad (117)$$

так что малоамплитудный край движется по закону

$$x^L = -12\sqrt{3}t^{3/2}. \quad (118)$$

Амплитуда колебаний здесь стремится к нулю как

$$a = r_2 - r_1 \simeq 2r_2' \propto \sqrt{x'}, \quad (119)$$

Вблизи переднего солитонного фронта вводим малые величины

$$x = x^R - x'', \quad x'' > 0, \quad (120)$$

$$r_1 = r_1^R + r_1'', \quad r_2 = r_3^R + r_2'', \quad r_3 = r_3^R + r_3''. \quad (121)$$

Разложения уравнений (73) с учётом только главных поправок имеют вид

$$\begin{aligned} x^R - x'' - 6r_1t + \frac{8(r_3 - r_1)}{\ln[16/(1-m)]}t &= \\ &= -r_1^3 + \frac{4}{35}(15r_1^2 + 12r_1r_3 + 8r_3^2) \frac{r_3 - r_1}{\ln[16/(1-m)]}, \\ x^R - x'' - (2r_1 + 4r_3)t + 2 \ln\left(\frac{16}{1-m}\right)(r_3'' - r_2'')t &= \\ &= -\frac{1}{35}(5r_1^3 + 6r_1^2r_3 + 8r_1r_3^2 + 16r_3^3) + \\ &+ \frac{1}{35}(3r_1^2 + 8r_1r_3 + 24r_3^2) \ln\left(\frac{16}{1-m}\right)(r_3'' - r_2''), \\ x^R - x'' - (2r_1 + 4r_3)t - 2 \ln\left(\frac{16}{1-m}\right)(r_3'' - r_2'')t &= \\ &= -\frac{1}{35}(5r_1^3 + 6r_1^2r_3 + 8r_1r_3^2 + 16r_3^3) - \\ &- \frac{1}{35}(3r_1^2 + 8r_1r_3 + 24r_3^2) \ln\left(\frac{16}{1-m}\right)(r_3'' - r_2''), \end{aligned} \quad (122)$$

где $1 - m = (r_3'' - r_2'')/(r_3 - r_1)$ и мы снова временно ввели обозначения $r_1 \equiv r_1^R$ и $r_3 \equiv r_3^R$. Вычитая третье уравнение в (122) из второго, получим соотношение

$$t = \frac{1}{70}(3r_1^2 + 8r_1r_3 + 24r_3^2), \quad (123)$$

которое вместе с главным приближением уравнений (122),

$$x^R - 6r_1t = -r_1^3, \quad (124)$$

$$x^R - (2r_1 + 4r_3)t = -\frac{1}{35}(5r_1^3 + 6r_1^2r_3 + 8r_1r_3^2 + 16r_3^3),$$

определяет закон движения переднего края. В самом деле, разность уравнений (124) даёт другое соотношение:

$$t = \frac{1}{70}(15r_1^2 + 12r_1r_3 + 8r_3^2), \quad (125)$$

сравнение которого с (123) приводит к

$$r_3^R = -\frac{3}{4}r_1^R, \quad r_1^R < 0, \quad (126)$$

так что

$$t = \frac{3}{20}(r_1^R)^2, \quad x^R = \frac{1}{10}|r_1^R|^3 \quad (127)$$

и солитонный край движется по закону

$$x^R = \frac{4}{9}\sqrt{15}t^{3/2}. \quad (128)$$

Расстояние между солитонами на переднем крае зависит от x'' как

$$L \propto \ln \frac{1}{|x''|}. \quad (129)$$

Полученное решение, которое можно записать в авто-модельном виде:

$$r_i = t^{1/2} R_i \left(\frac{x}{t^{3/2}} \right), \quad (130)$$

является решением уравнений (87) с $\gamma = 1/2$:

$$\frac{dR_i}{dz} = \frac{R_i}{3z - v_i(R)}, \quad z = \frac{x}{t^{3/2}}. \quad (131)$$

Из найденных выше соотношений легко определить граничные значения переменных R_i . На заднем малоамплитудном крае ДУВ имеем $z^L = x^L/t^{3/2} = -12\sqrt{3}$ и

$$R_1^L = R_2^L = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad R_3^L = 2\sqrt{3}, \quad (132)$$

а на переднем солитонном — $z^R = 4\sqrt{15}/9$ и

$$R_1^R = -\frac{2}{3}\sqrt{15}, \quad R_2^R = R_3^R = \frac{1}{2}\sqrt{15}. \quad (133)$$

Глобальная зависимость R_i от z определяется неявно выражениями

$$z = 6v_1 - w_1, \quad z = 6v_2 - w_2, \quad z = 6v_3 - w_3, \quad (134)$$

где

$$\begin{aligned} v_1 &= 2(R_1 + R_2 + R_3) + \frac{4(R_2 - R_1)K(m)}{E(m) - K(m)}, \\ v_2 &= 2(R_1 + R_2 + R_3) - \frac{4(R_2 - R_1)(1 - m)K(m)}{E(m) - (1 - m)K(m)}, \\ v_3 &= 2(R_1 + R_2 + R_3) + \frac{4(R_3 - R_1)(1 - m)K(m)}{E(m)} \end{aligned} \quad (135)$$

с $m = (R_2 - R_1)/(R_3 - R_1)$; функции $w_i(R_1, R_2, R_3)$ имеют вид

$$w_i = W + \left(\frac{1}{2} v_i - R_1 - R_2 - R_3 \right) \frac{\partial W}{\partial R_i}, \quad (136)$$

где

$$\begin{aligned} W &= \frac{4}{35} \left[-\frac{5}{4} (R_1 + R_2 + R_3)^3 + 3(R_1 + R_2 + R_3) \times \right. \\ &\quad \left. \times (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) - 2R_1 R_2 R_3 \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, из алгебраической системы уравнений (134) мы можем найти зависимость инвариантов R_i от z [39]. Эта зависимость показана на рис. 6а, где штриховой линией изображена кубическая кривая $z = 6R - R^3$, сшивающаяся с римановыми инвариантами R_3 и R_1 в точках z^L и z^R соответственно. Когда зависимости инвариантов $r_i = t^{1/2} R_i(x/t^{3/2})$ от автомодельной переменной найдены, их подстановка в (61) даёт описание ДУВ, образующейся в окрестности точки опрокидывания благодаря дисперсионным эффектам. График этой ДУВ показан на рис. 6б. Рассматриваемое здесь автомодельное решение справедливо до тех пор, пока гладкая часть решения с достаточной точностью описывается кубической кривой (103).

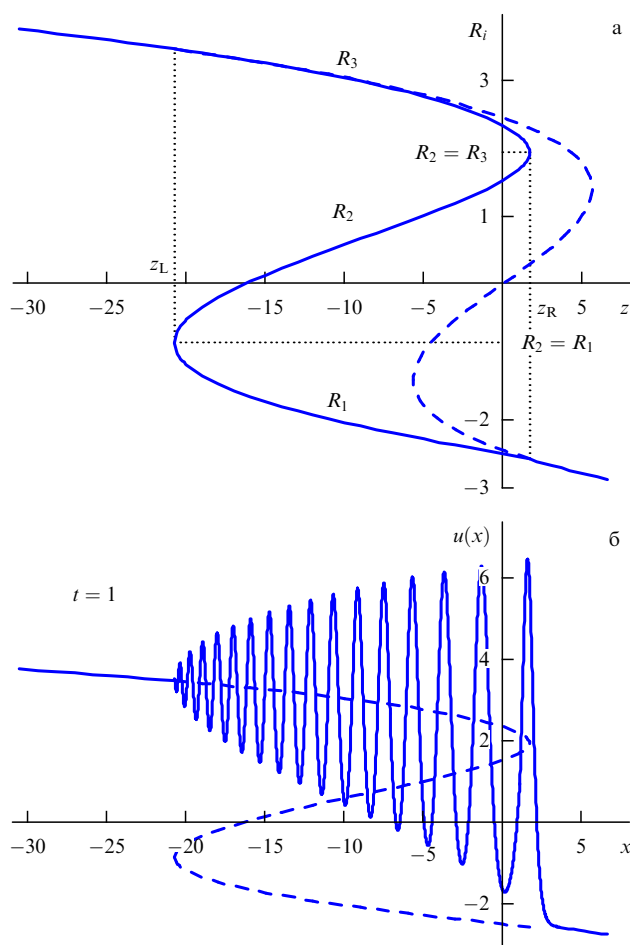


Рис. 6. (а) Римановы инварианты в задаче об опрокидывании импульса с кубическим профилем. Зависимость $R_i = r_i/t^{1/2}$ от $z = x/t^{3/2}$ определяется уравнениями (134). Штриховой линией показано соответствующее решение $z - 6R = -R^3$ уравнения Хопфа. (б) Эволюция импульса с начальным кубическим профилем согласно приближению Уизема для уравнения КдФ. Штриховой линией показана зависимость римановых инвариантов от координаты x . Время эволюции $t = 1$.

10. Движение краёв дисперсионных ударных волн

Найденные в разделах 8, 9 решения дают представление о характере эволюции ДУВ на стадии, не слишком удалённой от момента опрокидывания волны, когда гладкая часть решения ещё остаётся монотонной функцией координат, достаточно близкой к параболе или кубической параболе. Однако на практике импульсы имеют обычно конечную протяжённость, и поэтому возникает вопрос о форме ДУВ на той стадии, на которой её полная длина сравнима с начальной длиной импульса или много её больше. Метод годографа, изложенный в разделе 5, позволяет получить решение такой задачи [25–29, 32, 34, 35] в форме решения системы уравнений Эйлера–Пуассона (73). Однако эта форма решения довольно сложна и даже очень аккуратное количественное описание процесса не даёт интуитивно прозрачной картины явления. Поэтому мы не будем здесь входить в детали этой теории, а остановимся на более простом подходе [25, 40], который легко приводит к простым формулам для основных параметров ДУВ и,

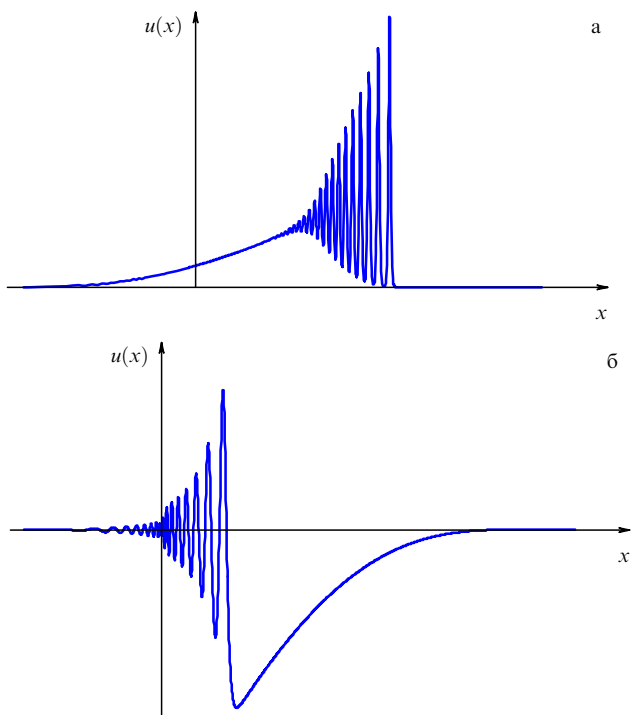


Рис. 7. (а) Эволюция начального "положительного" импульса. (б) Эволюция начального "отрицательного" импульса.

кроме того, допускает обобщение для довольно широкого класса других нелинейных волновых уравнений.

Прежде всего заметим, что следует различать "положительные" и "отрицательные" импульсы с начальными распределениями $u_0(x) > 0$ и $u_0(x) < 0$ соответственно, которые имеют качественно различное поведение и должны рассматриваться по отдельности. Представление об их эволюции можно получить из рис. 7, где показаны результаты численного решения уравнения КдФ с подходящими начальными данными.

В случае положительного импульса опрокидывание происходит на переднем фронте и лидирующая часть ДУВ состоит из последовательности солитонов (62), движущихся по нулевому фону, тогда как задний малоамплитудный край сшивается с гладким решением и распространяется по неоднородному фону. Здесь следует учесть, что в случае локализованного начального импульса $u_0(x)$ с единственным максимумом u_m при $x = x_m$ в распределении (рис. 8а) обратная функция состоит из двух ветвей, $\bar{x}_1(u)$ и $\bar{x}_2(u)$ (рис. 8б), так что бездисперсионное решение даётся двумя формулами (11), для каждой ветви по отдельности.

На начальной стадии эволюции ДУВ её малоамплитудный край сшивается с решением, соответствующим ветви $\bar{x}_1(u)$, и в точке сшивания x_L имеем

$$x_L - but = \bar{x}_1(u). \tag{137}$$

С другой стороны, в этой же точке римановы инварианты r_1, r_2 равны нулю, а $r_3 = u$ (рис. 9а), длина волны (59) превращается в $L = \pi/\sqrt{u}$, чему соответствует волновое число $k = 2\sqrt{u}$, и скорость движения этой точки, определяемая групповой скоростью линейной волны на фоне u , оказывается равной $v_g = 6u - 3k^2 = -6u$. Таким образом, вдоль пути малоамплитудного края $dx_L + 6u dt = 0$

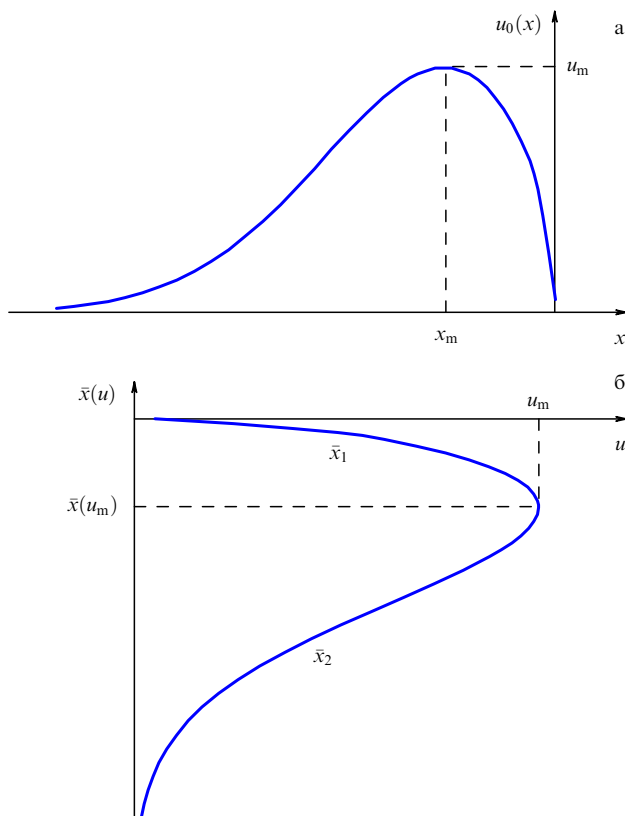


Рис. 8. (а) Начальный профиль "положительного" импульса. (б) Обратная функция $\bar{x}(u)$, состоящая из двух ветвей: $\bar{x}_1(u)$ и $\bar{x}_2(u)$.

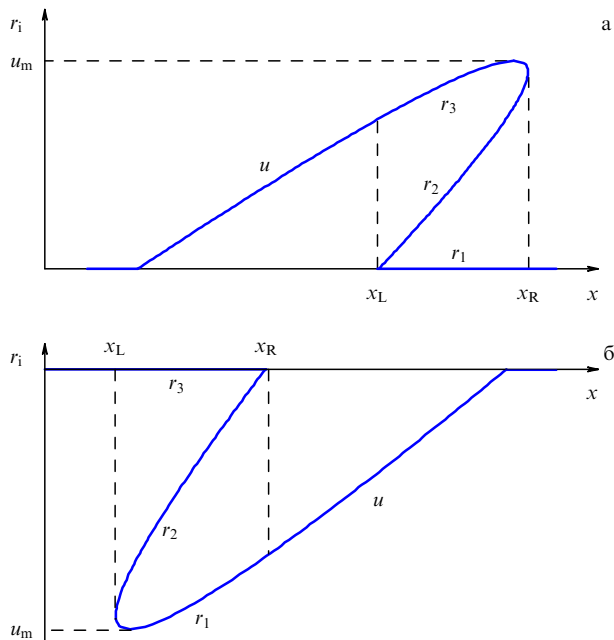


Рис. 9. (а) Диаграмма римановых инвариантов для "положительного" импульса. (б) Диаграмма римановых инвариантов для "отрицательного" импульса.

и условие согласования уравнения (137) с уравнением

$$\frac{dx_L}{du} + 6u \frac{dt}{du} = 0 \tag{138}$$

приводит к дифференциальному уравнению

$$2u \frac{dt}{du} + t = -\frac{1}{6} \frac{d\bar{x}_1}{du}, \quad (139)$$

которое легко решается с начальным условием $t(0) = 0$, предполагающим, что опрокидывание волны происходит в нулевой момент на границе с "покоящейся" средой, где $u = 0$. В результате получаем

$$t(u) = \frac{1}{12\sqrt{u}} \int_{\bar{x}_1(u)}^0 \frac{dx}{\sqrt{u_0(x)}}, \quad (140)$$

и подстановка этого выражения в (137) даёт закон движения малоамплитудного края в параметрическом виде:

$$x_L(u) = \bar{x}_1(u) + \frac{\sqrt{u}}{2} \int_{\bar{x}_1(u)}^0 \frac{dx}{\sqrt{u_0(x)}}. \quad (141)$$

Легко проверить, что эти формулы воспроизводят закон (100) для параболического начального профиля $u_0(x) = \sqrt{-x}$ с единственной ветвью обратной функции $\bar{x}_1(u) = -u^2$.

В случае локализованного начального импульса полученное решение справедливо до момента

$$t_m = \frac{1}{12\sqrt{u_m}} \int_{x_m}^0 \frac{dx}{\sqrt{u_0(x)}}, \quad (142)$$

когда малоамплитудный край достигает точки максимального значения амплитуды u_m . После этого мы должны решать уравнение (139) с заменой $\bar{x}_1(u) \rightarrow \bar{x}_2(u)$ и начальным условием $t(u_m) = t_m$. В результате получаем закон движения малоамплитудного края в параметрическом виде:

$$t(u) = \frac{1}{12\sqrt{u}} \int_{\bar{x}_2(u)}^0 \frac{dx}{\sqrt{u_0(x)}}, \quad (143)$$

$$x_L(u) = \bar{x}_2(u) + \frac{\sqrt{u}}{2} \int_{\bar{x}_2(u)}^0 \frac{dx}{\sqrt{u_0(x)}},$$

где под $u_0(x)$ понимается полный начальный профиль импульса, обращающийся в нуль при $x = 0$ и стремящийся к нулю при $x \rightarrow -\infty$. Если начальный импульс обращается в нуль на заднем крае при $x = -l \equiv \bar{x}_2(0)$, то при $t \rightarrow \infty$ очевидно, что $t \approx \mathcal{A}/(12\sqrt{u})$, где $\mathcal{A} = \int_{-l}^0 dx/\sqrt{u_0(x)}$, и закон движения заднего края приобретает асимптотический вид:

$$x_L \approx -l + \frac{\mathcal{A}^2}{24t}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (144)$$

Нетрудно найти также асимптотическую форму закона движения переднего солитонного края ДУВ. Из рисунка 9а для римановых инвариантов ясно, что при $t \rightarrow \infty$ графики $r_2(x)$ и $r_3(x)$ вытягиваются в длинный "язык" и вблизи переднего края $r_1 = 0$, $r_2 \approx r_3 \approx u_m$. Поэтому передний край движется с солитонной скоростью $V_s \approx 4u_m$ и

$$x_R \approx 4u_m t. \quad (145)$$

Если обратиться к вопросу об эволюции отрицательного начального импульса, то в этом случае, согласно

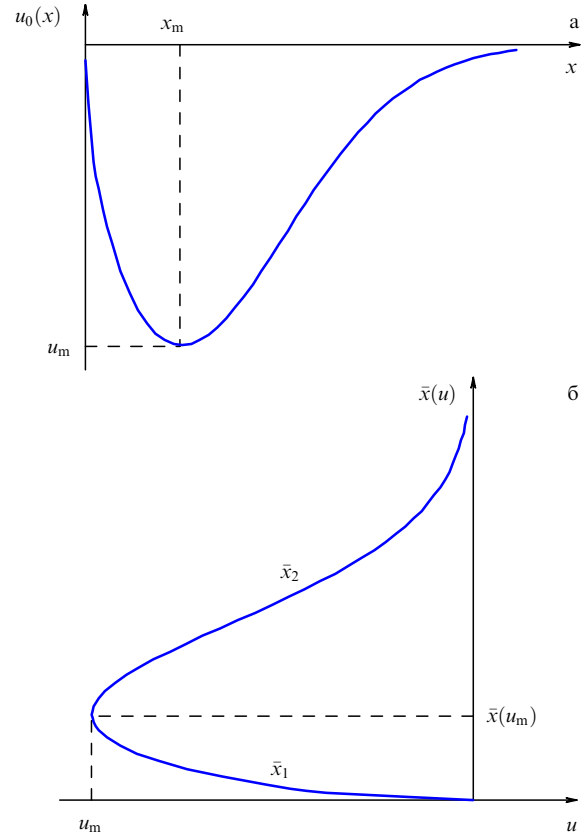


Рис. 10. (а) Начальный профиль "отрицательного" импульса. (б) Обратная функция $\bar{x}(u)$, состоящая из двух ветвей: $\bar{x}_1(u)$ и $\bar{x}_2(u)$.

рис. 7б, с гладким бездисперсионным решением граничит солитонный край ДУВ, который распространяется, следовательно, по неоднородному фону. На этой границе римановы инварианты (рис. 9б) $r_1 = u$, $r_2 = r_3 = 0$, так что скорость солитонного края, согласно (79), $V_s = 2u$ или $dx_R = 2u dt$. Поэтому вдоль пути солитонного края уравнение

$$\frac{dx_R}{du} - 2u \frac{dt}{du} = 0 \quad (146)$$

снова должно быть согласовано с бездисперсионным решением

$$x_R - 6ut = \bar{x}_i(u), \quad i = 1, 2, \quad (147)$$

если край граничит с i -й ветвью этого решения. Исключая x_R , получаем дифференциальное уравнение для $t = t(u)$:

$$2u \frac{dt}{du} + 3t = -\frac{1}{2} \bar{x}'_i(u), \quad (148)$$

где $\bar{x}_i(u)$ — соответствующая ветвь обратной функции начального распределения (рис. 10). Для ветви $i = 1$ решение ищется с начальным условием $t(0) = 0$, что даёт параметрическую форму движения солитонного края:

$$t(u) = \frac{1}{4(-u)^{3/2}} \int_0^u \sqrt{-u} \bar{x}'_1(u) du, \quad (149)$$

$$x_R = -\frac{3}{2\sqrt{-u}} \int_0^u \sqrt{-u} \bar{x}'_1(u) du + \bar{x}_1(u).$$

Например, в случае параболического начального импульса $u_0(x) = -\sqrt{x}$, $\bar{x}_1(u) = u^2$, $x > 0$, получаем отсюда закон движения $x_R = -5t^2$.

Решая уравнение (148) с начальным условием

$$t(u_m) = \frac{1}{4(-u_m)^{3/2}} \int_0^{u_m} \sqrt{-u} \bar{x}'_1(u) du$$

для локализованного начального импульса, имеющего минимум $u = u_m$ при $x = x_m$, приходим к закону движения

$$t(u) = \frac{1}{4(-u)^{3/2}} \int_0^{x_2(u)} \sqrt{-u_0(x)} dx, \quad (150)$$

$$x_R = x_2(u) - \frac{3}{2\sqrt{-u}} \int_0^{x_2(u)} \sqrt{-u_0(x)} dx.$$

Отрицательных солитонов в случае уравнения КдФ не существует, и поэтому отрицательный импульс не может при асимптотически больших временах распастись в последовательность солитонов. Вместо этого он трансформируется в нелинейный волновой пакет, солитонный край которого при $t \rightarrow \infty$ движется по закону

$$x_R \approx -\frac{3A^{2/3}}{2^{1/3}} t^{1/3}, \quad A = \int_0^\infty \sqrt{-u_0(x)} dx, \quad (151)$$

сшиваясь с практически прямолинейным асимптотическим бездисперсионным решением $u \approx x/(6t)$ при $x_R < x < 0$. Соответственно, амплитуда ведущего солитона в ДУВ убывает со временем как

$$a = 2|r_1| \approx \frac{A^{2/3}}{2^{4/3}} t^{-2/3}. \quad (152)$$

Вблизи этого края решения уравнений Уизема являются автомодельными и зависят от переменной $z = x/t^{1/3}$. Хотя это решение может быть получено в аналитическом виде [41, 42], область автомодельности относительно мала и мы не будем останавливаться здесь на этой теории. Решение уравнений Уизема во всей области ДУВ получено в [29, 42]. При переходе к малоамплитудному краю эволюция ДУВ снова становится автомодельной с зависимостью модуляционных параметров от $z = x/t$. Асимптотический закон движения малоамплитудного края мы получим, заметив, что, согласно рис. 9б, на этом крае $r_1 \approx r_2 \approx u_m$, $r_3 = 0$, т.е. из (59) находим волновое число $k = 2\pi/L \approx 2\sqrt{-u_m}$. Следовательно, в точке сшивания групповая скорость линейной волны $v_g = -3k^2 = 12u_m$ и

$$x_L \approx 12u_m t. \quad (153)$$

11. Теорема о числе осцилляций в дисперсионных ударных волнах

В работе [43] приведена важная теорема, утверждающая, что вследствие различия между скоростью малоамплитудного края v_g и фазовой скоростью волны V длина ДУВ за время dt на этом крае увеличивается на $(v_g - V) dt$, поэтому число периодов волны в области осцилляций возрастает со скоростью

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2\pi} k(v_g - V), \quad (154)$$

где все величины вычисляются при значении волнового числа в ДУВ на её малоамплитудном крае. Выражение в правой части (154) можно также интерпретировать как величину потока числа волн $\omega = kV$ в область ДУВ с учётом сдвига Доплера из-за движения границы со скоростью v_g . Поэтому полное число колебаний, вошедших в ДУВ за всё время её эволюции, с точностью до знака выражается как

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(v_g - V) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(k \frac{d\omega}{dk} - \omega \right) dk. \quad (155)$$

Здесь подынтегральное выражение можно интерпретировать как лагранжиан классической частицы с импульсом k и гамильтонианом ω , которая ассоциирована с волновым пакетом, движущимся вместе с малоамплитудным краем ДУВ. Тогда интеграл равен классическому действию S такой частицы и число осцилляций

$$N = \frac{S}{2\pi}. \quad (156)$$

Ясно, что эти формулы носят общий характер и являются справедливыми не только для уравнения КдФ.

Для фактического расчёта должны быть известны основные характеристики ДУВ хотя бы на её малоамплитудном крае. Например, в случае уравнения КдФ легко находим $|k(v_g - V)| = 2k^3$ и для эволюции ступеньки с единичной амплитудой, как показано в разделе 7, волновое число на малоамплитудном крае $k = 2$. Отсюда находим число осцилляций, образовавшихся в ДУВ за время t : $N = (8/\pi)t$. Для времени $t = 15$ эта формула предсказывает значение $N \approx 38$, тогда как подсчёт числа осцилляций на рис. 4б, полученном в результате численного решения уравнения КдФ, даёт примерно $N \approx 39$ в хорошем согласии с теорией. Согласие с этим асимптотическим подсчётом ухудшается, однако, при меньших временах. Например, в случае опрокидывания кубического профиля значения римановых инвариантов на малоамплитудном крае, согласно формулам (116), $r_3 = u$, $r_1 = r_2 = -u/4$, где u — амплитуда волны в точке сшивания, зависящая от времени как $u = \sqrt{12}t$ (см. (116)). Подстановка в (59) даёт длину волны $L = 2\pi/\sqrt{5}u$ и волновое число $k = \sqrt{5}u = \sqrt{10} \times 3^{1/4} t^{1/4}$. В результате для числа осцилляций, образовавшихся к моменту t , получаем

$$N = \frac{40\sqrt{10} \times 3^{3/4}}{7\pi} t^{7/4} \approx 13,1 \times t^{7/4}.$$

Для $t = 1$ число осцилляций $N \approx 13$ несколько отличается от числа осцилляций $N \approx 15 - 16$, различимых на рис. 6б, тем не менее согласие может считаться удовлетворительным для столь небольшого времени эволюции.

Если мы имеем дело с положительным импульсом конечной длительности, то в основном он эволюционирует в итоге в последовательность солитонов, распространяющихся по нулевому фону $u = r_1 = 0$. Групповая скорость малоамплитудного края, являющаяся в теории Уизема гидродинамической величиной, имеет в этом случае смысл скорости границы, отделяющей колебания, превращающиеся при $t \rightarrow \infty$ в солитоны, от линейного волнового пакета. Число солитонов, образовавшихся из локализованного импульса, определяется начальным профилем $u_0(x)$, и оно может быть вычислено следующим образом.

На малоамплитудном крае $k = 2\sqrt{u}$ и $k(v_g - V) = -2k^3 = -16u^{3/2}$. Интегрирование по t от 0 до t_m можно с помощью (139) и (140) заменить интегрированием по u от 0 до u_m , и аналогичным образом интегрирование от t_m до $+\infty$ с помощью (143) преобразуется в интегрирование по тому же интервалу u . В результате получаем

$$N = \frac{4}{\pi} \int_0^{u_m} \left[t_2 - t_1 + \frac{1}{6}(\bar{x}'_2 - \bar{x}'_1) \right] du, \quad (157)$$

где

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{12\sqrt{u}} \int_u^{u_m} \frac{\bar{x}'_2 - \bar{x}'_1}{\sqrt{u_1}} du_1. \quad (158)$$

Двойной интеграл, возникающий при подстановке (158) в (157), легко превращается в однократный посредством интегрирования по частям, в результате приходим к формуле

$$N = \frac{1}{\pi} \int_0^{u_m} \sqrt{u} (\bar{x}'_2 - \bar{x}'_1) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \sqrt{u_0(x)} dx, \quad (159)$$

где, как обычно, $u_0(x)$ представляет собой начальный профиль волны. Впервые эта формула была выведена в работе [44] с использованием глубоких математических свойств уравнения КдФ, связанных с его полной интегрируемостью [24]. В нашем изложении она является простым следствием подхода Гуревича–Питаевского к теории ДУВ.

12. Теория дисперсионных ударных волн для уравнения Кортевега–де Фриза с диссипацией

Во введении мы обсудили развитие идеи о ДУВ от представления Сагдеева, состоящего в том, что дисперсионные эффекты превращают переходный слой вязкой ударной волны в стационарную волнообразную структуру, к представлению Гуревича–Питаевского о формировании нестационарных ДУВ в результате опрокидывания волны, причём эволюция параметров модуляции в ДУВ подчиняется уравнениям Уизема. Ясно, однако, что наличие малой диссипации или других возмущающих членов в уравнении КдФ также приводит к эволюции параметров модуляции, т.е. модуляционные уравнения Уизема требуют в этом случае соответствующей модификации. Тогда картина ДУВ, предложенная Сагдеевым, должна описываться стационарными решениями таких модифицированных уравнений Уизема, учитывающих помимо дисперсии малые диссипативные эффекты. В этом разделе мы обсудим такую модифицированную теорию Уизема и её простейшие следствия.

Предположим, что возмущённое уравнение КдФ имеет вид

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = R[u], \quad (160)$$

где возмущающий член является малым, $R \sim \varepsilon \ll 1$, и зависит как от поля u , так и от его пространственных производных. Вообще говоря, следует различать два типа возмущений. Для одного типа в уравнениях Уизема появляются правые части при прежней форме инвариантов Римана, тогда как возмущения второго типа приводят к недиагональному виду усреднённых

уравнений

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + \sum_j v_{ij} \frac{\partial r_j}{\partial x} = 0,$$

диагонализация которых, как отмечалось в разделе 4, обычно невозможна. Мы остановимся только на первом случае, к которому относятся физически важные задачи с малой диссипацией. Выводить возмущённые уравнения Уизема опять будем усреднением законов сохранения. При этом учтём, что закон сохранения числа волн (43) сохраняет свой вид, а законы сохранения (44) приобретают правые части:

$$u_t + (3u^2 + u_{xx})_x = R, \quad (161)$$

$$\left(\frac{1}{2} u^2 \right)_t + \left(2u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right)_x = uR.$$

Усреднённые уравнения

$$\langle u \rangle_t + \langle 3u^2 + u_{xx} \rangle_x = \langle R \rangle, \quad (162)$$

$$\left\langle \frac{1}{2} u^2 \right\rangle_t + \left\langle 2u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right\rangle_x = \langle uR \rangle$$

преобразуем точно так же, как и ранее, и вместо (49) получим уравнения

$$\frac{DW_A}{Dt} = \mathcal{W}_A \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{DW_B}{Dt} = \mathcal{W}_A \frac{\partial B}{\partial x} - \mathcal{W}_A \langle R \rangle, \quad (163)$$

$$\frac{DW_V}{Dt} = \mathcal{W}_A \frac{\partial A}{\partial x} - \mathcal{W}_A \langle uR \rangle,$$

которые отличаются от прежних уравнений лишь дополнительными членами, зависящими от возмущения. Переходя к переменным v_1, v_2, v_3 и вводя римановы инварианты (55) невозмущённых уравнений Уизема в качестве модуляционных параметров, находим желаемые уравнения Уизема с учётом возмущений:

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial r_i}{\partial x} = \frac{L}{\partial L / \partial r_i} \frac{\langle (\sigma_1 - 2r_i - u)R \rangle}{4 \prod_{j \neq i} (r_i - r_j)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (164)$$

где v_i — скорости Уизема (60) невозмущённых уравнений, $\sigma_1 = r_1 + r_2 + r_3$. В частном случае вязкости Бюргера возмущённые уравнения Уизема выведены в работах [43, 45], а для нелокальной вязкости — в [46]. В общем случае в форме (164) они выведены в [47–49].

Чтобы получить представление о роли малой диссипации, обратимся к задаче Гуревича–Питаевского о распаде начального разрыва. Как мы знаем из раздела 7, на начальном этапе эволюции диссипация несущественна и ДУВ расширяется автомодельным образом. Однако, когда её длина достигает размера порядка $\sim \varepsilon^{-1}$, все члены в уравнениях Уизема (164) становятся одинаково важными и следует ожидать перехода к стационарному режиму распространения, в котором полный размер ДУВ определяется балансом членов с производными по координатам и диссипативными поправками. Поэтому мы будем искать решение уравнений Уизема (164) с инвариантами r_i , зависящими лишь от переменной $\xi = x - Vt$. Нетрудно заметить, что эта система сводится к

$$\frac{dr_i}{d\xi} = - \frac{\langle (\sigma_1 - 2r_i - u)R \rangle}{8 \prod_{j \neq i} (r_i - r_j)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (165)$$

если в качестве V взять скорость волны $V = 2\sigma_1$, причём ввиду стационарности профиля эта система должна иметь интеграл

$$\sigma_1 = \text{const.} \quad (166)$$

Легко убедиться в том, что σ_1 действительно является интегралом, а две другие симметрические функции, $\sigma_2 = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3$ и $\sigma_3 = r_1 r_2 r_3$, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\sigma_2}{d\xi} = \frac{1}{4} \langle R \rangle, \quad \frac{d\sigma_3}{d\xi} = \frac{1}{8} (\sigma_1 \langle R \rangle - \langle uR \rangle). \quad (167)$$

Таким образом, мы свели задачу к решению системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений для σ_2 и σ_3 , причём r_i являются функциями от σ_2 и σ_3 и находятся из решения кубического уравнения

$$Q(r) = r^3 - \sigma_1 r^2 + \sigma_2 r - \sigma_3 = 0. \quad (168)$$

Задача ещё больше упрощается, если $\langle R \rangle = 0$, так что мы имеем ещё один интеграл $\sigma_2 = \text{const}$, и нам остаётся решить единственное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma_3}{d\xi} = -\frac{1}{8} \langle uR \rangle. \quad (169)$$

В этом случае удобно вернуться от симметрических функций к переменным r_i и рассматривать, например, r_1 и r_2 как функции от r_3 , где $r_3 = r_3(\xi)$. Тогда из (165) находим

$$\frac{dr_1}{dr_3} = \frac{r_3 - r_2}{r_2 - r_1}, \quad \frac{dr_2}{dr_3} = -\frac{r_3 - r_1}{r_2 - r_1}. \quad (170)$$

Эта система имеет два интеграла: $\sigma_1 = \text{const}$, $\sigma_2 = \text{const}$. Следовательно, r_1 и r_2 как функции от r_3 являются корнями квадратного уравнения

$$r^2 - (\sigma_1 - r_3)r + \sigma_2 - (\sigma_1 - r_3)r_3 = 0. \quad (171)$$

Его корни должны быть упорядочены согласно условию $r_1 \leq r_2$, а постоянные σ_1 , σ_2 определяются граничными условиями. Обозначим предельное значение амплитуды волны при $x \rightarrow -\infty$ как u_L и будем считать, что волна распространяется в среде с $u = 0$ при $x \rightarrow +\infty$. На малоамплитудном крае, где $m \rightarrow 0$, $r_2 \rightarrow r_1$, величина $u_L = r_3 = r_3^L$ и интегралы

$$\sigma_1 = 2r_1^L + u_L, \quad \sigma_2 = (r_1^L)^2 + 2r_1^L u_L. \quad (172)$$

На солитонном крае $r_1^R = 0$, $r_2^R = r_3^R$ и их подстановка в определения σ_1 , σ_2 приводит к соотношению

$$\sigma_1^2 - 4\sigma_2 = 0 \quad (173)$$

между интегралами. Подставляя в (173) формулы (172), получаем уравнение для r_1^L , решение которого даёт $r_1^L = u_L/4$, т.е. на малоамплитудном крае

$$\sigma_1 = \frac{3}{2} u_L, \quad \sigma_2 = \frac{9}{16} u_L^2. \quad (174)$$

Интегралы принимают эти же значения и на солитонном крае, где $r_1 = 0$ и $\sigma_3 = 0$, так что уравнение (168) имеет здесь двойной корень $r_2^R = r_3^R = (3/4)u_L$. В результате амплитуда ведущего солитона $a_s = 2r_3^R$ и его скорость

$V_s = 4r_3^R$, совпадающая со скоростью ударной волны, выражаются как

$$a_s = \frac{3}{2} u_L, \quad V = 3u_L. \quad (175)$$

Таким образом, скорость стационарной дисперсионной ударной волны определяется только величиной разрыва в согласии с общей теорией вязких ударных волн с малой амплитудой [22]. Интересно, что не только скорость, но и амплитуда ведущего солитона выражаются универсальными формулами (175) через величину начального разрыва и не зависят от вида диссипативного члена. В частном случае диссипации типа Бюргера формулы (175) получены в работе [50] непосредственно методом теории возмущений без использования теории Уизема.

Чтобы найти глобальное решение вдоль всей ДУВ, замечаем, что после подстановки значений интегралов (174) в (171) и решения этого квадратного уравнения мы получаем r_1 и r_2 как функции r_3 . Их же подстановка в выражение (59) для m даёт уравнение, решение которого относительно r_3 приводит к выражению этого риманова инварианта через m , и тогда r_1 и r_2 также можно представить как функции от m . В результате этих элементарных вычислений получаем

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{u_L}{2} \left(1 - \frac{1+m}{2\sqrt{1-m+m^2}} \right), \\ r_2 &= \frac{u_L}{2} \left(1 - \frac{1-2m}{2\sqrt{1-m+m^2}} \right), \\ r_3 &= \frac{u_L}{2} \left(1 + \frac{1-m/2}{\sqrt{1-m+m^2}} \right). \end{aligned} \quad (176)$$

Решение задачи будет получено, если будет найдена зависимость параметра m от координаты ξ . Вычислив производную dm/dr_3 с помощью формул (170) и умножив результат на $dr_3/d\xi$ из (165), получим требуемое уравнение:

$$\frac{dm}{d\xi} = -\frac{1-m+m^2}{4(r_2-r_1)(r_3-r_1)(r_3-r_2)} \langle uR \rangle, \quad (177)$$

где правую часть можно выразить через m для возмущения R заданного вида.

Конкретизируем эту теорию, выбрав возмущение в виде трения Бюргера [43, 45]:

$$R = \varepsilon u_{xx}. \quad (178)$$

Для фактического проведения усреднения удобно перейти к переменной $v = (\sigma_1 - u)/2$, так что v подчиняется уравнению $v_x^2 = 4Q(v)$, $Q(v) = \prod_{i=1}^3 (v - r_i)$, т.е. $u_{xx} = -2v_{xx} = -4dQ/dv$. В результате находим

$$-\langle uR \rangle = \frac{8\varepsilon}{L} \oint \sqrt{Q(v)} dv.$$

Этот эллиптический интеграл легко сводится к табличным, и в результате мы приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dm}{d\xi} &= \Phi(m) \equiv \frac{8\varepsilon}{15} \frac{1-m+m^2}{m(1-m)} \times \\ &\times \left[(1-m+m^2) \frac{E(m)}{K(m)} - (1-m) \left(1 - \frac{m}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (179)$$

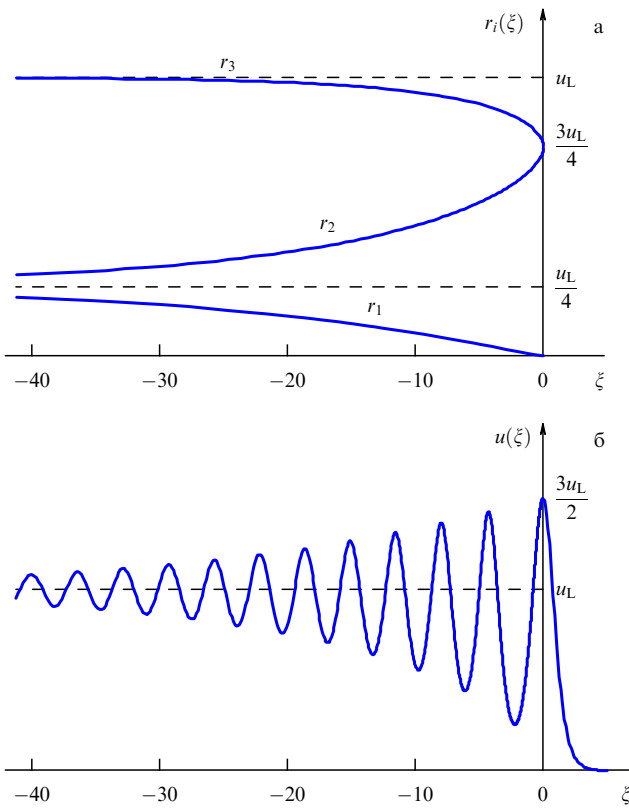


Рис. 11. (а) Графики римановых инвариантов для стационарного решения уравнений Уизема, отвечающего ДУВ с вязкостью Бюргерса (178) при $\varepsilon = 0,1$, $u_L = 1,0$. (б) Профиль стационарной ударной волны $u(\xi)$ с вязкостью Бюргерса при тех же значениях параметров.

Таким образом, решение задачи свелось к квадратуре

$$\xi = - \int_m^1 \frac{dm}{\Phi(m)}. \quad (180)$$

Последняя формула вместе с (176) определяет в параметрическом виде зависимость модуляционных параметров, т.е. римановых инвариантов r_i системы уравнений Уизема, от координаты ξ , отсчитываемой от фронта ДУВ. Пример такой зависимости показан на рис. 11а, а соответствующий профиль ДУВ — на рис. 11б.

13. Уравнение Гросса–Питаевского

Помимо имеющего универсальный характер уравнения КдФ, другим важным уравнением, также возникающим в самых разнообразных обстоятельствах, является уравнение Гросса–Питаевского, описывающее, в частности, динамику слабо неидеального бозе-газа при нулевой температуре [51, 52] в приближении среднего поля, когда когерентное состояние макроскопического бозе-газа описывается классической волновой функцией, подобно полю Максвелла в классической электродинамике. Эта теория приобрела большое значение после экспериментальной реализации бозе-эйнштейновской конденсации атомов, и с основными её представлениями можно познакомиться по обзорам [53, 54]. Здесь мы ограничимся тем, что выпишем уравнение Гросса–Питаевского для волновой функции $\psi(\mathbf{r})$ в стандартных обозна-

чениях:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(\mathbf{r})\psi + g|\psi|^2\psi, \quad (181)$$

где m — атомная масса, Δ — оператор Лапласа, $U(\mathbf{r})$ — потенциал внешнего поля, действующего на атомы, а параметр g , который выражается через длину рассеяния a атомов друг на друге,

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m},$$

характеризует силу межатомного взаимодействия — оно является отталкивающим при $g > 0$ и притягивающим при $g < 0$. Для нас представляет интерес первый случай, когда однородное состояние конденсата устойчиво и по нему могут распространяться волны.

Отметим, что математически эквивалентное уравнение возникло при описании самофокусировки пучков света в нелинейных средах [55, 56], где роль времени играет координата вдоль пучка, а дифракция заменяет собою дисперсию, однако в указанных работах обсуждалась лишь фокусирующая нелинейность, в случае которой состояние с однородным распределением интенсивности света неустойчиво. Другая интерпретация уравнения (181) возникает при описании эволюции огибающей волнового пакета, распространяющегося в среде с малой дисперсией и слабой нелинейностью [57]. В этом случае первый член в правой части соответствует дисперсионным эффектам второго порядка, учитывающим, помимо движения пакета с групповой скоростью, его медленное расплывание, а последний член отвечает зависимости отклика среды от интенсивности волны. Подобная ситуация встречается в физике довольно часто — от описания волн на глубокой воде до теории распространения импульсов света в нелинейных световодах. В этом контексте получающееся уравнение часто называется *нелинейным уравнением Шрёдингера* (НУШ). Однако в нашей статье мы будем пользоваться физической интерпретацией Гросса–Питаевского, дающей возможность обращаться к более наглядным образам и понятиям газовой динамики. В частности, плотность конденсата $\rho = |\psi|^2$, а его скорость течения выражается через градиент фазы волновой функции [53, 54], так что если представить волновую функцию в виде

$$\psi = \sqrt{\rho} \exp(i\phi), \quad \mathbf{u} = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi, \quad (182)$$

то подстановка в (181) даёт после простых преобразований систему уравнений ($U(\mathbf{r}) = 0$):

$$\rho_t + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (183)$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \frac{g}{m} \nabla \rho + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \left[\frac{(\nabla \rho)^2}{4\rho^2} - \frac{\Delta \rho}{2\rho} \right] = 0.$$

Первое уравнение является обычным уравнением непрерывности, отвечающим сохранению числа частиц в конденсате, а второе уравнение имеет форму модифицированного уравнения Эйлера для течения газа с уравнением состояния $p = g\rho^2/(2m)$ и с последним членом, содержащим пространственные производные выше первого порядка. Ясно, что этот член отвечает дисперсионным свойствам газа, обусловленным квантовой дисперсией атомов. Если рассмотреть предельно длинные

волны и пренебречь этим членом, то мы придём к выражению для скорости звука в конденсате:

$$c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{g\rho}{m}}, \quad (184)$$

которая зависит от локальной плотности ρ . Если обратиться к линейным волнам в однородном конденсате с постоянной плотностью ρ , то стандартное вычисление даёт закон дисперсии Боголюбова [58]

$$\omega(k) = k\sqrt{c_s^2 + \left(\frac{\hbar k}{2m}\right)^2}, \quad (185)$$

который при увеличении волнового числа k переходит от звукового закона дисперсии $\omega = c_s k$ в обычный закон дисперсии квантовых частиц $\varepsilon = \hbar\omega = (\hbar k)^2/(2m)$, когда длина волны де Бройля становится меньше длины когерентности

$$\xi_c = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}c_s} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mg\rho}}. \quad (186)$$

Введение в теорию характеризующих состояние конденсата параметров: длины ξ_c и скорости c_s при характерной плотности ρ_0 — позволяет определить удобные безразмерные переменные: $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}/(\sqrt{2}\xi_c)$, $t \rightarrow c_s t/(\sqrt{2}\xi_c)$, $\psi \rightarrow \psi/\sqrt{\rho_0}$. Кроме того, в дальнейшем мы ограничимся лишь одномерными движениями конденсата, так что в новых переменных уравнение Гросса–Питаевского примет вид

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} - |\psi|^2\psi = 0, \quad (187)$$

а его "гидродинамическое" представление (183) перейдёт к следующему:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (188)$$

$$u_t + uu_x + \rho_x + \left(\frac{\rho_x^2}{8\rho^2} - \frac{\rho_{xx}}{4\rho}\right)_x = 0.$$

Соответственно, закон дисперсии линейных волн (185) превратится в

$$\omega(k) = k\sqrt{1 + \frac{k^2}{4}}. \quad (189)$$

Ясно, что волны могут распространяться в обоих направлениях оси x , так что любое начальное возмущение перейдёт со временем в два волновых импульса, распространяющихся в противоположных направлениях. Например, если начальный импульс имеет форму возвышения плотности конденсата на однородном фоне, то численное решение уравнения Гросса–Питаевского (187) или эквивалентной системы (188) демонстрирует эволюцию волны, показанную на рис. 12. Как мы видим, импульс расщепляется со временем на два, и каждый из них испытывает опрокидывание с формированием ДУВ. Таким образом, перед нами встаёт задача описать эволюцию ударных волн, подчиняющихся уравнению Гросса–Питаевского. Поскольку, согласно подходу Гуревича–Питаевского, каждая ДУВ граничит с гладким решением уравнений, соответствующим пренебрежению дисперсией, обратимся сначала к этому приближению.

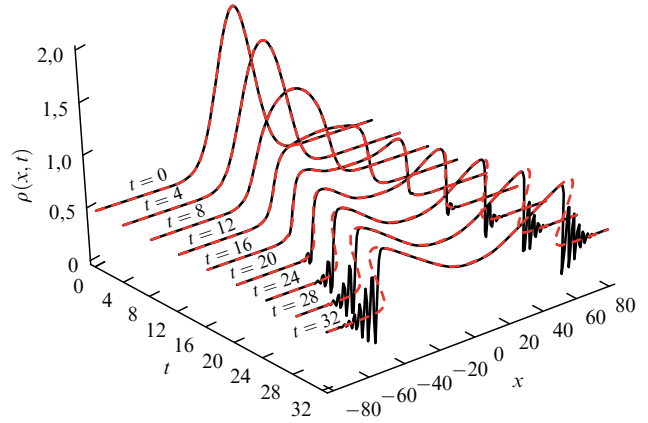


Рис. 12. Эволюция изначально локализованного импульса плотности в бозе-эйнштейновском конденсате. После опрокидывания волны при $t_b \approx 20$ на его краях образуются дисперсионные ударные волны.

В бездисперсионном пределе последним членом в уравнении Эйлера (188) можно пренебречь и эта система примет простую гидродинамическую форму:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + uu_x + \rho_x = 0. \quad (190)$$

Как обычно в теории линейных волн, локальные изменения плотности $\delta\rho$ и скорости течения δu связаны соотношением $\delta\rho/\rho \approx \pm \delta u/c$, где выбор знака соответствует направлению распространения волны. Поэтому, например, в волне, распространяющейся вправо, выполняется дифференциальное соотношение $du = c d\rho/\rho = d\rho/\sqrt{\rho}$, интегрирование которого показывает, что вдоль такой *простой* волны между скоростью течения u и плотностью ρ имеется связь $u/2 - \sqrt{\rho} = \text{const}$, и аналогичное соотношение с другим знаком перед корнем имеется для волны, распространяющейся влево. Это рассуждение показывает, что в физике волн естественными переменными являются так называемые *римановы инварианты*, связанные с плотностью и скоростью течения соотношениями

$$r_+ = \frac{u}{2} + \sqrt{\rho}, \quad r_- = \frac{u}{2} - \sqrt{\rho}. \quad (191)$$

Уравнения (190), представленные в этих переменных, приобретают простой диагональный вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_+}{\partial t} + v_+(r_+, r_-) \frac{\partial r_+}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial r_-}{\partial t} + v_-(r_+, r_-) \frac{\partial r_-}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (192)$$

где скорости $v_{\pm} = u \pm c$ имеют простой физический смысл скорости распространения сигнала, равной сумме и разности скорости течения и скорости звука, распространяющегося по течению или против него. В нашем случае бозе-эйнштейновского конденсата они очень просто выражаются через римановы инварианты:

$$v_+ = \frac{3}{2}r_+ + \frac{1}{2}r_-, \quad v_- = \frac{1}{2}r_+ + \frac{3}{2}r_-. \quad (193)$$

Простые волны характеризуются постоянством одного из римановых инвариантов. Например, для волны,

распространяющейся вправо, постоянным является инвариант $r_- = r_-^{(0)} = \text{const}$, и тогда второе уравнение (192) удовлетворяется автоматически, а первое уравнение превращается в уравнение Хопфа, с которым мы уже имели дело в случае ионно-звуковых волн в плазме. Очевидно, что ввиду указанной связи между ρ и u это уравнение Хопфа можно также написать для одной из этих переменных, что даст бездисперсионное приближение для однонаправленного распространения волн в конденсате. Дополнительный учёт дисперсии (189) в главном приближении $\omega \approx k + k^3/8$ приведёт нас к уравнению КдФ для нелинейных волн в пределе большой длины волны и малой амплитуды. Легко увидеть, что нелинейный и дисперсионный члены в этом уравнении имеют противоположные знаки, так что солитонные решения соответствуют ямкам в распределении плотности и уравнение КдФ описывает "мелкие" солитоны на однородном фоне. Естественно, теория ДУВ для КдФ полностью применима для описания ударных волн в конденсате при условии их небольшой амплитуды и однонаправленного распространения. Однако для глубоких солитонов и ДУВ большой амплитуды требуется развитие теории Гуревича – Питаевского.

Сформулировав уравнения бездисперсионного приближения в удобной для нас форме (192), мы можем обратиться к теории периодических решений уравнения Гросса – Питаевского, модуляции которых описывают ДУВ. Если искать решение системы (188) в виде бегущей волны $\rho = \rho(\xi)$, $u = u(\xi)$, $\xi = x - Vt$, то первое уравнение мгновенно интегрируется, а второе после исключения переменной u сводится после некоторых преобразований к следующему:

$$\rho_\xi = 2\sqrt{\mathcal{R}(\rho)}, \quad \mathcal{R}(\rho) = \prod_{i=1}^3 (\rho - v_i). \quad (194)$$

Ясно, что плотность ρ колеблется в интервале $v_1 \leq \rho \leq v_2$, где многочлен $\mathcal{R}(\rho)$ положителен и стандартное вычисление, аналогичное выводу решения в виде кноидальной волны в случае уравнения КдФ, приводит к периодическому решению уравнения Гросса – Питаевского в виде

$$\rho = v_1 + (v_2 - v_1) \text{sn}^2(\sqrt{v_3 - v_1}(x - Vt), m), \quad (195)$$

где $m = (v_2 - v_1)/(v_3 - v_1)$ и скорость V , в отличие от таковой в теории КдФ, является теперь независимым параметром. Скорость течения конденсата

$$u = V \pm \frac{\sqrt{v_1 v_2 v_3}}{\rho}. \quad (196)$$

В солитонном пределе, когда $v_3 \rightarrow v_2$ и $m \rightarrow 0$, получаем решение [59]

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{1 - V^2/\rho_0}{\cosh^2(\sqrt{\rho_0 - V^2}(x - Vt))} \right), \quad (197)$$

$$u = V \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right)$$

для солитона, движущегося по покоящемуся на бесконечности конденсату с плотностью $v_2 = \rho_0$. Когда глубина солитона стремится к нулю, его скорость

стремится к скорости звука $c_0 = \sqrt{\rho_0}$, никогда не превышая её. Если скорость солитона равна нулю, то в его центре плотность ρ также обращается в нуль и такой солитон называется "чёрным". В силу соотношения $u = \phi_x$ фаза волновой функции при переходе через область, занимаемую солитоном, испытывает скачок

$$\Delta\phi \equiv \phi(\infty) - \phi(-\infty) = -2 \arccos \frac{V}{\sqrt{\rho_0}}, \quad V > 0, \quad (198)$$

и для чёрного солитона при $V \rightarrow +0$ этот скачок $\Delta\phi = -\pi$. Поскольку фаза определена с точностью до 2π , это состояние конденсата не отличается от состояния со скоростью $V \rightarrow -0$ и скачком $\Delta\phi = \pi$. Тёмный солитон благодаря этому его свойству может изменять направление движения в точках, где плотность в его центре обращается в нуль при движении в неоднородном конденсате, удерживаемом ловушкой. Формулы (197) можно объединить в выражение

$$\psi = \left\{ \sqrt{\rho_0 - V^2} \tanh \left[\sqrt{\rho_0 - V^2}(x - Vt) \right] + iV \right\} \exp(-i\rho_0 t) \quad (199)$$

для солитонного решения уравнения Гросса – Питаевского (187). В малоамплитудном пределе $v_2 - v_1 \ll v_3 - v_1$, $m \ll 1$, волна (195) вырождается в тригонометрическую,

$$\rho = v_1 + \frac{a}{2} \cos \left[2\sqrt{v_3 - v_1}(x - Vt) \right], \quad (200)$$

причём волновое число $k = 2\sqrt{v_3 - v_1}$ и фазовая скорость волны $V = \pm\sqrt{v_3}$ связаны соотношением $V^2 = v_3 = v_1 + k^2/4 = \rho_0 + k^2/4$, которое отвечает закону дисперсии (189).

Полученное периодическое решение зависит от четырёх параметров: V , v_1 , v_2 , v_3 — и для описания ДУВ необходимо вывести соответствующие модуляционные уравнения. Естественно, закон сохранения числа волн (33) распространяется на нелинейные волны (195) с соответствующим выражением для волнового числа через модуляционные параметры, и нетрудно найти ещё три закона сохранения для уравнения Гросса – Питаевского (187), так что их усреднение даст в принципе полный комплект модуляционных уравнений. Однако их преобразование в диагональный вид прямым методом Уизема оказывается технически сложным, и впервые эти уравнения в диагональной форме были получены в работах [60, 61] лишь после открытия полной интегрируемости уравнения Гросса – Питаевского в [62] и установления связи между полной интегрируемостью и диагонализацией уравнений Уизема в [63]. Мы не будем вдаваться в детали этой теории и приведём уравнения Уизема для уравнения Гросса – Питаевского в окончательном виде, тем более что они весьма похожи на уже известные нам уравнения Уизема для модуляций периодической волны КдФ и могут быть исследованы аналогичными методами.

Если в случае КдФ переход от параметров v_i к римановым инвариантам r_i системы Уизема осуществляется очень простыми формулами (55), то в случае уравнения Гросса – Питаевского параметры V , v_i связаны с римановыми инвариантами r_i , $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4$, более

сложными выражениями:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{4}(r_1 - r_2 - r_3 + r_4)^2, \\ v_2 &= \frac{1}{4}(r_1 - r_2 + r_3 - r_4)^2, \\ v_3 &= \frac{1}{4}(r_1 + r_2 - r_3 - r_4)^2, \\ V &= \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4). \end{aligned} \tag{201}$$

Стоит отметить, что многочлен $\mathcal{R}(v) = \prod_{i=1}^3 (v - v_i)$ является резольвентой Феррари для многочлена $Q(r) = \prod_{i=1}^4 (r - r_i)$, позволяющей выразить в радикалах корни уравнения $Q(r) = 0$ через его коэффициенты. Многочлен $Q(r)$ и симметрические функции его нулей играют важную роль в теории периодических решений и их модуляций для широкого класса интегрируемых уравнений. Через римановы инварианты периодическое решение уравнения Гросса–Питаевского выражается формулой

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4}(r_4 - r_3 - r_2 + r_1)^2 + (r_4 - r_3) \times \\ &\times (r_2 - r_1) \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{(r_4 - r_2)(r_3 - r_1)} \xi, m \right), \end{aligned} \tag{202}$$

где

$$m = \frac{(r_2 - r_1)(r_4 - r_3)}{(r_4 - r_2)(r_3 - r_1)}. \tag{203}$$

Модуляционные уравнения Уизема имеют диагональный вид:

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + v_i(r) \frac{\partial r_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{204}$$

где характеристические скорости выражаются через длину волны

$$L = \frac{2K(m)}{\sqrt{(r_4 - r_2)(r_3 - r_1)}} \tag{205}$$

формулой

$$v_i(r) = \left(1 - \frac{L}{\partial_i L} \partial_i \right) V, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{206}$$

аналогичной (58). Подставив (205) в (206), получим

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2} \sum r_i - \frac{(r_4 - r_1)(r_2 - r_1)K}{(r_4 - r_1)K - (r_4 - r_2)E}, \\ v_2 &= \frac{1}{2} \sum r_i + \frac{(r_3 - r_2)(r_2 - r_1)K}{(r_3 - r_2)K - (r_3 - r_1)E}, \\ v_3 &= \frac{1}{2} \sum r_i - \frac{(r_4 - r_3)(r_3 - r_2)K}{(r_3 - r_2)K - (r_4 - r_2)E}, \\ v_4 &= \frac{1}{2} \sum r_i + \frac{(r_4 - r_3)(r_4 - r_1)K}{(r_4 - r_1)K - (r_3 - r_1)E}. \end{aligned} \tag{207}$$

На солитонном крае ДУВ при $r_2 = r_3$ ($m = 1$) эти выражения переходят в

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{3}{2} r_1 + \frac{1}{2} r_4, \quad v_4 = \frac{3}{2} r_4 + \frac{1}{2} r_1, \\ v_2 &= v_3 = \frac{1}{2} (r_1 + 2r_2 + r_4), \end{aligned} \tag{208}$$

а на малоамплитудном крае при $r_3 = r_4$ и $m = 0$ получим

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{3}{2} r_1 + \frac{1}{2} r_2, \quad v_2 = \frac{3}{2} r_2 + \frac{1}{2} r_1, \\ v_3 &= v_4 = 2r_4 + \frac{(r_2 - r_1)^2}{2(r_1 + r_2 - 2r_4)}, \end{aligned} \tag{209}$$

аналогичные формулы могут быть найдены и в пределе $r_1 = r_2$ ($m = 0$).

Как видим, на краях ДУВ одна пара скоростей сливается в общее для них выражение, а другая пара переходит в формулы (193) для бездисперсионных скоростей при соответствующем отождествлении узимовских римановых инвариантов с бездисперсионными римановыми инвариантами r_{\pm} (см. (191)). Это обстоятельство позволяет встроить решение уравнений Уизема, описывающее ДУВ, в гладкое решение бездисперсионных уравнений (192). Эти бездисперсионные уравнения, как и уравнения Уизема, могут быть решены методом годографа. Для системы Уизема решение имеет вид

$$x - v_i(r_j)t = w_i(r_j), \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \tag{210}$$

где

$$w_i(r_j) = \left(1 - \frac{L}{\partial_i L} \partial_i \right) W(r_j), \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \tag{211}$$

и функция $W(r_1, r_2, r_3, r_4)$ является решением системы уравнений Эйлера–Пуассона (73). В частности, как и в случае уравнения КдФ, важный класс автомодельных решений предоставляет производящая функция

$$W = \frac{r^2}{\sqrt{Q(r)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{W^{(k)}(r_j)}{r^k}, \tag{212}$$

зависящая от произвольного параметра r и удовлетворяющая уравнению Эйлера–Пуассона (73). Коэффициенты её разложения по обратным степеням r приводят к частным решениям уравнения Эйлера–Пуассона, для которых функции $w_i(r_j)$ принимают конкретный вид:

$$w_i^{(k)}(r_j) = W^{(k)}(r_j) + 2(v_i - V) \partial_i W^{(k)}(r_j). \tag{213}$$

Ввиду линейности уравнений Эйлера–Пуассона любая линейная комбинация $w_i = \sum_k A_k w_i^{(k)}$ функций (213) также даёт решение (210). Здесь $W^{(k)}$ выражаются через симметрические функции σ_i корней многочлена $Q(r) = \prod_{i=1}^4 (r - r_i)$, являющиеся его коэффициентами. В частности,

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= \frac{1}{2} \sigma_1, \quad W^{(2)} = \frac{3}{16} \sigma_1^2 - \frac{1}{4} \sigma_2, \\ W^{(3)} &= \frac{5}{32} \sigma_1^3 - \frac{3}{8} \sigma_1 \sigma_2 + \frac{1}{4} \sigma_3. \end{aligned} \tag{214}$$

Уже этих элементарных сведений достаточно, чтобы решить задачу Гуревича–Питаевского для нескольких характерных случаев.

14. Распад начального разрыва в теории Гросса–Питаевского

Так же как и в рассмотренной в разделе 7 теории КдФ, начнём с простейшей задачи о распаде начального

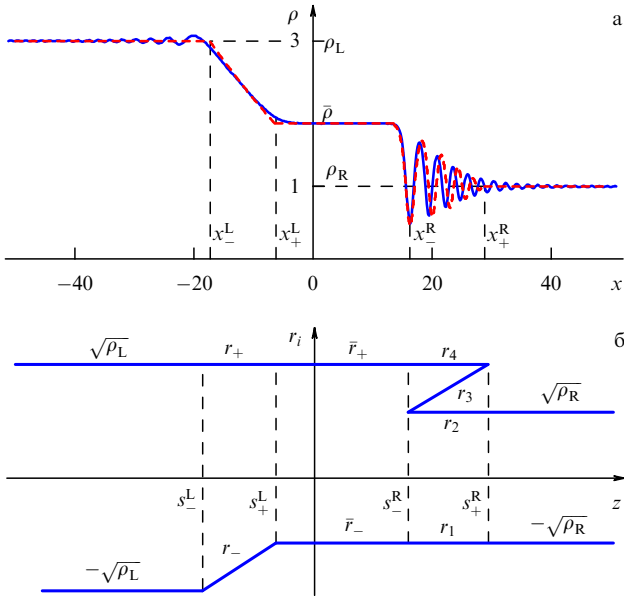


Рис. 13. (а) Волновая структура, образующаяся при распаде начального разрыва в распределении плотности бозе-конденсата с $\rho_L = 3$, $\rho_R = 1$, время эволюции $t = 10$. Численное решение показано сплошной линией, а аналитическое решение задачи Гуревича – Питаевского — штриховой. Теоретические значения $\bar{\rho} = 1,87$, $x_-^L/t = -1,73$, $x_+^L/t = -0,63$, $x_-^R/t = 1,37$, $x_+^R/t = 2,89$ хорошо согласуются с численным решением. (б) Диаграмма римановых инвариантов, соответствующая волновой структуре, образовавшейся при распаде начального разрыва плотности.

разрыва, когда состояние конденсата при $x < 0$ и $x > 0$ имеет разные значения плотности и скорости течения ρ_L , u_L и ρ_R , u_R соответственно. Поскольку в возникающей волновой структуре сшиваются значения римановых инвариантов, начальное состояние конденсата зададим их значениями по разные стороны от разрыва:

$$r_{\pm}(x, t) = \begin{cases} r_{\pm}^L = \frac{u_L}{2} \pm \sqrt{\rho_L}, & x < 0, \\ r_{\pm}^R = \frac{u_R}{2} \pm \sqrt{\rho_R}, & x > 0. \end{cases} \quad (215)$$

В качестве примера рассмотрим эволюцию начального разрыва распределения плотности, когда в начальном состоянии $u_L = u_R = 0$, и для определённости будем считать, что $\rho_L > \rho_R$, так что $r_+^L = -r_-^L > r_+^R = -r_-^R$.

Численное решение уравнения Гросса – Питаевского для такого начального условия даёт волновую структуру, показанную на рис. 13а сплошной линией. Как мы видим, эта структура состоит из двух волн, соединённых областью однородного течения ("плато"). Ввиду отсутствия в начальном распределении параметров с размерностью длины, решения как бездисперсионных уравнений (192), так и уравнений Уизема (204) должны быть автомодельными и зависеть лишь от переменной $z = x/t$. Поэтому, как нетрудно убедиться, вдоль этих волн может изменяться только один из римановых инвариантов. Слева находится волна разрежения, вдоль которой постоянен риманов инвариант r_+ , т.е. $\sqrt{\rho_L} = \bar{u}/2 + \sqrt{\bar{\rho}}$, где надчёркнутые переменные означают их значения на плато. В решении уравнений Уизема также изменяется лишь один из римановых инвариантов r_i , следовательно, их непрерывное сшивание происходит в нашем случае, если изменяется риманов инвариант r_3 . В результате

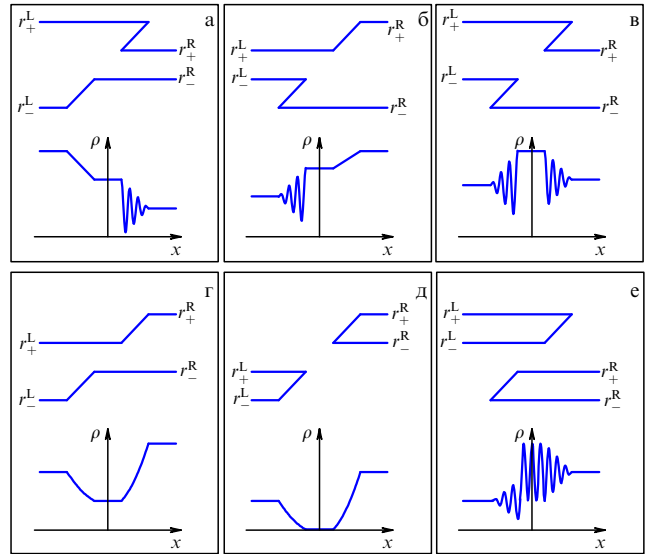


Рис. 14. Волновые структуры, образующиеся при распаде начального разрыва в теории уравнения Гросса – Питаевского, и соответствующие диаграммы римановых инвариантов.

возникающую волновую структуру можно представить диаграммой римановых инвариантов, изображённой на рис. 13б, где схематически показаны зависимости всех инвариантов от автомодельной переменной z . Вследствие постоянства инварианта r_1 вдоль ДУВ и его сшивания с инвариантами \bar{r}_- и r_-^R на краях ДУВ мы получаем ещё одно уравнение: $\bar{u}/2 - \sqrt{\bar{\rho}} = -\sqrt{\rho_R}$ — для параметров течения вдоль плато. Полученные уравнения дают значения параметров течения на плато

$$\bar{\rho} = \frac{1}{4} (\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})^2, \quad \bar{u} = \sqrt{\rho_L} - \sqrt{\rho_R}, \quad (216)$$

которые прекрасно согласуются с численным решением.

Рассмотренный пример показывает, что вид получающейся при распаде начального разрыва волновой структуры можно определить, соединив пары значений римановых инвариантов, соответствующих её краям, линиями с положительным наклоном, отвечающим автомодельным решениям вида $v_i = z$ (для волн разрежения положительность наклона очевидна из выражений (193) для бездисперсионных характеристических скоростей, а для ДУВ она следует из более подробного исследования выражений (207)). Если в получающейся области имеется лишь два римановых инварианта, то эта область соответствует волне разрежения. Если в такой области определены четыре инварианта, то она отвечает ДУВ.

Нетрудно убедиться [64, 65] в том, что существует лишь шесть возможных диаграмм, показанных на рис. 14 вместе с соответствующими типами волновых структур. В случаях рис. 14а, б возникают по одной волне разрежения и одной ДУВ и они различаются лишь направлениями распространения волн. В случае рис. 14в ("столкновение конденсатов") по разные стороны от плато возникли две ДУВ. В случаях рис. 14г, д конденсаты по разные стороны от разрыва имеют противоположные скорости и при их разбегании между ними возникает плато с пониженной плотностью, причём в случае рис. 14д начальные скорости настолько велики, что эта

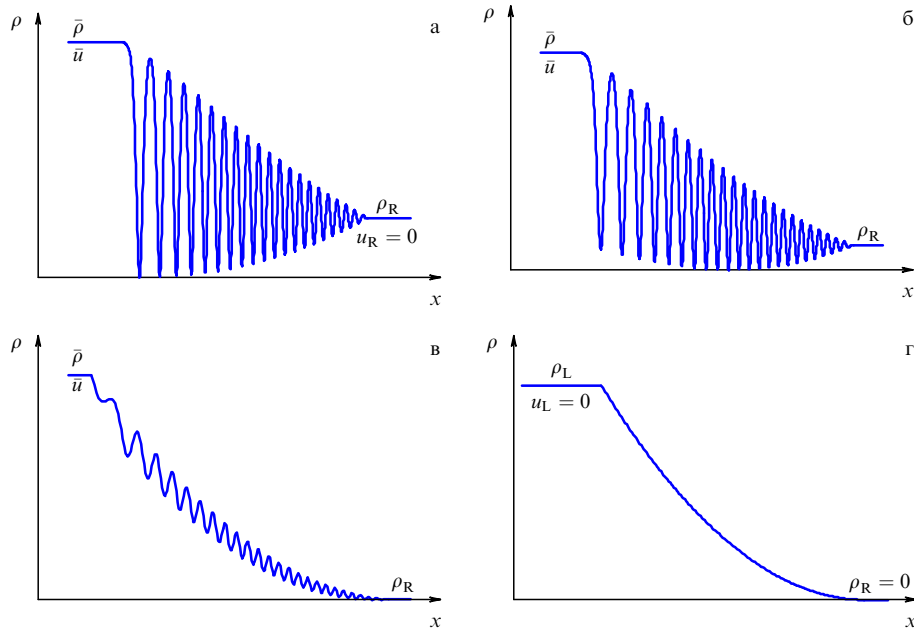


Рис. 15. Трансформация ДУВ при уменьшении плотности на правой границе. (а) Возникновение вакуумной точки. (б) Вакуумная точка внутри ДУВ. (в) ДУВ с небольшой амплитудой на фоне волны разрежения. (г) Превращение ДУВ в волну разрежения при нулевой плотности на правой границе.

плотность убывает до нуля. Наконец, в случае рис. 14е, наоборот, встречное движение сталкивающихся конденсатов настолько быстрое, что вместо плато, как в случае рис. 14в, между ДУВ образуется нелинейная периодическая волна, параметр m которой определяется граничными значениями:

$$m = m^* = \frac{(r_+^R - r_-^R)(r_+^L - r_-^L)}{(r_+^L - r_+^R)(r_-^L - r_-^R)}. \quad (217)$$

Для реализации именно такого набора волновых структур надо удостовериться, что скорости краёв волн разрежения и ДУВ упорядочены должным образом. Для установления этого факта следует изучить соответствующие решения гидродинамических и модуляционных уравнений.

Автомодельное решение уравнений (192) с требуемыми граничными условиями находится без труда. Например, для волны разрежения на рис. 13 или 14а постоянным является риманов инвариант $r_+ = u/2 + \sqrt{\rho} = \sqrt{\rho_L}$, что определяет связь между u и ρ в простой волне. Первое уравнение (192) удовлетворено, а автомодельное решение второго уравнения имеет вид

$$v_- = \frac{1}{2} r_+ + \frac{3}{2} r_- = \frac{3}{2} u - \sqrt{\rho_L} = z = \frac{x}{t},$$

и из полученных соотношений легко находим

$$\rho = \frac{1}{9} \left(\sqrt{\rho_L} - \frac{2x}{t} \right)^2, \quad u = \frac{2}{3} \left(\sqrt{\rho_L} + \frac{x}{t} \right). \quad (218)$$

Левый край волны разрежения движется влево со скоростью s_-^L звука, равной по абсолютной величине $\sqrt{\rho_L}$, а скорость s_+^L правого края можно найти, приравняв одну из переменных (218) её значению (216) на плато, так что

$$s_-^L = -\sqrt{\rho_L}, \quad s_+^L = \frac{1}{2} \sqrt{\rho_L} - \frac{3}{2} \sqrt{\rho_R}. \quad (219)$$

В ДУВ на рис. 13 значения трёх римановых инвариантов известны:

$$r_1 = -\sqrt{\rho_R}, \quad r_2 = \sqrt{\rho_R}, \quad r_4 = \sqrt{\rho_L}, \quad (220)$$

а зависимость r_3 от $z = x/t$ определяется автомодельным решением уравнений Уизема:

$$v_3(-\sqrt{\rho_R}, \sqrt{\rho_R}, r_3, \sqrt{\rho_L}) = z = \frac{x}{t}. \quad (221)$$

Подстановка всех этих значений и функции $r_3 = r_3(z)$ в (202) даёт нам профиль плотности в ДУВ, показанный на рис. 13а штриховой линией, в хорошем согласии с численным решением. Скорости краёв ДУВ находятся подстановкой значений (220) в предельные выражения (208) и (209) для v_3 :

$$s_-^R = \frac{1}{2} (\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}), \quad s_+^R = \frac{2\rho_L - \rho_R}{\sqrt{\rho_L}}. \quad (222)$$

Легко убедиться в том, что при $\rho_L > \rho_R$ скорости краёв волны разрежения и ДУВ упорядочены согласно неравенствам $s_-^L < s_+^L < s_-^R < s_+^R$ в соответствии с диаграммой на рис. 13б.

Амплитуда солитона на границе с плато

$$a_s = (r_4 - r_2)(r_2 - r_1) = 2(\sqrt{\rho_L \rho_R} - \rho_R). \quad (223)$$

Если мы зафиксируем величину ρ_L и будем уменьшать ρ_R от его максимального значения ρ_L , то увидим, что глубина солитона a_s становится равной фоновой плотности $\bar{\rho}$, определённой на плато выражением (216), при $\rho_R = \rho_L/9$, т.е. этот солитон становится чёрным и в распределении плотности конденсата образуется "вакуумная точка" [64, 65]. При дальнейшем уменьшении ρ_R амплитуда ведущего солитона становится меньше фоновой плотности и вакуумная точка перемещается

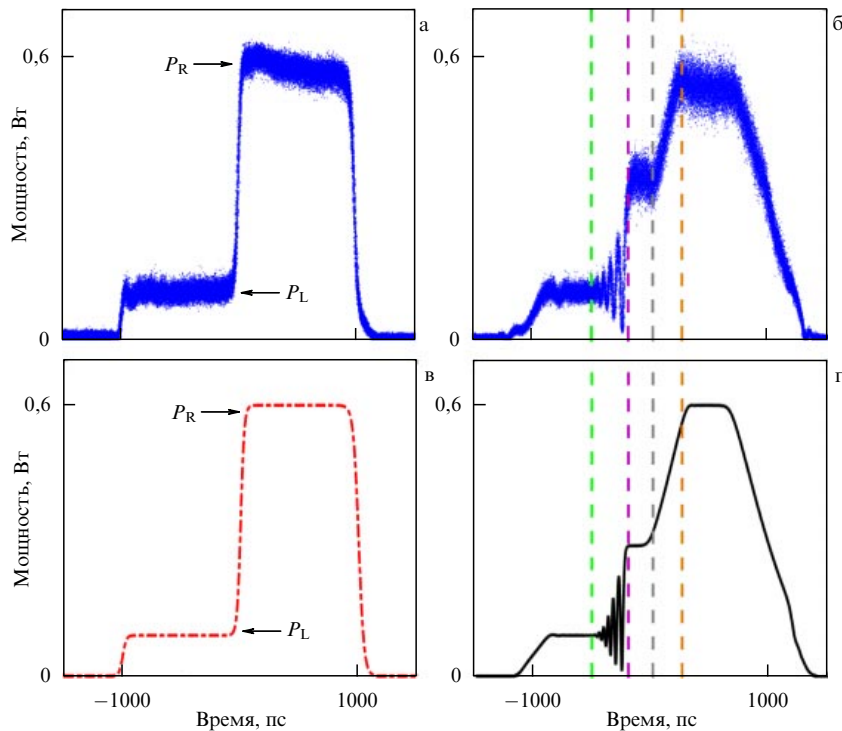


Рис. 16. Измеренные профили интенсивности на входе в световод (а) и на выходе из него (б). (г) Результат численного решения НУШ с начальным условием (в). (Из работы [66].)

вглубь ДУВ. Когда плотность ρ_R становится исчезающе малой, амплитуда осцилляций в ДУВ стремится к нулю вместе с амплитудой солитона (223), область плато исчезает вместе с левой волной разрежения, но зато вся область ДУВ превращается в волну разрежения (218), соответствующую расширению конденсата в вакуум. Такая трансформация ДУВ в зависимости от граничных условий проиллюстрирована на рис. 15.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены другие конфигурации, показанные на рис. 14. Следует лишь иметь в виду, что в случае рис. 14е модулированные волны сшиваются не с однородным течением на плато, а с немодулированным периодическим решением с известным значением (217) параметра m .

Изложенная теория подтверждается количественно специально поставленным экспериментом [66], в котором оптический импульс имел искусственно сконструированный разрыв в распределении интенсивности света, а эволюция импульса подчинялась НУШ, эквивалентному уравнению Гросса–Питаевского. На взятом из этой статьи рис. 16а, в показан профиль интенсивности входящего в световод импульса, а на рис. 16б, г — профиль выходящего импульса. На рисунках 16а, б представлены результаты измерений, а на рис. 16в, г — результаты численного решения НУШ. Начальный импульс имеет форму "сдвинутых вплотную столбиков" различной высоты, так что в центре возникает разрыв интенсивности, эволюция которого и представляет интерес, тогда как волны разрежения, возникающие на внешних краях структуры, можно игнорировать. Как видим, возникающая в центре волна отвечает случаю рис. 14б, и скорости краёв волны разрежения и ДУВ хорошо согласуются с теоретическими значениями.

Задача о распаде разрыва, несмотря на свою простоту, находит применения в более реалистических при-

ложениях, таких, например, как образование ДУВ в течении конденсата мимо препятствия [67, 68], что позволяет объяснить, по крайней мере качественно, результаты эксперимента [69]. Отметим также укладывающуюся в эту схему интерпретацию экспериментов с нелинейной эволюцией импульсов в более сложной геометрии как в физике конденсатов [70, 71], так и в нелинейной оптике [72]. В разделе 15 мы проиллюстрируем рассматриваемый метод решением простой задачи о движении конденсата под действием равномерно движущегося поршня [73].

15. Задача о поршне

Рассмотрим задачу о течении конденсата под действием поршня [73]. Мы полагаем, что движение поршня началось в момент $t = 0$ с постоянной скоростью v_p и до начала движения поршня справа от него находился покоящийся конденсат с постоянной плотностью ρ_0 . Ясно, что в результате такого движения от поршня начнёт распространяться волна, причём если скорость поршня не слишком велика, то естественно предполагать, что к нему примыкает однородное течение конденсата с той же скоростью v_p и с некой повышенной плотностью ρ_L . Между этим однородным течением и покоящимся вдали от поршня конденсатом находится ДУВ, и значения римановых инвариантов слева и справа от неё выражаются как

$$r_{\pm}^L = \frac{1}{2} v_p \pm \sqrt{\rho_L}, \quad r_{\pm}^R = \pm \sqrt{\rho_0}. \quad (224)$$

ДУВ зарождается мгновенно вместе с началом движения поршня, т.е. решение уравнений Уизема должно быть автомодельным и диаграмма римановых инвариантов имеет вид, показанный на рис. 17а. Из равенства

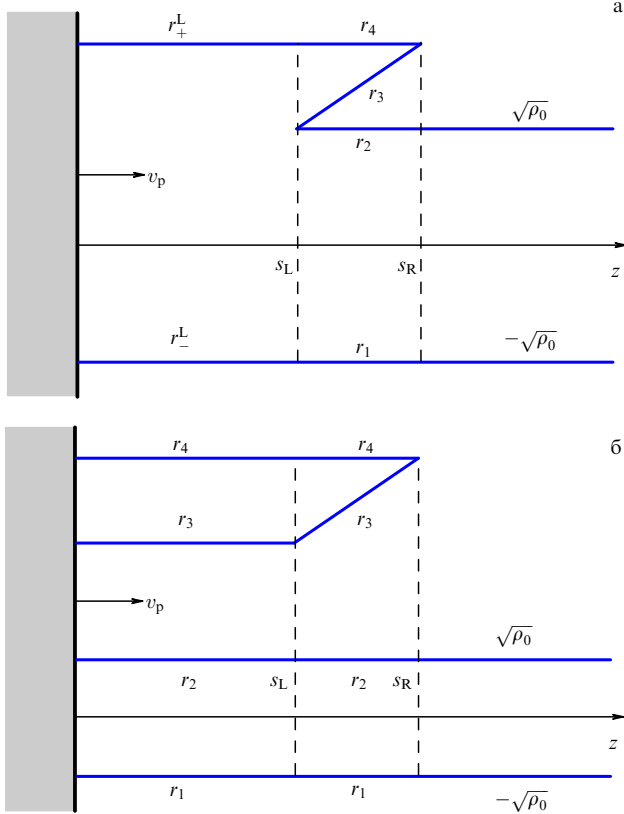


Рис. 17. (а) Диаграмма римановых инвариантов в задаче о поршне при $v_p < 2\sqrt{\rho_0}$. (б) Диаграмма римановых инвариантов при $v_p > 2\sqrt{\rho_0}$.

$r_-^L = r_1 = r_-^R$ находим плотность ρ_L примыкающего к поршню течения:

$$\rho_L = \left(\frac{1}{2} v_p + \sqrt{\rho_0}\right)^2, \quad (225)$$

что в свою очередь определяет значение риманова инварианта $r_4 = r_+^L$. Следовательно, значения трёх постоянных вдоль ДУВ инвариантов нам известны:

$$r_1 = -\sqrt{\rho_0}, \quad r_2 = \sqrt{\rho_0}, \quad r_4 = v_p + \sqrt{\rho_0}, \quad (226)$$

а зависимость инварианта r_3 от автомодельной переменной $z = x/t$ определяется неявно уравнением

$$v_3(-\sqrt{\rho_0}, \sqrt{\rho_0}, r_3, v_p + \sqrt{\rho_0}) = z. \quad (227)$$

С помощью предельных выражений (208) и (209) для v_3 находим скорости краёв ДУВ:

$$s_L = \frac{1}{2} v_p + \sqrt{\rho_0}, \quad s_R = \frac{2v_p^2 + 4v_p\sqrt{\rho_0} + \rho_0}{v_p + \sqrt{\rho_0}}. \quad (228)$$

Формулы (195) и (196) дают в точке, где находится граничащий с однородным течением самый глубокий солитон, минимальные плотность конденсата и скорость его течения:

$$\rho_{\min} = \left(\sqrt{\rho_0} - \frac{1}{2} v_p\right)^2, \quad (229)$$

$$u_{\min} = -v_p \frac{\sqrt{\rho_0} + v_p/2}{\sqrt{\rho_0} - v_p/2}.$$

При достаточно малых скоростях поршня, $v_p < 2\sqrt{\rho_0}$, скорость течения u_{\min} отрицательна, т.е. конденсат втекает в область повышенной плотности, $\rho_L > \rho_0$, как и следовало ожидать.

При $v_p = 2\sqrt{\rho_0}$ в ДУВ образуется вакуумная точка, причём скорость левого края ДУВ становится равной скорости поршня, т.е. область однородного течения, примыкающего к поршню, исчезает. Как и в случае столкновения конденсатов со слишком большими скоростями (рис. 14е), при $v_p > 2\sqrt{\rho_0}$ вместо плато возникает область немодулированного периодического решения уравнения Гросса–Питаевского, так что эта волновая структура соответствует диаграмме римановых инвариантов, показанной на рис. 17б. В периодической волне римановы инварианты r_1, r_2, r_4 сохраняют свои значения (226), а условие, что скорость волны совпадает со скоростью поршня $V = (r_3 + r_4)/2 = v_p$, даёт значение $r_3 = v_p - \sqrt{\rho_0}$. Таким образом, в области периодического решения

$$m^* = \frac{4\rho_0}{v_p^2} < 1 \quad \text{при } v_p > 2\sqrt{\rho_0}, \quad (230)$$

и условие сшивания с ДУВ определяет скорость движения этого края ДУВ:

$$s_L = v_p + \frac{2\sqrt{\rho_0}(v_p - 2\sqrt{\rho_0})K(m^*)}{v_p E(m^*) - (v_p - 2\sqrt{\rho_0})K(m^*)}. \quad (231)$$

Максимальная плотность конденсата в этой структуре

$$\rho_{\max} = (r_4 - r_3)(r_2 - r_1) = 4\rho_0. \quad (232)$$

Профиль плотности в ДУВ может быть без труда построен подстановкой римановых инвариантов в (202), причём аналитические результаты хорошо согласуются с численными расчётами [73].

Таким образом, метод Гуревича–Питаевского позволяет получить полное решение поставленной задачи.

16. Задача о равноускоренном поршне

Как и в случае уравнения КдФ, имеются два сценария опрокидывания простой волны: профиль одного из бездисперсионных римановых инвариантов r_{\pm} приобретает вертикальную касательную либо на границе с покоящимся конденсатом, либо в точке перегиба. Здесь мы рассмотрим первый случай и для конкретности будем считать, что такой профиль создаётся равноускоренно движущимся поршнем [74], так что в момент t координата границы конденсата с поршнем $X(t) = at^2/2$.

До момента опрокидывания течение конденсата с хорошей точностью описывается бездисперсионными уравнениями (192), и мы приведём здесь их решение в необходимой для нас форме. Под действием поршня течение конденсата однонаправленное, т.е. оно описывается простой волной с постоянным римановым инвариантом $r_- = u/2 - \sqrt{\rho} = -\sqrt{\rho_0}$, ρ_0 — исходная плотность конденсата в области, до которой ещё не дошла волна, образуемая поршнем. Инвариант r_+ подчиняется первому из уравнений (192), и его общее решение $x - ((3/2)r_+ - \sqrt{\rho_0})t = w(r_+)$ должно удовлетворять граничному условию $u(X(t), t) = \dot{X}(t)$, означающему, что на границе с поршнем скорость течения совпадает со ско-

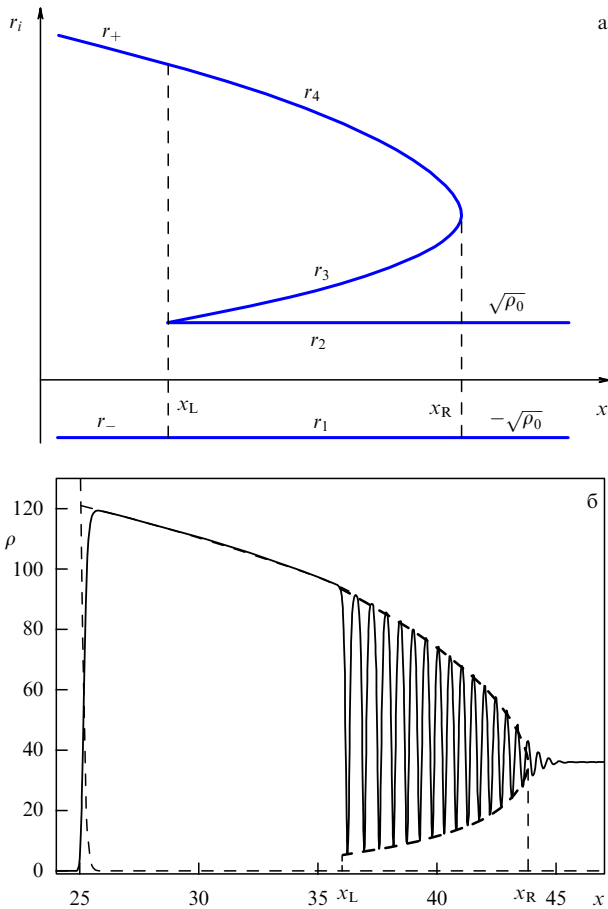


Рис. 18. (а) Диаграмма римановых инвариантов в задаче о равноускоренном поршне. (б) Профиль плотности в конденсате, движущемся под действием равноускоренного поршня. Сплошной кривой показан результат численного расчёта, а штриховой линией показана огибающая согласно аналитической теории.

ростом поршня. Следовательно, $r_+ - \sqrt{\rho_0} = at$ и применение общего решения к течению конденсата на границе с поршнем даёт $w = at^2/2 - [(3/2)r_+ - \sqrt{\rho_0}]t$. После исключения отсюда $t = (r_+ - \sqrt{\rho_0})/a$ мы приходим к общему решению для течения конденсата в виде

$$x - \left(\frac{3}{2}r_+ - \frac{1}{2}\sqrt{\rho_0}\right)t = \frac{1}{a}\sqrt{\rho_0}r_+ - \frac{1}{a}r_+^2. \quad (233)$$

Это решение справедливо во всей области неоднородного течения до момента $t_b = 2\sqrt{\rho_0}/(3a)$, в который профиль $r_+(x)$ приобретает вертикальную касательную в точке $x_b = 2\rho_0/(3a)$ на границе с покоящимся конденсатом. После этого момента опрокидывания возникает волновая структура с ДУВ, распределение римановых инвариантов в которой можно представить диаграммой, показанной на рис. 18а.

Таким образом, нам надо найти решение уравнений Уизема с постоянными значениями римановых инвариантов $r_1 = -\sqrt{\rho_0}$, $r_2 = \sqrt{\rho_0}$, удовлетворяющее условию сшивания r_4 с инвариантом r_+ бездисперсионного решения (233) при $r_3 \rightarrow r_2$. В правой части (233) имеются линейный и квадратичный по r_+ члены. Как и в рассмотренных выше задачах для уравнения КдФ, нам достаточно взять линейную комбинацию выражений $w_i^{(1)} \equiv v_i$ и $w_i^{(2)}$, которые как раз дают такого рода зависимости в

пределе $r_3 \rightarrow r_2$. Коэффициенты этой линейной комбинации подбираются из условия сшивания r_4 с r_+ , и в результате несложного расчёта [74] мы получаем решение в виде

$$x - v_3(r)t = \frac{2}{5a} \left(\rho_0 + \sqrt{\rho_0}v_3(r) - \frac{8}{3}w_3^{(2)}(r) \right), \quad (234)$$

$$x - v_4(r)t = \frac{2}{5a} \left(\rho_0 + \sqrt{\rho_0}v_4(r) - \frac{8}{3}w_4^{(2)}(r) \right).$$

Эти формулы определяют неявным образом зависимости r_3, r_4 от x, t , и их подстановка в (202) даёт профиль плотности в ДУВ, огибающие которого на рис. 18б сопоставляются с результатами численного решения уравнения Гросса–Питаевского.

Важно, что формулы (234) дают возможность определить аналитически основные параметры ДУВ. Например, в солитонном пределе $r_3 = r_2$ на границе $x = x_L(t)$ разность этих формул даёт зависимость r_4 от времени, $r_4 = 5at/4 + \sqrt{\rho_0}/6$, подстановка которой в любую из них приводит к закону движения солитонного края ДУВ:

$$x_L(t) = \frac{5}{36} \frac{\rho_0}{a} + \frac{7}{12} \sqrt{\rho_0} t + \frac{5}{16} at^2. \quad (235)$$

В малоамплитудном пределе $r_3 = r_4$ на границе $x = x_R(t)$ оба уравнения (234) сводятся к одному:

$$x - \frac{2r_4^2 - \rho_0}{r_4} t = \frac{2}{5a} \left(3\rho_0 + 2\sqrt{\rho_0}r_4 - \frac{\rho_0^{3/2}}{r_4} - 4r_4^2 \right),$$

причём граничное значение x_R соответствует максимуму этой функции $x(r_4)$ при фиксированном значении t . Отсюда следует зависимость t от $y = r_R/\sqrt{\rho_0}$:

$$t = \frac{2\sqrt{\rho_0}}{5a} \frac{8y^3 - 2y^2 - 1}{2y^2 + 1}, \quad y \geq 1, \quad (236)$$

и тогда подстановка в предельное выражение для (234) даёт

$$x_R = \frac{2\rho_0}{5a} \frac{8y^4 - 6y^2 + 3}{2y^2 + 1}, \quad (237)$$

т.е. полученные формулы задают в параметрическом виде закон движения малоамплитудного края ДУВ. При $t = t_b$ ($y = 1$) координаты обоих краёв равны координате x_b точки опрокидывания в соответствии с тем, что в асимптотическом подходе Гуревича–Питаевского в момент образования ДУВ имеет исчезающе малую длину. Найденные законы движения краёв ДУВ хорошо согласуются с численным решением уравнения Гросса–Питаевского [74]. Решение задачи об опрокидывании простой волны, распространяющейся в покоящейся среде и имеющей в момент опрокидывания степенной профиль $r_+ \propto (-x)^{1/n}$, может быть найдено аналогичным образом для любого целого значения n (см. [75]).

17. Движение краёв "квазипростых" дисперсионных ударных волн

Характерной чертой волны, образующейся в конденсате движением поршня, являлось то, что она распространялась вглубь покоящегося конденсата, благодаря чему в области ДУВ два римановых инварианта системы Уизема из четырёх были постоянными и только два других изменялись в процессе эволюции. Эта ситуация

аналогична случаю КдФ, рассмотренному в разделе 10, где один инвариант являлся постоянным и два других были переменными. В работе [25] ДУВ такого рода были названы "квазипростыми". Закон движения их краёв в теории уравнения Гросса – Питаевского снова может быть найден способом, аналогичным изложенному в разделе 10. Ввиду близкой аналогии с разделом 10 мы приведём здесь лишь основные факты соответствующей теории [40, 76].

Для определённости мы рассмотрим опрокидывание простой волны, в которой постоянным является инвариант $r_- = u/2 - c = -c_0$, где $c = \sqrt{\rho}$ — локальная скорость звука, принимающая значение $c_0 = \sqrt{\rho_0}$ в невозмущённой области конденсата. Тогда $r_+ = u/2 + c = 2c - c_0$, $v_+ = 3c - 2c_0$ и решение бездисперсионных уравнений (192) можно записать как

$$x - (3c - 2c_0)t = \bar{x}(c - c_0), \tag{238}$$

где $\bar{x}(c - c_0)$ — функция, обратная начальному распределению $c - c_0 = w(x)$ в момент опрокидывания $t = 0$. Сначала будем полагать начальный импульс "положительным", т.е. $c - c_0 > 0$. Это решение граничит с солитонным краем ДУВ, который движется с солитонной скоростью $V_s = (r_+ + r_-) = c$, где мы учли, что вдоль квазипростой ДУВ $r_2 = -r_1 = c_0$ и в точке сшивания $r_4 = r_+ = 2c - c_0$. Следовательно, $dx_L - c dt = 0$ и бездисперсионное решение (238) на границе с ДУВ при $x = x_L$ должно быть совместимо с уравнением

$$\frac{dx_L}{dc} - c \frac{dt}{dc} = 0, \tag{239}$$

где x_L и t рассматриваются как функции локальной скорости звука c , изменяющейся на солитонном крае вследствие эволюции ДУВ. Отсюда после исключения x_L получаем уравнение

$$2z \frac{dt}{dz} + 3t = -\frac{d\bar{x}}{dc}, \quad z = c - c_0, \tag{240}$$

результат решения которого с начальным условием $t(0) = 0$

$$t(z) = -\frac{1}{2z^{3/2}} \int_0^z \sqrt{z} \bar{x}'(z) dz \tag{241}$$

вместе с уравнением

$$x_L(z) = (3z + c_0)t(z) + \bar{x}(z) \tag{242}$$

определяют параметрически закон движения солитонного края ДУВ по монотонному бездисперсионному профилю.

Если профиль не является монотонным и имеет максимум $c_m = c_0 + z_m$, то при $t > t_m = t(z_m)$, когда солитонный край граничит с ветвью $\bar{x}_2(c - c_0)$ бездисперсионного решения, без труда получаем вместо (241), (242) соотношения

$$t(c) = -\frac{1}{2(c - c_0)^{3/2}} \int_0^{\bar{x}_2(c - c_0)} \sqrt{\tilde{c}_0(x)} dx, \tag{243}$$

$$x_L(c) = (3c - c_0)t(c) + \bar{x}_2(c),$$

где $c_0 + \tilde{c}_0(x)$ — начальное распределение локальной скорости звука. При асимптотически больших временах

отсюда находим

$$x_L = c_0 t + \left(\frac{3A}{2}\right)^{2/3} t^{1/3}, \quad A = \int_{-\infty}^0 \sqrt{\tilde{c}_0(x)} dx. \tag{244}$$

В этом асимптотическом пределе амплитуда ДУВ становится много меньше плотности фона ρ_0 и уравнение Гросса – Питаевского может быть приближено для однонаправленного распространения волны уравнением КдФ, так что в соответствующих переменных решение (244) совпадает с (151).

На малоамплитудном крае в этом же асимптотическом режиме $r_3 \approx r_4 \approx r_m = 2c_m - c_0$ и $r_2 = -r_1 = c_0$, так что формула (205) даёт длину волны

$$L = \frac{\pi}{2\sqrt{c_m(c_m - c_0)}}$$

и волновое число $k_m = 4\sqrt{c_m(c_m - c_0)}$. Поэтому групповая скорость движения малоамплитудного края равна

$$\frac{dx_R}{dt} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_m} = 2r_m - \frac{c_0^2}{r_m}. \tag{245}$$

Аналогичным образом в случае отрицательного начального импульса с $\tilde{c}_0(x) = c - c_0 < 0$ с бездисперсионным решением (238) граничит малоамплитудный край, на котором римановы инварианты системы Уизема $r_3 = r_4 = -r_1 = c_0$, $r_2 = 2c - c_0$, где c — локальная скорость звука на этом крае. Поэтому длина волны здесь $L = \pi/(2\sqrt{c_0(c_0 - c)})$, т.е. $k = 4\sqrt{c_0(c_0 - c)}$ и этот край движется по фону с параметрами $\rho = c^2$, $u = 2(c - c_0)$ с групповой скоростью

$$\frac{dx_R}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = u + \frac{c^2 + k^2/2}{\sqrt{c^2 + k^2/4}} = 2c_0 - \frac{c^2}{2c_0 - c}. \tag{246}$$

Условие совместности уравнения (238) с уравнением

$$\frac{dx_R}{dc} - \left(2c_0 - \frac{c^2}{2c_0 - c}\right) \frac{dt}{dc} = 0 \tag{247}$$

приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{(4c_0 - c)(c_0 - c)}{2c_0 - c} \frac{dt}{dc} - \frac{3}{2} t = \frac{1}{2} \bar{x}'(c - c_0),$$

решение которого даёт параметрический закон движения правого края ДУВ:

$$t(c) = \frac{1}{2(4c_0 - c)\sqrt{c_0 - c}} \int_{c_0}^c \frac{(2c_0 - c')\bar{x}'(c' - c_0)}{\sqrt{c_0 - c'}} dc', \tag{248}$$

$$x_R(c) = (3c - 2c_0)t(c) + \bar{x}(c).$$

Его легко переписать с очевидными изменениями для локализованных импульсов с единственным локальным минимумом.

В случае отрицательного начального импульса асимптотическое состояние состоит в основном из тёмных солитонов, причём скорость самого глубокого из них на левом крае ДУВ легко вычислить. Здесь $r_4 = -r_1 = c_0$, $r_2 \approx r_3 \approx r_m = 2c_m - c_0$ и

$$\frac{dx_L}{dt} = \frac{1}{2} \sum r_i \approx r_m = 2c_m - c_0. \tag{249}$$

Число тёмных солитонов, на которые распадается в конечном счёте начальный отрицательный импульс, может быть вычислено тем же способом, каким была выведена формула Карпмана (159) для уравнения

КдФ. Теперь на малоамплитудном крае $k(v_g - V) = k^3 / (4\sqrt{c^2 + k^2/4})$ и $k = 4\sqrt{c_0(c_0 - c)}$. Подстановка этих выражений в общую формулу (155) и замена интегрирования по t интегрированием по c с помощью (248) дают после простых преобразований

$$N = \frac{2}{\pi} \int \sqrt{c_0(c_0 - c(x))} dx, \quad (250)$$

где $c(x)$ — начальное распределение локальной скорости звука в волне. Уравнение Гросса–Питаевского, как и уравнение КдФ, является полностью интегрируемым, так что к нему применим метод обратной задачи рассеяния [62], с помощью которого можно получить [77, 78] общее выражение для числа солитонов, образующихся из импульса с заданными начальными распределениями бездисперсионных римановых инвариантов $r_{\pm}(x)$:

$$N = \frac{1}{\pi} \int \sqrt{(c_0 - r_-(x))(c_0 - r_+(x))} dx. \quad (251)$$

В рассматриваемом нами случае эволюции импульса в виде простой волны $r_-(x) = -c_0$, $r_+(x) = 2c(x) - c_0$ и формула (251) сводится к (250). Следует, однако, отметить, что как формула (159) для уравнения КдФ, так и формула (250) для уравнения Гросса–Питаевского могут быть представлены в виде

$$N = \frac{1}{2\pi} \int k_0(x) dx, \quad (252)$$

где $k_0(x)$ — волновое число на малоамплитудном крае, отвечающее начальному распределению параметров простой волны. По-видимому, формула (252) носит общий характер и она может быть применима также к не полностью интегрируемым уравнениям [79, 80], для которых зависимость $k_0(x)$ находится решением уравнения для сохранения числа волн вдоль траектории малоамплитудного края [81, 82].

18. Опрокидывание кубического профиля в теории Гросса–Питаевского

В общем случае волна, подчиняющаяся уравнению Гросса–Питаевского, опрокидывается так, что профиль одного из римановых инвариантов r_{\pm} бездисперсионного приближения приобретает вертикальную касательную и он может быть приближённо представлен вблизи точки перегиба кубической кривой. Для определённости будем считать, что опрокидывается инвариант r_+ , так что он изменяется в окрестности этой точки очень быстро, тогда инвариант r_- можно считать постоянным. Подходящим преобразованием переменных можно добиться того, чтобы течение конденсата вплоть до момента опрокидывания описывалось формулами

$$x - \left(\frac{3}{2}r_+ + \frac{1}{2}r_-^0\right)t = -r_+^3, \quad r_- = r_-^0 = \text{const}, \quad (253)$$

которые дают решение гидродинамических уравнений (192). При этом, естественно, предполагается, что в интересующей нас области $r_-^0 < r_+$, включая ветвь решения (253) с $r_+ < 0$. При $t > 0$ решение (253) становится многозначным и учёт дисперсии, т.е. решение полного уравнения Гросса–Питаевского, ликвидирует эту многозначность образуя ДУВ. Согласно подходу Гуревича–Питаевского, мы решаем эту задачу [74, 78] в

приближении Уизема, встраивая в бездисперсионное решение (253) решение уравнений Уизема таким образом, чтобы выполнялось равенство $r_1 = r_-^0$ и удовлетворялись граничные условия

$$r_4(x_L(t), t) = r_+(x_L(t), t) \quad \text{при} \quad r_3 = r_2, \quad (254)$$

$$r_2(x_R(t), t) = r_+(x_R(t), t) \quad \text{при} \quad r_3 = r_4.$$

Поскольку в правой части первого уравнения (253) стоит кубическая функция от r_3 , мы удовлетворим всем условиям, взяв решение (210) с $r_1 = r_-^0$ и $w_i = \sum_{k=0}^3 A_k w_i^{(k)}$, где $w_i^{(k)}$ даются формулами (213), (214) и коэффициенты A_k подобраны так, чтобы удовлетворялись условия сшивания. В результате получим

$$x - v_i(r)t = -\frac{32}{35} w_i^{(3)}(r) + \frac{16}{35} w_i^{(2)}(r)r_-^0 + \frac{2}{35} v_i(r)(r_-^0)^2 + \frac{1}{35} (r_-^0)^3, \quad i = 2, 3, 4. \quad (255)$$

Эти формулы определяют неявным образом зависимость инвариантов r_2, r_3, r_4 от x, t . В частности, исследуя предел $r_3 \rightarrow r_4$, нетрудно найти закон движения солитонного края ДУВ:

$$x_L(t) = \frac{1}{2} r_-^0 t - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{5}{3}} t^{3/2}. \quad (256)$$

Закон движения малоамплитудного края

$$x_R = \left(\frac{3}{2}r_2 + \frac{1}{2}r_-^0\right)t(r_2, r_4) - r_2^3 \quad (257)$$

задаётся параметрически, при этом время t зависит от параметров r_2, r_4 как

$$t = \frac{2[8(r_4 - 7r_-^0)(3r_2^2 + 4r_2r_4 + 8r_4^2) - 15r_2^3]}{35(4r_4 - r_2 - 3r_-^0)}, \quad (258)$$

а сами эти параметры связаны соотношением

$$21(r_-^0)^2(4r_4 + r_2) - 10r_-^0(20r_4^2 + 2r_2r_4 + r_2^2) + 16r_4(8r_4^2 - r_2r_4 - r_2^2) + 9r_2^3 = 0. \quad (259)$$

Таким образом, и эта частная задача Гуревича–Питаевского получает достаточно полное аналитическое решение.

19. Заключение

Выше мы довольно подробно изложили теорию Гуревича–Питаевского для ДУВ согласно работе [1] и другим, тесно связанным с нею, статьям. В завершение кратко остановимся на некоторых направлениях дальнейшего развития этой теории.

Прежде всего следует сказать, что одновременно с появлением и развитием теории ДУВ в нелинейной физике происходили другие важные события, связанные с открытием *метода обратной задачи рассеяния* для решения нелинейных волновых уравнений [24, 62, 83]. Фундаментальным фактом этого метода является связь между так называемыми полностью интегрируемыми уравнениями, к которым относятся уравнения КдФ и Гросса–Питаевского, и ассоциированными с ними линейными спектральными задачами. Например, с урав-

нением КдФ связана задача о спектре квантовой частицы, движущейся в потенциале $u(x, t)$, так что, в частности, параметры солитонного решения оказываются связанными с дискретным спектром этого потенциала.

Распространение данного метода на периодические решения уравнения КдФ [84, 85] показало, что инварианты Римана системы Уизема совпадают с концевыми точками запрещённых зон для движения квантовой частицы в соответствующем периодическом потенциале. Это дало возможность, с одной стороны, обобщить метод Уизема для многофазных решений [63], а с другой — распространить его на другие интегрируемые уравнения. В частности, мы воспользовались уравнениями Уизема для теории Гросса – Питаевского, которые были найдены в [60, 61] методами, основанными на полной интегрируемости этого уравнения.

В результате выяснилось, что в теории естественным образом возникают три набора параметров, характеризующих периодические решения: 1) физические параметры v_i , связанные с амплитудой волны и другими имеющими ясный физический смысл величинами; 2) концевые точки λ_i периодической спектральной задачи; 3) римановы инварианты r_i модуляционной системы Уизема для рассматриваемой периодической волны.

В простом случае уравнения КдФ связь между всеми этими параметрами линейна, и именно благодаря этому факту Уизем смог диагонализировать модуляционные уравнения, выведенные для физических параметров, подбирая их подходящие линейные комбинации. В случае уравнения Гросса – Питаевского связь между λ_i и r_i остаётся линейной, так что в нашем изложении мы смогли обойтись без введения λ_i , но физические параметры v_i связаны с r_i (или λ_i) более сложными формулами (201). Это, на первый взгляд техническое, усложнение приобретает принципиальный характер, когда связь между λ_i и r_i становится неоднозначной и одному и тому же решению уравнений Уизема отвечают две разные периодические волны. Такая ситуация характерна для так называемых *не истинно нелинейных уравнений*, в которых нелинейные члены могут обратиться в нуль при некоторой амплитуде волны. Последнее обстоятельство было замечено в [86] для высшего уравнения КдФ, принадлежащего иерархии уравнений, ассоциированных с одной и той же спектральной задачей, и в [87] для модифицированного уравнения КдФ $u_t \pm bu^2u_x + u_{xxx} = 0$, где коэффициент в нелинейном члене имеет максимум или минимум при $u = 0$, в зависимости от знака.

В результате в задаче о распаде ступеньки могут возникать более сложные структуры, чем волны разрежения и модулированные кноидальные волны, известные нам из изложенной выше теории. Классификация таких структур, эволюционирующих из начального разрыва, согласно возникающему в теории внутренних волн в воде уравнению Гарднера $u_t + 6(u \pm \alpha u^2)u_x + u_{xxx} = 0$, дана в [88]. В теории модифицированного нелинейного уравнения Шрёдингера $i\psi_t + (1/2)\psi_{xx} - i(|\psi|^2\psi)_x = 0$, имеющего приложения в нелинейной оптике и к магнитогидродинамическим волнам, использование всех трёх наборов параметров становится необходимым: периодические решения и уравнения Уизема выведены в [89], а распад начального разрыва проанализирован в [90–92]. Наконец, наиболее сложный случай такого рода для ферромагнетика с анизотропией типа "лёгкая плоскость" и эквивалентного ему предела для двухкомпонентных уравнений Гросса – Питаевского изучен в [93, 94].

Помимо развития метода усреднения Уизема, открытие полной интегрируемости важнейших уравнений не-

линейной волновой физики позволило развить другие подходы к теории ДУВ. В частности, в работах [95–100] показано, что решение задачи Гуревича – Питаевского в приближении Уизема может быть также получено как квазиклассический предел точных многосолитонных решений уравнения КдФ. Другой аспект более точной теории ДУВ связан с тем, что подобно тому как воспроизведённое методом усреднения решение (25) линейной задачи является асимптотикой функции Эйри, так и приближение Уизема для опрокидывающихся волн является квазиклассической асимптотикой неких специальных функций, являющихся "эталонными" решениями нелинейных дифференциальных уравнений Пенлеве (см., например, [101–103]). Решения, выраженные через такие специальные функции, являются точными и на малоамплитудном крае ДУВ.

Другое направление исследований связано с обобщением подхода Гуревича – Питаевского для уравнений, не являющихся полностью интегрируемыми. Естественно, рассмотренная выше теория Уизема для возмущённого уравнения КдФ может быть обобщена для довольно широкого класса уравнений, близких к полностью интегрируемым [48, 104]. Однако большое число физических уравнений не подпадает под эту категорию и модуляционные уравнения для периодических решений таких уравнений не обладают римановыми инвариантами ни в каком приближении. Тем не менее общий подход Гуревича – Питаевского справедлив и для них и некоторые важные характеристики ДУВ могут быть вычислены без определения римановых инвариантов.

Первое важное утверждение относительно таких систем, высказанное Гуревичем и Мещеркиным в работе [105], заключалось в том, что при опрокидывании простой волны образуется лишь одна ДУВ и постоянный риманов инвариант бездисперсионного предела переносит своё значение через ДУВ, несмотря на отсутствие сохраняющегося риманова инварианта системы Уизема вдоль ДУВ. Уже этого утверждения достаточно, чтобы вычислить параметры плато, возникающего между двумя волновыми структурами при распаде разрыва.

Следующий важный шаг сделан в работах [81, 82], где было указано, что на границе с простой волной система Уизема сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого даёт соотношение между параметрами ДУВ на этом её крае. Поскольку на малоамплитудном крае одно из модуляционных уравнений — закон сохранения числа волн — заведомо известно, его решение даёт нам связь между волновым числом и фоновой амплитудой волны. На солитонном крае такое уравнение, вообще говоря, отсутствует. Однако можно проверить, что в случае уравнений КдФ и Гросса – Питаевского при распространении импульса в область покоящейся среды с двумя постоянными римановыми инвариантами имеет место уравнение $\tilde{k}_t + \tilde{\omega}_x = 0$, где \tilde{k} является обратной полушириной солитона, а $\tilde{\omega}(\tilde{k})$ получается из линейного закона дисперсии $\omega(k)$ заменой $\tilde{\omega}(\tilde{k}) = -i\omega(i\tilde{k})$ и определяет, согласно старинному замечанию Стокса, опубликованному в виде примечания к § 252 книги [8], скорость солитона: хвосты солитона распространяются с той же скоростью, что и сам солитон, и на хвостах линеаризованные уравнения имеют ту же форму, что и уравнения малоамплитудного гармонического предела.

Предполагая справедливость уравнения $\tilde{k}_t + \tilde{\omega}_x = 0$ в общем случае опрокидывания простых волн, распространяющихся в "неподвижную" однородную среду с двумя постоянными бездисперсионными римановыми

инвариантами, можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение для параметров вдоль солитонного края ДУВ. Этих двух уравнений вполне достаточно, чтобы найти параметры краёв ДУВ, образующейся при распаде разрыва и подчиняющейся неинтегрируемому уравнению, что и было сделано в ряде работ [79, 82, 106–112]. Потребовав совместности полученного таким образом обыкновенного дифференциального уравнения с решением на этой границе бездисперсионных уравнений, мы получаем уравнение для движения края ДУВ по общему профилю простой волны [40, 76, 113].

Новый тип ДУВ может возникнуть при учёте дисперсионных эффектов высших порядков, когда скорость солитона оказывается равной фазовой скорости линейных волн и между ними имеет место резонанс. Общий подход Гуревича – Питаевского применим и в этом случае [114–117].

В настоящей статье мы упоминали приложения задачи Гуревича – Питаевского к волнам на воде, в плазме, бозе-эйнштейновском конденсате, нелинейной оптике. К этому можно добавить наблюдения и теорию ДУВ во внутренних волнах в океане [118] и атмосфере [119], на струях жидкости в вязкой среде [120, 121]. Подход Гуревича – Питаевского к теории ДУВ распространяется также на волны с несколькими пространственными переменными [122, 123] и находит применения в других областях физики, включая квантовую теорию гравитации [101]. Другие примеры ДУВ читатель может найти, например, в обзоре [124], где приведены также необходимые ссылки. Создание теории ДУВ связано, кроме того, с существенным прогрессом в современной математической физике — с некоторыми аспектами математической теории читатель может ознакомиться по обзорам [125, 126].

Подводя итог, можно сказать, что задача Гуревича – Питаевского, понимаемая как общий подход к теории ДУВ на основе модуляционных уравнений Уизема, за прошедшие после публикации работы [1] годы превратилась в активно развивающуюся область нелинейной физики с характерной для этой области постановкой задач, с глубокими математическими методами их решения и ясными физическими представлениями, обогащающими всю физику нелинейных волн.

Выражаю благодарность Л.П. Питаевскому за обсуждения рассмотренных в статье вопросов и полезные замечания.

Список литературы

- Gurevich A V, Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **65** 590 (1973); Gurevich A V, Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **38** 291 (1974)
- Whitham G B *Proc. R. Soc. Lond. A* **283** 238 (1965)
- Scott Russel J "Report on waves", in *Report on the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844* (London: John Murray, 1845) p. 311
- Boussinesq J *CR Acad. Sci.* **72** 755 (1871)
- Lord Rayleigh *Philos. Mag.* **5** 1 257 (1876)
- Korteweg D J, de Vries G *Philos. Mag.* **5** **39** 422 (1895)
- Benjamin T B, Lighthill M J *Proc. R. Soc. Lond. A* **224** 448 (1954)
- Lamb H *Hydrodynamics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932); Пер. на русск. яз.: Ламб Г *Гидродинамика* (М.–Л.: Гостехиздат, 1947)
- Stoker J J *Water Waves; the Mathematical Theory with Applications* (New York: Interscience Publ., 1957); Пер. на русск. яз.: Стокер Дж Дж *Волны на воде: Математическая теория и приложения* (М.: ИЛ, 1959)
- Gardner C S, Morikawa G K "Similarity in the asymptotic behavior of collision-free hydromagnetic waves and water waves", Report No. NYO-9082 (New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 1960)
- Vedenov A A, Velikhov E P, Sagdeev R Z *Nucl. Fusion* **1** 82 (1961); Vedenov A A, Velikhov E P, Sagdeev R Z *Nucl. Fusion* **1** 82 (1961)
- Sagdeev R Z, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 4 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1964) с. 20; Пер. на англ. яз.: Sagdeev R Z, in *Reviews of Plasma Physics* Vol. 4 (Ed. M A Leontovich) (New York: Consultants Bureau, 1966) p. 23
- Алиханов С Г, Белан В Г, Сагдеев Р З *Письма в ЖЭТФ* **7** 405 (1968); Alikhanov S G, Belan V G, Sagdeev R Z *JETP Lett.* **7** 318 (1968)
- Taylor R J, Baker D R, Ikezi H *Phys. Rev. Lett.* **24** 206 (1970)
- Гуревич А В, Парийская Л В, Питаевский Л П *ЖЭТФ* **49** 647 (1965); Gurevich A V, Pariiskaya L V, Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **22** 449 (1966)
- Гуревич А В, Парийская Л В, Питаевский Л П *ЖЭТФ* **54** 891 (1968); Gurevich A V, Pariiskaya L V, Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **27** 476 (1968)
- Гуревич А В, Питаевский Л П *ЖЭТФ* **56** 1178 (1969); Gurevich A V, Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **29** 954 (1969)
- Гуревич А В, Питаевский Л П *ЖЭТФ* **60** 2155 (1971); Gurevich A V, Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **33** 1159 (1971)
- Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Физматлит, 2001); Пер. на англ. яз.: Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Physical Kinetics* (Oxford: Pergamon Press, 1981)
- Abramowitz M, Stegun I A (Eds) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (New York: Dover Publ., 1972); Пер. на русск. яз.: Абрамовиц М, Стилган И *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* (М.: Наука, 1979)
- Whitham G B *Linear and Nonlinear Waves* (New York: Wiley, 1974); Пер. на русск. яз.: Уизем Дж *Линейные и нелинейные волны* (М.: Мир, 1977)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Физматлит, 2001); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)
- Рождественский Б Л, Яненко Н Н *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике* (М.: Наука, 1978); Пер. на англ. яз.: Rozdestvenskii B L, Yanenko N N *Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics* (Providence, RI: American Mathematical Society, 1983)
- Gardner C S et al. *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095 (1967)
- Гуревич А В, Крылов А Л, Мазур Н Г *ЖЭТФ* **95** 1674 (1989); Gurevich A V, Krylov A L, Mazur N G *Sov. Phys. JETP* **68** 966 (1989)
- Гуревич А В, Крылов А Л, Эль Г А *Письма в ЖЭТФ* **54** 104 (1991); Gurevich A V, Krylov A L, El' G A *JETP Lett.* **54** 102 (1991)
- Гуревич А В и др. *Докл. РАН* **323** 876 (1992); Gurevich A V et al. *Sov. Phys. Dokl.* **37** 198 (1992)
- Гуревич А В, Крылов А Л, Эль Г А *ЖЭТФ* **101** 1797 (1992); Gurevich A V, Krylov A L, El' G A *Sov. Phys. JETP* **74** 957 (1992)
- El' G A, Khodorovsky V V *Phys. Lett. A* **182** 49 (1993)
- Кудашев В Р, Шарапов С Е *ТМФ* **85** 205 (1990); Kudashev V R, Sharapov S E *Theor. Math. Phys.* **85** 1155 (1990)
- Кудашев В Р, Шарапов С Е *ТМФ* **87** 40 (1991); Kudashev V R, Sharapov S E *Theor. Math. Phys.* **87** 358 (1991)
- Kudashev V R *Phys. Lett. A* **166** 213 (1992)
- Kudashev V R *Phys. Lett. A* **171** 335 (1992)
- Wright O C *Commun. Pure Appl. Math.* **46** 423 (1993)
- Tian F R *Commun. Pure Appl. Math.* **46** 1093 (1993)
- Царев С П *ДАН СССР* **282** 534 (1985); Tsarev S P *Sov. Math. Dokl.* **31** 488 (1985)
- Grimshaw R H J, Smyth N J. *Fluid Mech.* **169** 429 (1986)
- Smyth N F *Proc. R. Soc. Lond. A* **409** 79 (1987)
- Потёмин Г В *УМН* **43** 211 (1988); Potëmin G V *Russ. Math. Surv.* **43** 252 (1988)
- Камчатнов А М *Phys. Rev. E* **99** 012203 (2019)
- Deift P, Venakides S, Zhou X *Commun. Pure Appl. Math.* **47** 199 (1994)
- Isaord M, Kamchatnov A M, Pavloff N *Phys. Rev. E* **99** 012210 (2019)
- Гуревич А В, Питаевский Л П *ЖЭТФ* **93** 871 (1987); Gurevich A V, Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **66** 490 (1987)
- Karpman V I *Phys. Lett. A* **25** 708 (1967)
- Авилов В В, Кричевер И М, Новиков С П *ДАН СССР* **295** 345 (1987); Avilov V V, Krichever I M, Novikov S P *Sov. Phys. Dokl.* **32** 564 (1987)
- Гуревич А В, Питаевский Л П *ЖЭТФ* **99** 1470 (1991); Gurevich A V, Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **72** 821 (1991)
- Myint S, Grimshaw R *Wave Motion* **22** 215 (1995)
- Камчатнов А М *Physica D* **188** 247 (2004)
- Камчатнов А М *Physica D* **333** 99 (2016)
- Johnson R S J. *Fluid Mech.* **42** 49 (1970)
- Gross E P *Nuovo Cimento* **20** 454 (1961)

52. Питаевский Л П *ЖЭТФ* **40** 646 (1961); Pitaevskii L P *Sov. Phys. JETP* **13** 451 (1961)
53. Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S *Rev. Mod. Phys.* **71** 463 (1999)
54. Питаевский Л П *УФН* **168** 641 (1998); Pitaevskii L P *Phys. Usp.* **41** 569 (1998)
55. Таланов В И *Письма в ЖЭТФ* **2** 218 (1965); Talanov V I *JETP Lett.* **2** 138 (1965)
56. Kelley P L *Phys. Rev. Lett.* **15** 1005 (1965)
57. Benney D J, Newell A C *J. Math. Phys.* **46** 133 (1967)
58. Боголюбов Н Н *Изв. АН СССР. Сер. физ.* **11** 77 (1947); *УФН* **93** 552 (1967); Bogolubov N J. *Phys. USSR* **11** 23 (1947)
59. Tsuzuki T *J. Low Temp. Phys.* **4** 441 (1971)
60. Forest M G, Lee J E, in *Oscillation Theory, Computation, and Methods of Compensated Compactness* Vol. 2 (The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, Vol. 2, Eds C Dafermos et al.) (New York: Springer-Verlag, 1986) p. 35
61. Павлов М В *ТМФ* **71** 351 (1987); Pavlov M V *Theor. Math. Phys.* **71** 584 (1987)
62. Захаров В Е, Шабат А Б *ЖЭТФ* **64** 1627 (1973); Zakharov V E, Shabat A B *Sov. Phys. JETP* **37** 823 (1973)
63. Flaschka H, Forest M G, McLaughlin D W *Commun. Pure Appl. Math.* **33** 739 (1980)
64. Гуревич А В, Крылов А Л *ЖЭТФ* **92** 1684 (1987); Gurevich A V, Krylov A L *Sov. Phys. JETP* **65** 944 (1987)
65. El G A et al. *Physica D* **87** 186 (1995)
66. Xu G et al. *Phys. Rev. Lett.* **118** 254101 (2017)
67. Hakim V *Phys. Rev. E* **55** 2835 (1997)
68. Leszczyszyn A M et al. *Phys. Rev. A* **79** 063608 (2009)
69. Engels P, Atherton C *Phys. Rev. Lett.* **99** 160405 (2007)
70. Kamchatnov A M, Gammal A, Kraenkel R A *Phys. Rev. A* **69** 063605 (2004)
71. Hoefler M A et al. *Phys. Rev. A* **74** 023623 (2006)
72. Wan W, Jia S, Fleischer J W *Nat. Phys.* **3** 46 (2007)
73. Hoefler M A, Ablowitz M J, Engels P *Phys. Rev. Lett.* **100** 084504 (2008)
74. Камчатнов А М, Корнеев С В *ЖЭТФ* **137** 191 (2010); Kamchatnov A M, Korneev S V *J. Exp. Theor. Phys.* **110** 170 (2010)
75. Камчатнов А М *ЖЭТФ* **154** 1016 (2018); Kamchatnov A M *J. Exp. Theor. Phys.* **127** 903 (2018)
76. Камчатнов А М *ТМФ* **202** 415 (2020); Kamchatnov A M *Theor. Math. Phys.* **202** 363 (2020)
77. Jin S, Levermore C D, McLaughlin D W *Commun. Pure Appl. Math.* **52** 613 (1999)
78. Kamchatnov A M, Kraenkel R A, Umarov B A *Phys. Rev. E* **66** 036609 (2002)
79. El G A et al. *Phys. Rev. A* **76** 053813 (2007)
80. El G A, Grimshaw R H J, Smyth N F *Physica D* **237** 2423 (2008)
81. Тюрина А В, Эль Г А *ЖЭТФ* **115** 1116 (1999); Tyurina A V, El' G A *J. Exp. Theor. Phys.* **88** 615 (1999)
82. El G A *Chaos* **15** 037103 (2005)
83. Lax P D *Commun. Pure Appl. Math.* **21** 467 (1968)
84. Новиков С П *Функциональный анализ и его приложения* **8** (3) 54 (1974); Novikov S P *Funct. Anal. Its Appl.* **8** 236 (1974)
85. Дубровин Б А, Матвеев В В, Новиков С П *УМН* **31** (1) 55 (1976); Dubrovin B A, Matveev V B, Novikov S P *Russ. Math. Surv.* **31** (1) 59 (1976)
86. Pierce V U, Tian F-R *Commun. Math. Sci.* **4** 799 (2006)
87. Marchant T R *Wave Motion* **45** 540 (2008)
88. Kamchatnov A M et al. *Phys. Rev. E* **86** 036605 (2012)
89. Камчатнов А М *ЖЭТФ* **97** 144 (1990); Kamchatnov A M *Sov. Phys. JETP* **70** 80 (1990)
90. Гуревич А В, Крылов А Л, Эль Г А *ЖЭТФ* **102** 1524 (1992); Gurevich A V, Krylov A L, El' G A *Sov. Phys. JETP* **75** 825 (1992)
91. Ivanov S K, Kamchatnov A M *Phys. Rev. A* **96** 053844 (2017)
92. Kamchatnov A M *J. Phys. Commun.* **2** 025027 (2018)
93. Камчатнов А М *ЖЭТФ* **102** 1606 (1992); Kamchatnov A M *Sov. Phys. JETP* **75** 868 (1992)
94. Ivanov S K et al. *Phys. Rev. E* **96** 062202 (2017)
95. Lax P D, Levermore C D *Commun. Pure Appl. Math.* **36** 253 (1983)
96. Lax P D, Levermore C D *Commun. Pure Appl. Math.* **36** 571 (1983)
97. Lax P D, Levermore C D *Commun. Pure Appl. Math.* **36** 809 (1983)
98. Venakides S *Commun. Pure Appl. Math.* **38** 125 (1985)
99. Venakides S *Commun. Pure Appl. Math.* **38** 883 (1985)
100. Мазур Н Г *ТМФ* **106** 44 (1996); Mazur N G *Theor. Math. Phys.* **106** 35 (1996)
101. Сулейманов Б И *ЖЭТФ* **105** 1089 (1994); Suleimanov B I *J. Exp. Theor. Phys.* **78** 583 (1994)
102. Гарифуллин Р Н, Сулейманов Б И *ЖЭТФ* **137** 149 (2010); Garifullin R N, Suleimanov B I *J. Exp. Theor. Phys.* **110** 133 (2010)
103. Claeys T, Grava T *Commun. Pure Appl. Math.* **63** 203 (2010)
104. Larré P-É, Pavloff N, Kamchatnov A M *Phys. Rev. B* **86** 165304 (2012)
105. Гуревич А В, Мещеркин А Р *ЖЭТФ* **87** 1277 (1984); Gurevich A V, Meshcherkin A R *Sov. Phys. JETP* **60** 732 (1984)
106. El G A, Grimshaw R H J, Smyth N F *Phys. Fluids* **18** 027104 (2006)
107. Esler J G, Pearce J D *J. Fluid Mech.* **667** 555 (2011)
108. Lowman N K, Hoefler M A *J. Fluid Mech.* **718** 524 (2013)
109. Hoefler M A *J. Nonlinear Sci.* **24** 525 (2014)
110. Congy T, Kamchatnov A M, Pavloff N *SciPost Phys.* **1** 006 (2016)
111. Hoefler M A, El G A, Kamchatnov A M *SIAM J. Appl. Math.* **77** 1352 (2017)
112. An X, Marchant T R, Smyth N F *Proc. R. Soc. Lond. A* **474** 20180278 (2018)
113. Ivanov S K, Kamchatnov A M *Phys. Fluids* **31** 057102 (2019)
114. Smyth N F *Physica D* **333** 301 (2016)
115. El G A, Smyth N F *Proc. R. Soc. Lond. A* **472** 20150633 (2016)
116. Hoefler M A, Smyth N F, Sprenger P *Stud. Appl. Math.* **142** 219 (2019)
117. Baqer S, Smyth N F *Physica D* **403** 132334 (2020)
118. Helfrich K R, Melville W K *Annu. Rev. Fluid Mech.* **38** 395 (2006)
119. Porter A, Smyth N F *J. Fluid Mech.* **454** 1 (2002)
120. Maiden M D et al. *Phys. Rev. Lett.* **116** 174501 (2016)
121. Maiden M D et al. *J. Fluid Mech.* **883** A10 (2020)
122. Богаевский В Н *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* **30** 1487 (1990); Bogaevskii V N *USSR Comput. Math. Math. Phys.* **30** (5) 148 (1990)
123. Ablowitz M J, Biondini G, Rumanov I J. *Phys. A* **51** 215501 (2018)
124. El G A, Hoefler M A *Physica D* **333** 11 (2016)
125. Доброхотов С Ю, Маслов В П, в сб. *Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики* Т. 15 (М.: ВИНТИ СССР, 1980) с. 3
126. Дубровин Б А, Новиков С П *УМН* **44** (6) 29 (1989); Dubrovin B A, Novikov S P *Russ. Math. Surv.* **44** (6) 35 (1989)

Gurevich–Pitaevskii problem and its development

A.M. Kamchatnov

Institute of Spectroscopy, Russian Academy of Sciences, ul. Fizicheskaya 5, 108840 Troitsk, Moscow, Russian Federation; Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Institutskii per. 9, 141701 Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation
E-mail: kamch@isan.troitsk.ru

We present an introduction to the theory of dispersive shock waves in the framework of the approach proposed by Gurevich and Pitaevskii (*Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, Vol. 65, p. 590 (1973) [*Sov. Phys. JETP*, Vol. 38, p. 291 (1974)]) based on Whitham's theory of modulation of nonlinear waves. We explain how Whitham equations for a periodic solution can be derived for the Korteweg–de Vries equation and outline some elementary methods to solve them. We illustrate this approach with solutions to the main problems discussed by Gurevich and Pitaevskii. We consider a generalization of the theory to systems with weak dissipation and discuss the theory of dispersive shock waves for the Gross–Pitaevskii equation.

Keywords: soliton, dispersive shock wave, Bose–Einstein condensate, nonlinear optics, Gurevich–Pitaevskii problem, Whitham method

PACS numbers: 03.75.Kk, 03.75.Lm, 05.45.Yv, **42.65.–k**, 42.65.Tg, 47.35.Fg, 67.85.Fg

Bibliography — 126 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **191** (1) 52–87 (2021)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFN.2020.08.038815>

Received 21 July 2020

Physics – Uspekhi **64** (1) (2021)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFN.2020.08.038815>