

Обобщение метода коэффициента k в теории относительности на произвольный угол между скоростью наблюдателя (источника) и направлением луча света от далёкого неподвижного источника (к далёкому неподвижному наблюдателю)

В.И. Ритус

Метод коэффициента k , предложенный Г. Бонди, распространён на общий случай, когда угол α между скоростью сигнала от неподвижного далёкого источника и скоростью наблюдателя не равен нулю или π , как у Бонди, а может принимать любое значение в интервале $0 \leq \alpha \leq \pi$, и на обратный случай, когда источник движется, а наблюдатель покоится и угол α между скоростью источника и направлением частот источника и наблюдателя вводятся функции $k_*(\beta, \alpha)$ и $k_+(\beta, \alpha)$ угла и относительной скорости. Их явные выражения находятся из условия сохранения когерентности пучка лучей при переходе от системы источника к системе наблюдателя без использования преобразований Лоренца. Благодаря аналитичности этих функций по α отношение частот для вышеупомянутых случаев представляется формулами $\omega/\omega' = k_*(\beta, \alpha)$ и $\omega/\omega' = k_+(\beta, \pi - \alpha) \equiv 1/k_*(\beta, \alpha)$, совпадающими с формулами эффекта Доплера, в которых угол α , скорость β и одна из частот измеряются в неподвижной системе. Луч, испущенный источником под углом α к скорости наблюдателя в системе источника, в системе наблюдателя направлен под углом α' к той же скорости. Благодаря абберации света углы α и α' функционально связаны: $k_*(\beta, \alpha) = k_+(\beta, \alpha')$. Функции $\alpha'(\alpha, \beta)$ и $\alpha(\alpha', \beta)$ представлены первообразными функций $k_*(\beta, \alpha)$ и $k_+(\beta, \pi - \alpha')$. Аналитичность функций $k_*(\beta, z)$ и $k_+(\beta, z)$ по $z \equiv \alpha$ на отрезке $0 \leq z \leq \pi$ распространяется на всю плоскость комплексного z , где k_* имеет полюсы в точках $z_n^\pm = 2\pi n \mp i \ln \cos \alpha_1$ (см. (17)), а k_+ — нули в тех же точках, сдвинутых на π . Пространственно-временная асимметрия эффектов Доплера и абберации света объясняется близостью этих особенностей к вещественной оси.

Ключевые слова: специальная теория относительности, инвариантность когерентности, инвариантность фазы, эффект Доплера, абберация света, аналитичность по углу, сопряжённые полюсы и масштаб абберации

PACS numbers: 03.30.+p, 42.15.Fr

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2019.12.038703>

Содержание

1. Введение (648).
2. Метод коэффициента k , предложенный Г. Бонди (649).
3. Коэффициенты $k_*(\beta, \alpha)$ и $k_+(\beta, \alpha)$ в задаче об инвариантности когерентности монохроматического пучка лучей (651).
4. Аналитичность коэффициентов $k_*(\beta, \alpha)$ и $k_+(\beta, \alpha)$ по углу α и связь между ними (652).
5. Вывод релятивистских формул Эйнштейна для эффекта Доплера и абберации света обобщённым методом коэффициента k (653).
 - 5.1. Связь углов α и α' между направлениями луча в системах источника и детектора и скоростью детектора относительно источника.
 - 5.2. Функция $\alpha'(\alpha, \beta)$ как первообразная коэффициента $k_*(\beta, \alpha)$.
 - 5.3. Вывод формулы Эйнштейна для движущегося источника и покоящегося наблюдателя.

6. Абберация света звёзд и функция $a'(a, \beta)$, описывающая смещение углового положения и цвета звёзд (655).

7. Заключение (656).

Список литературы (657).

1. Введение

В предлагаемом обобщённом методе коэффициента k отношение ω/ω' частот луча света в собственных системах источника и наблюдателя равно коэффициенту $k_*(\beta, \alpha)$, когда источник покоится, а наблюдатель движется, и равно коэффициенту $k_+(-\beta, \alpha) = k_+(\beta, \pi - \alpha) = 1/k_*(\beta, \alpha)$, когда источник движется, а наблюдатель покоится. В обоих случаях $\beta = V/c$ — относительная скорость систем, а α — угол между направлением \mathbf{n}_γ луча и направлением \mathbf{n}_β относительной скорости наблюдателя в системе источника или источника в системе наблюдателя.

Аналитические выражения коэффициентов находятся из условия сохранения когерентности пучка света при переходе от системы источника к системе наблюдателя.

В.И. Ритус, Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: ritus@lpi.ru

Статья поступила 1 июля 2019, после доработки 10 октября 2019 г.

Используя то, что падающий на кристаллическую решётку монохроматический когерентный пучок света остаётся монохроматическим и когерентным при отражении под углами Брэгга – Вульфа, показано, что в системе М, движущейся относительно кристаллической решётки против её нормали, падающий и отражённый пучки остаются когерентными и монохроматическими, но их частоты отличаются от их частоты в системе решётки сдвигами в красную и фиолетовую стороны, так как падающий луч "догоняет" М, а отражённый — "встречает" М.

При $\alpha = \alpha_1$, $\cos \alpha_1 = \beta / (1 + (1 - \beta^2)^{1/2})$ смещение частоты падающего луча исчезает, так как $k_*(\beta, \alpha_1) = 1$, а при $\alpha_1 < \alpha < \pi/2$ становится фиолетовым, несмотря на то что в системе решётки луч по-прежнему "догоняет" М (абберация света). В результате для отношения частот в системах источника (решётки) и наблюдателя М получаем формулу эффекта Доплера, $\omega/\omega' = k_*(\beta, \alpha)$, справедливую для случая, когда источник покоится, а наблюдатель движется.

Луч, испущенный источником под углом α к скорости наблюдателя относительно источника, в системе наблюдателя направлен под углом α' к той же скорости. Углы α и α' функционально связаны, причём $\alpha'(\alpha, \beta)$ является первообразной коэффициента $k_*(\beta, \alpha)$, а $\alpha(\alpha', \beta)$ — первообразной коэффициента $k_*(\beta, \pi - \alpha')$ $\equiv k_*(-\beta, \alpha')$. Коэффициенты $k_*(\beta, \alpha)$ и $k_+(\beta, \alpha)$, будучи аналитическими функциями переменного $z \equiv \alpha$ на отрезке $0 \leq z \leq \pi$, аналитичны на всей плоскости комплексного z , где $k_*(\beta, z)$ имеет полюсы в точках $z_n^\pm = 2\pi n \mp i \ln \cos \alpha_1$, а $k_+(\beta, z)$ — нули в тех же точках, сдвинутых на π . Абберация света связана с близостью этих полюсов и нулей к вещественной оси.

Для того чтобы наблюдатель М, двигающийся со скоростью β в окружении далёких неподвижных источников, посылающих к М под разными углами α к его скорости лучи с частотами, большими и меньшими ω_L , воспринимал бы их под углами $\alpha' = \alpha'(\alpha, \beta)$ с одной и той же частотой ω_L , необходимо, чтобы отношения высокой ω_G и низкой ω_S частот к ω_L были взаимно-обратными и равными

$$\frac{\omega_G}{\omega_L} = k_*(\beta, \alpha) = \frac{\omega_L}{\omega_S} = \frac{1}{k_*(\beta, \pi - \alpha')}$$

В этом случае М не отличается от движущегося источника частоты ω_L , лучи которого воспринимаются далёкими неподвижными наблюдателями под углом α к его скорости с частотой $\omega = \omega_L k_*(\beta, \alpha)$. Это формула эффекта Доплера для случая, когда источник движется, а наблюдатель покоится.

Метод коэффициента k был предложен профессором Лондонского университета Германом Бонди, изложен им в статье "The space traveller's youth", помещённой в журнале *Discovery* [1], а затем в его книге *Относительность и здравый смысл* [2]. Позднее он появился в книгах Д. Бома [3], Л. Мардера [4] и др. Мне придётся изложить его здесь, так как целью этой статьи является распространение этого наглядного метода на общий случай, когда угол α между скоростью сигнала от неподвижного далёкого источника и скоростью наблюдателя не равен нулю или π , как у Бонди, а может принимать любое значение в интервале $0 \leq \alpha \leq \pi$, и на обратный случай, когда движется источник, а наблюдатель покоится и угол

α между скоростью источника и направлением сигнала к наблюдателю принимает любое значение между 0 и π .

2. Метод коэффициента k , предложенный Г. Бонди

Пусть в лабораторной системе координат на расстоянии d друг от друга покоятся два наблюдателя А и В, часы которых синхронизованы. Пусть А в моменты $t_n^A = nt_1^A$, $n = 0, 1, 2, \dots$, кратные периоду t_1^A , испускает в сторону В световые сигналы. Эти сигналы достигают В в моменты $t_n^{BA} = t_n^A + d/c$ с тем же периодом t_1^A , так как $t_1^B = t_{n+1}^{BA} - t_n^{BA} = t_1^A$.

Предположим теперь, что вдоль прямой, соединяющей А и В, от А к В движется наблюдатель М со скоростью V . Тогда сигналы, посланные А в моменты t_n^A , достигают М в моменты t_n^* , удовлетворяющие равенству путей М и n -го сигнала: $Vt_n^* = c(t_n^* - t_n^A)$ (рис. 1). Отсюда $t_n^* = t_n^A / (1 - \beta)$, $\beta = V/c$. Это означает, что период t_1^* между поступающими к М сигналами по часам А равен

$$t_{n+1}^* - t_n^* = \frac{t_{n+1}^A - t_n^A}{1 - \beta} = \frac{t_1^A}{1 - \beta}$$

Из-за последовательного увеличения расстояния между приёмником и источником этот период больше периода испускания.

Однако нас будет интересовать период поступления к М сигналов по часам М. Обозначим его t_1^M . Так как он тоже будет пропорционален периоду испускания t_1^A ,

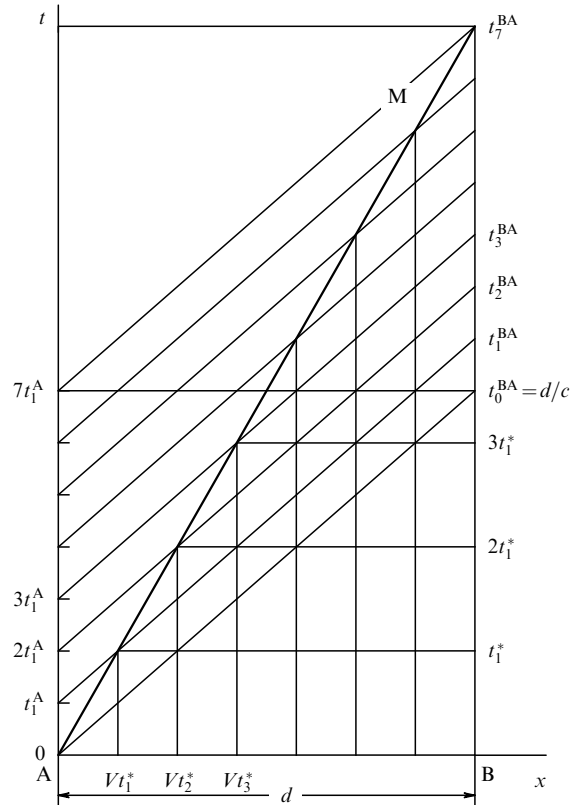


Рис. 1. К вычислению связи периода t_1^A испускания сигналов источником А с периодами t_1^* и t_1^M приёма их движущимся наблюдателем М по часам А и по часам М соответственно.

введём коэффициент пропорциональности k :

$$t_1^M = kt_1^A, \tag{1}$$

который будет зависеть от скорости V и должен быть больше 1, так как приёмник сигналов M удаляется от источника сигналов A .

Заметим теперь, что наблюдатель M может считать поступившие к нему сигналы от A как испускаемые им самим в сторону B с интервалом t_1^M (см. рис. 1). Так как интервал приёма этих сигналов наблюдателем B равен t_1^A и связан с t_1^M соотношением (1), то в форме

$$t_1^B = t_1^A = \frac{1}{k} t_1^M \tag{2}$$

формулу (2) можно рассматривать как связь между периодом испускания сигналов "источником" M и периодом приёма их детектором B при сближении источника с приёмником. Из-за последовательного уменьшения расстояния между источником и приёмником период приёма короче периода испускания, что снова приводит к $k > 1$.

Рассмотрим теперь ситуацию, в которой покоящийся наблюдатель-детектор R принимает сигналы от движущегося источника M , сначала удаляющегося от R со скоростью V на максимальное расстояние, а потом — приближающегося к R с такой же по величине скоростью V (рис. 2).

Пусть T_M — полное время движения источника M по часам M , а T_R — оно же, но по часам R . Тогда сигналы, испущенные удаляющимся M , поступают к R в течение времени

$$t_R^* = k \frac{1}{2} T_M, \tag{3}$$

а испущенные приближающимся M — в течение времени

$$T_R - t_R^* = \frac{1}{k} \frac{1}{2} T_M. \tag{4}$$

Исключая из этих двух уравнений t_R^* , получаем важную связь

$$T_R = \left(k + \frac{1}{k}\right) \frac{1}{2} T_M. \tag{5}$$

Действительно, поскольку $k \neq 1$ (иначе $V = 0$), то функция $k + 1/k > 2$ и, следовательно,

$$T_R > T_M.$$

Таким образом, время T_R движения M до его возвращения к R по часам R всегда больше собственного времени T_M движения M — "парадокс" близнецов — вернувшийся после космического путешествия близнец моложе оставшегося дома.

Найдём теперь функцию $k(\beta)$. Согласно наблюдателю R , M удаляется от него по часам R в течение времени $T_R/2$, достигая наибольшего расстояния $VT_R/2$. Сигнал, испущенный M в момент наибольшего удаления, тратит на путь к R время $VT_R/2c$ и приходит к R в момент

$$t_R^* = \frac{T_R}{2} + \frac{VT_R}{2c} = \frac{1}{2} T_R(1 + \beta). \tag{6}$$

Исключая из трёх уравнений (3), (5), (6) отношения времён t_R^*/T_M , T_R/T_M , t_R^*/T_R , получаем долгожданную

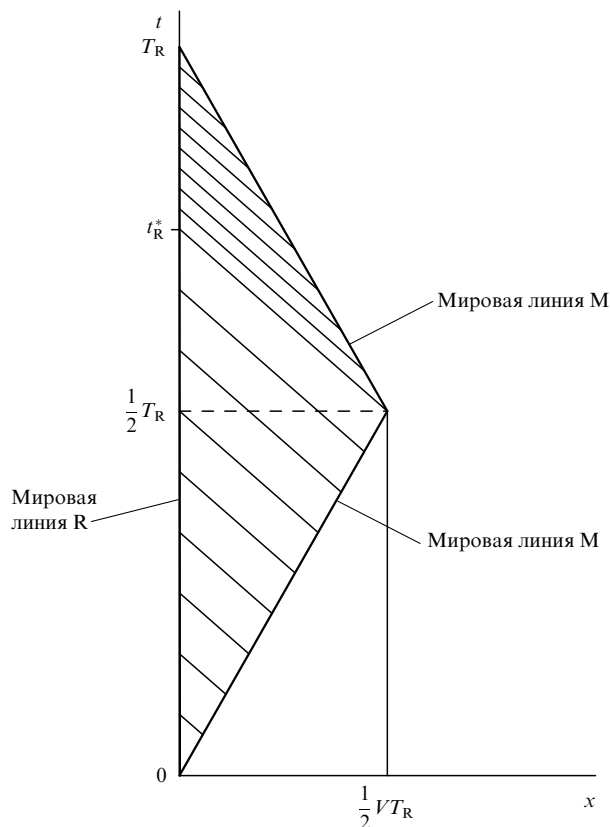


Рис. 2. К вычислению связи собственного T_M и лабораторного T_R времени движения M .

связь k с β :

$$k(\beta) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}. \tag{7}$$

Используя эту функцию в формуле (5), получаем известную связь между интервалами собственного и лабораторного времени движения M :

$$T_R = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} T_M. \tag{8}$$

Задача о распространении метода коэффициента k на общий случай, при котором направление лучей от источника составляет произвольный угол с направлением скорости наблюдателя, возникла в связи со статьёй, присланной в редакцию *УФН*, в которой утверждалось, что возникновение максимумов интенсивности отражённого света при некоторых углах падения монохроматического пучка на кристаллическую решётку (углах Брэгга–Вульфа) не является лоренц-инвариантным, и конструктивная интерференция отражённых лучей в лабораторной системе может стать деструктивной при наблюдении из другой инерциальной системы. Ясно, что это не так, поскольку противоречит инвариантности фазы монохроматической световой волны. Предлагаемое обобщение метода коэффициента k позволяет наглядным, неформальным путём, не прибегая к преобразованиям Лоренца, получить общие формулы эффекта Доплера и абберации света и, в частности, доказать лоренц-инвариантность конструктивной интерференции отражённых лучей в эффекте Брэгга–Вульфа.

3. Коэффициенты $k_*(\beta, \alpha)$ и $k_+(\beta, \alpha)$ в задаче об инвариантности когерентности монохроматического пучка лучей

Итак, рассмотрим отражение света двумя слоями А, В кристаллической решётки (рис. 3). Падающие на поверхности А и В лучи лазера когерентны. Это означает, что на нормальных к лучам поверхностях волнового фронта, отстоящих друг от друга на длину волны λ , их постоянные фазы различаются на 2π . Поверхности определённой фазы движутся со скоростью света. Для соседних лучей 1, 2, отражённых в соседних (ближайших) точках соседних слоёв А, В, разность оптических путей равна

$$D = \frac{2d}{\sin \theta} - 2d \cot \theta \cos \theta = 2d \sin \theta,$$

где d — расстояние между слоями А и В, $\theta = \pi/2 - \alpha$, α — угол падения, равный углу отражения. Если эта разность кратна целому числу длин волн

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad 0 < \sin \theta_m = \frac{m\lambda}{2d} \leq 1, \quad (9)$$

то лучи, отражённые от слоёв А, В под такими углами, останутся когерентными — условие Брэгга–Вульфа для направлений максимальной интенсивности отражённого света.

Будем называть сигналом участок когерентных световых лучей между двумя фронтами с разностью фаз в 2π , т.е. длиной λ и продолжительностью в один период $T = \lambda/c$.

Будем считать $t = t_0^A = 0$ момент падения и отражения луча 1 от слоя А, совпадающий с моментом прохода фронта лучей 1, 2 под слой А (см. рис. 3). Тогда отражённый от слоя В фронт лучей 1, 2 начнёт проходить слой А в момент

$$t = t_0^{ABA} = \frac{2d \sin \theta}{c} = \frac{m\lambda}{c} = mT,$$

снова см. рис. 3. Следующий фронт лучей 1, 2 пройдёт слой А в момент $t = t_1^A = \lambda/c = T$ и после отражения от

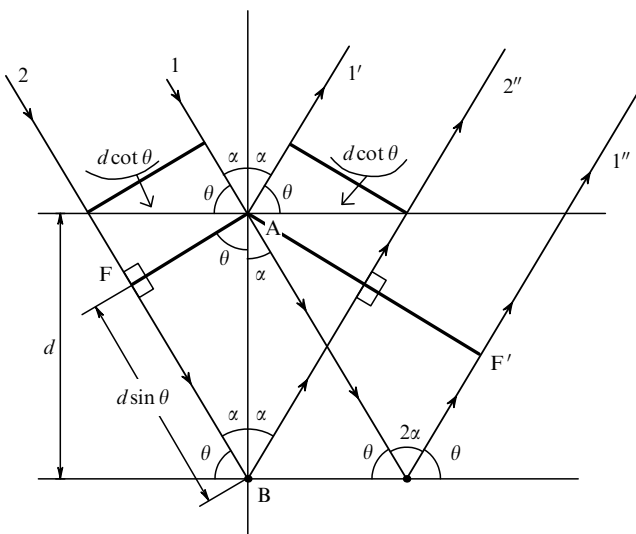


Рис. 3. Для когерентного пучка лучей длина оптического пути между только что прошедшим слой А фронтом AF и выходящим из-под него фронтом AF' равна $2d \sin \theta$.

слоя В начнёт выходить через слой А в момент

$$t = t_1^{ABA} = mT + T.$$

Сигналы, падающие на слой А в моменты $t_n^A = nt_1^A = nT$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, затрачивают одно и то же время $d \sin \theta/c$ на путь от А к В и поступают к В в моменты

$$t_n^{BA} = t_n^A + \frac{d \sin \theta}{c}.$$

Поэтому период поступления к В последовательных сигналов из А равен периоду их поступления к А:

$$t_{n+1}^{BA} - t_n^{BA} = t_{n+1}^A - t_n^A = t_1^A.$$

В свою очередь, отражённые в моменты t_n^{BA} сигналы поступают в А в моменты

$$t_n^{ABA} = t_n^{BA} + \frac{d \sin \theta}{c} = t_n^A + \frac{2d \sin \theta}{c},$$

так что период поступления в А отражённых от В сигналов тот же, что и период их первоначального поступления к А:

$$t_{n+1}^{ABA} - t_n^{ABA} = t_{n+1}^{BA} - t_n^{BA} = t_1^A.$$

Сигналы, отражённые от слоя А в моменты t_n^A , и сигналы, отражённые слоем В и начинающие проходить сквозь слой А в моменты t_n^{ABA} , распространяются в одном направлении и будут когерентными, если интервал

$$t_n^{ABA} - t_n^A = \frac{2d \sin \theta}{c}$$

кратен периоду света T , т.е. при выполнении условия Брэгга–Вульфа:

$$\frac{2d \sin \theta}{c} = mT.$$

Пусть наблюдатель М удаляется от А и приближается к В с постоянной скоростью V , нормальной к слоям. Тогда поступление к М последовательных сигналов из А будет равномерным по часам А и по часам М, но период t_1^{MA} их поступления по часам М будет большим, чем период их испускания из А. Обозначим отношение этих двух периодов через k_* :

$$k_* = \frac{t_1^{MA}}{t_1^A} > 1. \quad (10)$$

С другой стороны, так как М приближается к В с той же скоростью V , то поступление к М отражённых от В сигналов тоже будет равномерным по часам А и по часам М, но период t_1^{MBA} их поступления по часам М будет в k_+ раз меньше, чем t_1^A :

$$t_1^{MBA} = \frac{1}{k_+} t_1^A. \quad (11)$$

В самом деле, так как М в моменты встречи с отражёнными от слоя В сигналами мог бы считать их своими световыми сигналами, испускаемыми в направлении А, то они пришли бы к слою А с периодом t_1^A , который должен быть больше периода испускания t_1^{MBA} в k_+ раз, поскольку М удаляется от А со скоростью V .

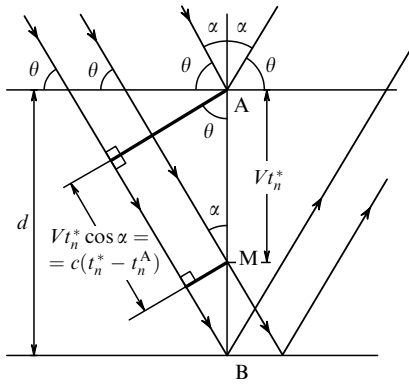


Рис. 4. К вычислению момента t_n^* обгона наблюдателя М фронтом n -го сигнала, прошедшим слой А в момент t_n^A .

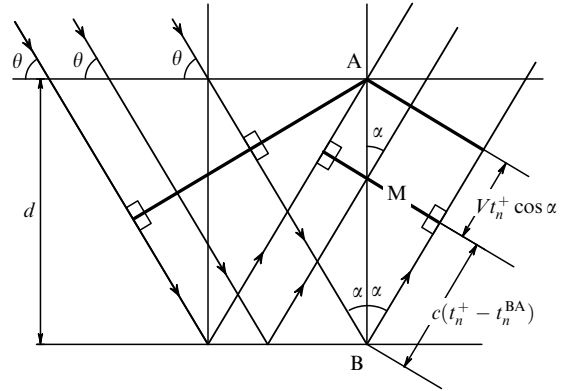


Рис. 5. К вычислению момента t_n^+ встречи наблюдателя М с фронтом n -го сигнала, отражённого от слоя В.

Найдём функции k_* , k_+ . Наблюдатель М удалится от А на расстояние Vt_n^* , когда в момент t_n^* его достигнет фронт сигнала, испущенного из А в момент t_n^A . Но путь, который нужно пройти фронту за время $t_n^* - t_n^A$, равен $Vt_n^* \cos \alpha$ (рис. 4). Поэтому $Vt_n^* \cos \alpha = c(t_n^* - t_n^A)$ и, следовательно,

$$t_n^* = \frac{t_n^A}{1 - \beta \cos \alpha}, \quad \beta = \frac{V}{c}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \cos \alpha = \sin \theta.$$

Период поступления к М сигналов от А равен

$$t_{n+1}^* - t_n^* = \frac{t_{n+1}^A - t_n^A}{1 - \beta \cos \alpha} = \frac{t_1^A}{1 - \beta \cos \alpha},$$

а соответствующий период собственного времени М равен

$$t_1^{MA} = \sqrt{1 - \beta^2} (t_{n+1}^* - t_n^*) = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} t_1^A}{1 - \beta \cos \alpha}, \tag{12}$$

$$k_*(\beta, \alpha) = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \alpha}.$$

Заметим, что $k_* < 1$ при

$$\cos \alpha < \cos \alpha_1 = \frac{\beta}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Это неожиданное для углов $\alpha_1 < \alpha < \pi/2$ явление обязано aberrации.

Наблюдатель М уйдёт от А на расстояние Vt_n^+ , когда в момент t_n^+ он встретится с сигналом, отражённым от В в момент $t_n^{BA} = t_n^A + d \sin \theta / c$. Оптический путь фронта сигнала, отражённого от слоя В, до слоя А можно представить суммой пути $c(t_n^+ - t_n^{BA})$ от слоя В до встречи с М и оставшегося пути $Vt_n^+ \cos \alpha$ от встречи с М до слоя А (рис. 5). Так как эта сумма равна $d \sin \theta$, то из уравнения

$$c(t_n^+ - t_n^{BA}) + Vt_n^+ \cos \alpha = d \sin \theta$$

следует, что

$$t_n^+ = \frac{t_n^A}{1 + \beta \cos \alpha} + \frac{2d \sin \theta}{c(1 + \beta \cos \alpha)}.$$

Поэтому по часам А период поступления к М отражённых от В встречных сигналов равен

$$t_{n+1}^+ - t_n^+ = \frac{t_1^A}{1 + \beta \cos \alpha},$$

а по часам М он равен

$$t_1^{MBA} = \sqrt{1 - \beta^2} (t_{n+1}^+ - t_n^+) = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} t_1^A}{1 + \beta \cos \alpha}, \tag{13}$$

$$k_+(\beta, \alpha) = \frac{1 + \beta \cos \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Формулы (12), (13) связывают частоту ω сигналов от удалённого источника в лабораторной системе с их частотой ω' , измеряемой движущимся наблюдателем М при его удалении или приближении к источнику (знаки $-$ или $+$ соответственно):

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 \mp \beta \cos \alpha}, \quad \cos \alpha = \sin \theta, \tag{14}$$

см. формулу (15) в [5]. Эта формула впервые получена Эйнштейном в его первой работе [6] по теории относительности.

Итак, отражённые от слоёв А, В сигналы будут когерентными и для наблюдателя М, если они когерентны для А (т.е. если $\theta = \theta_m$, см. (9)), а их периоды (или частоты) будут связаны обычными формулами (12)–(14) для эффекта Доплера. Это является следствием инвариантности фазы световой волны. Здесь она доказана с помощью коэффициентов k_* , k_+ .

4. Аналитичность коэффициентов $k_*(\beta, \alpha)$ и $k_+(\beta, \alpha)$ по углу α и связь между ними

Заметим, что используемый нами угол α лежит в пределах $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ и определяет согласно рисункам 3–5 расположение скоростей сигнала и наблюдателя относительно друг друга и относительно слоёв А, В в лабораторной системе координат. Угол α_p , используемый Паули в формуле (15), имеет физический смысл угла между скоростями наблюдателя и сигнала от удалённого источника, покоящегося в лабораторной системе. Он может меняться в пределах $0 \leq \alpha_p \leq \pi$. В случае, когда сигнал догоняет наблюдателя (см. рис. 4), наш угол $\alpha = \alpha_p$, а в случае встречного движения сигнала и наблюдателя (см. рис. 5) α по величине и смыслу связан с α_p соотношением $\alpha = \pi - \alpha_p$. Поэтому переход от формулы (14) к формуле (15) Паули состоит в замене α на α_p для верхнего знака и в замене α на $\pi - \alpha_p$ для нижнего, в результате чего член $\mp \beta \cos \alpha$ перейдёт в $-\beta \cos \alpha_p$.

Это не что иное, как аналитическое продолжение функций $k_*(\beta, \alpha)$ и $1/k_+(\beta, \alpha)$ по углу α на весь интервал $0 \leq \alpha \leq \pi$, в котором, как по величине, так и по физическому смыслу, $\alpha \equiv \alpha_p$ для $k_*(\beta, \alpha)$ и $\alpha \equiv \pi - \alpha_p$ для $1/k_+(\beta, \alpha)$. Иными словами, как функции α_p эти функции совпадают:

$$\frac{1}{k_+(\beta, \pi - \alpha_p)} = k_*(\beta, \alpha_p) = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \alpha_p}, \quad 0 \leq \alpha_p \leq \pi. \quad (15)$$

Совпадение этих двух аналитических функций переменного $z \equiv \alpha_p$ на отрезке $0 \leq z \leq \pi$ означает, что они совпадают на всей плоскости комплексного z , имея простые полюсы в точках $z_{\pm}^{\pm} = 2\pi n \mp i \ln \cos \alpha_1$, n — целое, $\cos \alpha_1 = \beta / (1 + (1 - \beta^2)^{1/2})^n$, с вычетами $\mp i$.

Угол α_1 играет очень важную роль в обобщённом методе коэффициента k .

5. Вывод релятивистских формул Эйнштейна для эффекта Доплера и абберации света обобщённым методом коэффициента k

5.1. Связь углов α и α' между направлениями луча в системах источника и детектора и скоростью детектора относительно источника

С помощью функций (15) формулу Эйнштейна для отношения ω_L / ω'_M собственных частот далёкого источника L, покоящегося в лабораторной системе, и движущегося наблюдателя M можно представить в виде

$$\frac{\omega_L}{\omega'_M} = \frac{1}{k_+(\beta, \pi - \alpha_p)} = k_*(\beta, \alpha_p) = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \alpha_p}, \quad (16)$$

где α_p — угол между направлением \mathbf{n}_p скорости сигнала и направлением \mathbf{n}_β скорости наблюдателя M в лабораторной системе. При $0 < \alpha_p < \pi/2$ формула (16) описывает ситуацию, изображённую на рис. 4, а при $\pi/2 < \alpha_p < \pi$ — ситуацию на рис. 5, поскольку с ростом α_p происходит перемещение источника L по далёкой от M дуге в другое положение относительно наблюдателя M.

С ростом угла α_p отношение ω_L / ω'_M уменьшается и согласно замечанию ниже формулы (12) становится меньше 1, как только α_p превысит угол

$$\alpha_1 = \arccos \frac{\beta}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}} < \frac{\pi}{2}. \quad (17)$$

При углах α_p в интервале $\alpha_1 < \alpha_p < 2\pi - \alpha_1$ функция $k_*(\beta, \alpha_p)$ и вместе с ней отношение ω_L / ω'_M становятся меньше 1. Это означает, что частота ω'_M сигналов, принимаемых движущимся наблюдателем M, больше собственной частоты ω_L сигналов, испускаемых источником L, благодаря абберации этих сигналов или приближению M к L.

Если в лабораторной системе источник L, ω_L , посылающий сигналы к M под углом $\alpha = \pi - \alpha'_p$, лежащим в интервале $\alpha_1 < \alpha = \pi - \alpha'_p < \pi$, $0 < \alpha'_p < \pi - \alpha_1$, заменить источником S, ω_S сигналов пониженной частоты $\omega_S < \omega_L$, такой, чтобы наблюдатель M принимал эти сигналы в своей собственной системе с частотой ω_M , равной ω_L :

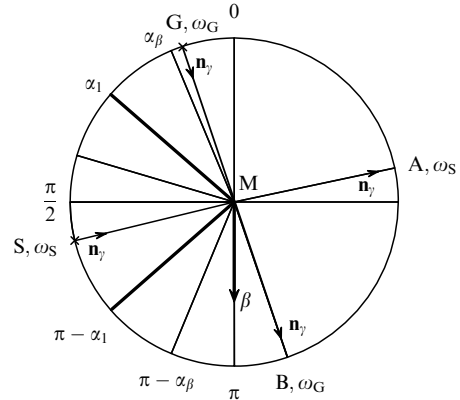


Рис. 6. Сигналы источников G и S с частотами $\omega_G > \omega_L$ и $\omega_S < \omega_L$ поступают к M с частотой $\omega_L = \sqrt{\omega_G \omega_S}$ и направляются M с частотой ω_L к наблюдателям B и A, которые детектируют их с частотами ω_G и ω_S . На рисунке $\beta = 0,9$, $\alpha_G = 20^\circ$, $\alpha_S = 105^\circ$.

$$\omega_M = \omega_L = \omega'_M k_*(\beta, \alpha) = \omega'_M \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \alpha}, \quad \alpha_1 < \alpha < \pi, \quad (18)$$

то отношение частоты посылаемого сигнала к частоте сигнала, принимаемого M,

$$\frac{\omega_S}{\omega_M} \equiv \frac{\omega_S}{\omega_L} = \frac{\omega_L}{\omega'_M} = k_*(\beta, \pi - \alpha'_p) = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \alpha'_p}, \quad (19)$$

$$0 < \alpha'_p < \pi - \alpha_1,$$

должно остаться таким же, как до замены L на S, так как и при $\omega_M = \omega_L$ оно определяется прежним коэффициентом пропорциональности $k_*(\beta, \alpha) = k_*(\beta, \pi - \alpha'_p)$, зависящим только от скорости β и лежащего в интервале $\alpha_1 < \alpha < \pi$ угла $\alpha = \pi - \alpha'_p$ между направлением \mathbf{n}_β скорости и направлением \mathbf{n}_p сигналов источника (рис. 6).

С другой стороны, если потребовать, чтобы наблюдатель M, получающий сигналы от источника L, ω_L , под острым углом α_p , $0 < \alpha_p < \alpha_1$, между направлениями скоростей наблюдателя и сигнала, $\cos \alpha_p = \mathbf{n}_\beta \mathbf{n}_p$, получал их не с частотой ω'_M , меньшей ω_L , а с частотой $\omega_M = \omega_L$, т.е. той же, что и от источника S, ω_S , то этот источник L, ω_L , нужно было бы заменить источником G, ω_G , частота которого больше ω_L в ω_L / ω_S раз: $\omega_G = \omega_L (\omega_L / \omega_S)$. Тогда граничные условия $\omega_S = \omega_L$ и $\omega_G = \omega_L$ автоматически выполняются и являются следствиями друг друга, а частота $\omega_L = \sqrt{\omega_G \omega_S}$ (см. рис. 6).

В этом случае, и только в этом,

$$\frac{\omega_L}{\omega'_M} = k_*(\beta, \alpha_p) = \frac{\omega_G}{\omega_L} = \frac{\omega_L}{\omega_S} = \frac{1}{k_*(\beta, \pi - \alpha'_p)} \equiv k_+(\beta, \alpha'_p), \quad (20)$$

что равносильно связи угла α'_p с углом α_p :

$$\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \alpha_p} = \frac{1 + \beta \cos \alpha'_p}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (21)$$

У Паули эта формула приведена под номером (16с) и получена, как и у Эйнштейна [7], из инвариантности фазы монохроматической световой волны при лоренцевых преобразованиях. Здесь мы получили её обобщённым методом коэффициента k , не прибегающим к преобразованиям Лоренца.

Заметим также, что интервалы $0 \leq \alpha_p \leq \alpha_1$, $0 \leq \alpha'_p \leq \pi - \alpha_1$ углов α_p, α'_p , использованные при выводе связи (21), можно расширить благодаря аналитичности всех функций, зависящих от этих углов. Поэтому связь (21) между углами α_p и α'_p автоматически выполняется в расширенном диапазоне $0 \leq \alpha_p, \alpha'_p \leq \pi$ этих углов. Рассмотрим эту связь, считая α_p аргументом, а α'_p — функцией α_p , опустив при этом индекс P: $\alpha_p = \alpha$, $\alpha'_p = \alpha'(\alpha)$. Функция $\alpha'(\alpha)$ зависит, конечно, ещё от параметра β : $\alpha'(\alpha) \equiv \alpha'(\alpha, \beta)$, о котором не будем забывать.

5.2. Функция $\alpha'(\alpha, \beta)$

как первообразная коэффициента $k_*(\beta, \alpha)$

Дифференцируя оба члена в (21) по α , получаем для производной выражение, непосредственно связывающее её с $k_*(\beta, \alpha)$:

$$\frac{\partial \alpha'(\alpha)}{\partial \alpha} \equiv \dot{\alpha}'(\alpha) = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \alpha} \equiv k_*(\beta, \alpha). \tag{22}$$

Интегрируя теперь это выражение по α , находим искомую функцию — первообразную для $k_*(\beta, \alpha)$:

$$\alpha'(\alpha, \beta) = \sqrt{1 - \beta^2} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{1 - \beta \cos \alpha} = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tan \frac{\alpha}{2} \right). \tag{23}$$

На концах интервала $0 \leq \alpha \leq \pi$ она принимает значения

$$\alpha'(0) = 0 \text{ и } \alpha'(\pi) = \pi,$$

а в характерных при данном β промежуточных точках $\alpha = \alpha_\beta = \arccos \beta$, $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \pi/2$ — значения

$$\alpha'(\alpha_\beta) = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha'(\alpha_1) = \pi - \alpha_1, \quad \alpha' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \pi - \alpha_\beta.$$

Производная $\dot{\alpha}'(\alpha)$ на концах интервала $0 \leq \alpha \leq \pi$ принимает свои максимальное и минимальное значения,

$$\dot{\alpha}'(0) = k_*(\beta, 0) = k_+(\beta, 0) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}},$$

$$\dot{\alpha}'(\pi) = k_*(\beta, \pi) = k_+(\beta, \pi) = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}},$$

совпадающие с $k(\beta)$ и $1/k(\beta)$ в методе Бонди, а в упомянутых выше промежуточных точках — значения

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad 1, \quad \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Функция $\alpha'(\alpha, \beta)$ приведена на рис. 7. Её кривизна имеет экстремум при $\alpha = \alpha_1$, равный $-\cot \alpha_1 / \sqrt{2}$.

Заметим, что обратная функция $\alpha(\alpha')$ получается из (23) изменением знака у параметра β :

$$\alpha(\alpha') = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \tan \frac{\alpha'}{2} \right). \tag{24}$$

5.3. Вывод формулы Эйнштейна для движущегося источника и покоящегося наблюдателя

На дуге $0 \leq \alpha_p \leq \alpha_1$ расположены источники G, ω_G , частота которых $\omega_G(\alpha_p)$ монотонно убывает с ростом α_p от значения $\omega_G(0) = \omega_L \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}$ при $\alpha_p = 0$ до значения $\omega_G(\alpha_1) = \omega_L$ при $\alpha_p = \alpha_1$.

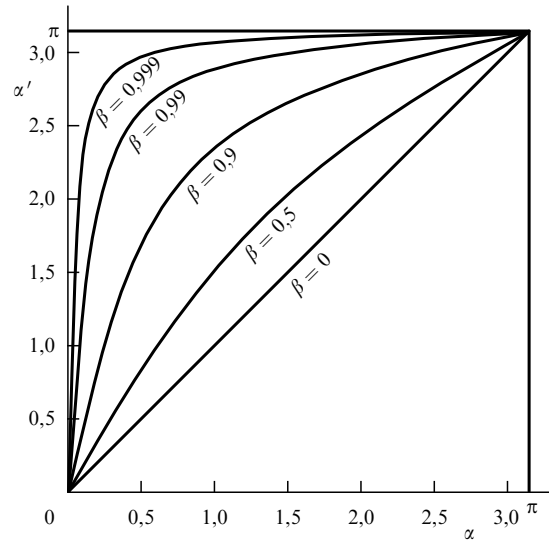


Рис. 7. Функция $\alpha'(\alpha, \beta)$ для пяти значений параметра $\beta = 0, 0.5, 0.9, 0.99, 0.999$. Эта функция монотонно растёт как с ростом угла α , $0 \leq \alpha \leq \pi$, так и с ростом параметра β , $0 \leq \beta \leq 1$.

На дуге $\alpha_1 \leq \alpha_p \leq \pi$ расположены источники S, ω_S , частота которых $\omega_S(\alpha_p)$ монотонно убывает с ростом α_p от значения $\omega_S(\alpha_1) = \omega_L$ при $\alpha_p = \alpha_1$ до значения $\omega_S(\pi) = \omega_L \sqrt{(1 - \beta)/(1 + \beta)}$ при $\alpha_p = \pi$.

Движущийся наблюдатель M воспринимает все эти сигналы с одной и той же частотой ω_L в его собственной системе и посылает их как источник к наблюдателям B и A в лабораторной системе.

К наблюдателю B они приходят с частотой $\omega_G(\alpha_p) \geq \omega_L$, если $0 \leq \alpha_p \leq \alpha_1$, и с частотой $\omega_S(\alpha_p) \leq \omega_L$, если $\alpha_1 \leq \alpha_p \leq \pi/2$. Обратим внимание на то, что из-за aberrации света наблюдатель B при углах α_p в диапазоне $\alpha_1 < \alpha_p < \pi/2$ детектирует частоту $\omega_S < \omega_L$, несмотря на приближение к нему источника M.

К наблюдателю A сигналы приходят с частотой $\omega_S(\alpha_p) < \omega_L$, так как при $\pi/2 \leq \alpha_p \leq \pi$ источник M удаляется от A. Здесь α_p — по-прежнему угол между направлением \mathbf{n}_β скорости источника M и направлением \mathbf{n}_γ скорости поступающих к B или A сигналов: $\cos \alpha_p = \mathbf{n}_\beta \mathbf{n}_\gamma$.

Требование, чтобы отношение ω_G/ω_L частот было равным отношению ω_L/ω_S , эквивалентно переносу источника частоты ω_L из лабораторной системы в собственную систему наблюдателя M. В результате M становится движущимся со скоростью β источником частоты $\omega_M \equiv \omega_L$, а наблюдатели B и A — детекторами сигналов с частотой ω от источника M, ω_L , приближающегося к B и удаляющегося от A:

$$\frac{\omega}{\omega_L} = k_*(\beta, \alpha_p) = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \alpha_p}. \tag{25}$$

Наблюдатель B при углах $0 \leq \alpha_p \leq \alpha_1$ детектирует частоту $\omega \geq \omega_L$, а при углах $\alpha_1 \leq \alpha_p \leq \pi/2$ — частоту $\omega \leq \omega_L$. Наблюдатель A всегда детектирует частоту $\omega \leq \omega_L$, так как для него $\pi/2 \leq \alpha_p \leq \pi$.

Таким образом, в формуле (16) функция $k_*(\beta, \alpha_p)$ с одним и тем же смыслом угла α_p в диапазоне $0 < \alpha_p < \pi$, $\cos \alpha_p = \mathbf{n}_\beta \mathbf{n}_\gamma$, описывает связь собственной частоты ω_L лабораторного источника L с частотой ω'_M сигналов, поступающих к наблюдателю M при его удалении

($0 < \alpha_p < \pi/2$) или приближении ($\pi/2 < \alpha_p < \pi$) к источнику.

В формуле (25) та же функция $k_*(\beta, \alpha_p)$ с тем же смыслом угла α_p связывает собственную частоту ω_L движущегося источника М с частотой ω сигналов, поступающих к лабораторному наблюдателю при приближении к нему ($\omega > \omega_L$ при $0 < \alpha_p < \alpha_1$ и $\omega < \omega_L$ при $\alpha_1 < \alpha_p < \pi/2$) или удалении от него ($\omega < \omega_L$ при $\pi/2 < \alpha_p < \pi$) источника М.

Формула (25) совпадает с формулой (48.12) в [8] и с ответом задачи 1.21 в [9], полученными обычными методами теории относительности. Обе формулы, (16) и (25), впервые получены Эйнштейном в [6, 7] исходя из сохранения фазы монохроматической волны света при лоренцевом преобразовании.

В этой связи очень поучительны пояснения Эйнштейна к этим формулам. Приведём их, используя принятые нами обозначения Паули для угла и безразмерной скорости и опустив индексы М и Р. Итак, Эйнштейн пишет [7]:

«1. Если наблюдатель движется со скоростью v по отношению к бесконечно удалённому источнику света частоты ω так, что линия "источник света – наблюдатель" образует угол α со скоростью наблюдателя по отношению к системе координат, покоящейся относительно источника света, то частота ω' света, воспринимаемого наблюдателем, определяется соотношением

$$\omega' = \omega \frac{1 - \beta \cos \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

2. Если источник, испускающий в движущейся вместе с ним системе свет с частотой ω_0 , движется так, что линия "источник света – наблюдатель" образует угол α со скоростью источника света по отношению к системе, покоящейся относительно наблюдателя, то частота ω , воспринимаемая наблюдателем, определяется соотношением

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \alpha}.$$

Обратим внимание на то, что независимо от объекта движения — наблюдатель это или источник, скорость β движения этого объекта М и угол α определяются Эйнштейном относительно покоящейся системы, которую мы называем лабораторной. Величина β и направление \mathbf{n}_β скорости, частота ω и направление \mathbf{n}_γ света, излучаемого лабораторным источником или детектируемого лабораторным наблюдателем, измеряются лабораторными приборами, в то время как частоты ω' и ω_0 предсказываются или считаются известными заранее.

Заметим также, что использование "бесконечно удалённого" источника света эквивалентно условию постоянства угла α во время движения М.

6. Аберрация света звёзд и функция $\alpha'(\alpha, \beta)$, описывающая смещение углового положения и цвета звёзд

Полученные формулы (16) и (25) для эффекта Доплера (совпадающие с формулами Эйнштейна) в общей форме описывают зависимость отношения собственных частот света, излучаемого источником и детектируемого

наблюдателем, от относительной скорости β и угла α , измеряемых в лабораторной системе.

В то же время неоднократно упоминаемая нами аберрация света требует для своего описания знания зависимости угла α' от угла α . Напомним, что α — это угол между направлением \mathbf{n}_γ луча в лабораторной системе и направлением \mathbf{n}_β скорости движущейся системы относительно лабораторной (т.е. направлением оси x), а α' — это угол между направлением \mathbf{n}'_γ луча в движущейся системе и направлением \mathbf{n}_β скорости этой системы относительно лабораторной (т.е. направлением осей x, x').

Функция $\alpha'(\alpha)$ и её производная $\dot{\alpha}'(\alpha)$ по α уже были получены нами и приведены в формулах (23) и (22). Так как помимо зависимости от α они зависят ещё от параметра β , то далее они будут обозначаться как $\alpha'(\alpha, \beta)$ и $\dot{\alpha}'(\alpha, \beta)$.

Для пяти характерных значений α в интервале $0 \leq \alpha \leq \pi$ эти функции были приведены в предыдущем разделе. Этих значений достаточно, чтобы представить себе качественную картину неба, которую будут наблюдать космонавты в космическом корабле М, двигающемся со скоростью β в центре гигантской сферической Лаборатории со звёздами на её периферии.

Действительно, звёзды на небесной сфере в очень хорошем приближении можно считать неподвижными источниками света, почти "бесконечно удалёнными", согласно Эйнштейну, от области движения космического корабля М. Положение звезды на небе можно характеризовать углами θ и φ сферической системы координат с полярной осью (осью x) в направлении \mathbf{n}_β скорости корабля М. Эффекты Доплера и аберрации вследствие азимутальной симметрии зависят только от величины скорости β и полярного угла θ , вместо которого мы выбрали угол $\alpha = \pi - \theta$. Этот угол выбран и Эйнштейном, и Паули.

Если при $\beta = 0$ положение звезды на небе определяется углом α между направлением \mathbf{n}_γ луча от звезды к кораблю М и направлением \mathbf{n}_β его будущей скорости (направлением оси x), то после приобретения скорости β положение этой звезды в собственной системе корабля М будет определяться углом $\alpha'(\alpha, \beta)$, который больше α ,

$$\alpha'(\alpha, \beta) = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tan \frac{\alpha}{2} \right) > \alpha, \quad (26)$$

кроме случаев $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$, когда $\alpha' = \alpha$. Таким образом, звёзды в + и – направлениях оси x остаются несмещёнными в собственной системе корабля М, в то время как звёзды, не лежащие на оси x , получая положительное смещение, перемещаются в положительном направлении оси x и их концентрация в кормовой полусфере корабля уменьшается, а в носовой — увеличивается.

Так, звёзды с характерными для данного параметра β угловыми координатами

$$\alpha = \alpha_\beta = \arccos \beta, \quad \alpha = \alpha_1, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad (27)$$

в движущейся системе М оказываются под углами α' , равными

$$\alpha'(\alpha_\beta) = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha'(\alpha_1) = \pi - \alpha_1, \quad \alpha' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \pi - \alpha_\beta, \quad (28)$$

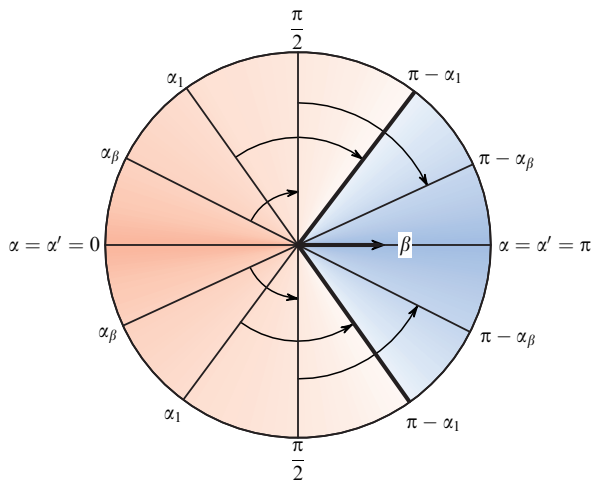


Рис. 8. Звёзды под углами $\alpha = 0, \alpha_\beta, \alpha_1, \pi/2, \pi$ в лабораторной системе координат в системе корабля М видны под углами $\alpha' = 0, \pi/2, \pi - \alpha_1, \pi - \alpha_\beta, \pi$ с красным смещением, если $\alpha' < \pi - \alpha_1$, и фиолетовым, если $\alpha' > \pi - \alpha_1$. На рисунке параметр $\beta = 0,9, \alpha_\beta = 26^\circ, \alpha_1 = 51^\circ$.

получив смещения $\alpha'(\alpha, \beta) - \alpha$:

$$\frac{\pi}{2} - \alpha_\beta, \quad \pi - 2\alpha_1, \quad \frac{\pi}{2} - \alpha_\beta. \quad (29)$$

Сильнее других сместились звёзды с координатой $\alpha = \alpha_1$. Звёзды, находившиеся в задней полусфере неба в интервале $\alpha_\beta < \alpha < \pi/2$, сместились в переднюю полусферу М и оказались в интервале $\pi/2 < \alpha' < \pi - \alpha_\beta$, граничащем со сферическим сектором $\pi - \alpha_\beta < \alpha' \leq \pi$, в котором скопились звёзды, находившиеся в передней полусфере при $\beta = 0$ (рис. 8).

Заметим, что при малом β и произвольном α смещение представляется рядом по степеням β :

$$\begin{aligned} \alpha'(\alpha, \beta) - \alpha = \\ = \beta \sin \alpha + \frac{1}{4} \beta^2 \sin 2\alpha + \frac{1}{4} \beta^3 \left(\sin \alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha \right) + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Его легко получить из интеграла (23).

Рассмотрим теперь, как изменяется цвет света звёзд в космическом корабле, движущемся со скоростью β . Согласно формулам (16) и (22) наблюдаемая в корабле частота ω'_M света звезды меньше или больше её собственной частоты ω_L , если

$$k_*(\beta, \alpha) \equiv \dot{\alpha}'(\alpha, \beta) > 1 \quad \text{или} \quad < 1.$$

Эти функции обращаются в 1 при $\alpha = \alpha_1$ (см. (17)). Звёзды с этой угловой координатой в лабораторной системе имеют смещённую координату $\alpha' = \pi - \alpha_1$ в системе корабля М, но не изменяют собственную частоту своего света. Следовательно, наблюдаемая в корабле частота ω'_M звёзд с координатой α' в интервале $0 \leq \alpha' < \pi - \alpha_1$ меньше собственной частоты ω_L этих звёзд (красное смещение), а в интервале $\pi - \alpha_1 < \alpha' \leq \pi$ — больше собственной (фиолетовое смещение). С ростом скорости корабля угол α_1 уменьшается, приближаясь к нулю. В результате область неба, в которой наблюдается красное смещение, непрерывно растёт, а область, в которой наблюдается фиолетовое смещение, непрерывно уменьшается.

Аберрация света звёзд была открыта английским астрономом Джеймсом Брадлеем в 1725–1728 гг. по

очень небольшому с полугодовым периодом изменению углов между направлениями на разные звёзды [10]. При этом им найдено значение скорости света с точностью 2 %.

Так как масштаб аберрации определяется отличием угла $2\alpha_1$ от π или угла α_β от $\pi/2$ (см. (29)), то для Земли с её орбитальной скоростью 30 км с^{-1} , $\beta = 10^{-4}$, получаем $\pi - 2\alpha_1 = \beta = 20,5''$. Это наблюдение подтвердило идею Коперника о движении Земли вокруг Солнца.

7. Заключение

Альтернативные способы описания сложных, загадочных, парадоксальных явлений, с которыми мы не встречаемся в повседневной жизни, всегда полезны для более глубокого их понимания.

Преобразования Лоренца связывают описания или результаты измерения одной и той же физической величины в одной и той же физической точке двумя наблюдателями, движущимися относительно друг друга с постоянной скоростью. К таким величинам относятся прежде всего 4-координаты собственных инерциальных систем наблюдателей и используемые в них единицы длины и времени.

Другой важнейшей в этой статье величиной является волновой 4-вектор k^μ плоской электромагнитной волны. Его скалярное произведение $k^\mu x_\mu$ с 4-вектором координаты образует фазу волны, инвариантную относительно лоренцевых преобразований. Волновые 4-векторы $k^\mu = (\mathbf{k}, \omega/c)$ и $k'^\mu = (\mathbf{k}', \omega'/c)$ луча в исходной и движущейся относительно неё системах отсчёта связаны прямым и обратным преобразованиями Лоренца (см (6.1) в [8]).

Для частот ω, ω' и углов α, α' ($k_1 = (\omega/c) \cos \alpha, k'_1 = (\omega'/c) \cos \alpha'$) эти связи выглядят следующим образом:

$$\omega = \omega' \frac{1 + \beta \cos \alpha'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \omega' k_+(\beta, \alpha'), \quad (31)$$

$$\omega' = \omega \frac{1 - \beta \cos \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \frac{\omega}{k_*(\beta, \alpha)},$$

откуда

$$\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \alpha} = \frac{1 + \beta \cos \alpha'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{или} \quad k_*(\beta, \alpha) = k_+(\beta, \alpha'). \quad (32)$$

Возникшие здесь формулы для коэффициентов k_*, k_+ и связи между ними совпадают с формулами (16), (20), (21), полученными обобщённым методом коэффициента k .

Измерения показывают, что в согласии с преобразованиями Лоренца движущиеся линейки короче таких же покоящихся, а движущиеся часы идут медленнее неподвижных. Тем не менее для объяснения парадокса близнецов, явлений аберрации и релятивистского эффекта Доплера приходится сравнивать ход идентичных часов, находящихся на большом расстоянии друг от друга (определение времени на расстоянии) и даже прибегать к неинерциальным системам.

В методе коэффициента k , предложенном Г. Бонди, и в предлагаемом здесь обобщённом методе коэффи-

коэффициента k определение времени на расстоянии содержится как необходимое условие. Более того, в обобщённом методе коэффициенты $k_*(\beta, \alpha)$ и $k_+(\beta, \pi - \alpha) \equiv 1/k_*(\beta, \alpha)$ являются взаимно-обратными аналитическими функциями переменного $z \equiv \alpha$ на интервале $0 \leq z = \alpha \leq \pi$ и на всей плоскости комплексного z , представляющей собой естественную область существования этих функций как единого целого. Сохраняя периодическую зависимость от z при его изменении параллельно вещественной оси, эти функции имеют особенности вне вещественной оси в точках

$$z_n^\pm = 2\pi n \mp i \ln \cos \alpha_1, \quad \cos \alpha_1 = \frac{\beta}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (33)$$

— полюсы у $k_*(\beta, z)$ и нули у $k_+(\beta, \pi - z)$. Именно им обязана существующая пространственно-временная асимметрия релятивистских эффектов Доплера и абберации света, состоящая в смещении углового положения и цвета лучей далёких источников в направлении скорости наблюдателя. При изменении z параллельно мнимой оси $k_*(\beta, z)$ экспоненциально спадает, а $k_+(\beta, \pi - z)$ — экспоненциально растёт.

Математическое изящество вывода этих функций из преобразований Лоренца соревнуется со здравым смыслом их появления в обобщённом методе коэффициента k . Преобразования Лоренца подчёркивают локальную эквивалентность инерциальных систем (штрихованной и нештрихованной), а обобщённый метод собирает, интегрирует сведения о далёких событиях с помощью периодических сигналов к ним и от них. Когерентность таких сигналов не меняется при изменении их фазы на 2π . По-видимому, с этим связана периодичность функций $k_*(\beta, z)$ и $k_+(\beta, \pi - z)$ при изменении z параллельно вещественной оси.

В связи с этим нельзя не привести слова П. Дирака из его статьи "The relation between mathematics and physics" [11] по поводу принципа математической красоты и теории функций комплексного переменного. "Эта область математики исключительно красива, и группа преобразований, с которой она связана, именно, группа

преобразований комплексной плоскости, — это та же группа, что и группа Лоренца, управляющая пространством-временем специальной теории относительности. Мы приходим, таким образом, к подозрению, что есть какая-то глубокая связь между теорией функций комплексной переменной и пространством-временем специальной теории относительности; разработка этой связи станет трудной целью будущих исследований".

Аналитические функции $k_*(\beta, z)$ и $k_+(\beta, \pi - z)$ с полюсами и нулями (33) находятся в русле этой связи.

Автор благодарен Н.В. Грибковой, С.Л. Лебедеву, А.И. Ритусу и А.Е. Шабаду за помощь и внимание, оказанные ему при выполнении этой работы.

Список литературы

1. Bondi H *Discovery* **18** 505 (1957)
2. Bondi H *Relativity and Common Sense. A New Approach to Einstein* (Science Study Series, S36) (Garden City, NY: Anchor Books, 1964); Пер. на русск. яз.: Бонди Г *Относительность и здравый смысл* (М.: Мир, 1967)
3. Bohm D *The Special Theory of Relativity* (New York: W.A. Benjamin, 1965); Пер. на русск. яз.: Бом Д *Специальная теория относительности* (М.: Мир, 1967)
4. Marder L *Time and the Space-Traveller* (London: Allen and Unwin, 1971); Пер. на русск. яз.: Мардер Л *Парадокс часов* (М.: Мир, 1974)
5. Pauli W *Theory of Relativity* (New York: Pergamon Press, 1958); Пер. на русск. яз.: Паули В *Теория относительности* (М.: Наука, 1983)
6. Einstein A *Ann. Physik* **17** 891 (1905) Vol. 322 в новой нумерации на сайте Wiley Online Library; Пер. на русск. яз.: Эйнштейн А *Собрание научных трудов* Т. 1 (М.: Наука, 1965) с. 7
7. Einstein A *Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik* **4** 411 (1907); Пер. на русск. яз.: Эйнштейн А *Собрание научных трудов* Т. 1 (М.: Наука, 1965) с. 65
8. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1975)
9. Lightman A P, Press W H, Price R N, Teukolsky S A *A Problem Book in Relativity and Gravitation* (Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1975); Пер. на русск. яз.: Лайтман А, Пресс В, Прайс Р, Тюкольски С *Сборник задач по теории относительности и гравитации* (М.: Мир, 1979)
10. Bradley J *Philos. Trans.* **35** 637 (1728)
11. Dirac P A M *Proc. R. Soc. Edinburgh A* **59** 122 (1938–1939)

Generalization of the k coefficient method in relativity to an arbitrary angle between the velocity of an observer (source) and the direction of the light ray from (to) a faraway source (observer) at rest

V.I. Ritus. *Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation*
E-mail: ritus@lpi.ru

The k coefficient method proposed by H Bondi is extended to a general case when the angle α between the velocity of a signal from a distant source at rest and the velocity of an observer does not coincide with 0 or π , as considered by Bondi, but takes an arbitrary value in the interval $0 \leq \alpha \leq \pi$, and to the opposite case, when the source is moving and the observer is at rest, while the angle α between the source velocity and the direction of the signal to the observer takes any value between 0 and π . Functions $k_*(\beta, \alpha)$ and $k_+(\beta, \alpha)$ of the angle and relative velocity are introduced for the ratio ω/ω' of proper frequencies of the source and observer. Their explicit expressions are obtained from the condition of the invariance of the ray beam coherence in passing from the source frame to that of the observer without using the Lorentz transform. Owing to the analyticity of these functions in α , the ratio of frequencies in the cases mentioned is given by the formulas $\omega/\omega' = k_*(\beta, \alpha)$ and $\omega/\omega' = k_+(\beta, \pi - \alpha) \equiv 1/k_*(\beta, \alpha)$, which coincide with those for the Doppler effect, in which the angle α , velocity β , and one of the frequencies are measured in a rest reference frame. A ray emitted by the source at angle α to the observer velocity in the source frame is directed at the angle α' to the same velocity in the observer frame. Owing to light aberration, the angles α and α' are functionally related through $k_*(\beta, \alpha) = k_+(\beta, \alpha')$. The functions $\alpha'(\alpha, \beta)$ and $\alpha(\alpha', \beta)$ are expressed as antiderivatives of the functions $k_*(\beta, \alpha)$ and $k_+(\beta, \pi - \alpha')$. The analyticity of functions $k_*(\beta, z)$ and $k_+(\beta, z)$ in $z \equiv \alpha$ in the interval $0 \leq z \leq \pi$ is continued into the entire plane of complex z , where k_* has poles at $z_n^\pm = 2\pi n \mp i \ln \cos \alpha_1$ (see (17)), and k_+ has zeros in the same points shifted by π . The spatiotemporal asymmetry of the Doppler and light aberration effects is explained by the closeness of these singularities to the real axis.

Keywords: special relativity theory, invariance of coherence, invariance of phase, Doppler effect, analyticity in angle, conjugate poles and aberration scale

PACS numbers: **03.30.+p**, 42.15.Fr

Bibliography — 11 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **190** (6) 648–657 (2020)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2019.12.038703>

Received 1 July 2019, revised 10 October 2019

Physics – Uspekhi **63** (6) (2020)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2019.12.038703>