

## Силуэты невидимых чёрных дыр

В.И. Докучаев, Н.О. Назарова

*Изолированная чёрная дыра в общей теории относительности является невидимым объектом из-за бесконечно большого красного смещения фотонов, летящих от её горизонта событий к удалённому наблюдателю. Однако видимой может быть тёмная тень (силуэт) чёрной дыры на фоне излучающего вещества, линзированного в гравитационном поле чёрной дыры. Тень чёрной дыры — это проекция на небесную сферу сечения захвата фотонов чёрной дырой. Если подсвечивающий чёрную дыру фон находится далеко за чёрной дырой, а точнее, на расстоянии, значительно превышающем радиус горизонта событий, то может наблюдаваться классическая тень чёрной дыры максимального размера. Тень минимального размера может наблюдаваться, если та же самая чёрная дыра подсвечивается внутренней частью аккреционного диска, примыкающей к горизонту событий. В этом случае тень аккрецирующей чёрной дыры является линзованным изображением северной или южной полусферы горизонта событий в зависимости от ориентации оси вращения чёрной дыры. Тёмный силуэт южной полусферы горизонта событий виден на изображении сверхмассивной чёрной дыры M87\*, полученным Телескопом горизонта событий. Яркость аккреционного диска вокруг чёрной дыры может значительно превышать яркость удалённого фона в виде звёзд и облаков горячего газа. По этой причине трудно наблюдать классическую тень аккрецирующей чёрной дыры.*

**Ключевые слова:** теория гравитации, общая теория относительности, чёрные дыры, горизонт событий, гравитационное линзирование

PACS numbers: 04.70.Bw, 98.35.Jk, 98.62.Js

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.01.038717>

## Содержание

1. Введение (627).
2. Вращающаяся чёрная дыра Керра (629).
3. Локально невращающиеся системы отсчёта (630).
4. Уравнения движения для пробных частиц (630).
5. Характерные свойства траекторий частиц (631).
  - 5.1. Непреодолимое вращение в эргосфере.
  - 5.2. Навинчивание на горизонт событий.
  - 5.3. Сферические орбиты.
  - 5.4. Множественные изображения.
6. Формы изображений чёрных дыр (633).
  - 6.1. Классическая тень чёрной дыры на удалённом фоне.
  - 6.2. Тень аккрецирующей чёрной дыры.
  - 6.3. Картография горизонта событий.
7. Спин сверхмассивной чёрной дыры M87\* (642).
8. Заключение (643).

Список литературы (644).

В.И. Докучаев<sup>(1,2,\*),</sup> Н.О. Назарова<sup>(3,4, \*\*)</sup>

(<sup>1</sup>) Институт ядерных исследований РАН,  
просп. 60-летия Октября 7а, 117312 Москва, Российской Федерации

(<sup>2</sup>) Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет),  
Институтский пер. 9, 141701 Долгопрудный, Московская обл.,  
Российская Федерация

(<sup>3</sup>) Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (SISSA),  
Via Bonomea 265, 34136 Trieste (TS), Italy

(<sup>4</sup>) International Centre for Theoretical Physics (ICTP),  
Strada Costiera 11, 34151 Trieste (TS), Italy  
E-mail: (<sup>\*</sup>) dokuchaev@inr.ac.ru, (<sup>\*\*</sup>) nnazarov@sissa.it

Статья поступила 5 ноября 2019 г.,  
после доработки 4 декабря 2019 г.

## 1. Введение

Общеизвестные чёрные дыры, предсказанные общей теорией относительности (теорией гравитации Эйнштейна), в силу своей физической природы являются невидимыми объектами. Строго говоря, горизонт событий каждой чёрной дыры является поверхностью, образованной геодезическими траекториями фотонов, которые не заканчиваются на пространственной бесконечности [1]. Проще говоря, фотоны, образующие (или генерирующие) горизонт событий, не достигают удалённого наблюдателя. Тем не менее в реальных астрофизических условиях можно наблюдать изображения астрофизических чёрных дыр в виде их тёмных теней (тёмных силуэтов) на ярком светящемся фоне. В космических условиях это может быть либо светящийся фон из ярких звёзд и протяжённых облаков горячего газа, расположенный далеко за чёрной дырой, либо горячее вещество, падающее в чёрную дыру и излучающее вблизи её горизонта событий.

В исследованиях возможных форм изображений чёрных дыр в последние годы широко используется терминология, заимствованная из фотографии, — фотографируемый объект (чёрная дыра), изображение объекта, его тень, силуэт, контур силуэта. В обычной фотографии фотографируемый объект может быть как видимым, так и невидимым. Однако в случае чёрной дыры мы имеем объект, который сам по себе невидим при описании в рамках общей теории относительности (ОТО). На изображении астрофизической чёрной дыры можно увидеть только её тёмную тень (тёмный силуэт), если чёрная дыра подсвечивается внешним источником излучения.

Именно эта характерная особенность изображений чёрных дыр специально подчёркивается в названии настоящей статьи. В частности, внутренние части силуэтов белых дыр и кротовых нор могут быть видимыми, в отличие от полностью тёмных силуэтов чёрных дыр.

Астрофизические наблюдения изображений наиболее вероятных кандидатов, каковыми являются сверхмассивные объекты SgrA\* в центре нашей Галактики и M87\* в центре галактики M87, могут использоваться для прямого доказательства существования чёрных дыр.

Прямыми доказательствами существования чёрных дыр является обнаружение объекта, вся масса которого сосредоточена внутри его горизонта событий. Такое прямое доказательство впервые было представлено в апреле 2019 г., когда международная коллаборация EHT (Event Horizon Telescope) (Телескоп горизонта событий — ТГС) опубликовала изображение сверхмассивной чёрной дыры в галактике M87 с рекордно высоким угловым разрешением, порядка нескольких угловых микросекунд [2–7]. Горизонт событий этой чёрной дыры при массе  $6 \times 10^9 M_\odot$  обладает именно таким угловым размером. Полученное уникальное изображение качественно состоит из асимметричного яркого кольца, которое интерпретируется как свечение аккреционного диска, и тёмной центральной части, которая интерпретируется как реальный наблюдаемый силуэт чёрной дыры.

Представленное коллаборацией ТГС изображение чёрной дыры в галактике M87 согласуется с предсказываемой формой силуэта чёрной дыры в рамках ОТО и поэтому является первым прямым доказательством существования чёрных дыр во Вселенной. Строго говоря, на сегодняшний день все другие известные астрофизические наблюдения кандидатов в чёрные дыры и даже успешная регистрация нескольких событий всплесков гравитационных волн, которые можно объяснить только слияниями чёрных дыр звёздных масс, являются лишь косвенными свидетельствами в пользу существования чёрных дыр.

Наиболее важной целью ТГС является также регистрация изображения ближайшей к нам сверхмассивной чёрной дыры SgrA\* в центре Млечного Пути [8–17]. Сверхмассивная чёрная дыра SgrA\* в центре нашей Галактики с массой  $M = (4,3 \pm 0,3) \times 10^6 M_\odot$  [18–22] представляет собой объект особенно интенсивного и пристального изучения [23–92]. Во-первых, эта сверхмассивная чёрная дыра является ближайшим к нам "дремлющим", или "спящим", квазаром с очень низким уровнем активности, позволяющим надеяться на прозрачность окружающего вещества. Во-вторых, технологический уровень проекта ТГС, а также связанных с ним проектов BlackHoleCam (Black Hole Camera) [93] и GRAVITY [94, 95], позволяет получить изображение чёрной дыры с угловым разрешением, соответствующим масштабу её горизонта событий [96–109].

Наблюдаемые формы изображений чёрных дыр зависят от распределения светящегося вещества вблизи чёрной дыры и вблизи проекции её положения на небесной сфере. В случае удалённого светящегося фона вблизи проекции положения чёрной дыры на небесной сфере будет наблюдаться тень чёрной дыры максимального размера. Тёмное изображение этой тени является проекцией на небесную сферу сечения захвата (поглощения) фотонов удалённого фона в гравитационном поле чёрной

дыры. Удалённым светящимся фоном могут быть протяжённые облака горячего газа и яркие звёзды, расположенные на стационарных орbitах вокруг чёрной дыры, а также внешние стационарные части аккреционного диска, находящиеся вне световых сфер (сферических фотонных орбит).

Помимо удалённого светящегося фона вблизи чёрной дыры может наблюдаться яркое аккрецируемое вещество, падающее внутрь чёрной дыры и излучающее вблизи её горизонта событий. Мы продемонстрируем в разделе 6.2, что в случае чёрной дыры, подсвечиваемой аккреционным диском, будет наблюдаться тень меньшего размера по сравнению с тенью от удалённого фона.

Форма тени аккрецирующей чёрной дыры определяется траекториями излучаемых вблизи горизонта событий фотонов, приходящих к удалённому наблюдателю с большим красным смещением. Детализация наблюданного изображения тени аккрецирующей чёрной дыры будет определяться чувствительностью и угловым разрешением регистрирующего телескопа. Тень аккрецирующей чёрной дыры является линзированным изображением её горизонта событий, поэтому эту тень естественно называть силуэтом горизонта событий чёрной дыры. В случае тонкого аккреционного диска силуэт горизонта событий чёрной дыры оказывается линзированным изображением северной или южной полусфера глобуса горизонта событий, в зависимости от ориентации оси вращения чёрной дыры, а контур этого силуэта является линзированным изображением экватора на глобусе горизонта событий. На изображении сверхмассивной чёрной дыры M87\*, полученному ТГС, наблюдается тёмный силуэт горизонта событий этой чёрной дыры, являющийся линзированным изображением южной полусфера глобуса горизонта событий.

В нашей статье классической тенью чёрной дыры мы будем называть максимальный размер тени, наблюдаемой в случае удалённого фона, поскольку в настоящее время изучению именно такой тени чёрной дыры посвящено подавляющее большинство опубликованных исследований. Мы продемонстрируем, что в случае аккрецирующей чёрной дыры будет наблюдаться тень минимального размера, которая является силуэтом самого горизонта событий чёрной дыры, т.е. его линзированным изображением.

При аккреции на чёрную дыру выделяется гигантская энергия, обеспечивающая очень высокую яркость излучения аккреционного диска по сравнению с яркостью излучения удалённого фона из газа и звёзд, окружающих чёрную дыру. Иначе говоря, яркость излучения аккреционного диска, дающего изображение горизонта событий чёрной дыры, в реальных астрофизических условиях значительно превышает яркость удалённого фона, дающего изображение классической тени чёрной дыры. По этой причине при наблюдениях чёрной дыры даже с очень высоким угловым разрешением вероятность обнаружения её классической тени крайне низка по сравнению с вероятностью обнаружения силуэта горизонта событий аккрецирующей чёрной дыры. В результате классическую тень чёрной дыры трудно увидеть либо из-за низкой аккреционной активности чёрной дыры, либо вследствие замывания этой тени мощным излучением аккреционного диска.

С введением в строй в ближайшие несколько лет усовершенствованного ТГС начнётся следующая стадия

детального экспериментального исследования чёрных дыр и форм их изображений с целью проверки ОТО и её модификаций в пределе сильного поля [110–150]. Перспективными инструментами для разработки методов будущих исследований являются проектируемые космические интерферометры с разрешением на уровне одной угловой наносекунды [151–153].

Следует отметить, что в реальных космических условиях массы чёрных дыр возрастают со временем за счёт поглощения (акреции) окружающего их вещества или благодаря слиянию с другими чёрными дырами. Внешняя граница захвата чёрной дырой с переменной массой любых объектов называется локальным горизонтом видимости, а горизонт событий, имеющий глобальную природу, определяется всей историей данной чёрной дыры во Вселенной и фактически определяется её финальной массой (см. детали, например, в [154]). В дальнейшем мы не будем делать различия между горизонтом видимости и горизонтом событий, пренебрегая изменением массы чёрной дыры со временем.

Традиционно считается, что горизонт событий чёрной дыры невидим и восстановить его изображение невозможно. В разделе 6.3 мы покажем, что гравитационное линзирование излучающего вещества, падающего внутрь чёрной дыры вне её экваториальной плоскости, обеспечивает принципиальную возможность построения линзированного изображения всего горизонта событий чёрной дыры. Это изображение проецируется на небесной сфере внутри положения тени чёрной дыры. При этом результирующее изображение горизонта событий является линзированной проекцией на небесную сферу сразу всей поверхности горизонта событий чёрной дыры, а не только его передней по отношению к удалённому наблюдателю части. Чёрные дыры оказываются уникальными объектами во Вселенной, которые можно видеть одновременно со всех сторон.

В будущем тень чёрной дыры и изображение её горизонта событий могут быть зарегистрированы сразу вместе при одновременных наблюдениях на нескольких телескопах разных типов с необходимым угловым разрешением. А именно, тень чёрной дыры на удалённом фоне может быть измерена, например, в рентгеновском диапазоне или в ближнем инфракрасном (ИК) диапазоне по наблюдениям протяжённых фоновых источников и линзированных изображений нормальных звёзд и нейтронных звёзд позади чёрной дыры. В то же время удалённый наблюдатель может получить линзированное изображение горизонта событий, регистрируя фотоны с большими красными смещениями, излучённые вблизи горизонта событий падающим внутрь чёрной дыры горячим веществом.

## 2. Вращающаяся чёрная дыра Керра

Знаменитую метрику Керра [155], являющуюся точным решением уравнений Эйнштейна для вращающейся чёрной дыры, удобно записывать в координатах Бойера–Линдквиста  $(t, r, \theta, \phi)$  [156] в стандартном виде, справедливом для любого стационарного осесимметричного асимптотически плоского пространства-времени [157–161]:

$$ds^2 = -e^{2v} dt^2 + e^{2\psi} (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\mu_1} dr^2 + e^{2\mu_2} d\theta^2. \quad (1)$$

Эта стандартная метрика является решением Керра при

$$\begin{aligned} e^{2v} &= \frac{\Sigma \Delta}{A}, & e^{2\psi} &= \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma}, \\ e^{2\mu_1} &= \frac{\Sigma}{\Delta}, & e^{2\mu_2} &= \Sigma, & \omega &= \frac{2Mr\alpha}{A}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (3)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (4)$$

$$A = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \quad (5)$$

$M$  — масса чёрной дыры,  $a = J/M$  — удельный угловой момент (спин) чёрной дыры,  $\omega$  — так называемая угловая скорость увлечения; используются единицы измерений с гравитационной постоянной  $G = 1$  и скоростью света  $c = 1$ . В дальнейшем для упрощения записи формул мы также будем часто использовать безразмерные величины для пространственных расстояний,  $r \Rightarrow r/M$ , и для временных интервалов,  $t \Rightarrow t/M$ , что эквивалентно условию  $M = 1$ . Иначе говоря, мы будем выражать безразмерные радиальные расстояния в единицах  $GM/c^2$ , а соответствующие безразмерные временные интервалы — в единицах  $GM/c^3$ . Соответственно, мы будем использовать безразмерное выражение для спина чёрной дыры  $a = J/M^2 \leqslant 1$ , а также без потери общности изложения будем полагать  $a \geqslant 0$ .

Наиболее общие законы динамики (или термодинамики) стационарных осесимметричных чёрных дыр сформулированы в эпохальной статье [162].

Горизонт событий чёрной дыры Керра в координатах Бойера–Линдквиста представляет собой сферу, радиус

$$r_h = M + \sqrt{M^2 - a^2} \quad (6)$$

которой является старшим корнем квадратного уравнения  $\Delta = 0$ . Горизонт событий существует только при  $a \leqslant M$ . При  $a > M$  горизонт событий отсутствует и метрика Керра (1) описывает голую сингулярность. При  $a = 0$  метрика Керра совпадает с метрикой статической сферически-симметричной чёрной дыры Шварцшильда. Следует отметить, что, строго говоря, горизонт событий чёрной дыры Керра имеет форму сферы только в топологическом смысле, поскольку гауссова кривизна поверхности горизонта событий не является константой, а зависит от полярного угла  $\theta$  [163, 164]. Чисто сферическая форма горизонта событий чёрной дыры Керра в координатах Бойера–Линдквиста представляет собой исключительное свойство именно этой уникальной системы координат.

Примечательным свойством угловой скорости увлечения  $\omega$  из уравнения (2) является её независимость от угла  $\theta$  на горизонте событий чёрной дыры:

$$\omega(r_h) = \Omega_h = \frac{a}{2M(M + \sqrt{M^2 - a^2})}. \quad (7)$$

Угловая скорость  $\Omega_h$  называется угловой скоростью вращения горизонта событий чёрной дыры. Таким образом, оказывается, что горизонт событий в координатах Бойера–Линдквиста вращается как твёрдое тело!

### 3. Локально невращающиеся системы отсчёта

В любом стационарном осесимметричном асимптотически плоском пространстве-времени удобно использовать ортонормированные локально невращающиеся системы отсчёта (ЛНСО) (Locally Nonrotating Frames, LNRF) [157–159], в которых наблюдатели движутся по мировым линиям  $r = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$ ,  $\varphi = \omega t + \text{const}$ . В метрике Керра угловая скорость увлечения  $\omega$  определяется уравнением (2). Физические наблюдатели в ЛНСО "вращаются" вместе с чёрной дырой, и для них все физические процессы в метрике Керра выглядят наиболее естественным образом по сравнению с таковыми в других системах отсчёта [159].

Базисные векторы ортонормальной тетрады, связанной с физическими наблюдателями в ЛНСО, имеют следующий вид [159]:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{(t)} &= e^{-\nu} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \left( \frac{A}{\Sigma \Delta} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2Mat}{(A\Sigma\Delta)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \mathbf{e}_{(r)} &= e^{-\mu_1} \frac{\partial}{\partial r} = \left( \frac{\Delta}{\Sigma} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial r}, \\ \mathbf{e}_{(\theta)} &= e^{-\mu_2} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{\Sigma^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \mathbf{e}_{(\varphi)} &= e^{-\psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \left( \frac{\Sigma}{A} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (8)$$

Соответствующие базисные дифференциальные 1-формы (или ковариантные базисные векторы) выражаются как

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(t)} &= e^{\nu} dt = \left( \frac{\Sigma \Delta}{A} \right)^{1/2} dt, \\ \mathbf{e}^{(r)} &= e^{\mu_1} dr = \left( \frac{\Sigma}{\Delta} \right)^{1/2} dr, \\ \mathbf{e}^{(\theta)} &= e^{\mu_2} d\theta = \Sigma^{1/2} d\theta, \\ \mathbf{e}^{(\varphi)} &= -\omega e^{\psi} dt + e^{\psi} d\varphi = \\ &= -\frac{2Mar \sin \theta}{(\Sigma A)^{1/2}} dt + \left( \frac{A}{\Sigma} \right)^{1/2} \sin \theta d\varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) задают компоненты  $e_{(i)}^\mu$  и  $e_\mu^{(i)}$  базисных векторов в ЛНСО:

$$\mathbf{e}_{(i)} = e_{(i)}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \mathbf{e}^{(i)} = e_\mu^{(i)} dx^\mu. \quad (10)$$

В частности, стандартные преобразования с помощью этих компонент для тензоров второго ранга имеют вид

$$J_{(a)(b)} = e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu J_{\mu\nu}, \quad J_{\mu\nu} = e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)} J_{(a)(b)}. \quad (11)$$

В разделе 6.2.2 мы используем ЛНСО для вычисления сдвига энергии фотона за счёт гравитационного красного смещения и эффекта Доплера при линзировании в гравитационном поле чёрной дыры.

### 4. Уравнения движения для пробных частиц

Движение массивной пробной частицы в метрике Керра (при пренебрежении гравитационным излучением) полностью определяется интегралами движения: массой

пробной частицы  $\mu$ , полной энергией частицы  $E$ , азимутальным угловым моментом частицы  $L$  и постоянной Картера  $Q$ , связанной с неазимутальной частью углового момента частицы [100, 165]. В частности, при  $Q = 0$  движение частицы ограничено экваториальной плоскостью. Используя эти интегралы движения, Б. Картеру [165] удалось получить дифференциальные уравнения движения первого порядка для пробных частиц. Эти замечательные уравнения Картера имеют вид [100, 159–161, 165, 166]:

$$\Sigma \frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{R(r)}, \quad (12)$$

$$\Sigma \frac{d\theta}{d\tau} = \pm \sqrt{\Theta(\theta)}, \quad (13)$$

$$\Sigma \frac{d\varphi}{d\tau} = L \sin^{-2} \theta + a(\Delta^{-1} P - E), \quad (14)$$

$$\Sigma \frac{dt}{d\tau} = a(L - aE \sin^2 \theta) + (r^2 + a^2)\Delta^{-1} P, \quad (15)$$

где  $\tau$  — собственное время массивной частицы или аффинный параметр вдоль траектории безмассовой ( $\mu = 0$ ) частицы. Радиальное и полярное движения в этих уравнениях определяются, соответственно, эффективным радиальным потенциалом

$$R(r) = P^2 - \Delta [\mu^2 r^2 + (L - aE)^2 + Q], \quad (16)$$

где  $P = E(r^2 + a^2) - aL$ , и эффективным полярным потенциалом

$$\Theta(\theta) = Q - \cos^2 \theta [a^2(\mu^2 - E^2) + L^2 \sin^{-2} \theta]. \quad (17)$$

В частности, нули этих эффективных потенциалов определяют точки поворота  $dr/d\tau = 0$  и  $d\theta/d\tau = 0$  соответственно в радиальном и полярном направлениях.

Траектории массивных частиц ( $\mu \neq 0$ ) в метрике Керра определяются тремя параметрами (константами движения):  $\gamma = E/\mu$ ,  $\lambda = L/E$  и  $q = \sqrt{Q}/E$ . Соответствующие траектории фотонов (световые или нулевые геодезические) определяются двумя константами движения:  $\lambda = L/E$  и  $q = \sqrt{Q}/E$  (возможные в метрике Керра траектории фотонов с  $Q < 0$  мы рассматривать не будем, поскольку они не достигают удалённого наблюдателя).

Дифференциальные уравнения движения (12)–(15) могут быть представлены в интегральном виде [100, 159, 160, 165], удобном для численного интегрирования:

$$\int_C \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} = \int_C \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}}, \quad (18)$$

$$\tau = \int_C \frac{r^2}{\sqrt{R(r)}} dr + \int_C \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}} d\theta, \quad (19)$$

$$\phi = \int_C \frac{aP}{\Delta \sqrt{R(r)}} dr + \int_C \frac{L - aE \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta \sqrt{\Theta(\theta)}} d\theta, \quad (20)$$

$$t = \int_C \frac{(r^2 + a^2)P}{\Delta \sqrt{R(r)}} dr + \int_C a \frac{(L - aE \sin^2 \theta)a}{\sqrt{\Theta(\theta)}} d\theta, \quad (21)$$

где эффективные потенциалы  $R(r)$  и  $\Theta(\theta)$  определяются формулами (16) и (17). Интегралы в (18)–(21) являются криволинейными интегралами первого рода вдоль

траектории частицы С. Самой важной особенностью этих интегралов является их монотонное возрастание вдоль траектории частиц. Формально это означает, что подынтегральные выражения в интегралах вдоль траекторий частиц не меняют своего знака при переходе через радиальные и угловые точки поворота. В частности, криволинейные интегралы в (18) сводятся к обычным интегралам при отсутствии точек поворота вдоль траектории по координатам  $r$  и  $\theta$ :

$$\int_{r_s}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} = \int_{\theta_0}^{\theta_s} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}}, \quad (22)$$

где  $r_s$  и  $\theta_s$  — радиус и широта начальной точки траектории (например, точки испускания фотона), а  $r_0 \gg r_h$  и  $\theta_0$  — соответствующие координаты конечной точки траектории (например, точки детектирования фотона удалённым наблюдателем). В случае траектории с одной точкой поворота  $\theta_{\min}(\lambda, q)$  (точка экстремума полярного потенциала  $\Theta(\theta)$ ) криволинейные интегралы в (18) выражаются через обычные интегралы:

$$\int_{r_s}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_s} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}} + \int_{\theta_{\min}}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}}. \quad (23)$$

Соответственно, криволинейные интегралы в (18) для траекторий с двумя точками поворота,  $\theta_{\min}(\lambda, q)$  и  $r_{\min}(\lambda, q)$  (точка экстремума радиального потенциала  $R(r)$ ), также выражаются через обычные интегралы:

$$\int_{r_{\min}}^{r_s} \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} + \int_{r_{\min}}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_s} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}} + \int_{\theta_{\min}}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}}. \quad (24)$$

Интегральные уравнения (18)–(21) для траекторий частиц с ещё большим числом точек поворота выражаются через обычные интегралы аналогичным образом.

В метрике Керра формы траекторий частиц не изменяются при одновременной смене знака времени  $t$  и знака угловой скорости вращения метрики  $\omega$  (т.е. при смене знака спина чёрной дыры). Например, форма траектории падающей в чёрную дыру частицы совпадает с формой траектории той же частицы (т.е. частицы с теми же интегралами движения), вылетающей из белой дыры. Заметим также, что в метрике Керра траектории пробных частиц в случае чёрной дыры совпадают с аналогичными траекториями в случае белой дыры, если изменить знак времени  $t$ .

## 5. Характерные свойства траекторий частиц

### 5.1. Непреодолимое вращение в эргосфере

Наиболее поразительной особенностью гравитационного поля вращающейся чёрной дыры Керра вне горизонта событий является наличие "эргосферы"— области, внутри которой физические наблюдатели не могут оставаться в "покое" ( $r, \theta, \varphi = \text{const}$ ) относительно неподвижного удалённого наблюдателя. Внутренней границей эргосферы является горизонт событий чёрной дыры  $r_h = 1 + \sqrt{1 - a^2}$ . Внешняя граница эргосферы (предел статичности)  $r = r_{\text{ES}}(\theta)$  имеет вид

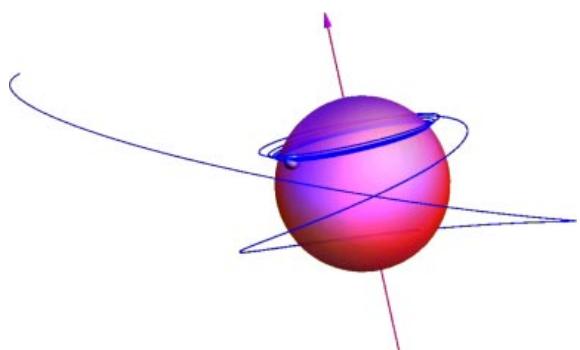
$$r_{\text{ES}}(\theta) = 1 + \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (25)$$

Внутри эргосферы все материальные объекты, включая фотоны, вовлекаются в непреодолимое вращение вокруг чёрной дыры с угловой скоростью  $\dot{\varphi} = d\varphi/dt \propto a$ , причём при приближении к горизонту событий эта угловая скорость стремится к угловой скорости вращения горизонта  $\Omega_h$  из (7). Внутри эргосферы существуют падающие внутрь чёрной дыры геодезические, которым соответствует отрицательная полная энергия,  $E < 0$ . Существование таких геодезических обеспечивает работу "механизма Пенроуза" по извлечению энергии вращения из чёрной дыры [160, 167].

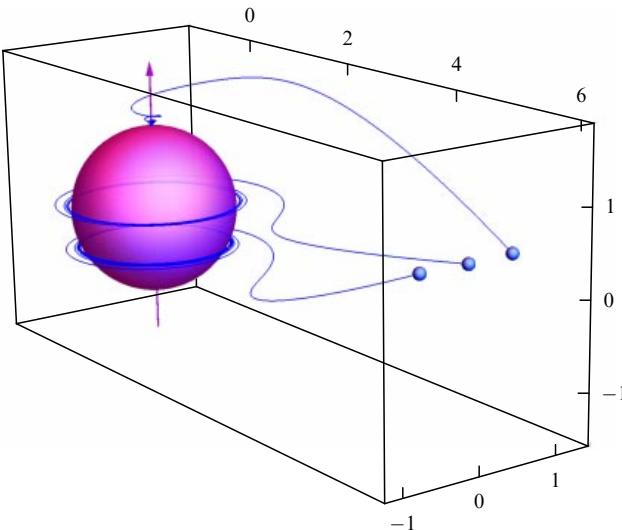
### 5.2. Навинчивание на горизонт событий

Второй поразительной особенностью гравитационного поля чёрной дыры Керра является навинчивание траекторий падающих частиц на горизонт событий в азимутальном направлении при падении в чёрную дыру, если  $a \neq 0$ . При  $r \rightarrow r_h$  угловая скорость навинчивания траекторий всех падающих в чёрную дыру частиц (включая фотоны) в координатах Бойера – Линдквиста стремится к постоянной угловой скорости вращения горизонта событий  $\Omega_h$  из (7), которая не зависит от полярного угла  $\theta$ . Иными словами, все падающие в чёрную дыру частицы при приближении к горизонту событий вовлекаются в его твердотельное вращение,  $d\varphi/dt \rightarrow \Omega_h = \text{const}$  (см. иллюстрацию этого эффекта на рис. 1–3). Орбитальные параметры  $\lambda$  и  $q$  для этих трёхмерных (3D) траекторий найдены с помощью совместного численного решения интегральных уравнений движения (18), а сами 3D-траектории массивных частиц ( $\mu \neq 0$ ) и фотонов ( $\mu = 0$ ) построены с помощью численного интегрирования дифференциальных уравнений движения (12)–(15).

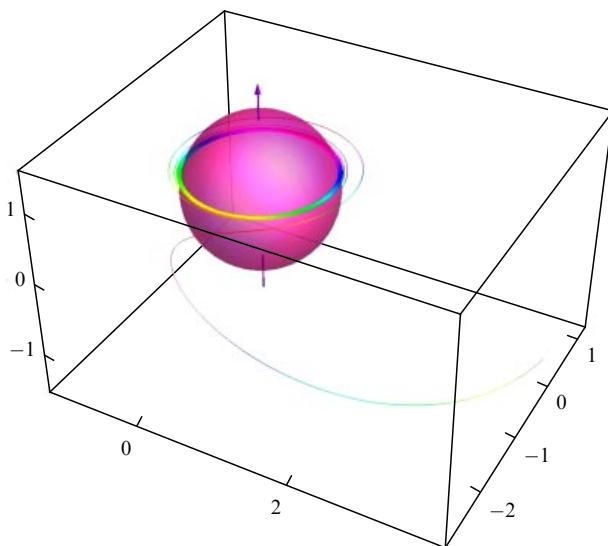
На рисунке 1 показана 3D-траектория массивной пробной частицы ( $\mu \neq 0$ ) с параметрами орбиты  $Q = -0,3 M^2 \mu^2$ ,  $E/M = 0,85$ ,  $L/M = 1,7$ , падающей в чёрную дыру со спином  $a = 0,998$ . Траектория частицы начинается с радиуса  $r(0) = 4,4$ . На всех 3D-рисунках в настоящей статье используются координаты Бойера – Линдквиста, поскольку именно в этих координатах не только горизонт событий чёрной дыры, но и траектории всех частиц могут быть представлены наиболее просто и наглядно.



**Рис. 1.** (В цвете онлайн.) 3D-траектория массивной пробной частицы, падающей в чёрную дыру со спином  $a = 0,998$ . Траектория частицы начинается с радиуса  $r(0) = 4,4$ . При приближении к чёрной дыре частица (малый голубой шарик) начинает навинчиваться на её горизонт событий с постоянной угловой скоростью  $\Omega_h$ . Малиновая сфера — горизонт событий чёрной дыры. Малиновая стрелка — ось вращения чёрной дыры.



**Рис. 2.** (В цвете онлайн.) 3D-траектории пробных массивных частиц, падающих внутрь чёрной дыры со спином  $a = 0,998$  вблизи северного полюса горизонта событий, вблизи его экватора и в южной полусфере горизонта событий. При приближении к чёрной дыре все частицы начинают навинчиваться на её горизонт событий с постоянной угловой скоростью  $\Omega_h$ .



**Рис. 3.** (В цвете онлайн.) 3D-траектория падения фотона с отрицательным азимутальным угловым моментом. Вне эргосферы этот фотон движется с отрицательной угловой скоростью относительно удалённого наблюдателя,  $d\phi/dt < 0$ . При попадании в эргосферу чёрной дыры угловая скорость движения фотона меняет знак и становится положительной,  $d\phi/dt > 0$ . Помимо того, при приближении к горизонту событий чёрной дыры фотон вовлекается в его твердотельное вращение,  $d\phi/dt \rightarrow \Omega_h = \text{const}$ .

На рисунке 2 приведены аналогичные примеры 3D-траекторий пробных массивных частиц (малые голубые шары), падающих внутрь чёрной дыры со спином  $a = 0,998$  вблизи северного полюса горизонта событий ( $\gamma = 1, \lambda = 0, q = 1,85$ ), вблизи его экватора ( $\gamma = 1, \lambda = -1,31, q = 0,13$ ) и в южной полусфере горизонта событий ( $\gamma = 1, \lambda = -1,31, q = 0,97$ ). При приближении к чёрной дыре все частицы начинают навинчиваться на её горизонт событий с постоянной угловой скоростью  $\Omega_h$  из (7).

На рисунке 3 показана траектория падения во вращающуюся чёрную дыру безмассовой частицы (фотона) с прицельным параметром  $b = L/E = -6,5$  (т.е. с азимутальным угловым моментом, ориентированным против направления вращения чёрной дыры), и константой Картера  $Q = 4$ . Траектория этого фотона иллюстрирует обе поразительные особенности гравитационного поля вращающейся чёрной дыры: непреодолимое вращение вокруг чёрной дыры внутри эргосферы и навинчивание траектории частицы на горизонт событий. Вне эргосферы этот фотон движется с отрицательной угловой скоростью относительно удалённого наблюдателя,  $d\phi/dt < 0$ . При попадании в эргосферу угловая скорость движения фотона меняет знак и становится положительной,  $d\phi/dt > 0$ . При приближении к чёрной дыре фотон, так же как и массивные частицы, начинает навинчиваться на её горизонт событий с постоянной угловой скоростью  $\Omega_h$ .

### 5.3. Сферические орбиты

Третьей характерной особенностью гравитационного поля вращающейся чёрной дыры является существование релятивистских сферических орбит частиц, на которых частицы движутся по сфере радиусом  $r = \text{const}$ , осциллируя в полярном направлении между точками поворота  $\theta_{\min}$  и  $\theta_{\max} = \pi - \theta_{\min}$ . Сферические орбиты в метрике Керра детально исследованы Даниэлем Вилкинсоном [168] (см. также [169–172]). В частном случае экваториальных орбит (при  $Q = 0$ ) сферические орбиты сводятся к круговым орбитам или кольцам [159].

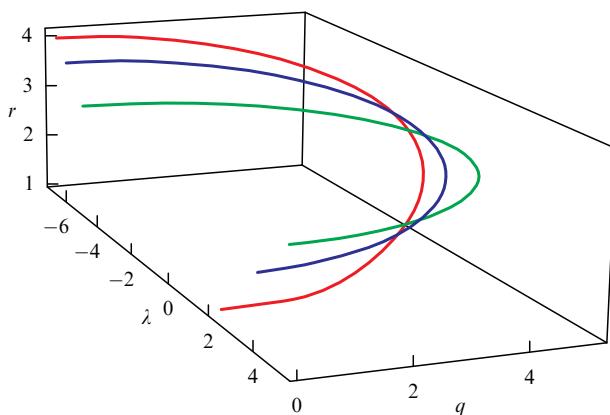
Сферические орбиты определяются совместным решением уравнений  $R(r) = dR(r)/dr = 0$ , в которых эффективный радиальный потенциал  $R(r)$  задаётся формулой (16), а точки поворота в полярном направлении являются нулями эффективного полярного потенциала  $\Theta(\theta)$  из (17). В частном случае экстремальной чёрной дыры Керра с  $a = 1$  сферические орбиты массивных частиц (которотирующих, т. е. вращающихся в направлении вращения чёрной дыры) при радиусе  $r = 1$ , совпадающем в координатах Бойера–Линдквиста с радиусом горизонта событий, образуют однопараметрическое семейство [168]:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \leq L \leq 2, \quad Q = \frac{3}{4} L^2 - 1, \quad E = \frac{1}{2} L. \quad (26)$$

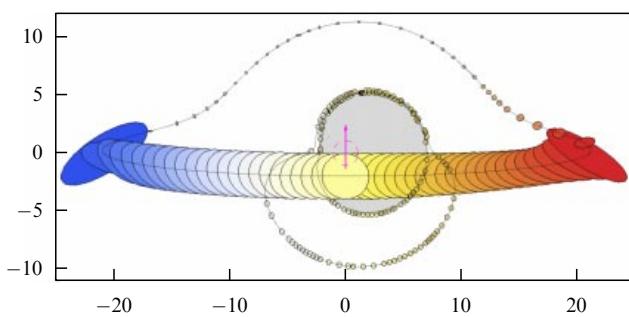
Как показано в разделе 6.1, в формировании силузтов чёрных дыр ключевую роль играют неустойчивые сферические фотонные орбиты (или фотонные сферы). В случае чёрной дыры Шварцшильда ( $a = 0$ ) фотонные сферы сводятся к фотонным кольцам радиусом  $r_{ph} = 3$ . При  $a > 0$  существует бесконечное множество фотонных сфер, радиусы которых зависят от одного из параметров фотонной орбиты,  $\lambda$  или  $q$ . При  $a = 1$  фотонные сферы располагаются на радиусах  $r_{ph} = 1 + \sqrt{2 - \lambda}, q^2 = (1 + \sqrt{2 - \lambda})^3 (3 - \sqrt{2 - \lambda})$ . Эти фотонные сферы при  $a = 1$  существуют в интервале радиусов  $1 \leq r_{ph} \leq 4$ . На рисунке 4 показаны соответствующие зависимости радиусов фотонных сфер от  $\lambda$  или  $q$  для значений спинов чёрной дыры  $a = 0, a = 0,6$  и  $a = 1$ .

### 5.4. Множественные изображения

Линзирование в гравитационном поле чёрной дыры, вообще говоря, даёт бесконечное число изображений отдельных объектов [173–177]. Удобной классифика-



**Рис. 4.** (В цвете онлайн.) При  $0 < a \leq 1$  радиусы фотонных сфер зависят от одного из параметров фотонной орбиты,  $\lambda$  или  $q$ . При  $a = 1$  (красная кривая),  $r_{\text{ph}} = 1 + \sqrt{2 - \lambda}$ ,  $q^2 = (1 + \sqrt{2 - \lambda})^3 \times (3 - \sqrt{2 - \lambda})$ . Эти фотонные сферы существуют в интервале радиусов  $1 \leq r_{\text{ph}} \leq 4$ . При  $a = 0$  фотонные сферы сводятся к фотонным кольцам с радиусом  $r_{\text{ph}} = 3$  (зелёная полуокружность), для которых выполняется соотношение  $\lambda^2 + q^2 = 27$ . Синяя кривая соответствует фотонным сферам при  $a = 0.6$ .



**Рис. 5.** (В цвете онлайн.) Прямое изображение, а также первое и второе световые эхо линзированной компактной звезды (светящегося зонда) на круговой экваториальной орбите радиусом  $r = 20$  вокруг почти экстремальной чёрной дыры SgrA\*. Все множественные изображения звезды расположены вне тени чёрной дыры (замкнутая область серого цвета).

ционной схемой систематизации множественных изображений (или световых эхо) светящихся объектов при линзировании в гравитационном поле чёрной дыры является схема Каннингема–Бардина [173, 174]. Каждому из множественных изображений ставится в соответствие число  $n$ , равное числу пересечений фотонной траектории экваториальной плоскости чёрной дыры на всём пути от источника до удалённого наблюдателя. Фотоны, задающие прямое изображение источника излучения (траектории нулевого типа или порядка), не пересекают экваториальную плоскость чёрной дыры на всём пути от излучателя до удалённого наблюдателя. Фотоны траектории первого типа (первого светового эха) пересекают экваториальную плоскость чёрной дыры один раз. Соответственно, фотоны  $n$ -го светового эха (траектории типа  $n$ ) пересекают экваториальную плоскость чёрной дыры  $n$  раз.

На рисунке 5 показаны прямое изображение, а также первое и второе световые эхо линзированного изображения звезды, вращающейся вокруг почти экстремальной чёрной дыры Керра по круговой орбите радиусом

$r = 20$  [178, 179]. Далее мы будем рассматривать моделирование только прямых изображений светящихся источников, поскольку яркости прямых изображений (кроме случаев специального относительного расположения источника излучения чёрной дыры и наблюдателя) значительно превышают соответствующие яркости световых эхо [173, 174].

## 6. Формы изображений чёрных дыр

В качестве примеров изображений чёрных дыр рассмотрим модели линзированных изображений сверхмассивных чёрных дыр SgrA\* и M87\*.

При численных вычислениях траекторий массивных и безмассовых частиц используются уравнения геодезических в метрике Керра (12)–(15) и (18)–(21). Для вычисления яркости линзированных изображений светящегося вещества мы используем формализм Каннингема–Бардина [173, 174]. Для случая сверхмассивной чёрной дыры SgrA\* в центре галактики Млечный Путь используется полярный угол (широта) расположения удалённого наблюдателя  $\theta_0 \simeq 84,24^\circ$ , при котором  $\cos \theta_0 = 0,1$  (см. примеры на рис. 4, 5, 12–14, 16–18).

Вторая доступная для наблюдения на ТГС сверхмассивная чёрная дыра M87\* массой  $(6,6 \pm 0,4) \times 10^9 M_\odot$  находится в центре ближайшей к нам гигантской эллиптической галактики M87 (NGC 4486), расположенной в центре скопления галактик Дева [180–183]. Из центра этой галактики вырывается протяжённая релятивистская струя [184–197], ориентированная под углом  $17^\circ$  к лучу зрения. Детальные многолетние интерферометрические наблюдения основания этой струи в сантиметровом диапазоне длин волн свидетельствуют о видимом вращении чёрной дыры M87\* и окружающего её аккреционного диска по часовой стрелке [198–202]. Это означает, что удалённому наблюдателю на Земле соответствует угол  $\theta_0 = 180^\circ - 17^\circ$ , который мы и будем использовать в наших численных моделях (см. примеры на рис. 11, 15, 19 и 20).

### 6.1. Классическая тень чёрной дыры на удалённом фоне

В реальных астрофизических условиях возможна ситуация, в которой чёрная дыра подсвечивается горячим веществом, например протяжёнными облаками горячего газа или яркими звёздами, расположенными далеко за чёрной дырой по отношению к удалённому наблюдателю. В этом случае может наблюдаться классическая тень чёрной дыры максимально возможного размера, подробному исследованию которой посвящены многочисленные работы [96–101, 203–285]. В пионерской работе Дж.М. Бардина [98] тень чёрной дыры Керра на фоне светящегося удалённого фона названа "видимой границей" чёрной дыры. (Более общие определения тени чёрной дыры см., например, в [286–288].)

Наблюданная форма внешней границы классической тени чёрной дыры, проецируемой на небесную сферу, определяется фотонными траекториями постоянного радиуса,  $r = \text{const}$ , называемыми сферическими орбитами или фотонными сферами (см. раздел 5.3). В соответствии с уравнением движения (12) частица будет постоянно оставаться на круговой орбите  $r = \text{const}$ , если эта орбита является вечной точкой поворота, т.е. когда условие  $dr/dt = 0$  выполняется не только мгновенно, но и во все последующие моменты собственного вре-

мени частицы  $\tau$ . Этому требованию соответствуют условия для эффективного радиального потенциала  $R = 0$  и  $dR/dr = 0$ . В случае фотона  $\tau$  является аффинным параметром вдоль траектории фотона. Фотонные траектории (орбиты) постоянного радиуса при  $a \neq 0$  называются сферическими (или фотонными сферами), потому что, оставаясь на постоянном радиусе  $r = \text{const}$ , фотон совершает осциллирующие движения в полярном направлении (по углу  $\theta$ ). Отметим ещё раз, что фотонные траектории постоянного радиуса оказываются неустойчивыми.

Совместное решение уравнений  $R = 0$  и  $dR/dr = 0$ , определяющее форму тени чёрной дыры, в параметрическом виде  $(\lambda, q) = (\lambda(r), q(r))$ , а именно (см., например, [98, 100]):

$$\lambda = \frac{-r^3 + 3r^2 - a^2(r+1)}{a(r-1)}, \quad (27)$$

$$q^2 = \frac{r^3[4a^2 - r(r-3)^2]}{a^2(r-1)^2}. \quad (28)$$

При  $a = 1$  эти выражения существенно упрощаются:

$$\lambda = -r^2 + 2r + 1, \quad (29)$$

$$q^2 = r^3(4 - r). \quad (30)$$

В дополнение к этим формулам [98] отметим, что из-за неравномерной природы предела  $a \rightarrow 1$  параметр  $q$  при  $r = 1$  изменяется в диапазоне  $0 \leq q \leq \sqrt{3}$ .

Параметры фотонных траекторий  $\lambda = L/E$  и  $q = \sqrt{Q}/E$  связаны с прицельными параметрами на небесной сфере  $\alpha$  и  $\beta$ , соответствующими фотонам, детектируемым удалённым наблюдателем, который находится на заданном радиусе  $r_0 \gg r_h$  (т.е. практически на бесконечности), на заданных широте  $\theta_0$  и азимуте  $\varphi_0$  (см. детали в [98, 173, 174]):

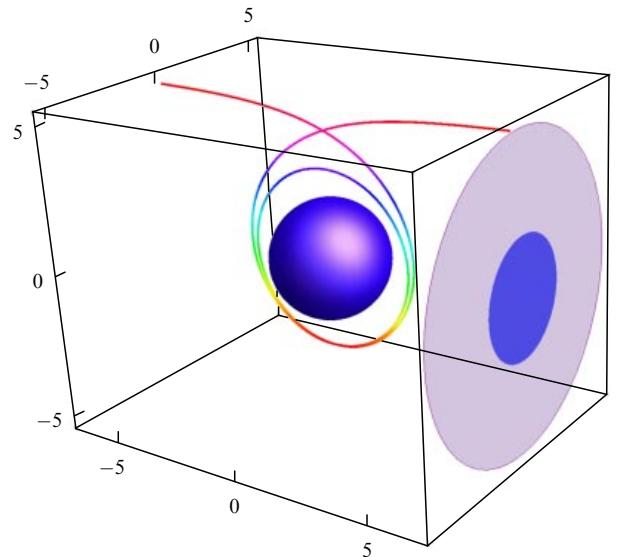
$$\alpha = -\frac{\lambda}{\sin \theta_0}, \quad \beta = \pm \sqrt{\Theta(\theta_0)}, \quad (31)$$

где  $\Theta(\theta)$  определяется уравнением (17). Параметр  $\alpha$  называется горизонтальным прицельным параметром, а  $\beta$  — вертикальным прицельным параметром.

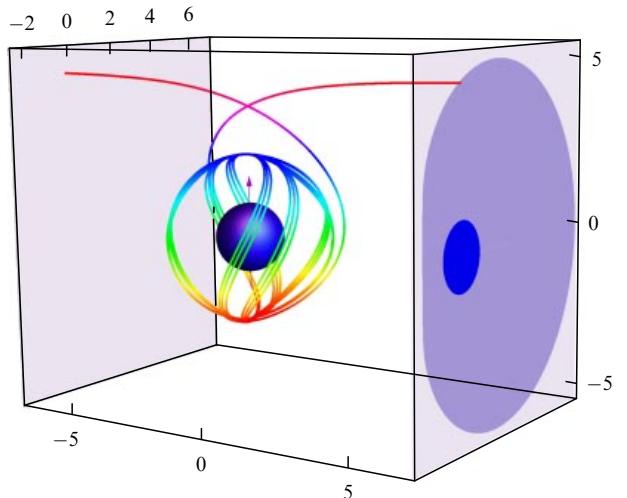
Для удалённого наблюдателя, находящегося в экваториальной плоскости чёрной дыры (при  $\theta_0 = \pi/2$ ), константы  $\lambda = L/E$  и  $q = \sqrt{Q}/E$  совпадают соответственно с горизонтальным и вертикальным прицельными параметрами фотонов  $\alpha$  и  $\beta$  на небесной сфере.

На рисунке 6 показана тень (пурпурный диск) чёрной дыры Шварцшильда ( $a = 0$ ) радиусом  $r_{sh} = 3\sqrt{3} \approx 5,2$ , а также характерная 3D-траектория фотона (с прицельными параметрами  $\lambda = 0$  и  $q = 3\sqrt{3} + 10^{-3}$ ) вблизи границы тени, начинающего движение из удалённого светящегося фона, многократно накручивающегося вокруг горизонта событий чёрной дыры (голубая сфера) вблизи радиальной точки поворота при  $r_{min} \approx r_{ph} = 3$  и достигающего удалённого наблюдателя в точке северного полюса тени чёрной дыры. Внутри тени чёрной дыры показано фиктивное изображение (голубой диск) горизонта событий радиусом  $r_h = 2$  в воображаемом евклидовом пространстве.

На рисунке 7 показана соответствующая тень экстремальной чёрной дыры Керра ( $a = 1$ ). В качестве характерного примера приведена траектория фотона (с орби-



**Рис. 6.** (В цвете онлайн.) Классическая тень (пурпурный диск) чёрной дыры Шварцшильда, подсвечиваемой удалённым светящимся фоном. Показана характерная траектория фотона (многоцветная 3D-кривая) вблизи границы тени, исходящего из удалённого светящегося фона, многократно накручивающегося вокруг горизонта событий чёрной дыры (синяя сфера) вблизи радиальной точки поворота и достигающего удалённого наблюдателя в точке северного полюса тени чёрной дыры. Внутри тени чёрной дыры показано фиктивное изображение (синий диск) горизонта событий в воображаемом евклидовом пространстве.



**Рис. 7.** (В цвете онлайн.) Классическая тень (пурпурная замкнутая область) экстремальной чёрной дыры Керра, подсвечиваемой удалённым светящимся фоном. Ось вращения чёрной дыры (малиновая стрелка) направлена вертикально вверх. В качестве характерного примера показана траектория фотона (многоцветная 3D-кривая) вблизи границы тени, исходящего из удалённого фона, многократно накручивающегося вблизи световой сферы вокруг горизонта событий чёрной дыры (синяя сфера) и достигающего удалённого наблюдателя в точке пересечения границы тени с проекцией оси вращения чёрной дыры. Внутри тени чёрной дыры показано фиктивное изображение (синий диск) горизонта событий в воображаемом евклидовом пространстве.

тальными параметрами  $\lambda = 0$  и  $q = \sqrt{11 + 8\sqrt{2}} + 10^{-3} \approx 4,72$  вблизи границы тени, начинающего движение из удалённого фона, многократно накручивающегося вокруг горизонта событий чёрной дыры вблизи радиаль-

ной точки поворота и достигающего удалённого наблюдателя в точке пересечения границы тени с проекцией оси вращения чёрной дыры. Этот фотон имеет радиальную точку поворота на световой сфере при  $r_{\min} = 1 + \sqrt{2}$ .

Для сравнения на рис. 5 представлен пример численного моделирования прямого изображения, а также первого и второго светового эха от компактной звезды на круговой орбите вокруг вращающейся чёрной дыры SgrA\*, видимых удалённым наблюдателем через дискретные промежутки времени [178]. Все световые эхо (множественные изображения) расположены вне тени чёрной дыры. (См. соответствующую численную анимацию в [179].)

Тень экстремальной чёрной дыры Керра ( $a = 1$ ) при  $\theta_0 = 0$  имеет форму круга радиусом  $r_{\text{sh}} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \simeq 4,83$ . Контур этой тени определяется фотонами с орбитальными параметрами  $\lambda = 0$  и  $q = \sqrt{11 + 8\sqrt{2}}$ , имеющими радиальную точку поворота на световой сфере при  $r_{\min} = 1 + \sqrt{2}$ . Используя численное решение интегрального уравнения (22), можно показать, что в этом случае силуэт горизонта событий имеет форму круга радиусом  $r_{\text{eh}} \simeq 2,035$ .

Детальному исследованию формы тени чёрных дыр в ОТО и её модификациях посвящено множество работ. Однако в настоящее время и в обозримом будущем реальное наблюдение тени чёрных дыр представляется крайне маловероятным. Это связано с тем, что интенсивность свечения удалённого фона в виде протяжённых облаков горячего газа, необходимая для идентификации тени чёрной дыры, крайне мала для регистрации современными интерферометрическими методами. В случае очень мощной светимости от аккрецирующих чёрных дыр их тень будет размыта свечением горячего вещества, падающего в чёрную дыру. При этом вместо тени чёрной дыры с наибольшей вероятностью будет наблюдаться силуэт самого горизонта событий чёрной дыры.

Задача гравитационного линзирования излучающего вещества при сферической акреции на чёрную дыру требует учёта трёхмерного движения падающего в чёрную дыру вещества, и она до сих пор не решена. Однако в случае тонкого аккреционного диска движение вещества в диске двумерно и моделирование его гравитационного линзирования в гравитационном поле чёрной дыры оказывается достаточно простой задачей. В разделах 6.2, 6.3 и 7 мы опишем характерные свойства такого гравитационного линзирования в рамках простой модели излучения внутренней части тонкого аккреционного диска, примыкающей к горизонту событий чёрной дыры.

## 6.2. Тень аккрецирующей чёрной дыры

Помимо удалённого светящегося фона с большой вероятностью может наблюдаться падающее внутрь чёрной дыры вещество, излучающее вблизи горизонта событий, например, в виде горячего газа, компактных облаков газа и компактных ярких звёзд. В этом случае должно наблюдаться совершенно другое изображение чёрной дыры, радикально отличающееся по форме от тени чёрной дыры [203, 289–297]. В частности, в случае тонкого аккреционного диска наблюдаемое изображение чёрной дыры является тёмным линзированным силуэтом её горизонта событий. При этом контур (внешняя граница тёмного силуэта) представляет собой линзированный экватор глобуса горизонта событий чёрной дыры [299, 300].

Модель тонкого аккреционного диска вокруг сверхмассивной чёрной дыры хорошо описывает основные наблюдаемые свойства квазаров и активных галактических ядер различных типов, являющихся самыми мощными наблюдаемыми излучателями во Вселенной, а также наблюдаемые многочисленные тесные двойные системы, в которых происходит перетекание вещества звезды-компаньона на чёрную дыру звёздной массы.

Рассмотрим основные свойства силуэта горизонта событий в рамках ОТО на примере модельных изображений сверхмассивных чёрных дыр SgrA\* и M87\*. Для такого исследования наиболее подходящей моделью является модель окружающего чёрную дыру тонкого аккреционного диска, собственная гравитация которого не учитывается [301–309].

**6.2.1. Внутренняя часть аккреционного диска.** Наиболее яркой областью аккреционного диска вокруг чёрной дыры является его внутренняя релятивистская часть вблизи горизонта событий, где происходит основное энерговыделение аккрецируемого вещества [310, 311]. Будем называть релятивистский аккреционный диск геометрически тонким, если его толщина  $h$  значительно меньше диаметра горизонта событий чёрной дыры,  $h \ll 2r_h$ .

Круговым орбитам частиц, вращающимся на радиусе  $r$  в геометрически тонком аккреционном диске в экваториальной плоскости чёрной дыры в направлении её вращения, соответствуют орбитальные параметры  $E$  и  $L$ , которые определяются совместным решением уравнений  $R = 0$  и  $dR/dr = 0$ , где эффективный радиальный потенциал  $R$  задаётся уравнением (16):

$$\frac{E}{\mu} = \frac{r^{3/2} - 2r^{1/2} + a}{r^{3/4}(r^{3/2} - 3r^{1/2} + 2a)^{1/2}}, \quad (32)$$

$$\frac{L}{\mu} = \frac{r^2 - 2ar^{1/2} + a^2}{r^{3/4}(r^{3/2} - 3r^{1/2} + 2a)^{1/2}}. \quad (33)$$

Предельным случаем круговой орбиты является фотонная орбита, которая соответствует бесконечной величине отношения  $E/\mu$  в уравнении (32). Соответствующий радиус круговой фотонной орбиты  $r_{\text{ph}}$  имеет вид

$$r_{\text{ph}} = 2 \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{2}{3} \arccos(-a) \right] \right\}. \quad (34)$$

В аккреционном диске существует внутренняя граница устойчивого кругового вращения массивных частиц, называемая минимальным радиусом устойчивой круговой орбиты (Innermost Stable Circular Orbit, ISCO),  $r = r_{\text{ISCO}}$  (см. подробности в [159]):

$$r_{\text{ISCO}} = 3 + Z_2 - \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)}, \quad (35)$$

где

$$Z_1 = 1 + (1 - a^2)^{1/3} [(1 + a)^{1/3} + (1 - a)^{1/3}], \quad (36)$$

$$Z_2 = \sqrt{3a^2 + Z_1^2}.$$

Радиус фотонной орбиты  $r_{\text{ph}}$  меньше минимального радиуса устойчивой круговой орбиты  $r_{\text{ISCO}}$  при всех значениях спина чёрной дыры  $a$ .

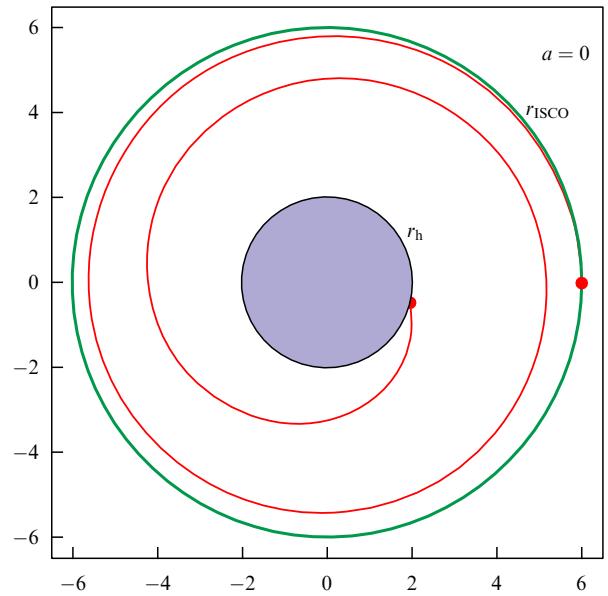
Внутренней частью тонкого аккреционного диска мы, по определению, называем область  $r_h \leq r \leq r_{\text{ISCO}}$ , примыкающую к горизонту событий чёрной дыры, в которой отсутствуют устойчивые круговые орбиты вещества аккреционного диска. Эта часть диска является областью нестационарной акреции вещества. Движение его фрагментов в этой области оказывается полностью нестационарным, управляемся сильным гравитационным полем чёрной дыры и практически не зависит от локальных свойств вещества, в том числе от вязкости. Отдельные малые фрагменты аккреционного диска в этой области падают независимо друг от друга по стягивающимся спиралевидным траекториям внутрь чёрной дыры (см. детали в [302–311]).

Распространённым заблуждением является предположение о быстром гашении излучения аккреционного диска при достижении минимального радиуса устойчивой круговой орбиты  $r_{\text{ISCO}}$ , который даже называется "внутренней границей" диска. При этом ошибочно считается, что излучение во внутренней части диска либо отсутствует, либо является пренебрежимо малым.

Мы используем простую физически обоснованную модель для описания нестационарного движения светящейся материи во внутренней части тонкого аккреционного диска,  $r_h \leq r \leq r_{\text{ISCO}}$ , в которой отдельные фрагменты диска (а также компактные звёзды и плотные облака горячего газа) движутся по геодезическим траекториям с орбитальными параметрами  $E$  и  $L$  из уравнений (32) и (33), соответствующими радиусу  $r = r_{\text{ISCO}}$ . Иначе говоря, падающие в чёрную дыру отдельные малые фрагменты диска "запоминают" свою полную энергию  $E$  и азимутальный угловой момент  $L$  на радиусе потери устойчивости кругового движения  $r_{\text{ISCO}}$ .

Для того чтобы ограничиться учётом только гравитационных эффектов, мы предположим также, что аккреционный диск прозрачен для излучаемых фотонов. Иными словами, мы полностью пренебрегаем эффектами рассеяния и поглощения фотонов в плазме, окружающей чёрную дыру. Условие прозрачности горячей плазмы вплоть до горизонта событий чёрной дыры является необходимым для наблюдения изображения чёрной дыры. Соответственно, темп акреции на чёрную дыру должен быть достаточно малым. Это условие, по-видимому, выполняется для чёрной дыры SgrA\*, активность которой очень низка. Однако в этом случае дополнительной трудностью для наблюдений является большая плотность газа и пыли налуче зрения в диске Галактики. В случае чёрной дыры M87\*, являющейся объектом высокой светимости, эффекты рассеяния и поглощения фотонов в окружающей плазме в принципе могут быть существенными. В этом случае надежды на временные окна прозрачности этого объекта могут быть связаны с нестационарной акрецией. Вполне возможно, что первооткрывателям первого изображения сверхмассивной чёрной дыры M87\* просто повезло, и в момент наблюдения окружающая эту чёрную дыру плазма оказалась прозрачной вплоть до горизонта событий.

Дополнительно при численных расчётах распределения наблюдаемой яркости излучения внутренней части аккреционного диска мы предполагаем, что поток энергии в собственной системе отчёта малых фрагментов газа во внутренней нестационарной части диска изотропен и он сохраняется в течение времени падения этих фрагментов в чёрную дыру (вплоть до момента достиже-



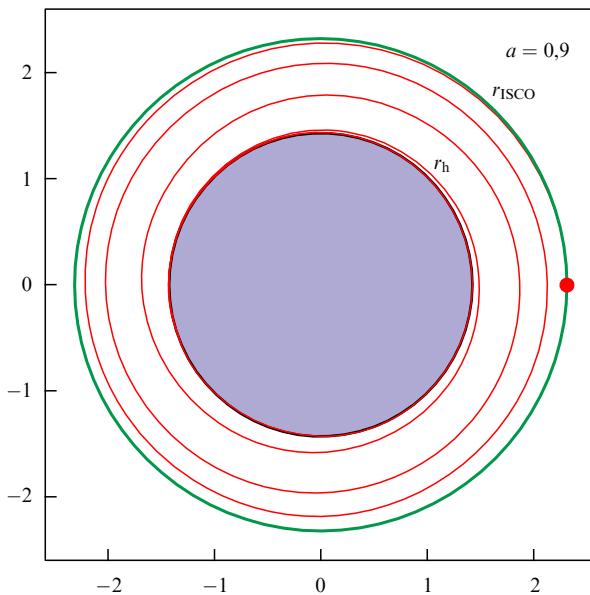
**Рис. 8.** (В цвете онлайн.) 2D-траектория падения фрагмента аккреционного диска (малый красный круг) на чёрную дыру Шварцшильда ( $a = 0$ ) во внутренней области аккреционного диска. Фрагмент диска начинает движение при  $r = r_{\text{ISCO}} = 6$  (зелёное кольцо) и достигает горизонта событий (граница синего круга) при  $r = r_h = 2$ , совершив около двух полных оборотов вокруг чёрной дыры по стягивающейся спирали.

ния гравитационного радиуса  $r_h$ ). Эти модельные предположения позволяют достаточно просто вычислить линзированную яркость аккреционного диска. Важно отметить, что используемая модель светимости внутренней части аккреционного диска не влияет на форму силуэта горизонта событий, которая вообще не зависит от распределения яркости в аккреционном диске, а определяется только свойствами гравитационного поля чёрной дыры Керра.

На рисунке 8 показана двумерная траектория падения на чёрную дыру малого фрагмента аккреционного диска или компактного облака (сгустка) газа на чёрную дыру Шварцшильда ( $a = 0$ ) во внутренней области аккреционного диска, примыкающей к горизонту событий,  $r_h \leq r \leq r_{\text{ISCO}}$ . Фрагмент диска начинает движение при  $r = r_{\text{ISCO}} = 6$  (зелёное кольцо) с орбитальными параметрами  $E/\mu = E(r_{\text{ISCO}})/\mu = 2\sqrt{2}/3$  и  $L/\mu = L(r_{\text{ISCO}})/\mu = -0,001 = \sqrt{3}/2 - 0,001$ , где  $E$ ,  $L$  и  $r_{\text{ISCO}}$  определяются соответственно формулами (32), (33) и (35).

Аналогичная двумерная траектория в случае чёрной дыры со спином  $a = 0,9$  показана на рис. 9, где падающий в чёрную дыру фрагмент диска начинает движение с орбитальными параметрами  $E/\mu = E(r_{\text{ISCO}})/\mu \simeq 0,844$  и  $L/\mu = L(r_{\text{ISCO}})/\mu - 0,001 \simeq 2,099$  при  $r = r_{\text{ISCO}} \simeq 2,32$  (зелёное кольцо). Фрагмент диска, в отличие от такого в случае чёрной дыры Шварцшильда (см. рис. 8), многократно накручивается на врачающуюся чёрную дыру при приближении к горизонту событий при  $r = r_h \simeq 1,44$ .

**6.2.2. Гравитационное красное смещение и эффект Доплера.** Для вычисления сдвига энергии фотона, излучённого падающим в чёрную дыру веществом во внутренней части аккреционного диска при  $r_h \leq r \leq r_{\text{ISCO}}$  и регистрируемого удалённым наблюдателем, надо учитывать



**Рис. 9.** (В цвете онлайн.) 2D-траектория падения фрагмента аккреционного диска на вращающуюся чёрную дыру со спином  $a = 0,9$  во внутренней области аккреционного диска. Фрагмент диска начинает движение при  $r = r_{\text{ISCO}} \simeq 2,32$ . Фрагмент диска многократно накручивается на вращающуюся чёрную дыру при приближении к горизонту событий при  $r = r_h \simeq 1,44$ .

красное смещение в гравитационном поле чёрной дыры и эффект Доплера. Для этих вычислений удобно использовать ортонормированную локально невращающуюся систему отсчёта, описанную в разделе 2.

В ЛНСО азимутальная компонента скорости на радиусе  $r$  малого фрагмента аккреционного диска (или компактного облака газа) с орбитальными параметрами  $E, L$  и  $Q = 0$  имеет вид [157–159]:

$$V^{(\varphi)} = \frac{r\sqrt{\Delta}L}{[r^3 + a^2(r+2)]E - 2aL}. \quad (37)$$

Соответствующая радиальная компонента скорости рассматриваемого фрагмента аккреционного диска в ЛНСО выражается как

$$V^{(r)} = -\sqrt{\frac{r^3 + a^2(r+2)}{r}} \frac{\sqrt{R(r)}}{[r^3 + a^2(r+2)]E - 2aL}, \quad (38)$$

где эффективный радиальный потенциал  $R(r)$  определяется соотношением (16) с параметром  $Q = 0$ .

Нам понадобятся также формулы для компонент 4-импульса фотона в ЛНСО:

$$p^{(\varphi)} = \lambda \sqrt{\frac{r}{r^3 + a^2(r+2)}}, \quad (39)$$

$$p^{(t)} = (1 - \omega\lambda) \sqrt{\frac{r^3 + a^2(r+2)}{r\Delta}}, \quad (40)$$

$$p^{(r)} = -\frac{1}{r} \sqrt{\frac{(r^2 + a^2 - a\lambda)^2}{\Delta} - [(a - \lambda)^2 + q^2]}. \quad (41)$$

Из соотношения  $p^{(i)}p_{(i)} = 0$  можно найти четвёртую компоненту 4-импульса фотона. Энергия фотона в ЛНСО  $E_{\text{LNRF}} = p^{(t)}$ . В то же время энергия того же фотона в ортонормированной системе отсчёта, движущейся со скоростью  $V^{(\varphi)}$  относительно ЛНСО,

$$E_{V^{(\varphi)}} = \frac{p^{(t)} - V^{(\varphi)}p^{(\varphi)}}{\sqrt{1 - [V^{(\varphi)}]^2}}. \quad (42)$$

Энергия фотона  $E_{V^{(\varphi)}}$  зависит только от  $\lambda$ . В этой системе отсчёта фрагмент аккреционного диска всё ещё движется с радиальной скоростью

$$v = \frac{V^{(r)}}{\sqrt{1 - [V^{(\varphi)}]^2}}. \quad (43)$$

В результате энергия фотона в системе отсчёта, сопутствующей фрагменту аккреционного диска, выражается как

$$\mathcal{E}(\lambda, q) = \frac{E_{V^{(\varphi)}} - vp^{(r)}}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{p^{(t)} - V^{(\varphi)}p^{(\varphi)} - V^{(r)}p^{(r)}}{\sqrt{1 - [V^{(r)}]^2 - [V^{(\varphi)}]^2}}. \quad (44)$$

Соответственно, искомый сдвиг энергии фотона (отношение частоты фотона, регистрируемого удалённым наблюдателем, к частоте того же фотона в системе отсчёта, сопутствующей фрагменту аккреционного диска),  $g(\lambda, q) = 1/\mathcal{E}(\lambda, q)$ . При приближении к горизонту событий чёрной дыры гравитационное красное смещение начинает доминировать над эффектом Доплера и  $\lim_{r \rightarrow r_h} g(\lambda, q) = 0$ .

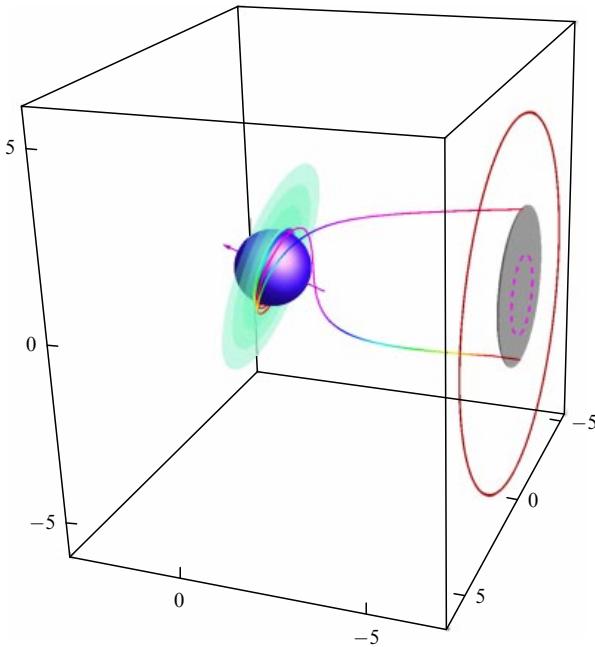
Мы используем сдвиг частоты  $g(\lambda, q)$  в формализме Каннингема–Бардина [173, 174] при численных вычислениях потоков энергии от фрагментов аккреционного диска, регистрируемых удалённым наблюдателем. Результаты этих вычислений представлены на рис. 14, 15, 17–20. Локальные цвета линзированных изображений аккреционного диска связаны с эффективной локальной чёрнотельной температурой в диске, которая пропорциональна сдвигу энергии фотонов  $g(\lambda, q) = 1/\mathcal{E}(\lambda, q)$ .

Ярчайшая точка в модели тонкого аккреционного диска (см. подробности в разделе 6.2.4) при всех значениях спина чёрной дыры расположена на радиусе  $r = r_{\text{ISCO}}$  и на соответствующих рисунках помечена красной звездой. Положение ярчайшей точки на окружности с радиусом  $r = r_{\text{ISCO}}$  соответствует траектории фотона без точек поворота и с максимально допустимым значением азимутального углового момента  $\lambda > 0$ , определяемым численным решением интегрального уравнения (22). Для удалённого наблюдателя эта точка соответствует той части аккреционного диска, которая движется к удалённому наблюдателю с максимальным значением эффекта Доплера.

**6.2.3. Силуэты чёрных дыр SgrA\* и M87\*.** В простейшем случае сферически-симметричной чёрной дыры Шварцшильда ( $a = 0$ ) граница изображения горизонта событий для удалённого наблюдателя задаётся решением интегрального уравнения

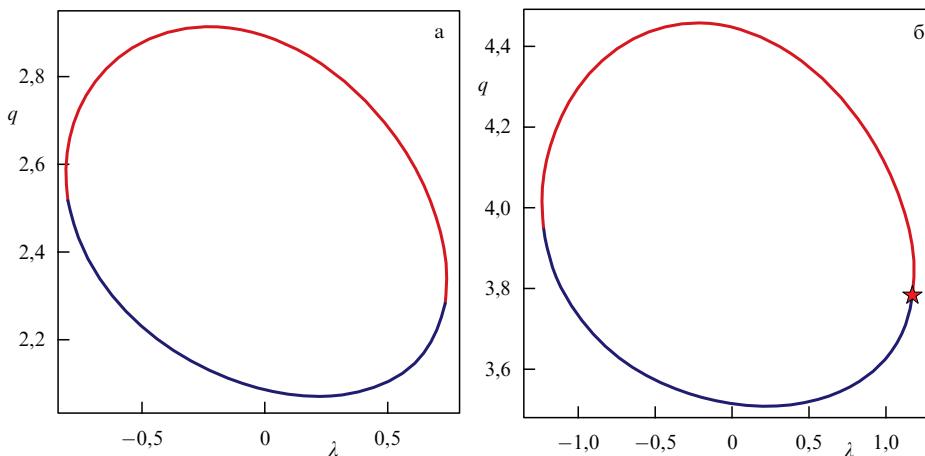
$$\int_2^\infty \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} = 2 \int_{\theta_{\min}}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta)}}, \quad (45)$$

где  $\theta_{\min}$  — точка поворота в полярном  $\theta$ -направлении на траектории фотона для прямого изображения источника излучения (зонда), определяемая условием  $\Theta(\theta) = 0$ . Фотоны, дающие прямое изображение источника излучения, согласно классификационной схеме множественных линзированных изображений Каннингема–Бар-



**Рис. 10.** (В цвете онлайн.) Две 3D-траектории фотонов, начинающих движение вблизи горизонта событий чёрной дыры M87\* из разных точек окружности радиусом  $r = 1,01 r_h$  в тонком аккреционном диске (светло-зелёный овал) в экваториальной плоскости чёрной дыры со спином  $a = 0,9982$  и достигающих удалённого наблюдателя вблизи внешней границы (контура) силуэта горизонта событий. Замкнутая тёмно-красная кривая соответствует положению на небесной сфере внешней границы тени чёрной дыры.

дина [173, 174], не пересекают экваториальную плоскость чёрной дыры на всём пути от излучателя до удалённого наблюдателя. Радиус горизонта событий чёрной дыры Шварцшильда  $r_h = 2$ , а точка поворота  $\theta_{\min} = \arccos(q/\sqrt{q^2 + \lambda^2})$ . Интеграл в правой части уравнения (45) при этом равен  $\pi/\sqrt{q^2 + \lambda^2}$ . В результате численное решение интегрального уравнения (45) даёт для радиуса изображения (силуэта) горизонта событий значение  $r_{\text{eh}} = \sqrt{q^2 + \lambda^2} \simeq 4,457$ . Этот радиус заметно меньше соответствующего радиуса тени чёрной дыры  $r_{\text{sh}} = 3\sqrt{3} \simeq 5,2$ .



**Рис. 11.** (В цвете онлайн.) Параметры фотонных траекторий  $\lambda$  и  $q$ , исходящих из аккреционного диска вокруг чёрной дыры M87\* со спином  $a = 0,75$  на радиусах  $r = 1,01r_h$  (а) и  $r = r_{\text{ISCO}}$  (б) и достигающих удалённого наблюдателя. Голубой цвет соответствует траекториям фотонов без точек поворота, а красный цвет — траекториям с точкой поворота в полярном направлении при значении полярного угла  $\theta = \theta_{\min}(\lambda, q)$ . Ярчайшая точка в аккреционном диске помечена красной звездой.

В случае чёрной дыры Керра ( $a \neq 0$ ) полярная точка поворота (если она существует) расположена при

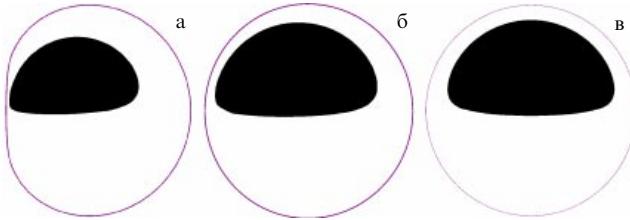
$$\cos^2 \theta_{\min} = \frac{\sqrt{4a^2q^2 + (q^2 + \lambda^2 - a^2)^2} - (q^2 + \lambda^2 - a^2)}{2a^2}. \quad (46)$$

Это выражение для  $\theta_{\min}$  используется при численном решении интегральных уравнений (23) и (24).

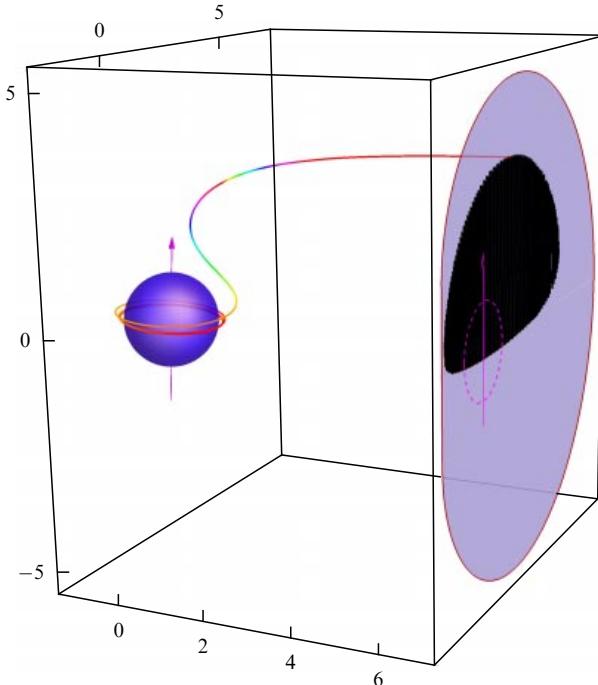
Пространственное положение чёрной дыры M87\* и её экваториального аккреционного диска относительно удалённого наблюдателя на Земле (или на околоземной орбите) показано на рис. 10. Штриховая окружность на рис. 10 и на всех других аналогичных рисунках соответствует изображению горизонта событий чёрной дыры в воображаемом евклидовом пространстве. На этом же рисунке показаны две 3D-траектории фотонов, начинающих движение вблизи горизонта событий из разных точек окружности радиусом  $r = 1,01r_h$  в тонком аккреционном диске (светло-зелёный овал) в экваториальной плоскости чёрной дыры со спином  $a = 0,9982$  и достигающих удалённого наблюдателя вблизи внешней границы (контура) силуэта горизонта событий (область серого цвета). Орбитальные параметры этих двух фотонов соответственно  $\lambda_1 = -0,047$ ,  $q_1 = 2,19$  и  $\lambda_2 = -0,029$ ,  $q_2 = 1,52$ .

На рисунке 11 показаны графики параметров фотонных траекторий  $\lambda$  и  $q$ , исходящих из аккреционного диска на радиусе  $r = 1,01r_h$  и  $r = r_{\text{ISCO}}$  и достигающих покоящегося удалённого наблюдателя в случае чёрной дыры M87\* со спином  $a = 0,75$ . Голубой цвет на графиках соответствует траекториям фотонов без точек поворота, а красный цвет — траекториям с точкой поворота в полярном направлении при значении полярного угла  $\theta = \theta_{\min}(\lambda, q)$ , определяемого при численном решении интегрального уравнения (23). Помеченная красной звездой ярчайшая точка в аккреционном диске, расположенная на радиусе  $r_{\text{ISCO}} \simeq 1,16r_h$ , соответствует параметрам фотонной орбиты  $\lambda = 1,18$  и  $q = 3,79$  (или  $\alpha = -4,03$  и  $\beta = -0,18$ ).

Возможные формы тёмного силуэта горизонта событий сверхмассивной чёрной дыры SgrA\* показаны на рис. 12 для трёх значений спина чёрной дыры  $a$ . Заме-



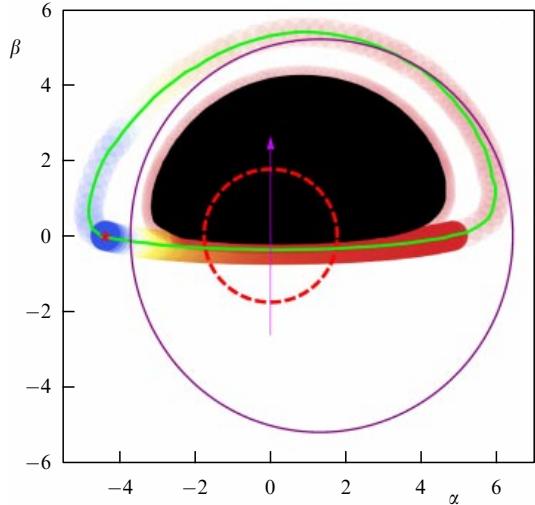
**Рис. 12.** (В цвете онлайн.) Силуэт северной полусфера горизонта событий сверхмассивной чёрной дыры SgrA\* (область чёрного цвета), расположенный внутри границы тени чёрной дыры (замкнутая пурпурная кривая) при значениях спина:  $a = 0,9982$  (а),  $0,65$  (б) и  $0$  (в).



**Рис. 13.** (В цвете онлайн.) Тёмный силуэт северной полусферы горизонта событий (область чёрного цвета) в случае тонкого аккреционного диска в экваториальной плоскости чёрной дыры со спином  $a = 0,9982$ , соответствующий сверхмассивной чёрной дыре SgrA\* в центре Галактики. Контур этого силуэта задаётся фотонами с большим красным смещением, которые излучаются вблизи горизонта событий горячим газом аккреционного диска и регистрируются удалённым наблюдателем. Показана одна из таких фотонных траекторий.

тим, что в случае чёрной дыры M87\* (с учётом её ориентации) наблюдается силуэт южной полусфера горизонта событий (область чёрного цвета), расположенный на небесной сфере внутри границы соответствующей тени этой чёрной дыры (замкнутая пурпурная кривая).

Сверхмассивная чёрная дыра SgrA\* в центре нашей Галактики имеет массу  $M = (4,3 \pm 0,3) \times 10^6 M_\odot$ , т.е. на три порядка меньшую, чем у чёрной дыры M87\*, но при этом чёрная дыра SgrA\* находится на расстоянии, на три порядка более близком к Земле, чем чёрная дыра M87\*. Поэтому горизонты событий этих двух чёрных дыр имеют примерно равные угловые размеры, доступные для наблюдения с помощью ТГС. Ориентация оси вращения чёрной дыры SgrA\* почти наверняка близка к оси вращения Млечного Пути [312]. Будем для определённости предполагать, что удалённый наблюдатель находится вблизи плоскости экватора чёрной дыры, а точнее, при  $\cos \theta_0 = 0,1$ , или  $\theta_0 \simeq 84,24^\circ$ . Возможные формы

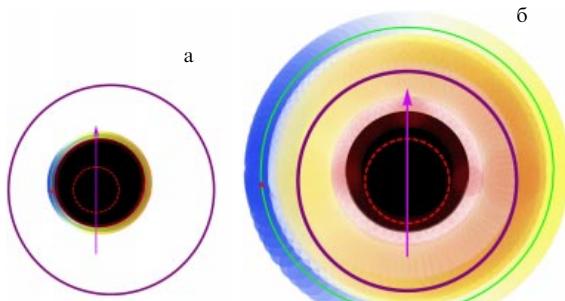


**Рис. 14.** (В цвете онлайн.) Линзированное изображение внутренней части аккреционного диска, примыкающей к горизонту событий чёрной дыры SgrA\* со спином  $a = 0,65$ . Замкнутая зелёная кривая является изображением экваториальной окружности радиусом  $r_{\text{ISCO}} \simeq 3,25 \simeq 1,85r_h$ . Показано яркое излучение тонкого кольца аккреционного диска на радиусе  $r_{\text{ISCO}}$ , а также тусклое излучение тонкого кольца на радиусе  $1,01r_h$ , подавленное вследствие сильного гравитационного красного смещения вблизи горизонта событий. Ярчайшая точка в аккреционном диске помечена красной звездой (как и на других аналогичных рисунках). Область чёрного цвета — силуэт северной полусферы горизонта событий. Внешняя граница (контура) этого силуэта является гравитационно линзированным изображением экватора на глобусе горизонта событий. Замкнутая пурпурная кривая — граница тени чёрной дыры. Резкая смена яркости на линзированном изображении тонкого кольца на радиусе  $r_{\text{ISCO}}$  связана с переходом от траекторий фотонов без точек поворота (численное решение уравнения (22)) к траекториям фотонов с точкой поворота  $\theta_{\min}$  (численное решение уравнения (23)), прилетающих к наблюдателю по более длинным траекториям из-за чёрной дыры и обеспечивающих существенно меньшую локальную яркость по сравнению с таковой для траекторий без точек поворота.

тёмного силуэта горизонта событий сверхмассивной чёрной дыры SgrA\* показаны на рис. 12 для трёх значений спина чёрной дыры  $a$ .

На рисунке 13 виден тёмный силуэт северной полусферы горизонта событий (область чёрного цвета) в случае тонкого аккреционного диска в экваториальной плоскости чёрной дыры со спином  $a = 0,9982$ , соответствующий сверхмассивной чёрной дыре SgrA\*. Контур этого силуэта задаётся фотонами, которые излучаются вблизи горизонта событий горячим веществом и регистрируются удалённым наблюдателем, испытав очень большое красное смещение. На рисунке 13 показана одна из таких фотонных траекторий с орбитальными параметрами  $\lambda = 0,063$  и  $q = 0,121$ , исходящая из экваториальной плоскости чёрной дыры на радиусе  $r = 1,01r_h$  и достигающая удалённого наблюдателя вблизи внешней границы (контура) силуэта северной полусферы горизонта событий. Аналогичные силуэты при других значениях спина  $a$  показаны на рис. 14 для SgrA\* и на рис. 15 для M87\*.

Силуэты чёрных дыр, очень похожие по форме на силуэты на рис. 12–15, уже на протяжении многих лет получаются при численном моделировании изображений аккреционных дисков (см., например, [203, 289–298]), однако без отождествления этих силуэтов с полусферой



**Рис. 15.** (В цвете онлайн.) Излучение внутренней части аккреционного диска в экваториальной плоскости вокруг чёрной дыры M87\* и силуэт южной полусфера горизонта событий (область чёрного цвета), расположенный внутри границы тени чёрной дыры (замкнутая пурпурная кривая) при значении спина чёрной дыры  $a = 0,9882$  (а) и  $a = 0$  (б).

горизонта событий чёрной дыры. Принципиально важной особенностью всех этих численных моделей являлся учёт излучения внутренней части аккреционного диска при  $r_h \leq r \leq r_{ISCO}$ , когда внутри аккреционного диска наблюдается тёмное изображение северной или южной полусферы глобуса горизонта событий (в зависимости от ориентации наблюдателя относительно оси вращения чёрной дыры), причём контур этого изображения является линзованным изображением экватора глобуса горизонта событий. При этом размер силуэта горизонта событий существенно меньше ожидаемого размера тени чёрной дыры.

Разработаны также модели изображений аккреционных дисков вокруг чёрной дыры Шварцшильда ( $a = 0$ ), в которых предполагается наличие внутренней границы свечения диска на радиусе  $r_{ISCO} = 6$ , существенно превышающем радиус круговой фотонной орбиты в экваториальной плоскости чёрной дыры  $r_{ph} = 3$ . В данном случае аккреционный диск с отсутствующим излучением при  $r < r_{ISCO}$  является для чёрной дыры полным аналогом удалённого фона. Поэтому в таких моделях воспроизводится тень чёрной дыры, а не силуэт горизонта событий (см. например, [260, 269, 273]).

Заметим также, что в знаменитой численной симуляции на суперкомпьютере для фильма "Интерстеллар" по требованию продюсера не учитывалось излучение внутренней части аккреционного диска ( $r_h \leq r \leq r_{ISCO}$ ), примыкающей к горизонту событий чёрной дыры. В результате гравитационное линзирование стационарной части модельного аккреционного диска с внутренней границей при  $r = 9,26$  и при спине чёрной дыры  $a = 0,999$  давало только изображение тёмной тени чёрной дыры, но не тёмного силуэта горизонта событий. Также по требованию продюсера в этой симуляции сдвиг энергии фотонов, излучаемых аккреционным диском, учитывался только для моделирования наблюдаемой яркости диска, но не его цвета [313–315]. В результате эта численная симуляция на суперкомпьютере также относится к типу моделей, эффективно воспроизводящих лишь изображение тени чёрной дыры, поскольку не учитывается излучение диска вблизи горизонта событий.

#### 6.2.4. Ярчайшая точка аккреционного диска.

В релятивистских моделях тонких аккреционных дисков наблюдаемая удалённым наблюдателем локальная яркость

диска возрастает по мере приближения к чёрной дыре [301–309]. Считается, что яркость достигает максимума на радиусе потери устойчивого кругового движения  $r_{ISCO}$  из (35). По мере приближения к чёрной дыре возрастает красное смещение излучаемых диском фотонов, регистрируемых удалённым наблюдателем. Однако возрастание локальной яркости при  $r < r_{ISCO}$  в принципе могло бы поддерживаться за счёт эффекта Доплера благодаря быстрому вращению диска в той его части, где движение светящейся материи направлено в сторону наблюдателя. Результаты проведённого нами численного моделирования [316] не подтверждают эту гипотезу, показывая, что во внутренней нестационарной части тонкого аккреционного диска (т.е. при  $r_h \leq r \leq r_{ISCO}$ ), примыкающей к горизонту событий, гравитационное красное смещение преобладает над эффектом Доплера при всех выбранных значениях спина чёрной дыры  $a$ .

В наших численных расчетах мы используем физически обоснованное предположение, что нестационарное падение малых фрагментов газа на чёрную дыру при  $r_h \leq r \leq r_{ISCO}$  следует геодезическому движению с орбитальными параметрами  $E$  и  $L$  из уравнений (32) и (33) при  $r = r_{ISCO}$ . Иначе говоря, мы постулируем, что падающие на чёрную дыру малые фрагменты аккреционного диска "запоминают" свои орбитальные параметры на радиусе потери устойчивости кругового движения  $r_{ISCO}$ . Численное моделирование позволяет найти положение ярчайшей точки на кольце радиусом  $r_{ISCO}$ . Этому положению соответствует траектория фотона прямого изображения (приходящего к удалённому наблюдателю без пересечения экваториальной плоскости чёрной дыры на всём пути) и имеющего максимально допустимый положительный азимутальный угловой момент  $\lambda$ . Именно для такого фотона достигается максимальный эффект Доплера в сторону увеличения его частоты. В частности, ярчайшая точка в аккреционном диске чёрной дыры SgrA\* со спином  $a = 0,65$  на радиусе  $r_{ISCO}$  задаётся траекторией фотона прямого изображения с параметрами  $\lambda = 4,29$  и  $q = 0,430$ , которые соответствуют прицельным параметрам  $\alpha = -4,32$  и  $\beta = -0,042$  на небесной сфере (см. рис. 16 в разделе 6.3).

На рисунках 14, 15, 16 и 20 показаны примеры линзованных изображений внутренних нестационарных частей тонкого аккреционного диска  $r_h \leq r \leq r_{ISCO}$ , примыкающих к горизонту событий  $r_h$  и дающих прямое изображение силуэта горизонта событий с учётом сдвига энергии фотонов за счёт гравитационного красного смещения и эффекта Доплера  $g(\lambda, q) = 1/\mathcal{E}(\lambda, q)$ , где  $\mathcal{E}(\lambda, q)$  задаётся формулой (44). На изображении чёрной дыры, окружённой умеренно толстым светящимся аккреционным диском толщиной  $h \leq 2r_h$ , будет виден тёмный силуэт приполярной области глобуса горизонта событий, ограниченный параллелью с широтным углом  $\arcsin[h/(2r_h)]$ . При  $h \rightarrow 0$  (тонкий аккреционный диск) будет наблюдаться тёмный силуэт северной полусфера горизонта событий этой чёрной дыры, подсвечиваемый внутренней частью аккреционного диска. Контур этого тёмного силуэта является линзованным изображением экватора на глобусе горизонта событий.

#### 6.3. Картография горизонта событий

Теперь мы переходим от описания тёмного силуэта горизонта событий к картографированию (или восстановлению) изображения всего глобуса горизонта событий.

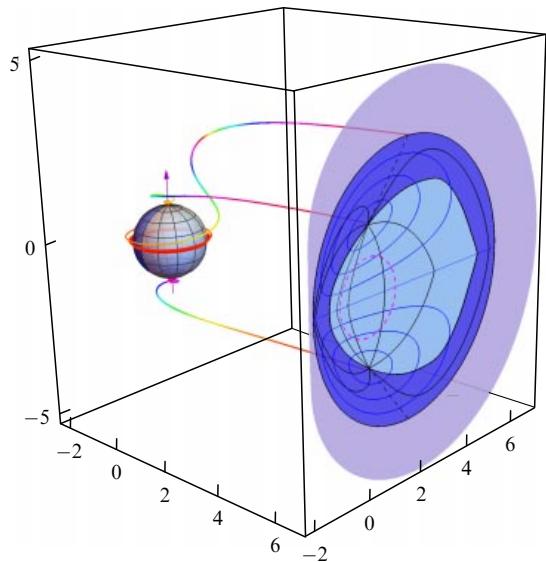
Для дальнейшего изложения удобно представить мысленный эксперимент по бросанию со всех сторон внутрь чёрной дыры излучающих пробных зондов (например, нейтронных звёзд или плотных компактных облаков горячего газа), линзированное изображение которых регистрируется и анализируется удалённым наблюдателем. Излучение пробных зондов при мере их приближения к горизонту событий будет регистрироваться удалённым наблюдателем со всей возрастающим красным смещением вплоть до бесконечного красного смещения на самом горизонте событий чёрной дыры. Расположение на небесной сфере каждого "последнего" фотона от падающего внутрь чёрной дыры зонда, который ещё сможет зарегистрировать удалённый наблюдатель, даст информацию о единственной специфической точке на горизонте событий чёрной дыры.

Фиксация положений последних детектируемых фотонов от многочисленных светящихся зондов, падающих со всех сторон на чёрную дыру, позволяет не только "увидеть" внешнюю границу (контур) линзированного тёмного силуэта горизонта событий, но и восстановить (или "карографировать") изображение всего глобуса горизонта событий (см. подробности в [300, 316, 318]). Результаты картографирования горизонта событий, полученные нами с помощью численных вычислений, полностью согласуются с аналогичным картографированием, в котором использовались аналитические методы [319].

Формально говоря, излучаемые вблизи горизонта событий чёрной дыры фотоны, прилетающие к удалённому наблюдателю, позволяют сделать взаимно однозначную проекцию всего глобуса горизонта событий на ограниченную замкнутую область небесной сферы. Результат такого "картирования" будем называть "линзированным изображением" или просто "изображением" горизонта событий. На этом "изображении" горизонт событий чёрной дыры "виден" сразу со всех сторон.

Фотоны, излучаемые вблизи горизонта событий падающим в чёрную дыру светящимся веществом, испытывают сильное красное смещение при достижении удалённого наблюдателя. Поэтому точность "картирования" горизонта событий чёрной дыры будет зависеть от чувствительности регистрирующих детекторов на телескопе удалённого наблюдателя. Линзированное изображение всего горизонта событий находится полностью внутри положения тени чёрной дыры на небесной сфере.

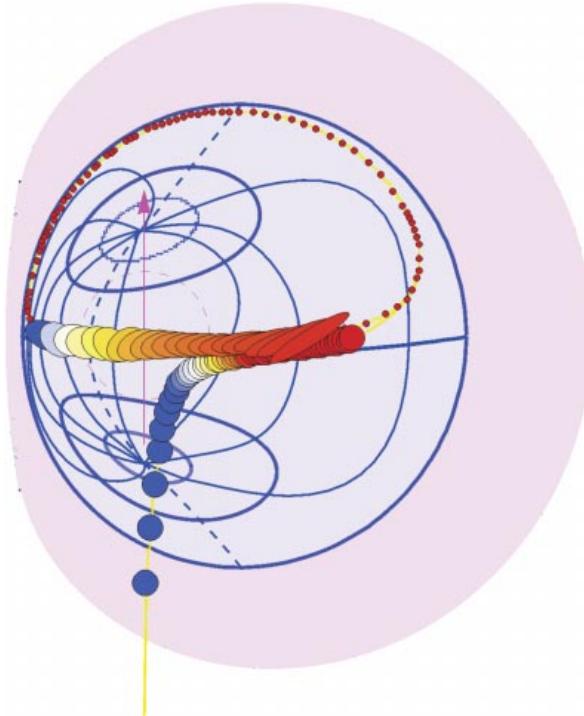
На рисунке 16 показано изображение (восстановление) горизонта событий экстремальной чёрной дыры Керра ( $a = 1$ ), а также характерные траектории формирующих это изображение фотонов, приходящих к удалённому наблюдателю, находящемуся в плоскости экватора чёрной дыры. Фотоны начинают движение вблизи северного и южного полюсов глобуса горизонта событий с орбитальными параметрами  $\lambda = 0$ ,  $q = 1,77$ , а также вблизи его экватора с  $\lambda = -1,493$  и  $q = 3,629$ . Наибольшая пурпурная область является тенью чёрной дыры. Показаны некоторые параллели (синие замкнутые кривые) и меридианы (чёрные кривые) на глобусе горизонта событий (голубая сфера) и на его проекции на небесную сферу (голубая область). Светло-голубая часть изображения является проекцией ближней полусфера глобуса горизонта событий. Соответственно, тёмно-голубая часть изображения является проекцией дальней полу-



**Рис. 16.** (В цвете онлайн.) Изображение (восстановление) горизонта событий экстремальной чёрной дыры Керра ( $a = 1$ ) и характерные траектории фотонов (многоволновые 3D-кривые), формирующих это изображение и приходящих к удалённому наблюдателю, находящемуся в плоскости экватора чёрной дыры. Фотоны исходят из областей вблизи северного и южного полюсов глобуса горизонта событий и вблизи его экватора. Наибольшая пурпурная область является тенью чёрной дыры. Показаны некоторые параллели (синие замкнутые кривые) и меридианы (чёрные кривые) на глобусе горизонта событий (голубая сфера) и на его проекции на небесную сферу (голубая область). Светло-голубая часть изображения является проекцией ближней полусфера глобуса горизонта событий. Соответственно, тёмно-голубая часть изображения является проекцией дальней полусфера глобуса горизонта событий.

сферы глобуса горизонта событий [299, 318]. Результаты численного моделирования, представленные на рис. 17, демонстрируют пример гравитационного линзирования массивного источника излучения (например, компактной звезды или облака газа) сферической формы с параметрами траектории  $\gamma = 1$ ,  $\lambda = q = 0$ , который падает во вращающуюся чёрную дыру со спином  $a = 0,998$  в её экваториальной плоскости. Удалённый наблюдатель находится на широте, которая соответствует  $\cos \theta = 0,1$ . При приближении к горизонту событий линзированные изображения падающего источника излучения проецируются на небесную сферу внутри положения тени чёрной дыры и начинают многократно "накручиваться" на чёрную дыру, с каждым оборотом приближаясь к экваториальной параллели  $\theta = \pi/2$  на глобусе горизонта событий. Линзированное изображение этого источника излучения асимптотически по времени (после многих оборотов вокруг чёрной дыры) идентифицирует (картирует) экваториальную параллель  $\theta = \pi/2$  на глобусе горизонта событий. (См. анимацию этого процесса в [317].)

На рисунке 18 показаны тень чёрной дыры SgrA\* со спином  $a = 0,9982$  и силуэт северной полусфера горизонта событий этой чёрной дыры, подсвечиваемый внутренней частью тонкого аккреционного диска, толщина  $h$  которого существенно меньше диаметра горизонта событий,  $h \ll 2r_h$ . Если светящийся аккреционный диск вблизи горизонта событий умеренно толстый,  $h \leq 2r_h$ , то тёмное пятно на соответствующем изображении чёрной дыры будет силуэтом приполярной области глобуса

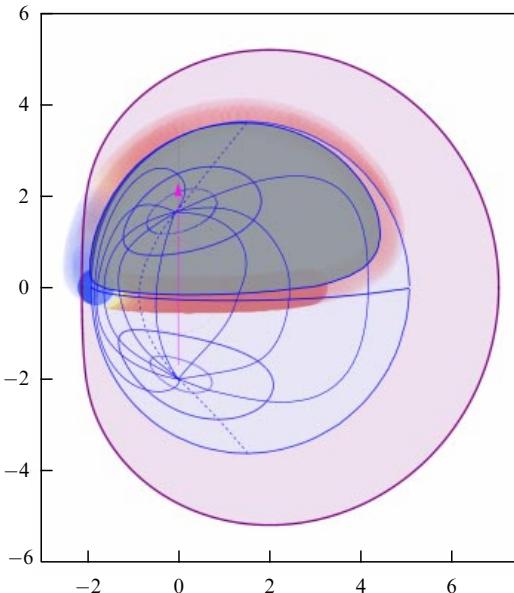


**Рис. 17.** (В цвете онлайн.) Результаты численного моделирования гравитационного линзирования падающей на вращающуюся чёрную дыру SgrA\* компактной звезды (при предположении спина чёрной дыры  $a = 0,9982$ ), наблюдаемой издалека через дискретные промежутки времени. Звезда, имеющая нулевой азимутальный угловой момент, движется в экваториальной плоскости чёрной дыры. При приближении к горизонту событий линзированные изображения этого источника излучения оказываются внутри тени чёрной дыры (светло-пурпурная область) и затем начинают многократно "накручиваться" на чёрную дыру, постепенно приближаясь к экваториальной параллели  $\theta = \pi/2$  на линзированном глобусе горизонта событий (светло-голубая область). Показан первый цикл этого накручивания. (См. подробности и анимацию в [317].)

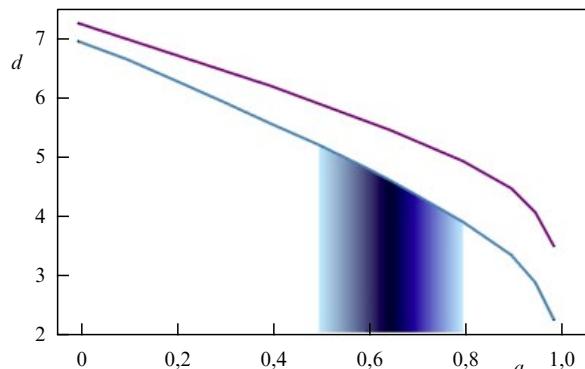
горизонта событий, ограниченной параллелью с широтным углом  $\arcsin[h/(2r_h)]$ . При этом промежуточная область глобуса горизонта событий между этим широтным углом и экватором будет размыта частично или полностью излучением внутренней части аккреционного диска. Если, напротив, аккреционный диск вблизи горизонта событий очень толстый,  $h \geq 2r_h$ , то тёмное пятно на изображении чёрной дыры либо будет полностью отсутствовать, либо будет частично размыто излучением внутренней части аккреционного диска.

## 7. Спин сверхмассивной чёрной дыры M87\*

Рассмотренная в разделе 6.2 модель линзированного изображения внутренней части тонкого аккреционного диска,  $r_h \leq r \leq r_{\text{ISCO}}$ , позволяет найти зависимость расстояния  $d$  ярчайшей точки в аккреционном диске от центра тёмного силуэта чёрной дыры в зависимости от величины её спина  $a$ . Зависимости  $d(a)$  показаны на рис. 19 для сверхмассивных чёрных дыр SgrA\* и M87\*. Использование зависимости  $d(a)$  для интерпретации изображения, представленного коллаборацией ТГС, показывает, что модель тонкого аккреционного диска наилучшим образом согласуется с изображением сверхмассивной чёрной дыры M87\* при значении её спина  $a = 0,75 \pm 0,15$ , где ошибка соответствует статистиче-

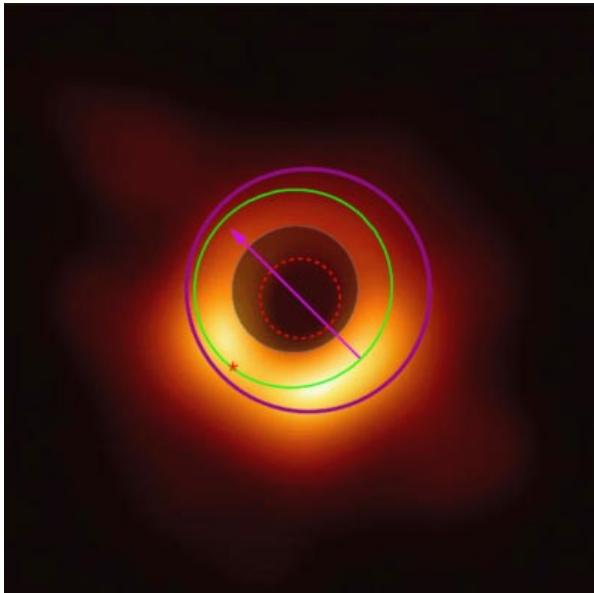


**Рис. 18.** (В цвете онлайн.) Полная карта глобуса горизонта событий (замкнутая область голубого цвета вместе с тёмным пятном), восстановленная при наблюдении компактных светящихся источников, падающих на чёрную дыру из разных пространственных направлений. Синие кривые — параллели и меридианы на восстановленном изображении глобуса горизонта событий. Большая замкнутая область малинового цвета — тень чёрной дыры SgrA\* со спином  $a = 0,9982$ . На изображении чёрной дыры, окружённой умеренно толстым светящимся аккреционным диском толщиной  $h \leq 2r_h$ , будет виден тёмный силуэт припольярной области глобуса горизонта событий, ограниченный параллелью с широтным углом  $\arcsin[h/(2r_h)]$ . При  $h \rightarrow 0$  (тонкий аккреционный диск) будет наблюдаться тёмный силуэт северной полусфера горизонта событий этой чёрной дыры (область тёмно-серого цвета), подсвечиваемый внутренней частью аккреционного диска, цвет которого изменяется от синего до красного. Контур этого тёмного силуэта является линзованным изображением экватора на глобусе горизонта событий.



**Рис. 19.** (В цвете онлайн.) Зависимость расстояния  $d$  (в единицах длины  $GM/c^2$ ) между ярчайшей точкой в тонком аккреционном диске, расположенном в экваториальной плоскости чёрной дыры, и центром видимого силуэта горизонта чёрной дыры от спина  $a$  для чёрной дыры M87\* (нижняя кривая) и SgrA\* (верхняя кривая). Закрашена область шириной  $\pm 1\sigma$  вокруг значения спина  $a = 0,75$ . Значение спина  $a = 0,75$ , полученное в результате подгонки модели тонкого аккреционного диска к наблюдательным данным, соответствует расположению ярчайшей точки на изображении M87\* на рис. 20.

ской погрешности  $1\sigma$  [316]. Эта оценка согласуется с другими оценками величины спина сверхмассивной чёрной дыры M87\* [320–328].



**Рис. 20.** (В цвете онлайн.) Суперпозиция изображения сверхмассивной чёрной дыры M87\*, полученного ТГС, и модели тонкого аккреционного диска при спине этой чёрной дыры  $a = 0,75$ . Малиновая стрелка — ось вращения чёрной дыры. Малая штриховая окружность соответствует изображению горизонта событий чёрной дыры в воображаемом евклидовом пространстве. Зелёная замкнутая кривая — линзированное изображение окружности радиусом  $r = r_{\text{ISCO}}$ . Ярчайшая точка в аккреционном диске, находящаяся на окружности радиусом  $r = r_{\text{ISCO}}$ , помечена красной звездой. Самая большая замкнутая кривая пурпурного цвета — граница тени чёрной дыры, которая на этом изображении не видна. Чёрное пятно в центральной части изображения — наблюдаемый силуэт горизонта событий чёрной дыры, предсказываемый ОТО. (См. подробности в [316].)

На рисунке 20 представлена суперпозиция изображения сверхмассивной чёрной дыры M87\*, полученного ТГС, и модели тонкого аккреционного диска при значении спина этой чёрной дыры  $a = 0,75$ . Ярчайшая точка в аккреционном диске, помеченная на рис. 20 красной звездой, расположена на окружности радиусом  $r_{\text{ISCO}}$  между двумя яркими пятнами на изображении сверхмассивной чёрной дыры M87\*. Наличие двух ярких пятен вместо ожидаемого одного самого яркого пятна, по-видимому, связано с недостаточно большим числом фурье-компонент, использовавшихся для восстановления интерференционного изображения при наблюдении на восьми телескопах. Тёмное пятно в центральной части изображения — это силуэт горизонта событий чёрной дыры, предсказываемый общей теорией относительности. Тень чёрной дыры, размер которой существенно больше размера горизонта событий, на этом изображении не видна.

## 8. Заключение

Возможные формы тёмных изображений (теней) чёрных дыр существенно зависят от распределения окружающего чёрную дыру светящегося вещества и от ориентации чёрной дыры относительно удалённого наблюдателя.

В случае удалённого от чёрной дыры светящегося фона, расположенного вдали от горизонта событий, может наблюдаться классическая тёмная тень чёрной дыры максимального размера. Тень минимального размера

может наблюдаться, если та же самая чёрная дыра подсвечивается внутренней частью аккреционного диска, примыкающей к горизонту событий. Если светящийся аккреционный диск тонкий, то контур (внешняя граница) этой тени является линзированным изображением экватора на глобусе горизонта событий чёрной дыры.

Тёмный силуэт южной полусфера горизонта событий виден на изображении сверхмассивной чёрной дыры M87\*, полученном Телескопом горизонта событий.

В настоящее время имеется единственное изображение сверхмассивной чёрной дыры M87\* в центре галактики M87, полученное международной коллаборацией ТГС с рекордно высоким угловым разрешением. Это первое прямое доказательство существования чёрных дыр, поскольку на изображении M87\*, помимо яркого фона, отчётливо наблюдается тёмное пятно, размеры которого порядка размера горизонта событий этого сверхмассивного объекта. Выполнение именно этого условия является прямым свидетельством существования чёрных дыр во Вселенной. Размер и форма тёмного пятна на изображении объекта M87\* полностью согласуются с предсказаниями ОТО для ожидаемого силуэта чёрной дыры.

При аккреции на чёрные дыры выделяется гигантская энергия. Яркость излучения аккреционного диска может значительно превышать яркость удалённого фона, необходимого для наблюдения тени чёрной дыры. По этой причине тень чёрной дыры не видна на изображении M87\*, полученном ТГС. Сверхмассивная чёрная дыра SgrA\* в центре нашей Галактики является "дремлющим квазаром", поскольку в настоящее время её активность очень низка. При этом вблизи SgrA\* находится очень много ярких звёзд и облаков горячего газа, на фоне которых могла бы проявиться тень чёрной дыры. Однако из-за низкой светимости этого фона по сравнению с гигантской светимостью активных галактических ядер, к которым, в частности, относится M87\*, возникает труднейшая проблема экспериментальной регистрации тени сверхмассивной чёрной дыры SgrA\* с помощью субмиллиметровой радиоинтерферометрии. Ещё одна проблема регистрации тени SgrA\* связана с возможным сильным рассеянием и поглощением фотонов линзированного изображения в плотной плазме вблизи этой чёрной дыры в галактическом диске.

Существует принципиальная возможность восстановить линзированное изображение всего глобуса горизонта событий, если наблюдать за компактными светящимися объектами, падающими в чёрную дыру вне её экваториальной плоскости. Восстановленное при этом "изображение" всего горизонта событий проецируется на небесную сферу внутри положения классической тени чёрной дыры. Аналогичное утверждение о возможности картографирования всего глобуса горизонта событий чёрной дыры Шварцшильда сделано в [329].

Фотоны, излучаемые падающими в чёрную дыру объектами, в непосредственной близости от горизонта событий подвергаются очень сильному гравитационному красному смещению при достижении удалённого наблюдателя. Поэтому точность определения положения на небесной сфере последнего зарегистрированного фотона от падающего в чёрную дыру объекта, а значит, и точность картографирования горизонта событий, будут зависеть от способности используемого телескопа регистрировать фотоны низкой энергии.

Следует также отметить, что всплески гравитационных волн, регистрируемые лазерными интерферометрами [330–339], можно объяснить только слиянием объектов звёздных масс, имеющих собственные размеры порядка их горизонтов событий. С точки зрения ОТО такими объектами могут быть только чёрные дыры и нейтронные звёзды. Тем не менее регистрация всплесков гравитационных волн хотя и даёт надёжное свидетельство существования чёрных дыр, но это свидетельство, по существу, косвенное, поскольку не доказывает, что собственные размеры сливающихся компактных объектов меньше их горизонтов событий.

### Благодарности

Авторы выражают признательность Е.О. Бабичеву, В.А. Березину, Ю.Н. Ерошенко и А.Л. Смирнову за плодотворные обсуждения и критические замечания. Авторы благодарят также Российский фонд фундаментальных исследований за финансовую поддержку в рамках гранта 18-52-15001-NCNIA.

### Список литературы

1. Hawking S W, Ellis G F R *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011)
2. Akiyama K et al. (The Event Horizon Telescope Collab.) *Astrophys. J. Lett.* **875** L1 (2019)
3. Akiyama K et al. (The Event Horizon Telescope Collab.) *Astrophys. J. Lett.* **875** L2 (2019)
4. Akiyama K et al. (The Event Horizon Telescope Collab.) *Astrophys. J. Lett.* **875** L3 (2019)
5. Akiyama K et al. (The Event Horizon Telescope Collab.) *Astrophys. J. Lett.* **875** L4 (2019)
6. Akiyama K et al. (The Event Horizon Telescope Collab.) *Astrophys. J. Lett.* **875** L5 (2019)
7. Akiyama K et al. (The Event Horizon Telescope Collab.) *Astrophys. J. Lett.* **875** L6 (2019)
8. Fish V L et al. *Galaxies* **4** (4) 54 (2016)
9. Lacroix T, Silk J *Astron. Astrophys.* **554** A36 (2013)
10. Kamruddin A B, Dexter J *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **434** 765 (2013)
11. Johannsen T et al. *Phys. Rev. Lett.* **116** 031101 (2016)
12. Johannsen T et al. *Phys. Rev. Lett.* **117** 091101 (2016)
13. Broderick A E et al. *Astrophys. J.* **820** 137 (2016)
14. Chael A A et al. *Astrophys. J.* **829** 11 (2016)
15. Kim J et al. *Astrophys. J.* **832** 156 (2016)
16. Roelofs F et al. *Astrophys. J.* **847** 55 (2017)
17. Doeleman S S *Nat. Astron.* **1** 646 (2017)
18. Ghez A M et al. *Astrophys. J.* **689** 1044 (2008)
19. Gillessen S et al. *Astrophys. J.* **692** 1075 (2009)
20. Gillessen S et al. *Astrophys. J.* **707** L114 (2009)
21. Meyer L et al. *Science* **338** 84 (2012)
22. Johannsen T et al. *Astrophys. J.* **758** 30 (2012)
23. Baade W *Publ. Astron. Soc. Pacific* **58** 249 (1946)
24. Becklin E E, Neugebauer G *Astrophys. J.* **151** 145 (1968)
25. Докучаев В И, Озерной Л М *Письма в Астрон. журн.* **3** 391 (1977); Dokuchaev V I, Ozernoi L M *Sov. Astron. Lett.* **3** 209 (1977)
26. Докучаев В И *Письма в Астрон. журн.* **15** 387 (1989); Dokuchaev V I *Sov. Astron. Lett.* **15** 167 (1989)
27. Allen D A, Hyland A R, Hillier D J *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **244** 706 (1990)
28. Dokuchaev V I *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **251** 564 (1991)
29. Докучаев В И УФН **161** (6) 1 (1991); Dokuchaev V I *Sov. Phys. Usp.* **34** 447 (1991)
30. Manko V S, Novikov I D *Class. Quantum Grav.* **9** 2477 (1992)
31. Lo K Y et al. *Nature* **362** 38 (1993)
32. Backer D C et al. *Science* **262** 1414 (1993)
33. Eckart A, Genzel R *Nature* **383** 415 (1996)
34. Haller J W et al. *Astrophys. J.* **468** 955 (1996)
35. Ghez A M et al. *Astrophys. J.* **509** 678 (1998)
36. Backer D C, Sramek R A *Astrophys. J.* **524** 805 (1999)
37. Reid M J et al. *Astrophys. J.* **524** 816 (1999)
38. Baganoff F K et al. *Bull. Am. Astron. Soc.* **31** 1463 (1999)
39. Falcke H, Markoff S *Astron. Astrophys.* **362** 113 (2000)
40. Новиков И Д, Фролов В П УФН **171** 307 (2001); Novikov I D, Frolov V P *Phys. Usp.* **44** 291 (2001)
41. Baganoff F K et al. *Nature* **413** 45 (2001)
42. Hornstein S D et al. *Astrophys. J. Lett.* **577** L9 (2002)
43. Genzel R et al. *Nature* **425** 934 (2003)
44. Aschenbach B et al. *Astron. Astrophys.* **417** 71 (2004)
45. Yusef-Zadeh F et al. *Astrophys. J.* **650** 189 (2006)
46. Marrone D P et al. *Astrophys. J.* **682** 373 (2008)
47. Ghez A M et al. *Astrophys. J.* **689** 1044 (2008)
48. Doeleman S et al. *Nature* **455** 78 (2008)
49. Doeleman S S et al. *Astrophys. J.* **695** 59 (2009)
50. Dodds-Eden K et al. *Astrophys. J.* **698** 676 (2009)
51. Broderick A E, Loeb A, Narayan R *Astrophys. J.* **701** 1357 (2009)
52. Sabha N et al. *Astron. Astrophys.* **512** A2 (2010)
53. Dexter J et al. *Astrophys. J.* **717** 1092 (2010)
54. De Paolis F et al. *Gen. Relativ. Gravit.* **43** 977 (2011)
55. Broderick A E, Loeb A, Reid M J *Astrophys. J.* **735** 57 (2011)
56. Neilsen J et al. *Astrophys. J.* **774** 42 (2013)
57. Borka D et al. *JCAP* **2013** (11) 050 (2013)
58. Fish V L et al. *Astrophys. J. Lett.* **795** 134 (2014)
59. Gwinn C R et al. *Astrophys. J. Lett.* **794** L14 (2014)
60. Johnson M D *Astrophys. J. Lett.* **794** 150 (2014)
61. Dokuchaev V I *Gen. Relativ. Gravit.* **46** 1832 (2014)
62. Mościbrodzka M et al. *Astron. Astrophys.* **570** A7 (2014)
63. Bower G C et al. *Astrophys. J.* **802** 69 (2015)
64. Johnson M D et al. *Science* **350** 1242 (2015)
65. Chatzopoulos S et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **447** 948 (2015)
66. Докучаев В И, Ерошенко Ю Н УФН **185** 829 (2015); Dokuchaev V I, Eroshenko Yu N *Phys. Usp.* **58** 772 (2015)
67. Rauch C et al. *Astron. Astrophys.* **587** A37 (2016)
68. Zakharov A F et al. *JCAP* **2016** (05) 045 (2016)
69. Becerril R, Valdez-Alvarado S, Nucamendi U *Phys. Rev. D* **94** 124024 (2016)
70. Giddings S B, Psaltis D *Phys. Rev. D* **97** 084035 (2018)
71. Johannsen T *Class. Quantum Grav.* **33** 113001 (2016)
72. Ortiz-León G N et al. *Astrophys. J.* **824** 40 (2016)
73. Parsa M et al. *Astrophys. J.* **845** 22 (2017)
74. Capellupo D M et al. *Astrophys. J.* **845** 35 (2017)
75. Shiokawa H, Gammie C F, Doeleman S *Astrophys. J.* **846** 29 (2017)
76. Johnson M D et al. *Astrophys. J.* **850** 172 (2017)
77. Eckart A et al. *Found. Phys.* **47** 553 (2017)
78. Abdujabbarov A et al. *Int. J. Mod. Phys. D* **26** 1750051 (2017)
79. Ponti G et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **468** 2447 (2017)
80. Zajaćek M et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **480** 4408 (2018)
81. Abuter R et al. (Gravity Collab.) *Astron. Astrophys.* **618** L10 (2018)
82. Zakharov A F *Int. J. Mod. Phys. D* **27** 1841009 (2018)
83. Zakharov A F *Eur. Phys. J. C* **78** 689 (2018)
84. Zakharov A EPJ Web Conf. **191** 01010 (2018)
85. Zhu Z, Johnson M D, Narayan R *Astrophys. J.* **870** 6 (2019)
86. Izmailov R N et al. *Eur. Phys. J. Plus* **134** 384 (2019)
87. Zakharov A F *Int. J. Mod. Phys. D* **28** 1941003 (2019)
88. Do T et al., arXiv:1903.05293
89. Do T et al. *Astrophys. J. Lett.* **882** L27 (2019)
90. Giddings S B *Universe* **5** (9) 201 (2019)
91. Dai D, Stojkovic D *Phys. Rev. D* **100** 083513 (2019)
92. Moriyama K et al. *Astrophys. J.* **887** 227 (2019)
93. Goddi C et al. *Int. J. Mod. Phys. D* **26** 1730001 (2017)
94. Abuter R et al. (Gravity Collab.) *Astron. Astrophys.* **615** L15 (2017)
95. Amorim A et al. (Gravity Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **122** 101102 (2019)
96. Mielnik B, Plebański J *Acta Phys. Polon.* **21** 239 (1962)
97. Syngre J L *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **131** 463 (1966)

98. Bardeen J M, in *Black Holes* (Eds C DeWitt, B S DeWitt) (New York: Gordon and Breach, 1973) p. 219
99. Young P J *Phys. Rev. D* **14** 3281 (1976)
100. Chandrasekhar S *The Mathematical Theory of Black Holes* (The International Series of Monographs on Physics, Vol. 69) (Oxford: Clarendon Press, 1983) Ch. 7
101. Falcke H, Melia F, Agol E *Astrophys. J.* **528** L13 (2000)
102. Takahashi R *Astrophys. J.* **611** 996 (2004)
103. Kardashev N S, Novikov I D, Shatskiy A A *Int. J. Mod. Phys. D* **16** 909 (2007)
104. Falcke H, Markoff S B *Class. Quantum Grav.* **30** 244003 (2013)
105. Li Z, Bambi C *JCAP* **2014** (01) 041 (2014)
106. Inoue M et al. *Radio Sci.* **49** 564 (2014)
107. Cunha P V P et al. *Phys. Rev. Lett.* **115** 211102 (2015)
108. Abdubbarov A A, Rezzolla L, Ahmedov B J *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **454** 2423 (2015)
109. Younsi Z et al. *Phys. Rev. D* **94** 084025 (2016)
110. de Vries A *Class. Quantum Grav.* **17** 123 (2000)
111. Schnittman J D, Krolik J H, Hawley J F *Astrophys. J.* **651** 1031 (2006)
112. Шапкий А А, Новиков И Д, Кардашев Н С *УФН* **178** 481 (2008); Shatskii A A, Novikov I D, Kardashev N S *Phys. Usp.* **51** 457 (2008)
113. Bambi C, Freese K *Phys. Rev. D* **79** 043002 (2009)
114. Frolov V P, Shapiro I L *Phys. Rev. D* **80** 044034 (2009)
115. Tamburini F et al. *Nat. Phys.* **7** 195 (2011)
116. Vincent F H et al. *Class. Quantum Grav.* **28** 225011 (2011)
117. Amarilla L, Eiroa E F *Phys. Rev. D* **85** 064019 (2012)
118. Johannsen T *Astrophys. J.* **777** 170 (2013)
119. Бабичев Е О, Докучаев В И, Ерошенко Ю Н *УФН* **183** 1257 (2013); Babichev E O, Dokuchaev V I, Eroshenko Yu N *Phys. Usp.* **56** 1155 (2013)
120. Amarilla L, Eiroa E F *Phys. Rev. D* **87** 044057 (2013)
121. Zakharov A F et al. *Adv. Space Res.* **54** 1108 (2014)
122. Докучаев В И, Ерошенко Ю Н *Письма в ЖЭТФ* **101** 875 (2015); Dokuchaev V I, Eroshenko Yu N *JETP Lett.* **101** 777 (2015)
123. Wei S-W et al. *JCAP* **2015** (08) 004 (2015)
124. Abdolrahimi S, Mann R B, Tzounis C *Phys. Rev. D* **91** 084052 (2015)
125. Herrera-Aguilar A, Nucamendi U *Phys. Rev. D* **92** 045024 (2015)
126. Becerril R, Valdez-Alvarado S, Nucamendi U *Phys. Rev. D* **94** 124024 (2016)
127. Cunha P V P et al. *Int. J. Mod. Phys. D* **25** 1641021 (2016)
128. Abdubbarov A et al. *Phys. Rev. D* **93** 104004 (2016)
129. Will C M, Maitra M *Phys. Rev. D* **95** 064003 (2017)
130. Cunha P V P, Herdeiro C A R, Radu E *Phys. Rev. D* **96** 024039 (2017)
131. Ferrer F, Medeiros da Rosa A, Will C M *Phys. Rev. D* **96** 083014 (2017)
132. Amarilla L, Eiroa E F, in *The Fourteenth Marcel Grossmann Meeting. Proc. of the MG14 Meeting on General Relativity, Univ. of Rome La Sapienza, Italy, 12–18 July 2015* (Eds M Bianchi, R T Jantzen, R Ruffini) (Singapore: World Scientific, 2017) p. 3543
133. Mureika J R, Varieschi G U *Can. J. Phys.* **95** 1299 (2017)
134. Amir M, Singh B P, Ghosh S G *Eur. Phys. J. C* **78** 399 (2018)
135. Lan X G, Pu J *Mod. Phys. Lett. A* **33** 1850099 (2018)
136. Wang M, Chen S, Jing J *Phys. Rev. D* **98** 104040 (2018)
137. Lamy F et al. *Class. Quantum Grav.* **35** 115009 (2018)
138. Mizuno Y et al. *Nat. Astron.* **2** 585 (2018)
139. Repin S V et al., arXiv:1802.04667
140. Wei S-W et al. *JCAP* **2019** (08) 030 (2019)
141. Blackburn L et al., Astro2020 APC White Paper
142. Meierovich B E *Universe* **5** (9) 198 (2019)
143. Abdikamalov A B et al. *Phys. Rev. D* **100** 024014 (2019)
144. Zhu T et al. *Phys. Rev. D* **100** 044055 (2019)
145. Tian S X, Zhu Z-H *Phys. Rev. D* **100** 064011 (2019)
146. Davoudiasl H, Denton P B *Phys. Rev. Lett.* **123** 021102 (2019)
147. Konoplya R A, Pappas T, Zhidenko A *Phys. Rev. D* **101** 044054 (2020)
148. Hess P O, López-Moreno E *Universe* **5** (9) 191 (2019)
149. Rummel M, Burgess C P, arXiv:2001.00041
150. Alexeyev S O, Prokopov V A, arXiv:2001.09272
151. Кардашев Н С и др. *УФН* **184** 1319 (2014); Kardashev N S et al. *Phys. Usp.* **57** 1199 (2014); Иванов П Б и др. *УФН* **189** 449 (2019); Ivanov P B et al. *Phys. Usp.* **62** 423 (2019)
152. Roelofs F et al. *Astron. Astrophys.* **625** A124 (2019)
153. Palumbo D C M et al. *Astrophys. J.* **881** 62 (2019)
154. Wald R M *General Relativity* (Chicago, IL: The Univ. of Chicago Press, 1984) p. 311
155. Kerr R P *Phys. Rev. Lett.* **11** 237 (1963)
156. Boyer R H, Lindquist R W *J. Math. Phys.* **8** 265 (1967)
157. Bardeen J M *Astrophys. J.* **161** 103 (1970)
158. Bardeen J M *Astrophys. J.* **162** 71 (1970)
159. Bardeen J M, Press W H, Teukolsky S A *Astrophys. J.* **178** 347 (1972)
160. Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A *Gravitation* (San Francisco, CA: W.H. Freeman, 1973)
161. Гальцов Д В *Частицы и поля в окрестности черных дыр* (М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986)
162. Bardeen J M, Carter B, Hawking S W *Commun. Math. Phys.* **31** 161 (1973)
163. Smarr L *Phys. Rev. D* **7** 289 (1973)
164. Sharp N A *Can. J. Phys.* **59** 688 (1981)
165. Carter B *Phys. Rev.* **174** 1559 (1968)
166. de Felice F *Nuovo Cimento B* **57** 351 (1968)
167. Penrose R *Riv. Nuovo Cimento* (Numero Speciale I) 252 (1969)
168. Wilkins D C *Phys. Rev. D* **5** 814 (1972)
169. Grossman R, Levin J, Perez-Giz G *Phys. Rev. D* **85** 023012 (2012)
170. Hod S *Phys. Lett. B* **718** 1552 (2013)
171. Liu C, Ding C, Jing J *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **62** 10411 (2019)
172. Glampedakis K, Pappas G *Phys. Rev. D* **99** 124041 (2019)
173. Cunningham C T, Bardeen J M *Astrophys. J.* **173** L137 (1972)
174. Cunningham C T, Bardeen J M *Astrophys. J.* **183** 237 (1973)
175. Viergutz S U *Astron. Astrophys.* **272** 355 (1993)
176. Rauch K P, Blandford R D *Astrophys. J.* **421** 46 (1994)
177. Gralla S E, Holz D E, Wald R M *Phys. Rev. D* **100** 024018 (2019)
178. Докучаев В И, Назарова Н О *Письма в ЖЭТФ* **106** 609 (2017); Dokuchaev V I, Nazarova N O *JETP Lett.* **106** 637 (2017)
179. Dokuchaev V I, Nazarova N O "Star motion around rotating black hole", <https://youtu.be/P6DneV0vk7U> (2018)
180. Ho L C *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **46** 475 (2008)
181. Gebhardt K, Thomas J *Astrophys. J.* **700** 1690 (2009)
182. Gebhardt K et al. *Astrophys. J.* **729** 119 (2011)
183. Walsh J et al. *Astrophys. J.* **770** 86 (2013)
184. Curtis H D *Publ. Lick Observatory* **13** 11 (1918)
185. Rees M J *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **184** 61P (1978)
186. Eichler D, Smith M *Nature* **303** 779 (1983)
187. Rees M J *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **22** 471 (1984)
188. Begelman M C, Blandford R D, Rees M J *Rev. Mod. Phys.* **56** 255 (1984)
189. Stiavelli M et al. *Nature* **355** 802 (1992)
190. Junor W, Biretta J A *Astron. J.* **109** 500 (1995)
191. Junor W, Biretta J A, Livio M *Nature* **401** 891 (1999)
192. Di Matteo T et al. *Astrophys. J.* **582** 133 (2003)
193. Kovalev Y Y et al. *Astrophys. J.* **668** L27 (2007)
194. Бескин В С *УФН* **180** 1241 (2010); Beskin V S *Phys. Usp.* **53** 1199 (2010)
195. Hada K et al. *Nature* **477** 185 (2011)
196. de Gasperin F et al. *Astron. Astrophys.* **547** A56 (2012)
197. Mościbrodzka M, Falcke H, Shiokawa H *Astron. Astrophys.* **586** A38 (2016)
198. Doeleman S S et al. *Science* **338** 355 (2012)
199. Lacroix T et al. *Phys. Rev. D* **96** 063008 (2017)
200. Akiyama K et al. *Astrophys. J.* **838** 1 (2017)
201. Walker R C et al. *Astrophys. J.* **855** 128 (2018)
202. Broderick A E *Astrophys. J.* **805** 179 (2015)
203. Luminet J-P *Astron. Astrophys.* **75** 228 (1979)
204. Захаров А Ф *Class. Quantum Grav.* **11** 1027 (1994)
205. Beckwith K, Done C *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **359** 1217 (2005)

206. Zakharov A F et al. *New Astron.* **10** 479 (2005)
207. Takahashi R *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **57** 273 (2005)
208. Takahashi R, Watarai K *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **374** 1515 (2007)
209. Bakala P et al. *Cent. Eur. J. Phys.* **5** 599 (2007)
210. Huang L et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **379** 833 (2007)
211. Virbhadra K S *Phys. Rev. D* **79** 083004 (2009)
212. Hioki K, Maeda K *Phys. Rev. D* **80** 024042 (2009)
213. Schee J, Stuchlík Z *Gen. Relativ. Gravit.* **41** 1795 (2009)
214. Dexter J, Agol E *Astrophys. J.* **696** 1616 (2009)
215. Johannsen T, Psaltis D *Astrophys. J.* **718** 446 (2010)
216. Amarilla L, Eiroa E F, Giribet G *Phys. Rev. D* **81** 124045 (2010)
217. Nitta D, Chiba T, Sugiyama N *Phys. Rev. D* **84** 063008 (2011)
218. Yumoto A et al. *Phys. Rev. D* **86** 103001 (2012)
219. Abdujabbarov A et al. *Astrophys. Space Sci.* **344** 429 (2013)
220. Atamurotov F, Abdujabbarov A, Ahmedov B *Astrophys. Space Sci.* **348** 179 (2013)
221. Atamurotov F, Abdujabbarov A, Ahmedov B *Phys. Rev. D* **88** 064004 (2013)
222. Wei S-W, Liu Y-X *JCAP* **2013** (11) 063 (2013)
223. Tsukamoto N, Li Z, Bambi C *JCAP* **2014** (06) 043 (2014)
224. Papnoi U et al. *Phys. Rev. D* **90** 024073 (2014)
225. Tinchev V K, Yazadjiev S S *Int. J. Mod. Phys. D* **23** 1450060 (2014)
226. Kraniotis G V *Gen. Relat. Gravit.* **46** 1818 (2014)
227. Ghasemi-Nodehi M, Li Z, Bambi C *Eur. Phys. J. C* **75** 315 (2015)
228. Tinchev V K *Chin. J. Phys.* **53** 110113 (2015)
229. Gralla S E, Porfyriadis A P, Warburton N *Phys. Rev. D* **92** 064029 (2015)
230. Atamurotov F et al. *Phys. Rev. D* **92** 084005 (2015)
231. Perlick V, Tsupko O Yu, Bisnovatyi-Kogan G S *Phys. Rev. D* **92** 104031 (2015)
232. Shipley J O, Dolan S R *Class. Quantum Grav.* **33** 175001 (2016)
233. Liu X, Yang N, Jia J *Class. Quantum Grav.* **33** 175014 (2016)
234. Yang L, Li Z *Int. J. Mod. Phys. D* **25** 1650026 (2016)
235. Gralla S E, Lupsasca A, Strominger A *Phys. Rev. D* **93** 104041 (2016)
236. Amir M, Ghosh S G *Phys. Rev. D* **94** 024054 (2016)
237. Gralla S E, Zimmerman A, Zimmerman P *Phys. Rev. D* **94** 084017 (2016)
238. Vincent F H et al. *Phys. Rev. D* **94** 084045 (2016)
239. Dastan S, Saffari R, Soroushfar S, arXiv:1606.06994
240. Tretyakova D A, Adyev T M, arXiv:1610.07300
241. Dastan S, Saffari R, Soroushfar S, arXiv:1610.09477
242. Sharif M, Iftikhar S *Eur. Phys. J. C* **76** 630 (2016)
243. Opatrný T, Richterek L, Bakala P *Am. J. Phys.* **85** 14 (2017)
244. Cunha P V P et al. *Phys. Lett. B* **768** 373 (2017)
245. Singh B P, Ghosh S G, arXiv:1707.07125
246. Wang M, Chen S, Jing J *JCAP* **2017** (10) 051 (2017)
247. Amir M, Singh B P, Ghosh S G *Eur. Phys. J. C* **78** 399 (2018)
248. Porfyriadis A P, Shi Y, Strominger A *Phys. Rev. D* **95** 064009 (2017)
249. Gralla S E, Lupsasca A, Strominger A *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **475** 3829 (2018)
250. Perlick V, Tsupko O Yu *Phys. Rev. D* **95** 104003 (2017)
251. Tsupko O Yu *Phys. Rev. D* **95** 104058 (2017)
252. Bisnovatyi-Kogan G S, Tsupko O Yu *Universe* **3** (3) 57 (2017)
253. Stuchlík Z, Charbulák D, Schee J *Eur. Phys. J. C* **78** 180 (2018)
254. Cunha P V P, Herdeiro C A R, Rodriguez M J *Phys. Rev. D* **97** 084020 (2018)
255. Huang Y, Dong Y-P, Liu D-J *Int. J. Mod. Phys. D* **27** 1850114 (2018)
256. Tsukamoto N *Phys. Rev. D* **97** 064021 (2018)
257. Bisnovatyi-Kogan G S, Tsupko O Yu *Phys. Rev. D* **98** 084020 (2018)
258. Hou X, Xu Z, Wang J *JCAP* **2018** (12) 040 (2018)
259. Yan H *Phys. Rev. D* **99** 084050 (2019)
260. Gyulchev G et al. *Phys. Rev. D* **100** 024055 (2019)
261. Kumar R, Ghosh S G, Wang A *Phys. Rev. D* **100** 124024 (2019)
262. Konoplya R A *Phys. Lett. B* **795** 1 (2019)
263. Ali M S, Amir M, arXiv:1906.04146
264. Johnson M D et al. *Sci. Adv.* **6** eaaz1310 (2020)
265. Siino M, arXiv:1908.02921
266. Zhang M, Guo M, arXiv:1909.07033
267. Shipley J O "Strong-field gravitational lensing by black holes", PhD Thesis (Sheffield: Univ. of Sheffield, School of Mathematics and Statistics, 2019); arXiv:1909.04691
268. Shaikh R et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **482** 52 (2019)
269. Shaikh R, Joshi P S *JCAP* **2019** (10) 064 (2019)
270. Ding C et al. *Eur. Phys. J. C* **80** 178 (2020)
271. Narayan R, Johnson M D, Gammie C F *Astrophys. J. Lett.* **885** L33 (2019)
272. Goddi C et al. *The Messenger* **177** 25 (2019)
273. Feng X-H, Lu H, arXiv:1911.12368
274. Allahyari A et al. *JCAP* **2020** (02) 003 (2020)
275. Cunha P V P et al. *JCAP* **2020** (03) 035 (2020)
276. Konoplya R A *Phys. Lett. B* **804** 135363 (2020)
277. Jusufi K *Phys. Rev. D* **101** 084055 (2020)
278. Tsupko O Yu, Bisnovatyi-Kogan G S *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **491** 5636 (2020)
279. Vagnozzi S, Bambi C, Visinelli L *Class. Quantum Grav.* **37** 087001 (2020)
280. Yu S, Gao C, arXiv:2001.01137
281. Li P-C, Guo M, Chen B *Phys. Rev. D* **101** 084041 (2020)
282. Chang Z, Zhu Q-H *Phys. Rev. D* **101** 084029 (2020)
283. Himwich E et al. *Phys. Rev. D* **101** 084020 (2020)
284. Bakala P, Dočekal J, Turoňová Z *Astrophys. J.* **889** 41 (2020)
285. Anantua R, Ressler S, Quataert E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **493** 1404 (2020)
286. Grenzebach A, Perlick V, Lämmerzahl C *Phys. Rev. D* **89** 124004 (2014)
287. Grenzebach A, Perlick V, Lämmerzahl C *Int. J. Mod. Phys. D* **24** 1542024 (2015)
288. Cunha, P V P, Herdeiro C A R *Gen. Relativ. Gravit.* **50** 42 (2018)
289. Bromley B C, Chen K, Miller W A *Astrophys. J.* **475** 57 (1997)
290. Fanton C et al. *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **49** 159 (1997)
291. Fukue J *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **55** 155 (2003)
292. Fukue J *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **55** 1121 (2003)
293. Dexter J, Agol E, Fragile P C *Astrophys. J.* **703** L142 (2009)
294. Lu R-S et al. *Astrophys. J.* **817** 173 (2016)
295. Luminet J-P, arXiv:1902.11196
296. Shiokawa H, <https://eventhorizontelescope.org/simulations-gallery> (2019)
297. van der Gucht J et al. *Astron. Astrophys.* **636** A94 (2020)
298. White C J et al. *Astrophys. J.* **894** 14 (2020)
299. Докучаев В И, Назарова Н О ЖЭТФ **155** 677 (2019); Dokuchaev V I, Nazarova N O *J. Exp. Theor. Phys.* **128** 578 (2019)
300. Dokuchaev V I, Nazarova N O, Smirnov V P *Gen. Relativ. Gravit.* **51** 81 (2019)
301. Shakura N I, Sunyaev R A *Astron. Astrophys.* **24** 337 (1973)
302. Novikov I D, Thorne K S, in *Black Holes* (Eds C DeWitt, B S DeWitt) (New York: Gordon and Breach, 1973) p. 343
303. Page D N, Thorne K S *Astrophys. J.* **191** 499 (1974)
304. Thorne K S *Astrophys. J.* **191** 507 (1974)
305. Abramowicz M A, Fragile P C *Living Rev. Relativ.* **16** 1 (2013)
306. Yuan F, Narayan R *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **52** 529 (2014)
307. Lasota J-P, in *Astrophysics of Black Holes* (Astrophysics and Space Science Library, Vol. 440) (Berlin: Springer-Verlag, 2016) p. 1
308. Журавлëв В В УФН **185** 561 (2015); Zhuravlev V V *Phys. Usp.* **58** 527 (2015)
309. Compère G, Oliveri R *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **468** 4351 (2017)
310. Krolik J H, Hawley J F *Astrophys. J.* **573** 754 (2002)
311. Miller J M *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **45** 441 (2007)
312. Psaltis D et al. *Astrophys. J.* **798** 15 (2015)
313. James O et al. *Class. Quantum Grav.* **32** 065001 (2015)
314. Luminet J-P, arXiv:1503.08305
315. Luminet J-P *Universe* **4** (8) 86 (2018)
316. Dokuchaev V I, Nazarova N O *Universe* **5** (8) 183 (2019)
317. Dokuchaev V I, Nazarova N O "Infall of the star into rotating black hole viewed by a distant observer", <https://youtu.be/fps-3frL0AM> (2018)
318. Dokuchaev V *Int. J. Mod. Phys. D* **28** 1941005 (2019)

319. Gralla S E, Lupsasca A *Phys. Rev. D* **101** 044031 (2020)
320. Broderick A E, Loeb A *Astrophys J.* **697** 1164 (2009)
321. Li Y-R et al. *Astrophys J.* **699** 513 (2009)
322. Feng J, Wu Q *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **470** 612 (2017)
323. Sob'yanin D N *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **479** L65 (2018)
324. Nokhrina E E et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **489** 1197 (2019)
325. Tamburini F, Thidé B, Della Valle M *Mon. Not. R. Soc.* **492** L22 (2020)
326. Bambi C et al. *Phys. Rev. D* **100** 044057 (2019)
327. Nemmen R *Astrophys J. Lett.* **880** L26 (2019)
328. Nalewajko K, Sikora M, Różánska A *Astron. Astrophys.* **634** A38 (2020)
329. Antonelli R, <http://rantonels.github.io/starless/> (2018)
330. Abbott B P et al. (LIGO Scientific Collab. and Virgo Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **116** 061102 (2016)
331. Abbott B P et al. (LIGO Scientific Collab. and Virgo Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **116** 241103 (2016)
332. Abbott B P et al. (LIGO Scientific Collab. and Virgo Collab.) *Phys. Rev. D* **93** 122003 (2016)
333. Abbott B P et al. (LIGO Scientific Collab. and Virgo Collab.) *Phys. Rev. D* **93** 122004 (2016); *Phys. Rev. D* **94** 069903 (2016) Erratum
334. Abbott B P et al. (LIGO Scientific Collab. and Virgo Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **118** 221101 (2017)
335. Шилт М А, Торн К С *УФН* **184** 367 (2014); Scheel M A, Thorne K S *Phys. Usp.* **57** 342 (2014)
336. Черепашук А М *УФН* **186** 778 (2016); Cherepashchuk A M *Phys. Usp.* **59** 702 (2016)
337. Черепашук А М *УФН* **186** 1001 (2016); Cherepashchuk A M *Phys. Usp.* **59** 910 (2016)
338. Райтце Д *УФН* **187** 884 (2017); Reitze D H *Phys. Usp.* **60** 823 (2017)
339. Постнов К А, Куранов А Г, Митичкин Н А *УФН* **189** 1230 (2019); Postnov K A, Kuranov A G, Mitichkin N A *Phys. Usp.* **62** 1153 (2019)

### Silhouettes of invisible black holes

V.I. Dokuchaev<sup>(1,2,\*)</sup>, N.O. Nazarova<sup>(3,4,\*\*)</sup>

<sup>(1)</sup> Institute for Nuclear Research, Russian Academy of Sciences, prospr. 60-letiya Oktyabrya 7a, 117312 Moscow, Russian Federation

<sup>(2)</sup> Moscow Institute of Physics and Technology, Institutskii per. 9, 141701 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation

<sup>(3)</sup> Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (SISSA), Via Bonomea 265, 34136 Trieste (TS), Italy

<sup>(4)</sup> International Centre for Theoretical Physics (ICTP), Strada Costiera 11, 34151 Trieste (TS), Italy

E-mail: (\*) [dokuchaev@inr.ac.ru](mailto:dokuchaev@inr.ac.ru), (\*\*) [nnazarov@sissa.it](mailto:nnazarov@sissa.it)

In general relativity, isolated black holes are invisible objects due to their intrinsic physical properties. Nevertheless, the dark silhouettes of astrophysical black holes may be visible to a distant observer as a result of emitting matter lensing in the gravitational field of black holes. The most probable astrophysical conditions for the experimental detection of a dark black hole silhouette are either the stationary luminous background behind the black hole or nonstationary hot matter plunging into the black hole and having emissions approaching the black hole horizon. The black hole shadow is observed in the case of a stationary luminous background, which is a projection on the celestial sphere of the photon capture cross section in the black hole gravitational field. Meanwhile, in the case of nonstationary emitting matter in the inner part of the thin accretion disk adjoining the event horizon, a dark silhouette of the event horizon itself would be seen. This dark silhouette of the event horizon is seen in the first image of the supermassive black hole M87\* presented by the Event Horizon Telescope international collaboration. The brightness of accretion matter is much higher than the corresponding one of the usual astrophysical stationary background in the form of numerous stars or extensive hot gas clouds. For this reason, it is improbable that a black hole shadow can be observed in the presence of very luminous accretion matter.

**Keywords:** gravitation theory, general relativity, black holes, event horizon, gravitational lensing

PACS numbers: 04.70.Bw, 98.35.Jk, 98.62.Js

Bibliography — 339 references

Received 5 November 2019, revised 4 December 2019

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **190** (6) 627–647 (2020)

*Physics – Uspekhi* **63** (6) (2020)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.01.038717>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2020.01.038717>