

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

## Тожественность механизмов плазменных неустойчивостей Вайбеля и альвеновской циклотронной

А.С. Дзарахохова, Н.П. Зарецкий, А.В. Максимычев,  
Л.И. Меньшиков, П.Л. Меньшиков

*Показано, что в плазме с анизотропным распределением частиц по скоростям, находящейся в магнитном поле, в системе отсчёта, вращающейся вместе с частицами, например ионами, возникает неустойчивость Вайбеля, которая при рассмотрении в неподвижной системе отсчёта известна как альвеновская циклотронная неустойчивость.*

**Ключевые слова:** неустойчивость Вайбеля, альвеновская циклотронная неустойчивость, филаментация

PACS number: 52.35. – g

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.02.038727>

## Содержание

1. Введение (658).
  2. Неустойчивость Вайбеля (659).
  3. Альвеновская ионно-циклотронная неустойчивость (660).  
3.1. Лабораторная система отсчёта К. 3.2. Вращающаяся система отсчёта К'.
  4. Заключение (662).
  5. Приложение. Строгое рассмотрение альвеновской ионно-циклотронной волны во вращающейся системе отсчёта (662).
- Список литературы (663).

## 1. Введение

Для определённости будем рассматривать альвеновскую ионно-циклотронную неустойчивость (АИЦН), представляющую собой одну из разновидностей электромагнитных (непотенциальных) неустойчивостей плазмы в магнитном поле.

Пусть ионы с массой  $M$ , зарядом  $q = Ze$  и объёмной концентрацией  $n_i$ , нейтрализованные по заряду электронами, имеют нулевую продольную (вдоль вектора  $\mathbf{B}_0$  магнитного поля в плазме, далее это ось  $z$ ) и одинаково-

вую поперечную скорость

$$u \ll c. \quad (1)$$

Здесь  $e$  и  $c$  — элементарный заряд и скорость света соответственно. Согласно результатам теории [1–3] и экспериментов [4–8] (см. также обзор [9, 10]) АИЦН играет основную роль при большой величине безразмерного параметра

$$\beta = \frac{4\pi n_i (Mu^2/2)}{B_0^2}. \quad (2)$$

Избыток энергии поперечного движения приводит к усилению распространяющейся вдоль магнитного поля ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$ ) альвеновской ионной циклотронной (АИЦ) волны, возникающей случайным образом в результате флуктуаций, поскольку в этом случае излучение вращающимися ионами АИЦ-волн преобладает над их поглощением [11]. Характерным следствием АИЦН является изотропизация распределения ионов по скоростям, что и было установлено в опытах с открытыми ловушками [4–8]. Подавление АИЦН требует также принятия специальных мер в токамаках [12–14].

Дисперсионное уравнение, определяющее зависимость частоты АИЦ-волны от волнового вектора  $\mathbf{k}$ , имеет вид

$$\tau \left[ 1 + \frac{\beta}{(\Omega - 1)^2} \right] + \frac{\Omega^2}{\Omega - 1} = 0, \quad (3)$$

где введены безразмерные величины

$$\tau = \left( \frac{kc}{\omega_i} \right)^2, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_{Bi}}$$

и учтено условие квазинейтральности плазмы  $n_e = Zn_i$ , согласно которому выполняется соотношение

$$\frac{\omega_e^2}{\omega_{Be}} = \frac{\omega_i^2}{\omega_{Bi}}.$$

А.С. Дзарахохова<sup>(1)</sup>, Н.П. Зарецкий<sup>(2)</sup>, А.В. Максимычев<sup>(1)</sup>,  
Л.И. Меньшиков<sup>(1,2,\*)</sup>, П.Л. Меньшиков<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет),  
Институтский пер. 9, 141701 Долгопрудный, Московская обл.,  
Российская Федерация

<sup>(2)</sup> Национальный исследовательский центр  
"Курчатовский институт",  
пл. Академика Курчатова 1, 123182 Москва,  
Российская Федерация

E-mail: <sup>(\*)</sup>mleonid1954@mail.ru

Статья поступила 5 сентября 2019 г.,  
после доработки 29 января 2020 г.

Здесь  $n_e$  — объёмная концентрация электронов,  $\omega_{Bi} = = qB_0/Mc$ ,  $\omega_i = \sqrt{4\pi n_i q^2/M}$  — ларморовская и плазменная частоты ионов соответственно,  $\omega_{Be} = eB_0/mc$ ,  $\omega_e = = \sqrt{4\pi n_e e^2/m}$  — аналогичные величины для электронов,  $m$  — масса электрона.

При  $\beta \rightarrow 0$  выражение (3) соответствует движущейся вдоль направления магнитного поля АИЦ-волне с постоянной амплитудой. В частности, при  $\omega \ll \omega_{Bi}$  получаем известный закон дисперсии для АИЦ-волн низкой частоты:  $\omega = u_A k$ , где  $u_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$ ,  $\rho \approx Mn_i$  — плотность вещества плазмы. Последнее слагаемое в выражении в квадратных скобках уравнения (3) придаёт этой волне свойство неустойчивости. В результате её амплитуда экспоненциально возрастает. В предельном случае

$$\beta \ll 1 \tag{4}$$

это ответственное за неустойчивость слагаемое становится заметным при  $\omega \approx \omega_{Bi}$ , что соответствует

$$\Omega \approx 1. \tag{5}$$

Следовательно, АИЦН развивается преимущественно в области (5), поэтому решение ищем в виде  $\Omega = 1 + \Delta$ , где  $|\Delta| \ll 1$ . В результате для неустойчивой ветви колебаний получаем

$$\Omega \approx 1 + i\sqrt{\beta - \frac{1}{4\tau^2}}. \tag{6}$$

Формула (6) верна при условии  $\tau \gg 1$ . Из неё видно, что наибольшей величины инкремент нарастания АИЦН достигает при  $\tau \gg 1/\sqrt{\beta}$  и составляет

$$\gamma = \sqrt{\beta}\omega_{Bi} = \frac{u\omega_i}{c\sqrt{2}}. \tag{7}$$

Отсюда следует, что в большинстве представляющих практический интерес случаев АИЦН развивается быстро по сравнению с временем ион-ионных столкновений.

В литературе неустойчивость Вайбеля (НВ) и АИЦН рассматриваются отдельно друг от друга и считаются разными по природе (см., например, [15, 16]). В частности, в известных авторам книгах по физике плазмы эти две неустойчивости рассматриваются в разных, не связанных между собой разделах. Покажем, что механизмы НВ и АИЦН тождественны.

## 2. Неустойчивость Вайбеля

Известно [17], что в отсутствие магнитного поля, т.е. при  $\mathbf{B}_0 = 0$ , в плазме с анизотропным распределением частиц возникает НВ. Простое и наглядное объяснение механизма этой неустойчивости дано в [18, 19]. Кратко воспроизведём приведённые там выводы, поскольку далее они нам понадобятся. Для определённости будем рассматривать движение ионов, хотя НВ развивается и на электронах, причём гораздо более быстро.

Пусть в плазме вдоль оси  $z$  движется электромагнитная волна с электрическим и магнитным полями (рис. 1), связанными друг с другом законом электромагнитной индукции Фарадея:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = E(t) (\cos \eta, 0, 0), \\ \mathbf{B} = \frac{kc}{\omega} E(t) (0, \cos \eta, 0). \end{cases} \tag{8}$$

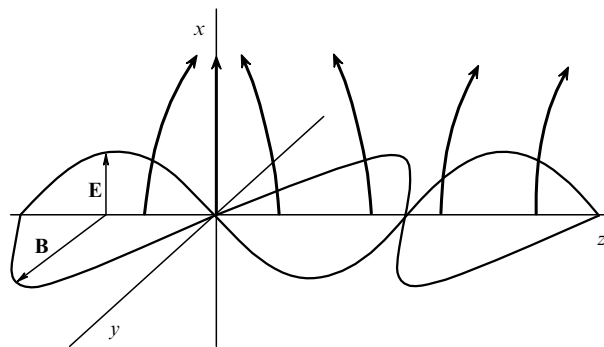


Рис. 1. Неустойчивость Вайбеля.

Здесь  $\eta = kz - \omega t$ ,  $E(t)$  — амплитуда волны, медленно изменяющаяся по сравнению с частотой  $\omega$ .

Детальное описание многих плазменных неустойчивостей может быть получено на основе уравнения Власова для функции распределения частиц  $f(\mathbf{r}, \mathbf{V}_p, t)$ , которая задаёт число частиц  $dN$ , находящихся в элементе объёма  $d^3r$  и имеющих скорости  $\mathbf{V}_p$  в интервале  $d^3V_p$ ,  $dN = f(\mathbf{r}, \mathbf{V}_p, t) d^3r d^3V_p$ . Если она известна, то плотность частиц  $n(\mathbf{r}, t)$  и плотность создаваемого ими электрического тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  в данной точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  выражаются как

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, t) &= \int f(\mathbf{r}, \mathbf{V}_p, t) d^3V_p, \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= q \int \mathbf{V}_p f(\mathbf{r}, \mathbf{V}_p, t) d^3V_p. \end{aligned} \tag{9}$$

Далее будет достаточно рассматривать функции вида

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{V}_p, t) = n(\mathbf{r}, t) \delta[\mathbf{V}_p - \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)].$$

В этом случае уравнение Власова равносильно обычному уравнению движения (см., например, [20, 21])

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{q}{M} \mathbf{E} + \frac{q}{Mc} (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

(здесь и далее будем считать ионы нерелятивистскими).

Следуя [18, 19], рассмотрим случай, когда до появления волны ионы имеют одинаковую и направленную вдоль оси  $x$  скорость  $\mathbf{u}$ . С появлением волны скорости ионов немного изменяются:  $\mathbf{V} = \mathbf{u} + \delta\mathbf{V}$ , где  $\delta\mathbf{V}$  удовлетворяет линеаризованному по амплитуде волны уравнению

$$\delta\dot{\mathbf{V}} = \frac{q}{M} \mathbf{E} + \frac{q}{Mc} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \tag{10}$$

В проекциях на оси (10) имеет вид

$$\begin{cases} \delta\dot{V}_x = \frac{q}{M} E \cos \eta, \\ \delta\dot{V}_y = 0, \\ \delta\dot{V}_z = \frac{qku}{Mc} E \cos \eta. \end{cases} \tag{11}$$

Запишем закон сохранения числа ионов, причём сразу в линеаризованном по амплитуде волны виде:

$$\frac{\partial \delta n_i}{\partial t} + n_i \frac{\partial \delta V_z}{\partial z} = 0.$$

Дифференцируя это уравнение по времени, с учётом последнего уравнения в системе (11) получаем

$$\frac{\partial^2 \delta n_i}{\partial t^2} - \frac{q n_i k^2 u}{M \omega} E(t) \sin \eta = 0.$$

Будем искать решение в виде  $E(t) \propto \exp(-i\Omega t)$ , что для изменения плотности ионов, вызванного АИЦ, даёт величину

$$\delta n_i = -\frac{q n_i k^2 u}{M \omega \Omega^2} E(t) \sin \eta. \quad (12)$$

Таким образом, в согласии с рис. 1, возникают слои с избытком и недостатком ионов, поэтому НВ иногда называют филаментационной неустойчивостью.

Вдоль оси  $x$  возникает дополнительный электрический ток с плотностью  $\delta \mathbf{j} = (\delta j_x, 0, 0)$ ,

$$\delta j_x = q u \delta n_i = -\frac{q^2 n_i k^2 u^2}{M \omega \Omega^2} E(t) \sin \eta. \quad (13)$$

В случае (1) нерелятивистских ионов можно пренебречь током смещения, поэтому

$$\nabla \times \mathbf{B} \approx \frac{4\pi}{c} \delta \mathbf{j}. \quad (14)$$

Отсюда с учётом (8) и (13) получаем соотношение

$$\frac{k^2 c}{\omega} E(t) \sin \eta \left(1 + \frac{\gamma^2}{\Omega^2}\right) = 0.$$

Следовательно, возникает неустойчивость с инкрементом (7).

Из проведённого расчёта видно, что основную роль в наступлении НВ играет наличие магнитного, а не электрического поля волны, которое, кроме того, может быть экранировано электронами. Необходимым условием возникновения НВ является анизотропия функции распределения частиц по скоростям. Поэтому НВ возникнет и в результате образования флуктуации поля вида  $\mathbf{E} = 0$ ,  $\mathbf{B} \neq 0$ , что в рассмотренном выше примере соответствует случаю  $\omega = 0$ . Так, в [17–19] рассматривалось поле этого типа с  $\mathbf{B} = B(t)(0, \cos(kz), 0)$ . В этом случае вместо последнего уравнения в (11) получим

$$\delta \dot{V}_z = \frac{q u}{M c} B(t) \cos(kz), \quad (15)$$

а вместо (12) — уравнение

$$\delta n_i = -\frac{q n_i k u}{M c \Omega^2} B(t) \sin(kz). \quad (16)$$

Отсюда снова следует вывод о развитии НВ с инкрементом (7).

### 3. Альвеновская ионно-циклотронная неустойчивость

#### 3.1. Лабораторная система отсчёта К

Рассмотрим случай (4). Имея в виду соотношение (5), для простоты расчётов исследуем резонансный случай

$$\omega = \omega_{B_i}. \quad (17)$$

Теперь

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \quad (18)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}_1$  — малые по сравнению с  $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$  электрическое и магнитное поля АИЦ-волны с проекциями на оси  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  системы К, равными

$$E_X = E(t) \cos \eta, \quad E_Y = E(t) \sin \eta, \quad E_Z = 0, \quad (19)$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{k c}{\omega} E(t) (-\sin \eta, \cos \eta, 0). \quad (20)$$

Здесь, как и в разделе 2,  $\eta = kz - \omega t$ ,  $E(t)$  — амплитуда АИЦ-волны, медленно изменяющаяся по сравнению с частотой  $\omega$ . Соответствующее условие имеет вид

$$\frac{\omega E}{\dot{E}} \sim \frac{\omega}{\gamma} \gg 1.$$

В случае (4) оно выполняется.

При условии (17) поля (19), (20) вращаются вместе с ионами с такой же угловой скоростью. В отсутствие АИЦ-волны проекции скорости отдельного иона на оси  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  равны

$$\mathbf{u}(t, \theta) = u(\sin \chi, -\cos \chi, 0), \quad (21)$$

где  $\chi = -\omega t + \theta$ ,  $\theta$  — угол между осью  $x$  и скоростью иона в момент  $t = 0$ ,  $u = \omega \rho_0$ ,  $\rho_0$  — радиус орбит ионов. Будем сначала считать, что угол  $\theta$  для всех ионов также одинаков. Такое движение ионов описывается функцией распределения

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{V}_p, t) = n_i \delta(V_{px} - u \sin \chi) \delta(V_{py} + u \cos \chi) \delta(V_{pz}).$$

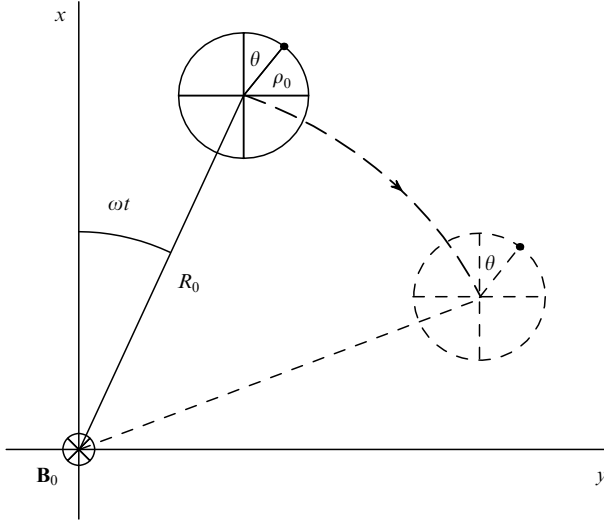
Заряды ионов и электронов взаимно компенсируются, поэтому суммарная плотность зарядов равна нулю,

$$\rho_{\text{tot}} = 0. \quad (22)$$

Размеры ларморовских орбит электронов пренебрежимо малы по сравнению с  $\rho_0$ , поэтому они практически не перемещаются в плоскости  $XY$ . Следовательно, плотность тока ионов, перпендикулярного внешнему магнитному полю  $\mathbf{B}_0$ , не компенсируется электронами. В системе К, согласно (9), плотность тока ионов  $\mathbf{j} = q n_i \mathbf{u}(t, \theta)$ . Соответственно, 4-вектор плотности тока в плазме в системе К даётся выражением

$$j^i = (\rho_{\text{tot}} c, \mathbf{j}) = q n_i u (0, \sin \chi, -\cos \chi, 0). \quad (23)$$

С появлением АИЦ-волны скорости ионов немного изменяются:  $\mathbf{V} = \mathbf{u} + \delta \mathbf{V}$ , где изменения скоростей ионов  $\delta \mathbf{V}$  являются величинами первого порядка по амплитуде АИЦ-волны. Поскольку  $u_Z = 0$ , это же верно и для самой компоненты скорости  $V_Z$ . В общем случае плотность ионов также изменяется:  $n_i(\mathbf{r}, t) = n_i + \delta n_i(\mathbf{r}, t)$ . Электроны свободно передвигаются вдоль силовых линий магнитного поля и за время  $\tau_e \sim 1/\omega_e$  компенсируют изменения плотности заряда ионов. Характерные времена рассматриваемых здесь процессов,  $\sim 1/\omega_{B_i}$ , на много порядков превышают  $\tau_e$ , поэтому условие квазинейтральности (22) выполняется с большим запасом не только в отсутствие АИЦ-волны, но и при её наличии.



**Рис. 2.** Движение одного из ионов во вращающейся системе координат  $K'$ . Положение его ларморовской орбиты в следующий момент времени показано штриховыми линиями. Угол  $\theta$  со временем не изменяется. Изображена также ларморовская орбита радиусом  $\rho_0$ , по которой ион движется в системе  $K$ .

### 3.2. Вращающаяся система отсчёта $K'$

Из лабораторной системы отсчёта  $K$  перейдём в систему отсчёта  $K'$ , вращающуюся вокруг оси  $Z$  вместе с ионами (рис. 2), т.е. с угловой скоростью, задаваемой вектором  $\omega = -\omega \hat{Z}$ , где  $\hat{Z}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $Z$ . Детально этот переход обсуждается в приложении. Здесь будем удерживать слагаемые  $\sim 1/c$  и пренебрегать релятивистскими величинами более высокого порядка по  $1/c$ . Необходимо учесть также возникающие в  $K'$  силы инерции — центробежную и кориолисову. В результате с указанной погрешностью получаем уравнение движения во вращающейся системе координат:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \left( \mathbf{E}' + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \right) + 2M(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + M\omega^2 \boldsymbol{\rho}. \quad (24)$$

Здесь и далее векторы, записанные в проекциях на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  системы  $K'$ , обозначаем строчными буквами, например,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — радиус-вектор иона,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  — его скорость,  $\boldsymbol{\rho} = (x, y, 0)$ , а поля, как обычно, обозначаем прописными буквами:

$$\mathbf{E}' \approx \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' \approx \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{V}_0 \times \mathbf{E}, \quad (25)$$

где  $\mathbf{V}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\omega \hat{Z} \times \boldsymbol{\rho}$  — линейная скорость движения системы  $K'$  относительно  $K$  в точке  $\mathbf{r}$ , в которой находится ион.

Как и в разделе 2, далее учитываем только линейные по амплитуде АИЦ-волны слагаемые и отбрасываем величины более высокого порядка малости. Тогда из (24) и (25) получаем

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{M} E_x - \omega v_y, \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{M} E_y + \omega v_x, \\ \frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{Mc} [B_{1y}(v_x + \omega y) - B_{1x}(v_y - \omega x)]. \end{cases} \quad (26)$$

Входящие сюда проекции полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}_1$  на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  системы  $K'$  выражаются как

$$\begin{cases} E_x = E_X \cos \varphi + E_Y \sin \varphi = E(t) \cos(kz), \\ E_y = -E_X \sin \varphi + E_Y \cos \varphi = E(t) \sin(kz), \\ E_z = E_Z = 0, \end{cases} \quad (27)$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{kcE}{\omega} (-\sin(kz), \cos(kz), 0), \quad (28)$$

где  $\varphi = -\omega t$  — угол поворота  $K'$  относительно  $K$ .

К АИЦН приводят возмущения скоростей ионов  $\delta\mathbf{v} = (d\xi_x/dt, d\xi_y/dt, dz/dt)$ , вызванные электромагнитным полем самой АИЦ-волны. На основании рис. 2 запишем:

$$x = R_0 \cos(\omega t) + \rho_0 \cos \theta + \xi_x,$$

$$y = R_0 \sin(\omega t) + \rho_0 \sin \theta + \xi_y.$$

Отсюда получаем

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega R_0 \sin(\omega t) + \delta v_x,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \omega R_0 \cos(\omega t) + \delta v_y,$$

где  $\delta v_x = d\xi_x/dt$ ,  $\delta v_y = d\xi_y/dt$ . Тогда, отбрасывая величины второго порядка малости по амплитуде АИЦ-волны, приводим уравнения (26) к виду

$$\begin{cases} \frac{d\delta v_x}{dt} = \frac{q}{M} E \cos(kz) - \omega \delta v_y, \\ \frac{d\delta v_y}{dt} = \frac{q}{M} E \sin(kz) + \omega \delta v_x, \\ \frac{dv_z}{dt} = -\frac{qku}{M\omega} E \sin(kz - \theta). \end{cases} \quad (29)$$

Так же как и в разделе 2, с учётом (29) для изменения объёмной концентрации ионов получаем выражение

$$\delta n_i = -\frac{qn_i k^2 u}{M\omega\Omega^2} E \cos(kz - \theta). \quad (30)$$

В плоскостях  $z = \text{const}$  плазма остаётся однородной и при наличии АИЦ-волны. Это видно и из первых двух уравнений (29), согласно которым  $\delta v_x$  и  $\delta v_y$  не зависят от координат  $x$  и  $y$ . Следовательно, движение частиц по этим координатам не вносит вклада в изменение их плотности.

При переходе из  $K'$  в  $K$  толщины  $\Delta z$  плазменных слоёв, перпендикулярных оси вращения, не изменяются даже с учётом релятивистских явлений. По этой причине формула (30) верна и в лабораторной системе  $K$ . В системе  $K$  в момент времени  $t$  ионы движутся со скоростью (21). С учётом обсуждавшегося выше свойства квазинейтральности плазмы, так же как в случае (23), заключаем, что изменение 4-вектора плотности тока в системе  $K$  имеет вид

$$\delta j^i = q\delta n_i u (0, \sin \chi, -\cos \chi, 0).$$

Отсюда находим его компоненты в системе  $K'$  (см. приложение):

$$(\delta j^i)' = \sum_{k=0}^3 \frac{\partial x^i}{\partial X^k} \delta j^k = q\delta n_i u (0, \sin \theta, -\cos \theta, 0).$$

Таким образом, проекции вектора плотности электрического тока на пространственные орты системы  $K'$  выражаются как

$$\delta \mathbf{j} = q \delta n_i u (\sin \theta, -\cos \theta, 0). \quad (31)$$

Добавим, что ввиду квазинейтральности в нашем случае всегда  $E_z = E_Z = 0$ .

Сопоставим теперь АИЦН и НВ. Их родственность видна уже из сравнения формул (15), (16) с последним уравнением (29) и (30). Отсюда ясно, что при развитии АИЦН происходит филаментация, т.е. образование сгустков и разрежений в плазме, и изотропизация частиц по направлениям скоростей.

При количественном сопоставлении этих неустойчивостей нужно считать, что частицы равномерно распределены по углу  $\theta$ . Действительно, в предельном случае  $B_0 \rightarrow 0$  пучок частиц становится однородным по плотности, как и в примере, рассмотренном в разделе 2, а радиус кривизны траекторий частиц  $\rho_0$  становится бесконечным, т.е. их траектории выпрямляются. Усредняя плотность тока (31) по углу  $\theta$ , получаем

$$\delta j_x = -\frac{\omega_i^2 k^2 u}{8\pi\omega\Omega^2} E \sin(kz), \quad \delta j_y = \frac{\omega_i^2 k^2 u}{8\pi\omega\Omega^2} E \cos(kz). \quad (32)$$

Учитывая выражение (32), запишем в системе  $K'$  четвёртое уравнение Максвелла. В системе  $K$  в этом уравнении вследствие (1) можно пренебречь током смещения. Точнее, это можно сделать при условии [17]

$$kc \gg \omega_i. \quad (33)$$

Отметим, что наименьшим пространственным масштабом, характерным для альвеновских волн, является циклотронный радиус ионных орбит  $r_{Bi}$ , поэтому

$$k \lesssim k_{\max} = \frac{1}{r_{Bi}}.$$

Отсюда и из (33) заключаем, что током смещения можно пренебречь при условии

$$\frac{c\omega_{Bi}}{u\omega_i} \gg 1,$$

которое практически всегда выполняется. В действительности необходимость в выполнении этого условия отпадает. Наш анализ проводится в системе  $K'$ , в которой действуют силы инерции, поэтому уравнения Максвелла должны быть выписаны в рамках общей теории относительности. В системе  $K'$  метрика пространства-времени стационарна (см. приложение). Кроме того, согласно (27), электрическое поле не зависит от времени в системе  $K'$ . Поэтому, согласно [23, §90], ток смещения в точности равен нулю, и четвёртое уравнение принимает вид (14). Из (28) следует

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{ck^2}{\omega} E (\sin(kz), -\cos(kz), 0).$$

Выписывая  $x$ -компоненту уравнения (14), получаем соотношение

$$\left(1 + \frac{\gamma^2}{\Omega}\right) E \sin(kz) = 0.$$

Таким образом,  $\omega = i\gamma$ , в согласии с формулой (7). Такой же вывод следует и из рассмотрения  $y$ -компоненты (14).

## 4. Заключение

Физический смысл альвеновской ионно-циклотронной неустойчивости и тождественность механизмов АИЦН и неустойчивости Вайбеля становятся ясными при рассмотрении АИЦН во вращающейся системе отсчёта. Из проведённого анализа ясно, что АИЦН — это вайбелевская, филаментационная неустойчивость, происходящая во вращающейся системе отсчёта. Последовательность событий такова. В результате тепловой флуктуации плазменных токов возникает электромагнитное поле. Магнитная составляющая этого поля изгибает траектории заряженных частиц плазмы, что приводит к перераспределению их плотности (см. формулы (29) и (30)). Вследствие наличия анизотропии в распределении частиц по скоростям это перераспределение плотности приводит к возникновению токов, усиливающих флуктуацию поля. Таким образом, указанная анизотропия является причиной возникновения положительной обратной связи в плазме. НВ является частным случаем АИЦН в пределе нулевого внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ .

## 5. Приложение. Строгое рассмотрение альвеновской ионно-циклотронной волны во вращающейся системе отсчёта

Обозначим через  $X^i = (X^0, X^1, X^2, X^3)$  четырёхмерные координаты события (например, точечной вспышки света) в лабораторной инерциальной системе отсчёта  $K$ . Здесь  $i = 0, 1, 2, 3$ ,  $X^0 = ct$ ,  $t$  — синхронизованное в  $K$  время,  $X^z = (X, Y, Z)$  — декартовы координаты события. Магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  направлено вдоль оси  $Z$ .

Построим систему координат  $K'$ , вращающуюся вокруг оси  $Z$  системы  $K$  с угловой скоростью  $-\omega$ . С этой целью рассмотрим систему пронумерованных часов, движущихся по окружностям вокруг оси  $Z$  по закону

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{X^2 + Y^2} = \text{const}, \\ Z = \text{const}, \\ \varphi = \psi - \omega t. \end{cases}$$

Здесь  $\varphi = \arctan(Y/X)$ ,  $X = \rho \cos \varphi$ ,  $Y = \rho \sin \varphi$ , а  $\psi$  — значение угла  $\varphi$  при  $t = 0$ . Номером, нарисованным на часах, является совокупность трёх чисел:  $\rho, Z, \psi$ .

Согласно общей теории относительности системы  $K$  и  $K'$  равноправны. Из равноправности  $K$  и  $K'$  следует инвариантность интервала между близкими событиями, что даёт следующее выражение для метрики пространства-времени в системе  $K'$  [22, 23]:

$$\begin{aligned} ds_{K'}^2 &= ds_K^2 = (dX^0)^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 = \\ &= f(dx^0)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + \frac{2\omega}{c}(x dy - y dx) dx^0, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $x^0 = ct = X^0$ ,  $f = 1 - (\omega\rho/c)^2$ ,

$$\begin{cases} x = \rho \cos \psi = X \cos(\omega t) - Y \sin(\omega t), \\ y = \rho \sin \psi = X \sin(\omega t) + Y \cos(\omega t), \\ z = Z. \end{cases}$$

Часы, находящиеся на оси вращения, покоятся как в  $K$ , так и в  $K'$ , поэтому они пригодны для использования в этих двух системах отсчёта. Остальные часы синхронизируются с таковыми, расположенными на оси вращения. Другими словами, цифры на их циферблаты наносятся в соответствии с процедурой, осуществляемой, на-

пример, посредством обмена радиально движущимися световыми сигналами между часами с совпадающими значениями номеров  $\psi$  и  $Z$  [22, 23].

В системе  $K$  часы не могут двигаться со скоростью, превышающей скорость света. По этой причине указанный выбор вращающейся системы координат осуществим в достаточно широкой для нашего рассмотрения, но ограниченной пространственной области  $f > 0$ .

В системе  $K'$  движение ионов описывается уравнением [23]

$$\frac{Du^i}{ds} = \frac{q}{Mc^2} F^{ik} u_k. \quad (35)$$

Здесь и далее по повторяющимся парам индексов идёт суммирование,  $u^i = dx^i/ds$ ,  $u_i$  — контрвариантные и ковариантные компоненты 4-вектора скорости иона. Далее,  $F^{ik}$  и  $F^{ik}(K)$  — тензоры электромагнитного поля в системах  $K'$  и  $K$  соответственно, взятые в точке нахождения иона и связанные соотношением

$$F^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial X^l} \frac{\partial x^k}{\partial X^m} F^{lm}(K). \quad (36)$$

Наконец,  $Du^i/ds$  — ковариантная производная от 4-вектора скорости,

$$\frac{Du^i}{ds} = \frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l.$$

Отличные от нуля символы Кристоффеля для метрики (34) имеют вид

$$\Gamma_{00}^1 = -\frac{\omega^2}{c^2} x, \quad \Gamma_{02}^1 = \frac{\omega}{c},$$

$$\Gamma_{00}^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} y, \quad \Gamma_{02}^2 = -\frac{\omega}{c}.$$

Тогда уравнение движения (35), записанное для компонент скорости  $v_x = dx/dt$ ,  $v_y = dy/dt$ ,  $v_z = dz/dt$ , принимает вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\gamma v_x) - \omega^2 x + 2\omega\gamma v_y = \frac{1}{M} F_x, \\ \frac{d}{dt}(\gamma v_y) - \omega^2 y - 2\omega\gamma v_x = \frac{1}{M} F_y, \\ \frac{d}{dt}(\gamma v_z) = \frac{q}{M} F_z, \end{cases} \quad (37)$$

$$F_x = q \left[ E_x Q + \frac{B_z}{c} (v_y - \omega x) - \frac{B_y}{c} v_z \right],$$

$$F_y = q \left[ E_y Q - \frac{B_z}{c} (v_x + \omega y) + \frac{B_x}{c} v_z \right],$$

### Identity of the mechanisms of Weibel and Alfvén-cyclotron plasma instabilities

A.S. Dzarakhokhova<sup>(1)</sup>, N.P. Zaretskii<sup>(2)</sup>, A.V. Maksimychyev<sup>(1)</sup>, L.I. Menshikov<sup>(1,2,\*)</sup>, P.L. Menshikov<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),

Institutskii per. 9, 141701 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation

<sup>(2)</sup> National Research Center 'Kurchatov Institute', pl. Akademika Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russian Federation

E-mail: (\*mleonid1954@mail.ru)

A plasma with an anisotropic velocity distribution of particles in a magnetic field is considered. It is shown that the Weibel instability arises in the reference frame rotating together with the particles, for example, ions. When considered in the immobile reference frame, this instability is known as the Alfvén cyclotron instability.

**Keywords:** Weibel instability, Alfvén cyclotron instability, filamentation

PACS number: 52.35. – g

Bibliography — 23 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk 190 (6) 658–663 (2020)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.02.038727>

$$F_z = q \left[ E_z Q + \frac{B_y}{c} (v_x + \omega y) - \frac{B_x}{c} (v_y - \omega x) \right],$$

$$\gamma = \left[ 1 - \left( \frac{\omega\rho}{c} \right)^2 + \frac{2\omega}{c^2} (xv_y - yv_x) - \frac{v^2}{c^2} \right]^{-1/2},$$

$$Q = 1 - \left( \frac{\omega\rho}{c} \right)^2 + \frac{\omega}{c^2} (xv_y - yv_x).$$

Здесь  $E_\alpha$  и  $B_\alpha$  — компоненты поля в  $K'$ ,  $\alpha = 1, 2, 3 \equiv x, y, z$ . Через них обычным образом выражается тензор  $F^{ik}$  из (36):  $F^{0\alpha} = -E_\alpha$ ,  $F^{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\gamma$  [23].

В нашем случае  $E_z = 0$ , а остальные компоненты полей даются формулами (18), (27), (28) с  $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ .

Пренебрегая величинами  $\sim V^2/c^2$  и  $\sim \omega^2\rho^2/c^2$ , получаем уравнения (26).

### Список литературы

- Davidson R C, Ogden J M *Phys. Fluids* **18** 1045 (1975)
- Tajima T, Mima K, Dawson J M *Phys. Rev. Lett.* **39** 201 (1977)
- Chernoshntanov I S, Tsidulko Yu A *Fusion Sci. Technol.* **59** 116 (2011)
- Coensgen F H et al. *Phys. Rev. Lett.* **44** 1132 (1980)
- Casper T A, Smith G R *Phys. Rev. Lett.* **48** 1015 (1982)
- Katsumata R et al. *Phys. Plasmas* **3** 4489 (1996)
- Anikeev A V et al. *Fusion Sci. Technol.* **59** 104 (2011)
- Zaytsev K V et al. *Phys. Scr.* **2014** (T161) 014004 (2014)
- Smith G R *Phys. Fluids* **27** 1499 (1984)
- Smith G R, McCay Nevins W, Sharp W M *Phys. Fluids* **27** 2120 (1984)
- Сагдеев Р З, Шафранов В Д *ЖЭТФ* **39** 181 (1960); Sagdeev R Z, Shafranov V D *Sov. Phys. JETP* **12** 130 (1961)
- Heidbrink W W *Phys. Plasmas* **15** 055501 (2008)
- Беликов В С, Колесниченко Я И, Ораевский В Н *ЖЭТФ* **55** 2210 (1968); Belikov V S, Kolesnichenko Ya I, Oraevskii V N *Sov. Phys. JETP* **28** 1172 (1969) в переводе статьи на английский язык в *Sov. Phys. JETP* фамилия первого автора указана с опечаткой — Velikov; Беликов В С, Колесниченко Я И, Ораевский В Н *ЖЭТФ* **66** 1686 (1974); Belikov V S, Kolesnichenko Ya I, Oraevskii V N *Sov. Phys. JETP* **39** 828 (1974)
- Ho S K et al. *Phys. Fluids* **31** 1656 (1988)
- Treumann R A, Baumjohann W *Advanced Space Plasma Physics* (London: Imperial College Press, 2001)
- Sulem P L, in *2013 Les Houches School on Plasma Astrophysics. The Future of Plasma Astrophysics. Combining Experiments, Observations, Simulations and Theory, February 25–March 8, 2013, Les Houches, France*
- Weibel E S *Phys. Rev. Lett.* **2** 83 (1959)
- Fried B D *Phys. Fluids* **2** 337 (1959)
- Chen F F *Introduction to Plasma Physics* (New York: Plenum Press, 1974)
- Иванов А А *Физика сильнонеравновесной плазмы* (М.: Атомиздат, 1977)
- Михайловский А Б *Теория плазменных неустойчивостей* (М.: Атомиздат, 1970, 1971); Пер. на англ. яз.: Mikhailovskii A B *Theory of Plasma Instabilities* (New York: Consultants Bureau, 1974)
- Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A *Gravitation* (San Francisco, CA: W. H. Freeman, 1973); Пер. на русск. яз.: Мизнер Ч, Торн К, Уилер Дж *Гравитация* (М.: Мир, 1977)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1967); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1971)

Received 5 September 2019, revised 29 January 2020

Physics – Uspekhi **63** (6) (2020)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2020.02.038727>