

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Пространственно-временные структуры в ансамблях связанных хаотических систем

Г.И. Стрелкова, В.С. Анищенко

Представлен обзор результатов численных исследований сложной динамики одномерных и двумерных ансамблей нелокально связанных идентичных хаотических осцилляторов с дискретным и непрерывным временем, а также решёток связанных ансамблей. Такие сложные сети могут демонстрировать пространственно-временные структуры особого типа в виде химерных состояний, которые представляют собой режим сосуществования пространственно локализованных областей когерентной (синхронной) и некогерентной (асинхронной) динамики в ансамбле нелокально связанных идентичных осцилляторов. Описываются фазовая, амплитудная и двухъямная химеры и уединённые состояния, анализируются и сравниваются их основные характеристики. Выделяются две базовые модели систем с дискретным временем, отображения Эно и Лози, которые могут быть использованы для описания типичных химерных структур и уединённых состояний в ансамблях широкого класса хаотических осцилляторов. Обсуждаются бифуркационные механизмы возникновения и эволюция указанных структур. Описываются эффекты синхронизации химерных состояний в связанных ансамблях хаотических отображений.

Ключевые слова: ансамбли, нелокальная связь, химерные структуры, пространственно-временные структуры, синхронизация, отображения, динамический хаос

PACS numbers: 05.45.Ra, 05.45.Xt, **05.65.+b**DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2019.01.038518>

Содержание

1. Введение (160).
2. Фазовые химерные состояния в ансамблях нелокально связанных логистических отображений (162).
3. Механизм образования и свойства фазовой химеры (163).
4. Амплитудные химерные состояния (166).
5. Роль квазигиперболичности хаотических аттракторов (167).
6. Переход когерентность – некогерентность в ансамбле отображений Лози (168).
7. Химера уединённых состояний в связанных ансамблях отображений Эно и Лози (169).
8. Механизм реализации режимов уединённых состояний и химеры уединённых состояний в одномерном ансамбле нелокально связанных отображений Эно (170).
9. Двухъямные химеры в ансамблях бистабильных осцилляторов с нелокальной связью (171).
10. Внешняя и взаимная синхронизация химерных состояний (172).
10.1. Внешняя синхронизация пространственно-временных структур. 10.2. Взаимная синхронизация пространственно-временных структур.

11. Заключение (175).

Список литературы (176).

1. Введение

Уже несколько последних десятилетий исследования коллективной динамики сложных систем различной природы, синхронизация ансамблей взаимодействующих осцилляторов, формирования разнообразных диссипативных структур и их эволюции представляют собой одно из центральных направлений в нелинейной динамике и связанных междисциплинарных областях науки. Результаты этих исследований отражены в большом количестве монографий [1–15] и статей [16–46]. Установлено, что в нелинейных ансамблях и сетях характерно образование таких структур, как кластеры синхронизации, пространственная перемежаемость, неподвижные в пространстве регулярные и хаотические структуры (паттерны) и т.д. Во многих работах, как правило, исследовались ансамбли идентичных колебательных элементов с локальной и глобальной связью между ними.

Сравнительно недавно были открыты пространственно-временные структуры нового типа, названные химерными состояниями [47, 48]. Это во многом было обусловлено введением нелокальных связей между элементами ансамбля. Нелокальная связь характеризуется тем, что каждый осциллятор ансамбля связывается с конечным числом ближайших соседних осцилляторов справа и слева. Впервые данное состояние было обнаружено в одномерном ансамбле нелокально связанных

Г.И. Стрелкова (*), В.С. Анищенко (**)

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ул. Астраханская 83, 410012 Саратов, Российская Федерация
E-mail: (*) strelkovagi@info.sgu.ru, (**) wadim@info.sgu.ru

Статья поступила 10 октября 2018 г.,
после доработки 10 января 2019 г.

идентичных фазовых осцилляторов [47], затем более детально исследовано в работе [48], где и был предложен термин *химерное состояние*, или *химера*. Под химерными структурами понимают сосуществование в ансамбле синхронных (когерентных) и несинхронных (некогерентных) кластеров, включающих в себя конечное число осцилляторов и чётко разграниченных в пространстве элементов ансамбля. Термин "химера", заимствованный из греческой мифологии, характеризует совокупность "сочетаемого" и "несочетаемого".

Отметим, что структуры типа химерных наблюдались задолго до их определения в работах [47, 48]. Внимание исследователей в те годы было сосредоточено на анализе и управлении переходами от режимов пространственного хаоса к режимам полной синхронизации всех элементов ансамблей. Структуры типа химерных наблюдались в качестве переходных режимов к режимам синхронизации и назывались синхронными и несинхронными кластерами [17, 25].

В последние годы исследование химерных структур привлекло внимание, вызвало большой интерес многих учёных и привело к росту численных и теоретических [49–98], а затем и экспериментальных [99–107] работ. Показано, что появление химерных состояний не ограничивается фазовыми осцилляторами. Такие состояния наблюдаются в ансамблях с парциальными элементами различных типов: в дискретных [55, 56, 66, 75–77, 86–88, 90, 91, 96, 98] и непрерывных во времени [55, 56, 70, 81, 91, 93, 97] хаотических системах, осцилляторах Ван дер Поля [79, 81, 84], возбудимых системах типа модели нейрона Фитц-Хью – Нагумо и других моделей нейронной активности [57, 67, 80, 81, 85, 89, 94, 108], моделях популяций [70, 83], автономных булевых сетях [42, 58]. На данный момент химерные структуры обнаружены в реальных экспериментах: в оптических, оптоэлектронных, лазерных [99, 102, 105], химических [100, 101] и механических системах [103, 104]. Сейчас ведутся работы по возможному применению химерных состояний к описанию динамики ансамблей в живой природе. Химерные состояния исследуются применительно к анализу поочерёдного сна полушарий головного мозга [109, 110], эпилептических припадков [111, 112], активности нейронов головного мозга [113–115], динамики сердечной мышцы (фибрилляция желудочков [116, 117]). Изучение химерных состояний имеет также практическую важность при анализе режимов устойчивого функционирования энергосистем [118, 119], транспортных сетей [120] и др.

Исследования последних лет направлены на выявление особенностей химерных состояний в ансамблях из различных нелинейных осцилляторов, попытки описания механизмов их реализации, анализ влияния топологии связей между элементами ансамбля [67, 70, 79, 81, 84, 85] и роли шумовых возмущений [82, 90, 98, 121]. Были сделаны попытки ввести классификацию типов химерных структур [78, 91]. Особо отметим важную роль задания начальных условий индивидуальных осцилляторов ансамбля. Как правило, химерные состояния исследуются в ансамблях идентичных осцилляторов. При симметричной топологии связей между элементами и одинаковых начальных условиях ансамбль всегда будет демонстрировать синхронную динамику без образования некогерентных кластеров. В связи с этим начальные условия либо задаются специальным образом в пространстве осцилляторов ансамбля, либо выбираются в виде слу-

чайного распределения в некотором интервале. Последний способ представляется предпочтительным, поскольку он соответствует функционированию реальных ансамблей в природе и технике.

Несмотря на большое количество работ по исследованию химер в различных ансамблях, многие вопросы остаются нерешёнными или не до конца решёнными. Принципиально важным является вопрос об устойчивости химерных состояний. Являются ли химеры устойчивыми или представляют собой долгоживущий переходный процесс во времени? В большинстве работ вывод об устойчивости основывается на численных расчётах. Но надо понимать, что численный эксперимент "не способен различить устойчивые состояния и долгоживущие переходные процессы" [65]. Теоретический анализ устойчивости требует получения аналитического решения для режима химерного состояния ансамбля. Однако в общем случае эта задача пока неразрешима. Одним из используемых методов оценки устойчивости может служить анализ результатов воздействия на режимы химер шумом малой интенсивности [90, 95, 98]. В пользу наличия устойчивости химерных состояний можно привести факт экспериментальных наблюдений химер в ряде систем [99–105]. В общем случае вопрос о строгом обосновании устойчивости химерных состояний остаётся открытым.

Среди других, пока не полностью решённых, проблем отметим анализ бифуркационных механизмов реализации тех или иных химерных структур, их статистических характеристик, времени жизни, внешней и взаимной синхронизации химерных структур, роли внешних воздействий и ряд других. Важно отметить, что в научной литературе имеется относительно мало работ по исследованию химерных структур в ансамблях, составленных из осцилляторов с хаотической динамикой, которые представляют собой достаточно широкий класс нелинейных автоколебательных систем. Кроме того, в большинстве работ рассматриваются одиночные ансамбли идентичных осцилляторов. Однако особый интерес представляют связанные ансамбли, в том числе состоящие из различных индивидуальных осцилляторов. В частности, одним из малоизученных вопросов динамики связанных ансамблей является внешняя и взаимная синхронизация химерных структур [122–124]. Указанные вопросы не рассматриваются и в двух широко известных обзорах [65, 81]. В данных обзорах представлены результаты исследований ансамблей фазовых осцилляторов Курамото, систем Фитц-Хью – Нагумо, Стюарта – Ландау, осцилляторов Ван дер Поля, влияния топологии связей между осцилляторами, роли запаздывания в цепях связи и др. Однако динамика ансамблей из хаотических осцилляторов не обсуждается. Систематическое исследование динамики ансамблей хаотических осцилляторов с нелокальной связью, механизмов формирования пространственно-временных структур, включая химерные, в одиночных и связанных ансамблях проводилось в последние пять лет на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. В основу настоящего обзора положены оригинальные научные результаты, опубликованные авторами совместно с магистрами и аспирантами кафедры в ведущих отечественных и зарубежных физических журналах.

Обзор построен следующим образом. После краткого введения рассматриваются результаты пионерской

работы по исследованию фазовой химеры в одномерных ансамблях из логистических отображений и осцилляторов Рёсслера с нелокальной связью [55, 56]. Далее обсуждаются механизм формирования и характерные свойства фазовых химер. Показана возможность реализации химерной структуры нового типа, названной амплитудной. Описываются механизм её появления, статистические характеристики и время жизни. Далее формулируется и обосновывается гипотеза о том, что химерные структуры могут формироваться в ансамблях хаотических систем с негиперболическим типом аттрактора, но, как правило, они не возникают в ансамблях хаотических систем с квазигиперболическим аттрактором. На основе этой гипотезы вводятся две базовые модели описания химерных структур в ансамблях нелокально связанных хаотических систем. Затем рассматриваются пространственно-временные структуры в двух связанных ансамблях и описывается химерная структура нового типа — *химера уединённых состояний*. Обсуждаются общие закономерности формирования химерных структур в ансамблях из бистабильных осцилляторов. В заключении обзора подробно иллюстрируется эффект внешней и взаимной синхронизации химерных структур в двух симметрично связанных ансамблях нелокально связанных логистических отображений.

2. Фазовые химерные состояния в ансамблях нелокально связанных логистических отображений

Впервые химерные структуры в ансамблях хаотических осцилляторов с нелокальной связью были детально исследованы в работах [55, 56]. В качестве индивидуальных элементов ансамбля рассматривались дискретное логистическое отображение [125, 126] и осциллятор Рёсслера [127] в режимах динамического хаоса.

Рассмотрим основные результаты для одномерного ансамбля нелокально связанных логистических отображений, уравнение которого задано в виде

$$x_i^{t+1} = f(x_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (f(x_j^t) - f(x_i^t)), \quad (1)$$

где x_i^t — вещественная переменная, t — дискретное время, $i = 1, 2, \dots, N$ — порядковый номер осциллятора в ансамбле ($N = 100$), $f(x) = ax(1-x)$ — логистическое отображение в хаотическом режиме ($a = 3,8$), σ — коэффициент нелокальной связи i -го осциллятора с P соседями слева и справа. В качестве управляющих параметров системы (1) используются параметр связи σ и нормированный радиус связи $r = P/N$. Ансамбль (1) рассматривается при периодических граничных условиях и, как правило, при случайных начальных условиях, распределённых в интервале $[0, 1]$. Отметим, что система (1) описывает случаи локальной ($P = 1$), глобальной ($P = N/2$) и нелокальной ($1 < P < N/2$) связей. Переход когерентность–некогерентность исследован на плоскости параметров r и σ . Бифуркационная диаграмма системы (1) представлена на рис. 1а [56].

В работе [55] под когерентными состояниями понимались такие режимы, для которых мгновенные профили амплитуд являются достаточно гладкими и удовлетворяют условию:

$$|x_{i+1}^t - x_i^t| < \delta, \quad \delta \ll 1, \quad t = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

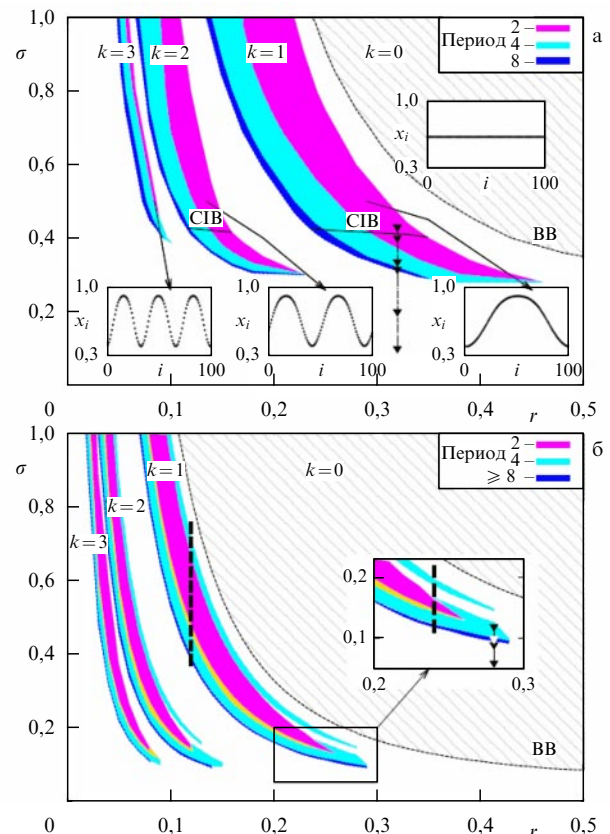


Рис. 1. Области когерентности на плоскости параметров (r, σ) для $N = 100$ логистических отображений (1) (а) и осцилляторов Рёсслера (3) (б), обозначенные волновыми числами k . Заштрихованная область ($k = 0$), отвечающая режиму полной хаотической синхронизации, ограничена бифуркационной линией BB (blowout bifurcation — бифуркация прорыва). Области $k = 1, 2$ и 3 соответствуют когерентным режимам, которым отвечают профили мгновенных амплитуд колебаний осцилляторов, показанные на вставках. Внутри "языков" когерентности реализуются режимы колебаний с удвоением периода. Линии CIB (coherence–incoherence bifurcation — бифуркация когерентность–некогерентность) разделяют режимы с когерентной и некогерентной динамикой. Параметры систем: $a = 3,8$ (а), $a = 0,42$, $b = 2,0$, $c = 4,0$ (б). Стрелками на рис. а показано направление движения по параметру σ при $r = 0,32$ для ансамбля (1), которое описано ниже [56].

При полной синхронизации всех элементов ансамбля $\delta \rightarrow 0$ (например, в области $k = 0$ на рис. 1а).

При уменьшении коэффициента связи σ (при движении вдоль линии, показанной на рис. 1а) авторами работ [55, 56] описан переход когерентность–некогерентность, представленный на рис. 2.

Гладкий волнообразный профиль x_i^t (рис. 2а) распадается на верхнюю и нижнюю ветви (рис. 2б). Затем с уменьшением σ около точек x_1 и x_2 возникают две области с некогерентной динамикой (α_1 и α_2). Ширина этих областей увеличивается с уменьшением σ (рис. 2в, г). Далее динамика элементов ансамбля становится полностью хаотичной (некогерентной) (рис. 2д, е). В областях некогерентности α_1 и α_2 осцилляторы ансамбля нерегулярно переключаются между верхней и нижней ветвями мгновенного профиля. В результате в ансамбле (1) реализуется режим сосуществования когерентных и некогерентных кластеров с чёткими границами в пространстве ансамбля. Другими словами, в ансамбле (1) возник-

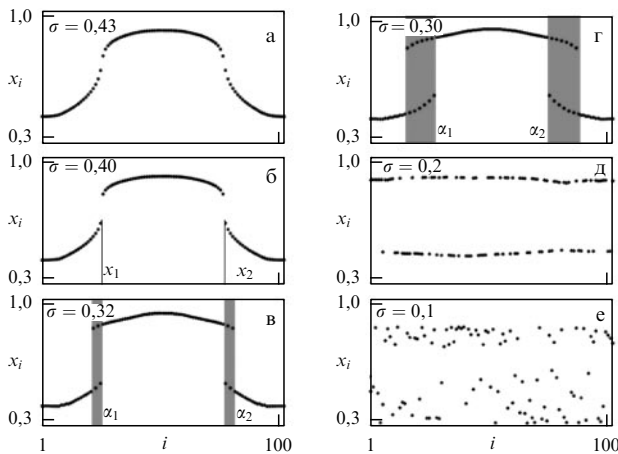


Рис. 2. Эволюция мгновенных профилей амплитуд ансамбля (1) с уменьшением σ при $r = 0,32$. Затемнённые участки α_1 и α_2 соответствуют некогерентным профилям [56].

кает химерное состояние, которое полностью соответствует определению, данному в работе [48].

В работе [56] приведены результаты аналитического подхода к определению критического значения коэффициента связи $\sigma_{\text{кр}}$, которое отвечает рождению химерного состояния (появление областей α_1 и α_2 на рис. 2). Как видно из рис. 2, возникновению химерного состояния предшествует формирование вертикального профиля мгновенных амплитуд с последующим его разрывом. Именно этот факт послужил основой теоретического анализа механизма рождения химерной структуры в ансамбле (1). В работе [56] делается вывод о том, что критическим значением силы связи для параметра отображения $a = 3,8$ является $\sigma_{\text{кр}} \simeq 0,44$. Химерные состояния возникают, если $\sigma \leq \sigma_{\text{кр}}$.

Не менее важным результатом работы [56] является численный анализ динамики одномерного кольца из осцилляторов Рёсслера с нелокальной связью, которая вводилась по всем трём фазовым переменным:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -y_i - z_i + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (x_j - x_i), \\ \dot{y}_i &= x_i + ay_i + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (y_j - y_i), \\ \dot{z}_i &= b + z_i(x_i - c) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (z_j - z_i). \end{aligned} \quad (3)$$

На рисунке 1б представлена бифуркационная диаграмма, полученная при анализе уравнений ансамбля (3) [56]. Сравнение результатов, показанных на рис. 1а и б, говорит о топологической эквивалентности динамических режимов ансамблей из логистических отображений (1) и осцилляторов Рёсслера (3). Это обстоятельство является важным, и к нему мы вернёмся в дальнейшем изложении.

3. Механизм образования и свойства фазовой химеры

Анализ и описание свойств химерных структур в кольцах из логистических отображений и осцилляторов Рёсслера в работах [55, 56] являются безусловно важными и

фундаментальными. Однако эти результаты не отвечают на ряд вопросов о структуре найденной химеры, её динамических и статистических характеристиках и, наконец, на вопрос о возможности наблюдать химеры иных типов в системах (1) и (3). Ответы на эти вопросы даны в ряде статей, опубликованных позднее [75, 91]. Остановимся на описании новых результатов, полученных в указанных работах.

Обратимся вновь к системе (1), которую представим в виде

$$x_i^{t+1} = ax_i^t(1 - x_i^t) + F(\sigma, r, x_i^t), \quad (4)$$

где

$$F(\sigma, r, x_i^t) = \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (f(x_j^t) - f(x_i^t)), \quad (5)$$

функции $f(x)$ представляют собой логистические отображения. Из (4) следует, что каждый i -й осциллятор ансамбля испытывает воздействие со стороны P соседних осцилляторов справа и слева от него. Это суммарное воздействие $F(\sigma, r, x_i^t)$ для каждого осциллятора ансамбля с номером $i = 1, 2, \dots, N$ будет различным. Именно различие воздействующих сигналов за счёт нелокальной связи и приводит к формированию пространственно-временных структур определённых типов в ансамбле. Назовём $F(\sigma, r, x_i^t)$ *функцией связи*.

Рассмотрим ансамбль (4), положив $a = 3,8$, $N = 1000$, $P = 320$ ($r = P/N = 0,32$), и рассчитаем зависимости функции связи $F(x_i)$ для различных значений σ . В левой колонке рис. 3 приведены данные расчёта $F(x_i)$ в виде пространственно-временных профилей, которые строились следующим образом. Для каждого i -го осциллятора на график выводились 20–50 значений амплитуды x_i^t , причём исключалось время установления, составляющее примерно 5×10^5 итераций системы (4) [91]. В результате такой операции зависимости $F(x_i)$ дают качественное представление о временной динамике каждого осциллятора и её эволюции в пространстве ансамбля. Из рисунка 3 ясно видно, что при $\sigma = 0,43$ (рис. 3а) функция $F(x_i)$ описывает периодические колебания с периодом 2, далее с уменьшением σ имеет период 4 (рис. 3б) и при $\sigma = 0,3574$ (рис. 3в) — период 8.

Таким образом, с уменьшением коэффициента нелокальной связи σ функция связи претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода. При этом видна эволюция фронта в распределении мгновенных амплитуд (правая колонка рис. 3), который становится вертикальным (рис. 3б, в). Однако, несмотря на этот факт, рождения химерной структуры при этом ещё не наблюдается. С достижением $\sigma = 0,35$ (рис. 3г) функция связи демонстрирует переход к слабо хаотическому режиму, при этом появляются две области некогерентности, которые сосуществуют с областями когерентности (рис. 3г, правая колонка). Таким образом, возникает химерное состояние. Дальнейшее уменьшение силы связи приводит к увеличению ширины некогерентных кластеров, так же как это показано на рис. 2.

Отметим, что приведённые на рис. 3 мгновенные профили эволюционируют во времени, так как осцилляторы ансамбля совершают колебания. Результаты расчётов свидетельствуют, что изменение профилей во времени не меняет топологии соответствующих кривых распределения амплитуд по пространству ансамбля. При

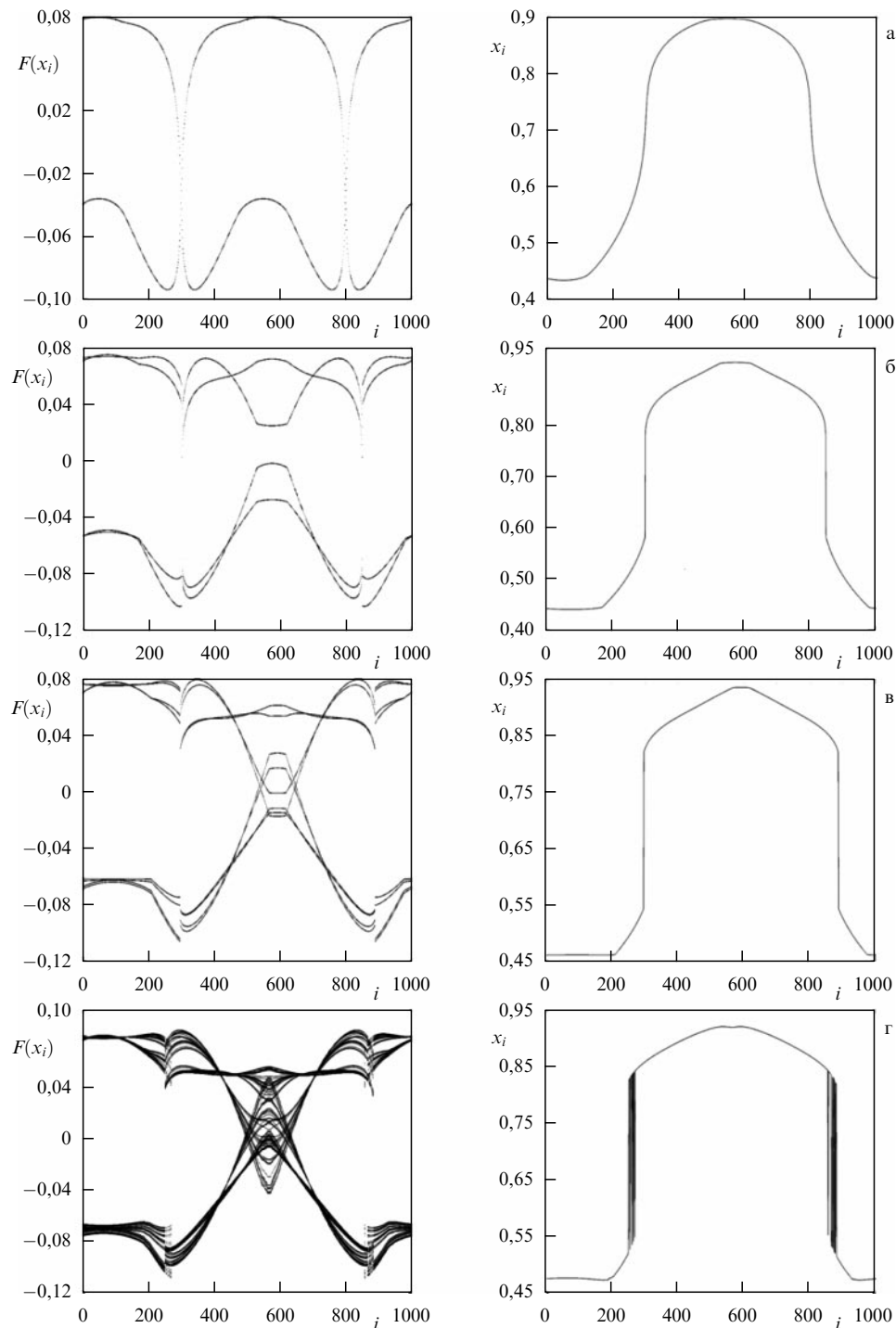


Рис. 3. Пространственно-временные профили функции связи F_i (левая колонка) и мгновенные профили амплитуд x_i ($t = \text{const}$) (правая колонка) при коэффициентах связи σ : 0,43 (а), 0,38 (б), 0,3574 (в), 0,35 (г). Другие параметры: $a = 3,8$, $r = 0,32$, $N = 1000$.

этом для значений силы связи, соответствующих данным на рис. 3а–в, профили остаются гладкими, удовлетворяя требованиям соотношения (2), которое является условием когерентности. При $\sigma = 0,35$ (рис. 3г) когерентность для двух малых кластеров осцилляторов нарушается и рождается химерное состояние. Информация об эволюции во времени мгновенных пространственно-временных профилей амплитуд осцилляторов ансамбля содержится также на рис. 5.

Из вышеизложенного можно сделать вывод о том, что возникновение химерного состояния связано с каска-

дом бифуркаций удвоения периода функции связи $F(x_i)$, реализующимся при уменьшении коэффициента нелокальной связи σ . Последовательность бифуркаций удвоения периода завершается возникновением режима динамической стохастичности, и именно при этом переходе появляется химерное состояние [48, 55, 75, 91].

Рассмотрим, что представляет собой химерная структура указанного типа. На рисунке 4 представлены численные результаты для мгновенного профиля амплитуд (рис. 4а), временные реализации $F(x_i^t)$ для двух соседних осцилляторов из некогерентного кластера химеры

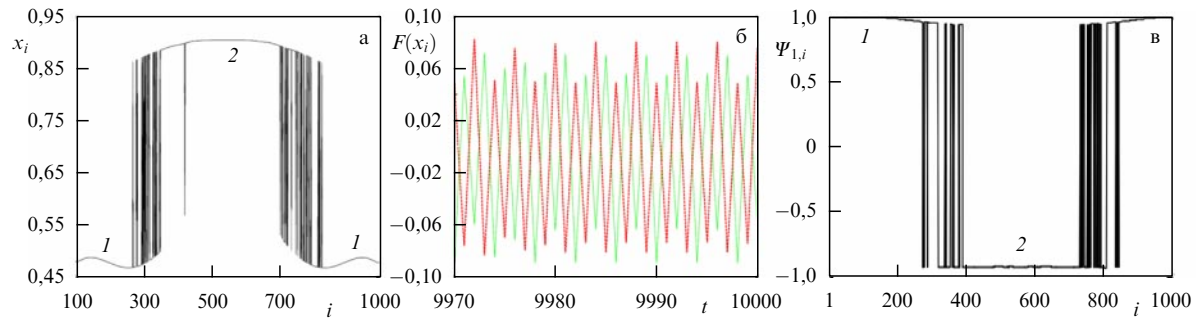


Рис. 4. (а) Мгновенный профиль $x_i(t = \text{const})$, рассчитанный для $\sigma = 0,27$ по уравнениям (4), (б) временные реализации $F(x_i(t))$ для двух соседних элементов $i = 318$ и $i = 319$ из области некогерентности и (в) коэффициент взаимной корреляции $\Psi_{1,i}$ (7) для химерной структуры, представленной на рис. а. Все другие параметры фиксированы, как на рис. 3.

(рис. 4б) и коэффициент взаимной корреляции $\Psi_{1,i}$ (рис. 4в).

Установлено [75, 91], что в областях, отмеченных на рис. 4а цифрами 1 и 2, колебания осцилляторов близки к периодическим с периодом 2, но различаются сдвигом на одну итерацию во времени (рис. 4б). Будем говорить, что в области 1 все осцилляторы колеблются "синфазно", а в области 2 — "противофазно". В областях некогерентности имеет место нерегулярное по пространству переключение осцилляторов с синфазного режима на противофазный и наоборот (рис. 4б). Этот эффект нарушает режим когерентности и приводит к появлению областей некогерентности и, следовательно, к возникновению химерного состояния.

Проанализируем причину и механизм смены "фазы" колебаний осцилляторов. С этой целью вернёмся к рис. 3 (правая колонка) и построим для этих режимов пространственно-временные профили (рис. 5).

Численные данные на рис. 5а соответствуют мгновенному профилю амплитуд рис. 3а (правая колонка). Из графика видно, что осцилляторы с номерами $i = 298$ и $i = 798$ находятся в режиме неподвижной точки, в то время как все другие осцилляторы совершают колебания с периодом 2. Для указанных осцилляторов функция связи $F(x_i)$ обращается в нуль, что видно из рис. 3а (левая колонка). Из уравнения (4) при этом следует возможность определить неподвижную точку периода 1:

$$x^0 = 3,8x^0(1 - x^0), \quad x^0 = 0,737. \quad (6)$$

Это значение соответствует результату, представленному на рис. 5а. Легко доказать, что состояние равнове-

сия x^0 неустойчиво. Как показали детальные исследования [75, 91], все осцилляторы с номерами $i < 298$ совершают синфазные колебания, а осцилляторы с номерами $298 < i < 798$ — противофазные. Смена фазы колебаний (сдвиг на одну итерацию) происходит в пространстве при прохождении вдоль ансамбля через осциллятор с номером $i = 298$. Как видно из рис. 5а, при подходе к осциллятору с $i = 298$ слева амплитуда колебаний осцилляторов уменьшается, достигая нуля для $i = 298$, и далее для осцилляторов с $i > 298$ начинает возрастать. Но при этом резко изменяется "фаза" колебаний. Ввиду того что начальные условия для системы (4) задаются случайно распределёнными в интервале $[0, 1]$ и состояние равновесия $x^0 = 0,737$ неустойчиво, вблизи $i = 298$ нерегулярным образом будут чередоваться осцилляторы с синфазной и противофазной динамикой. Таким образом, будет сформирован один из кластеров некогерентности химерного состояния.

Чередование синфазных и противофазных колебаний в некогерентном кластере химерной структуры можно проиллюстрировать количественно с использованием коэффициента взаимной корреляции колебаний (КВК) различных элементов ансамбля [77, 86]. Рассмотрим первый ($i = 1$) и i -й осцилляторы в один и тот же заданный момент времени. Тогда КВК определяется формулой

$$\Psi_{1,i} = \frac{\langle \tilde{x}_1(t) \tilde{x}_i(t) \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{x}_1^2(t) \rangle \langle \tilde{x}_i^2(t) \rangle}}, \quad \tilde{x}(t) = x(t) - \langle x(t) \rangle, \quad (7)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени.

На рисунке 4в представлены результаты расчёта КВК $\Psi_{1,i}$ по формуле (7) для режима химерного состояния, изображённого на рис. 4а. Как видно из рисунка, в

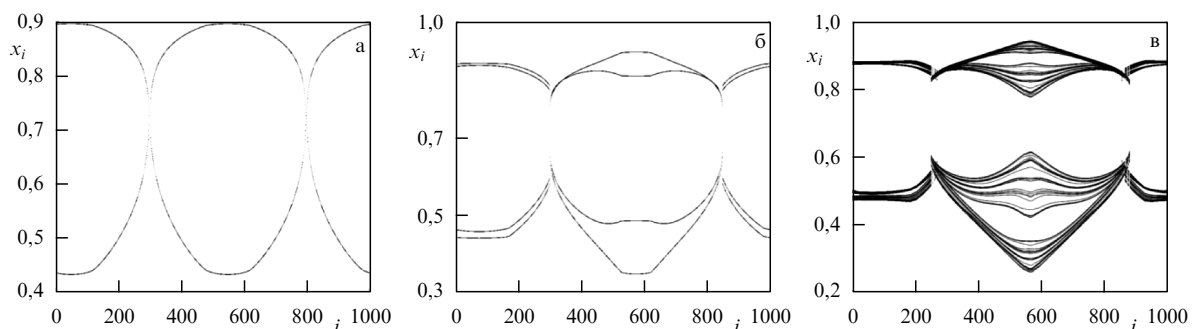


Рис. 5. Пространственно-временные профили амплитуд x_i для трёх значений силы связи σ : 0,43 (а), 0,38 (б), 0,35 (в). Другие параметры те же, что и на рис. 3.

некогерентных кластерах химеры имеет место чередование значений КВК, который принимает значения либо $\simeq +1$, либо $\simeq -1$. Спада корреляций не наблюдается, происходит только смена знака. Это количественно подтверждает тот факт, что колебания как в области 1, так и в области 2 являются практически периодическими с периодом 2 и различаются только сдвигом фазы на полпериода (на одну итерацию по времени). Отметим, что $|\Psi_{1,i}| \simeq 0,95 < 1$. Это связано с тем, что колебания осцилляторов отвечают режиму слабого хаоса и не являются строго периодическими, как уже отмечалось.

Детально описанные свойства химерного состояния указанного типа дали нам основания назвать такую структуру *фазовой химерой* [75, 91]. Как показано в разделе 4, этот тип химеры не является единственным. В ансамбле (1) можно реализовать и другой тип пространственно-временной структуры, названный нами *амплитудной химерой* [75, 91].

4. Амплитудные химерные состояния

Исследования перехода когерентность – некогерентность в ансамбле (4) показали, что уменьшение параметра нелокальной связи σ до значений, меньших критического $\sigma_{cr} \simeq 0,44$, ведёт к возникновению областей некогерентности (см. рис. 3 и 4). Рождается химерное состояние, названное фазовой химерой. Что происходит в ансамбле (4) при дальнейшем уменьшении σ при фиксированном $r = 0,32$? Исследования показали, что при этом может рождаться новый кластер некогерентной динамики конечного числа осцилляторов ансамбля, представленный на рис. 6. Рисунок 6а иллюстрирует кластер осцилляторов $120 \leq i \leq 280$ с различными мгновенными амплитудами колебаний. Из графика функции связи $F(x_i)$ (рис. 6б) чётко видно, что осцилляторы в указанном интервале номеров i находятся под воздействием хаотического сигнала. В результате такого воздействия осцилляторы некогерентного кластера демонстрируют хаотическую динамику [75, 91].

Расчёты показали, что некогерентный кластер $120 \leq i \leq 280$ характеризуется нерегулярным распределением амплитуд колебаний x_i , в то время как осцилляторы ансамбля вне некогерентного кластера функционируют в режиме колебаний с периодом, близким к 4. Исследования динамики отдельных осцилляторов некогерентного кластера (анализ временных реализаций $x_i(t)$) показали, что колебания имеют ярко выраженный хаотический

характер и им присуща экспоненциальная неустойчивость. Особенности рассмотренного кластера некогерентности, отражающие нерегулярность амплитуд колебаний осцилляторов кластера, послужили основанием назвать химерное состояние описанного типа *амплитудной химерой* [75, 91].

С целью количественного описания свойства некогерентности колебаний осцилляторов в режиме амплитудной химеры (рис. 6а) проводились расчёты коэффициента взаимной корреляции (7) [77, 86]. Амплитуды хаотических колебаний некогерентного кластера сосредоточены в двух хаотических подмножествах. При этом, как показали расчёты, фазовые траектории индивидуальных элементов кластера амплитудной химеры регулярно с периодом 2 переключаются между указанными хаотическими подмножествами. Чтобы исключить эту периодическую компоненту из реализации $x_i(t)$, мы осуществляли выборку значений амплитуд через одну итерацию во времени, т.е. учитывали значения $x_i(t)$ в моменты дискретного времени $t = 1, 3, 5, \dots$. Результаты расчётов КВК $\Psi_{1,i}$ представлены на рис. 6в.

Как видно из рис. 6в, коэффициент взаимной корреляции $\Psi_{1,i}$ близок к единице для осцилляторов в когерентном состоянии справа и слева от некогерентного кластера амплитудной химеры и он резко уменьшается до $\simeq 0,7$ в кластере некогерентности $120 < i < 280$. Расчёты подтверждают тот факт, что колебания осцилляторов в кластере амплитудной химеры являются некоррелированными и, следовательно, некогерентными [77, 86].

Численные исследования показали общие свойства фазовых и амплитудных химерных состояний в ансамблях хаотических осцилляторов, где хаос реализуется в результате каскада бифуркаций удвоения периода. Были проведены исследования ансамблей нелокально связанных двумерных отображений Эно [66, 87, 88], кубических [93] и синусоидальных отображений, а также систем с непрерывным временем: осцилляторов Рёсслера, Анищенко – Астахова [91, 128, 129] и цепи Чуа [93, 130]. Были вскрыты особенности и различия режимов фазовых и амплитудных химер.

Фазовые химеры во всех указанных ансамблях характеризуются периодическими колебаниями осцилляторов некогерентных кластеров с нерегулярным сдвигом фазы колебаний. Время жизни фазовых химер в численных экспериментах практически неограниченно велико. Фазовые химеры в ансамблях из дискретных отображений устойчиво существуют на временах $\gtrsim 10^8$ итераций.

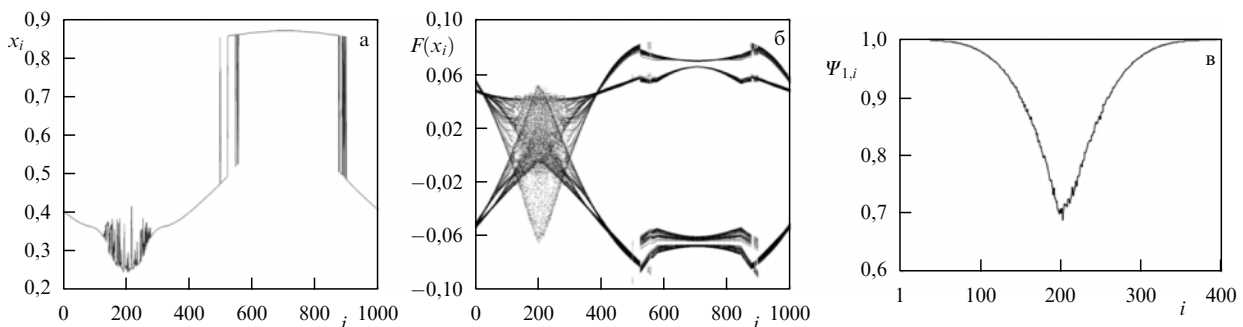


Рис. 6. Иллюстрация амплитудной химеры в ансамбле (4) при $\sigma = 0,28$. Профиль мгновенных амплитуд (а), пространственно-временной профиль для функции связи $F(x_i)$ (б) и зависимость КВК $\Psi_{1,i}$ для осцилляторов кластера амплитудной химеры (в). Другие параметры те же, что и на рис. 3.

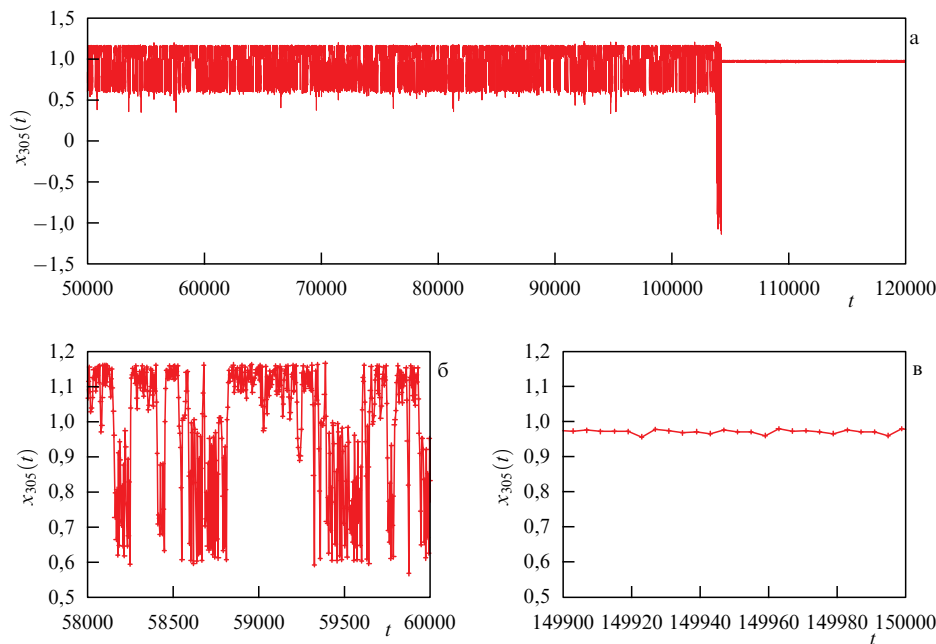


Рис. 7. Временная реализация $x(t)$ для осциллятора амплитудной химеры $i = 305$ в ансамбле (8), иллюстрирующая переключение с режима амплитудной химеры на режим фазовой спустя конечное число итераций $t \approx 105000$ (а), режим нерегулярных переключений во времени для того же элемента (б) и амплитуды $x(t)$ после переключения в режим фазовой химеры, взятые через период колебаний (в). Параметры системы (8): $\sigma = 0,304$, $r = 0,32$, $N = 1000$, $\alpha = 1,4$, $\beta = 0,3$.

Иными свойствами обладают режимы амплитудных химер. Детальные исследования свойств временных реализаций $x_i(t)$ осцилляторов из кластера амплитудной химеры показали следующее. Во-первых, колебания во времени являются нестационарными и представляют собой процесс нерегулярной перемежаемости между несколькими различающимися режимами. Чаще всего имеет место перемежаемость между фазовыми и амплитудными химерными режимами. Во-вторых, амплитудные химеры характеризуются конечным временем жизни.

В качестве примера на рис. 7 представлены результаты вычислений для ансамбля нелокально связанных отображений Эно [90]. Уравнения ансамбля аналогичны (1), но индивидуальные элементы описываются двумерным отображением:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= f(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (f(x_j^t, y_j^t) - f(x_i^t, y_i^t)), \\ y_i^{t+1} &= \beta x_i^t, \quad f(x_i^t, y_i^t) = 1 - \alpha(x_i^t)^2 + y_i^t. \end{aligned} \quad (8)$$

Конечное время жизни и нестационарность процесса колебаний осцилляторов некогерентного кластера амплитудной химеры позволяют отнести химерные состояния этого типа к *переходным химерным состояниям* (*transient chimera states*) [78].

5. Роль квазигиперболичности хаотических аттракторов

В процессе численных экспериментов установлено, что описанные выше пространственно-временные структуры в ансамблях нелокально связанных осцилляторов с удвоением периода не встречаются в ансамблях из систем Лоренца. В работе [131] исследовалась система нелокально связанных осцилляторов Лоренца:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\gamma(x_i - y_i) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (x_j - x_i), \\ \dot{y}_i &= -x_i z_i + \rho x_i - y_i + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (y_j - y_i), \\ \dot{z}_i &= -b z_i + x_i y_i, \end{aligned} \quad (9)$$

при значениях параметров, отвечающих классическому аттрактору Лоренца [132–135]: $\rho = 28$, $\gamma = 10$, $b = 8/3$. Число осцилляторов в ансамбле $N = 100$. Анализ динамики ансамбля (9) на плоскости параметров (r, σ) , где $r = P/N$, показал, что в данной системе переход когерентности – некогерентности осуществляется через режимы так называемых *уединённых состояний* (*solitary states*) и бегущих волн [131]. Химерных структур при этом не обнаружено! Возникает принципиальный вопрос: почему? Ответ на этот вопрос дан в работе [66].

Отсутствие химерных структур в ансамбле (9) обусловлено принципиальным отличием хаотического аттрактора в индивидуальной системе Лоренца от хаотических аттракторов, которые формируются в результате каскада бифуркаций удвоения периода по сценарию Фейгенбаума [136]. Аттрактор Лоренца является квазигиперболическим и в численных экспериментах может считаться гиперболическим, так как не включает в себя устойчивых регулярных подмножеств типа неподвижных точек или предельных циклов [134, 135, 137]. Для аттракторов типа Лоренца мультистабильность исключается и хаотический аттрактор является единственным притягивающим множеством в фазовом пространстве системы.

В работе [66] сформулирована гипотеза: химерные состояния в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов возникают лишь тогда, когда хаотические аттракторы индивидуальных осцилляторов являются негиперболическими [138, 139] и характеризуются мультистабильностью. Если хаотические аттракторы отно-

сятся к классу квазигиперболических (или гиперболических), то химерные состояния в таких ансамблях не реализуются. В качестве характерного примера в работе [66] рассмотрен случай ансамбля нелокально связанных осцилляторов Лоренца (9) при значениях параметров $\rho = 220$, $\gamma = 10$ и $b = 8/3$, когда аттрактор в системе Лоренца теряет свойство квазигиперболичности и становится негиперболическим. В этом случае получены химерные состояния.

На основании результатов работы [66] было предложено ввести в рассмотрение две базовые модели для описания механизмов и свойств химерных структур в ансамблях хаотических систем: отображения Эно [140] и Лози [141].

Двумерное отображение Эно (8) является типичным для описания хаотических систем с так называемым спиральным аттрактором Шильникова [142]. При $\beta \rightarrow 0$ система (8) переходит в логистическое отображение. Более того, для спиральных аттракторов в трёхмерных дифференциальных системах типа Рёсслера в секущей плоскости Пуанкаре реализуется двумерное отображение, топологически эквивалентное отображению Эно [143, 144].

В качестве второй базовой модельной системы в работе [66] предложено использовать отображение Лози [141]:

$$x_{n+1} = 1 - \alpha|x_n| + y_n, \quad y_n = \beta x_n. \quad (10)$$

Как известно, отображение Лози было специально введено для описания механизма жёсткого рождения и свойств классического аттрактора Лоренца [132, 134, 135, 145]. Отображение (10) является квазигиперболическим, при $\beta \rightarrow 0$ оно переходит в классическое гиперболическое отображение "палатка" (tent map). В сечении Пуанкаре двумерной плоскостью отображение Лози служит моделью для описания широкого класса трёхмерных дифференциальных систем с аттрактором типа Лоренца.

Таким образом, использование базовых отображений Эно (8) и Лози (10) в качестве элементов ансамблей с нелокальной связью может служить достаточно общей моделью ансамблей из хаотических осцилляторов как с дискретным, так и с непрерывным временем.

В одномерном ансамбле нелокально связанных отображений Эно, как показано в работах [66, 87, 88], реализуются все типы пространственно-временных структур, подробно описанные выше. Более того, при $\beta = 0,3$ (при достаточно сильном сжатии в фазовом пространстве) бифуркационная диаграмма режимов на плоскости параметров связи (r, σ) для кольца отображений Эно практически повторяет диаграмму для кольца из логистических отображений (рис. 1а). Имеет место не только качественное, но и количественное соответствие [66, 87, 88]. В связи с этим мы не будем подробно анализировать переход когерентность – некогерентность в ансамбле нелокально связанных отображений Эно.

В ансамбле из отображений Лози, как и ожидалось, переход от полной хаотической синхронизации к пространственно-временному хаосу (полной некогерентности) происходит иначе [66, 87, 88].

6. Переход когерентность – некогерентность в ансамбле отображений Лози

Рассмотрим динамику ансамбля (8), используя в нём в качестве индивидуального осциллятора отображение

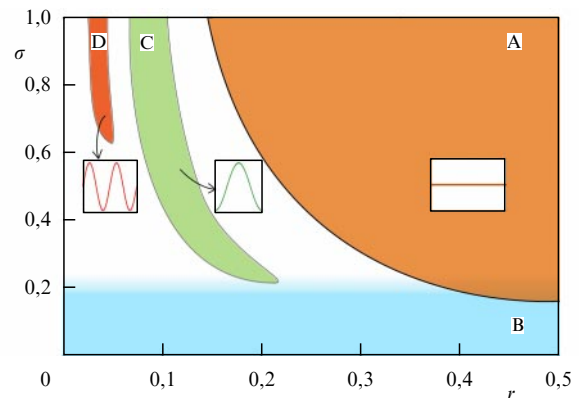


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (r, σ) для ансамбля нелокально связанных отображений Лози (10). Область A соответствует полной хаотической синхронизации, область B — режиму пространственной некогерентности. Когерентные пространственные профили (показаны на вставках) реализуются в области C с волновым числом $k = 1$ и области D с $k = 2$. Параметры ансамбля: $\alpha = 1,4$, $\beta = 0,3$.

Лози (10). Исследования показали [87, 88], что в этом ансамбле с изменением интенсивности нелокальной связи σ также имеет место переход от режима полной хаотической синхронизации к режиму пространственно-временного хаоса. Однако этот переход, во-первых, осуществляется через режим так называемых уединённых состояний (solitary states) [131] и, во-вторых, режимов химерных состояний при этом не найдено. Рассмотрим бифуркационную диаграмму режимов для кольца Лози, представленную на рис. 8.

Данная бифуркационная диаграмма качественно напоминает диаграмму для кольца логистических отображений (см. рис. 1) наличием областей когерентности A, C, D и области пространственно-временного хаоса B. Но переход из области хаотической синхронизации A в область B осуществляется через режим уединённых состояний, а в областях, окрашенных в белый цвет, наблюдаются режимы бегущих волн, как и в ансамбле нелокально связанных осцилляторов Лоренца [131].

Рассмотрим, что представляет собой режим уединённых состояний. Если осуществить переход из области A в область B посредством вариации параметра связи, то реализуется картина, представленная на рис. 9. При $\sigma = 0,226$ в мгновенном профиле появляется резкий выброс амплитуды для одного осциллятора (рис. 9а). Дальнейшее уменьшение параметра связи ведёт к увеличению числа осцилляторов в режиме выбросов амплитуды (рис. 9б, в), и завершается этот процесс переходом в режим пространственно-временного хаоса. Важно отметить, что химерные структуры при таком переходе не найдены. Механизм рождения режима уединённых состояний обусловлен изменением свойств индивидуальных осцилляторов ансамбля под действием сигналов от соседних осцилляторов за счёт нелокальной связи. Как показали наши исследования, динамика индивидуального осциллятора Лози в ансамбле под действием P соседних слева и справа осцилляторов существенно видоизменяется. Система Лози под внешним воздействием теряет свойство квазигиперболичности и становится бистабильной. Скачки амплитуд на рис. 9 как раз отвечают "перескоку" фазовых траекторий на второй аттрактор

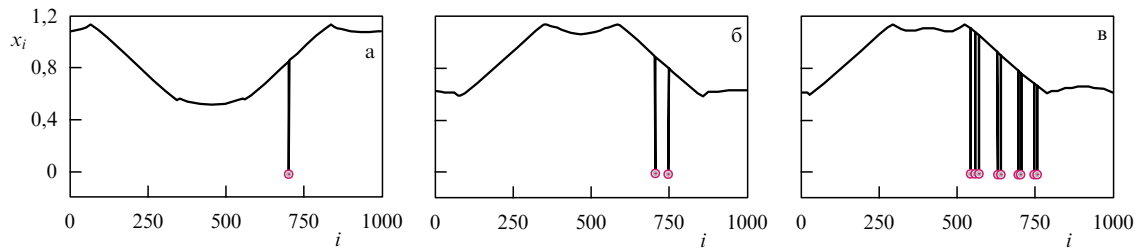


Рис. 9. Режимы уединённых состояний в кольце связанных отображений Лози (10) при $r = 0,2$ с уменьшением параметра связи σ : 0,226 (а), 0,225 (б), 0,223 (в). В случае рис. а появляется один выброс амплитуды, в случае рис. б — два и в случае рис. в более чем 2.

за счёт случайных начальных условий. С уменьшением коэффициента связи σ область притяжения второго аттрактора увеличивается. Как следствие, возрастает число уединённых состояний, что отражает рис. 9.

Остановимся на этом вопросе более детально. Посредством простых преобразований уравнения кольца (8) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= (1 - \sigma)f(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} f(x_j^t, y_j^t), \\ y_i^{t+1} &= \beta x_i^t. \end{aligned} \quad (11)$$

Из системы (11) следует, что влияние нелокальной связи приводит к тому, что коэффициент связи меняет вид индивидуального осциллятора: появляется множитель $(1 - \sigma)$ перед первым слагаемым в правой части (11), и этот осциллятор работает в неавтономном режиме, испытывая воздействие соседних P осцилляторов (второе слагаемое) за счёт нелокальной связи. В результате этих изменений индивидуальные осцилляторы в ансамбле приобретают принципиально иные свойства. Специальные исследования для кольца отображений Лози показали, что за счёт воздействия (11) индивидуальные осцилляторы в ансамбле приобретают свойства бистабильности: в фазовом пространстве рядом с аттрактором Лози появляется другой аттрактор. Причём область притяжения нового аттрактора является достаточно малой и увеличивается с уменьшением коэффициента связи. Результаты расчётов представлены на рис. 10.

Вследствие случайного характера начальных условий один из осцилляторов ансамбля попадает в узкий бассейн притяжения (рис. 10а) и переходит в режим уединённого состояния. С уменьшением коэффициента связи бассейны притяжения увеличиваются (рис. 10б) и всё

большее число осцилляторов переходит в режим уединённых состояний. Число таких осцилляторов с уменьшением коэффициента связи возрастает по линейному закону. В предельном случае $\sigma \rightarrow 0$ ансамбль содержит N несвязанных осцилляторов Лози в хаотическом режиме и осуществляется переход в режим пространственно-временного хаоса.

7. Химера уединённых состояний в связанных ансамблях отображений Эно и Лози

Рассмотрим систему двух взаимосвязанных ансамблей с нелокальной связью, состоящую из одномерных колец осцилляторов Эно и Лози. Уравнения ансамбля представим в виде:

$$\begin{cases} x_i^{t+1} = f(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma_1}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t, y_j^t) - f(x_i^t, y_i^t)] + \gamma F_i^t, \\ y_i^{t+1} = \beta x_i^t; \\ u_i^{t+1} = g(u_i^t, v_i^t) + \frac{\sigma_2}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [g(u_j^t, v_j^t) - g(u_i^t, v_i^t)] - \gamma F_i^t, \\ v_i^{t+1} = \beta u_i^t, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad N = 1000. \end{cases} \quad (12)$$

Первая система уравнений в (12) описывает кольцо нелокально связанных отображений Эно ($f(x, y) = 1 - \alpha x^2 + y$). Параметр нелокальной связи σ_1 и число соседей P i -го элемента с ближайшими соседями справа и слева выбираются таким образом, чтобы в изолированном ансамбле отображений Эно наблюдалось химерное состояние. Вторая система уравнений в (12) описывает кольцо нелокально связанных отображений Лози ($g(u, v) = 1 - \alpha|u| + v$). Значения параметров связи σ_2 и R задаются так, чтобы ансамбль отображений Лози в

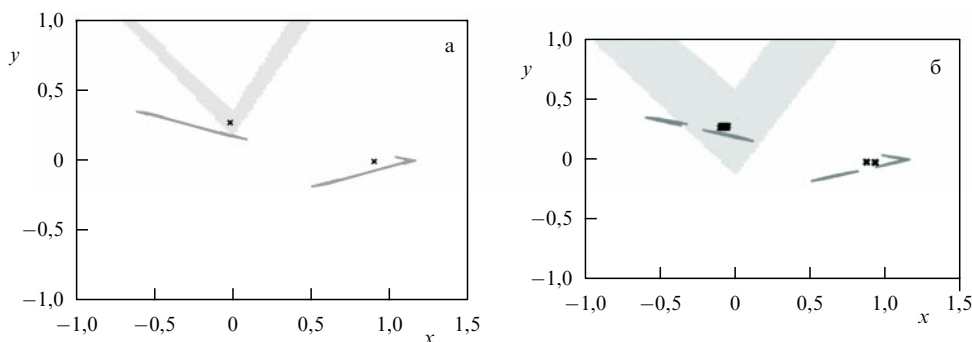


Рис. 10. Аттракторы системы (11) для значений силы связи σ : 0,226 (а), 0,2 (б). Серым цветом выделены бассейны притяжения аттракторов уединённых состояний, рассчитанные для выбранного осциллятора ансамбля.

отсутствие связи с кольцом отображений Эно демонстрировал режим уединённых состояний. Управляющие параметры индивидуальных элементов в (12) фиксированы: $\alpha = 1,4$, $\beta = 0,3$, что соответствует хаотическому поведению во всех индивидуальных элементах рассматриваемой системы в отсутствие связей. Два кольца связаны симметрично через функцию связи F , которая в случаях диссипативной и инерционной связей между кольцами имеет вид соответственно

$$F_i^t = g(u_i^t, v_i^t) - f(x_i^t, y_i^t), \text{ или } F_i^t = u_i^t - x_i^t. \quad (13)$$

Коэффициент γ характеризует силу симметричной связи между i -ми осцилляторами колец Эно и Лози.

В результате численных исследований установлено [124], что в системе (12) при вариации параметров могут быть реализованы пространственно-временные структуры, которые были найдены в индивидуальных (несвязанных) ансамблях Эно и Лози. Так, например, при вариации параметра симметричной связи γ в кольце Лози можно реализовать режимы фазовой и амплитудной химер, а в кольце Эно — режимы уединённых состояний и режимы бегущих волн. Кроме указанных структур, в системе (12) как при диссипативном, так и при инерционном типах связи можно реализовать новый тип химерных состояний, названный нами химерой уединённых состояний, т.е. химерную структуру, включающую в себя уединённые состояния [124]. Новая структура реализуется в ансамбле осцилляторов Эно при малой величине коэффициента связи γ , её вид представлен на рис. 11.

Некогерентный кластер химеры уединённых состояний включает в себя группу осцилляторов ($300 < i < 500$ на рис. 11) в режиме уединённых состояний, которые, в отличие от фазовой химеры, функционируют в слабо хаотическом режиме. Новая структура не чувствительна к малым изменениям начальных условий, и она реализуется в конечной области изменения управляющих параметров системы (12). Исследования свойств амплитудной химеры в системе связанных ансамблей (12) показали полное соответствие её свойств описанным выше для одиночного кольца логистических отображений. Амплитудная химера также характеризуется нестационарностью колебаний во времени для всех осцилляторов кластера и, как правило, конечностью времени

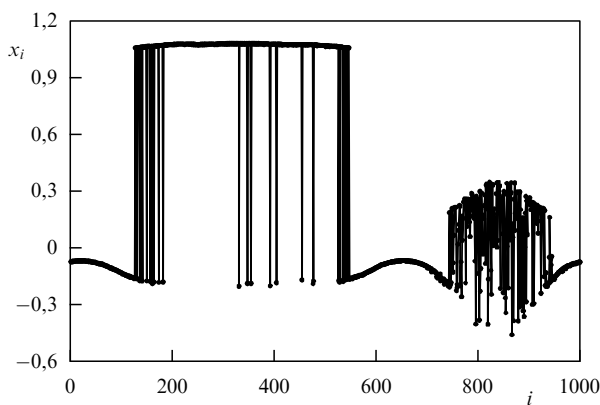


Рис. 11. Мгновенный профиль динамики ансамбля отображений Эно в связанной системе (12), иллюстрирующий сосуществование химеры уединённых состояний и амплитудной химеры при малой связи $\gamma = 0,005$. Параметры системы: $\alpha = 1,4$, $\beta = 0,3$, $\sigma_1 = 0,32$, $\sigma_2 = 0,225$, $P = 320$, $R = 190$.

жизни. Однако в системе двух связанных колец временем жизни амплитудной химеры в широких пределах можно управлять варьированием коэффициента связи γ . Зависимость времени жизни от параметра связи γ при этом оказывается принципиально нелинейной.

Специальные исследования показали, что механизм образования химеры уединённых состояний качественно соответствует описанному в разделе 6 (см. рис. 10). Так, в системе (12) благодаря нелокальной связи в фазовом пространстве рождаются два близко расположенных аттрактора, отвечающих когерентному режиму и режиму уединённых состояний, и система становится бистабильной.

8. Механизм реализации режимов уединённых состояний и химеры уединённых состояний в одномерном ансамбле нелокально связанных отображений Эно

В разделе 6 представлены результаты анализа механизма реализации режима уединённых состояний в ансамбле отображений Лози. Уравнения ансамбля даются выражением (8), в котором в качестве $f(x_i^t, y_i^t)$ надо взять отображение Лози (10). Показано, что причиной реализации режима уединённых состояний являются потеря отображением Лози свойства квазигиперболичности и возникновение бистабильности (см. рис. 10). Естественно предположить, что аналогичную динамику может демонстрировать и одномерное кольцо из осцилляторов отображений Эно, так как индивидуальное отображение Эно по определению является негиперболической системой. Результаты исследований, изложенные в работе [146], этот факт подтвердили. Установлено, что режимы уединённых состояний и химеры уединённых состояний действительно реализуются в одномерном кольце из осцилляторов Эно (8) и они обусловлены, как и в случае кольца Лози, эффектом бистабильности. Рассмотрим эти результаты более подробно.

С целью показать наличие бистабильности мы ввели шумовое возмущение в коэффициент связи в системе (8), положив

$$\sigma = \sigma_0(1 + \sqrt{2D}\xi^t), \quad (14)$$

где D — интенсивность шума, равномерно распределённого от -1 до 1 , ξ^t — источник шума. Если в системе имеет место бистабильность, то под действием шума фазовые траектории смогут пересекать сепаратрисную поверхность, разделяющую бассейны притяжения аттракторов. Результаты расчётов этот факт подтвердили. Под воздействием шума в ансамбле Эно действительно реализуются режимы уединённых состояний [146]. Были численно построены фазовые портреты реализуемых аттракторов и их бассейны притяжения на плоскости переменных (x_i, y_i) для осциллятора, который находится в режиме уединённого состояния. На рисунке 12а приведены данные расчётов аттракторов для осциллятора $i = 721$ при различных начальных условиях (x_i^0, y_i^0) . Как видно из рис. 12а, фазовый портрет отражает наличие двух аттракторов, изображённых чёрным (аттрактор 1а, б) и серым (аттрактор 2а, б) цветами. Первый аттрактор соответствует уединённому состоянию, в котором и находится осциллятор $i = 721$. Второй аттрактор соответствует динамике осциллятора в когерентной области.

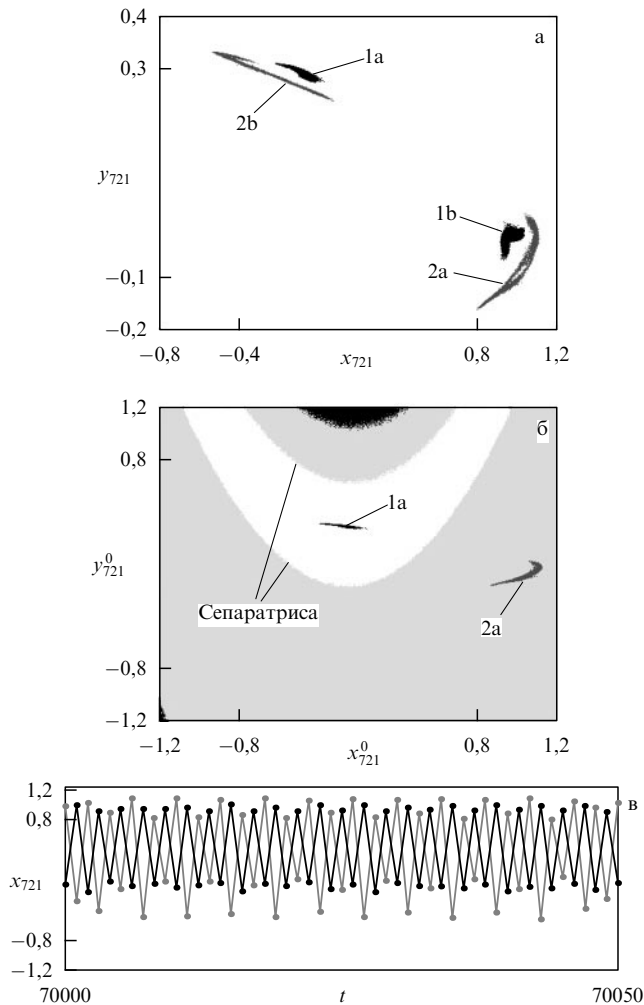


Рис. 12. (а) Аттракторы для осциллятора $i = 721$: 1a, b отвечают режиму уединённых состояний, 2a, b — когерентной области. (б) Бассейны притяжения аттракторов 1a (белая область) и 2a (серая область), область чёрного цвета соответствует уходу траектории на бесконечность. (в) Временные реализации x_{721}^t на аттракторе 1a, b (серые точки) и аттракторе 2a, b (чёрные точки). Чётные итерации соответствуют лентам а, нечётные — лентам б. Параметры системы (8): $\sigma_0 = 0,282$, $r = 0,32$, $D = 0,000815$.

Каждый из аттракторов содержит по два притягивающих подмножества (отмечены как а и б), между которыми фазовая траектория регулярно переключается через каждую итерацию во времени.

На рисунке 12б представлены результаты расчётов бассейнов притяжения аттракторов 1a и 2a. Под действием шума фазовые траектории пересекают сепаратрису и попадают в бассейн притяжения аттрактора 1, который характеризует уединённое состояние. Эффекты переключений между лентами а и б иллюстрирует рис. 12в. Видно, что колебания на аттракторах 1 и 2 являются непериодическими, сдвинутыми по фазе на одну итерацию, и содержат регулярную компоненту периода 2.

Результаты, представленные на рис. 12, получены в условиях воздействия слабого шума $D = 0,000815$, благодаря которому осуществлялось переключение системы с аттрактора 2 на аттрактор 1. Установлено, что эффект переключений реализуется также в отсутствие шума [146]. Это зависит от двух причин: характера случайного распределения начальных условий и вида пространственно-временной структуры в ансамбле, т.е. от выбранных значений параметров P и σ в системе (8). Установлено, что если в качестве исходного в модели (8) реализовать режим сосуществования фазовой и амплитудной химер, типа показанных на рис. 6а, то при случайных начальных условиях в системе (8) может родиться режим химеры уединённых состояний (рис. 13а). При существовании в системе амплитудной химеры бассейны притяжения аттракторов 1 и 2 изменяют свою структуру: проявляется эффект изрезывания (riddling) [147–149]). Изрезывание бассейна притяжения аттрактора 1 (белая область на рис. 13б) увеличивает вероятность переключения системы в режим уединённых состояний и ведёт к возникновению структуры типа химеры уединённых состояний. Таким образом, результаты, представленные на рис. 12 и 13, свидетельствуют о возможности реализации режимов уединённых состояний и химеры уединённых состояний в одномерном кольце нелокально связанных отображений Эно.

9. Двухъямные химеры в ансамблях бистабильных осцилляторов с нелокальной связью

Среди динамических систем с регулярной и хаотической динамикой выделяется достаточно широкий класс так называемых бистабильных систем. Бистабильную динамику демонстрируют физические [150, 151], радиоэлектронные [130], химические [152], биологические [153, 154] и другие системы [155–158]. В работах [93, 95] исследованы пространственно-временные структуры в ансамблях

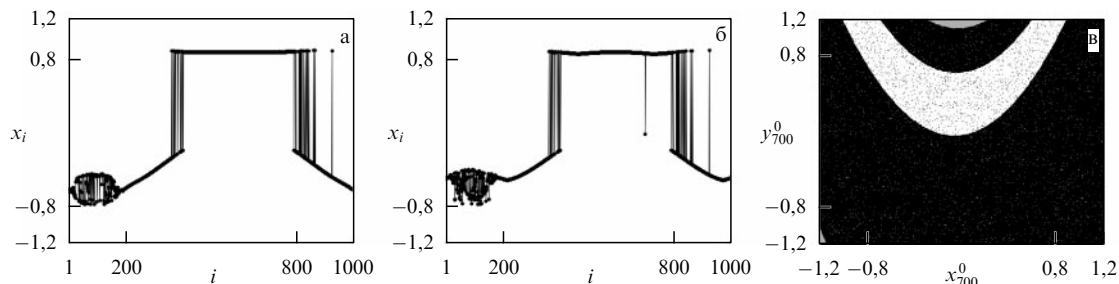


Рис. 13. (а, б) Мгновенные профили в режиме сосуществования амплитудной и фазовой химер для различных начальных условий осциллятора $i = 700$: (а) из бассейна притяжения аттрактора для когерентной области (чёрная область на рис. в) и (б) из бассейна притяжения аттрактора для уединённых состояний (белая область на рис. в); (в) Бассейны притяжения подмножеств 1a (белая область) и 2a (чёрная область) (см. рис. 12) для осциллятора $i = 700$. Малые вкрапления в области притяжения аттракторов 1 и 2 характеризуют эффект изрезывания. Параметры системы (8): $\sigma_0 = 0,282$, $r = 0,32$, $D = 0$.

нелокально связанных осцилляторов в виде дискретных кубических отображений, осцилляторов Фитц-Хью – Нагумо и цепи Чуа в режимах бистабильной динамики. Был обнаружен новый тип химерных структур, названных в [95] *двухъямной химерой*. В качестве примера рассмотрим двумерный ансамбль нелокально связанных кубических отображений, описываемый следующей системой уравнений [95]:

$$\begin{aligned} x_{i,j}^{t+1} &= f(x_{i,j}^t) + \frac{\sigma}{B} \sum_{k=i-R, p=j-R}^{i+R, j+R} [f(x_{k,p}^t) - f(x_{i,j}^t)], \\ i, j &= 1, \dots, N, \\ f(x) &= (\alpha x - x^3) \exp \left[-\frac{x^2}{\beta} \right], \quad B = (1 + 2R)^2 - 1, \\ x_{i+N,j}^t &= x_{i,j}^t, \quad x_{i,j+N}^t = x_{i,j}^t. \end{aligned} \quad (15)$$

Индексы i и j задают положение элемента в решётке и рассматриваются как дискретные пространственные координаты (x и y соответственно), $t = 0, 1, 2, \dots$ — дискретное время. Функция $f(x)$ определяет динамику отдельно взятого отображения и зависит от параметров α и β . Размер исследуемой системы равен N , где N — число элементов в одном направлении (вдоль оси x или y). Граничные условия являются периодическими по обоим направлениям. Взаимодействие элементов носит нелокальный характер. Каждый элемент решётки связан со всеми соседями, попадающими в квадрат с ребром $2R + 1$, в центре которого расположен данный элемент. В рассматриваемом случае R — половина ребра квадрата, однако для удобства будем использовать привычный термин и называть нормированную величину $r = R/N$ радиусом связи. Ансамбль (15) имеет размер $N^2 = 100 \times 100$ элементов. Значения параметров кубического отображения α и β выбирались соответствующими режиму развитого хаоса с объединённым аттрактором ($\alpha = 2,9$, $\beta = 10$).

При фиксированном параметре $\beta = 10$ и изменении величины α кубическое отображение демонстрирует различные динамические режимы [159]. При $1 < \alpha < 2,4$ в отображении существуют две устойчивые симметричные неподвижные точки. С возрастанием α каждая из них демонстрирует каскад бифуркаций удвоений периода, приводящий к образованию двух симметричных относительно $x = 0$ хаотических аттракторов. Таким образом, при $\alpha < 2,84$ кубическое отображение является бистабильным. Значения x^{t+1} находятся только в положительной или только в отрицательной области в зависимости от выбора начального условия. Значение параметра $\alpha_{cr} = 2,84$ является бифуркационным и соответствует объединению или кризису симметричных хаотических аттракторов. При $\alpha > \alpha_{cr}$ точки любой траектории принадлежат единому хаотическому аттрактору, который в определённом смысле отражает бистабильность [159].

В случае ансамбля связанных отображений (15) за счёт влияния связи эффективное значение параметра α_{eff} меняется, чем объясняется возникновение регулярных режимов и сложных пространственных структур при переходе от когерентного хаоса к некогерентному с уменьшением параметра связи σ (см. (11)).

С превышением силой связи значения $\sigma = 0,05$ поведение элементов решётки во времени становится бистабильным. Каждый элемент продолжает оставаться в области либо положительных, либо отрицательных состояний. В то же время при произвольных начальных усло-

виях реализуются объединённые пространственные структуры: часть элементов колеблется в отрицательной области значений, а другая часть — в положительной. При достижении параметром связи значения $\sigma = 0,1$ происходит переход в область одноямных структур. С дальнейшим возрастанием силы связи корреляция между элементами увеличивается, что приводит к возникновению в системе кластеров с принципиально различным поведением соседних элементов. Элементы одной части решётки ведут себя некогерентно относительно друг друга, а элементы другой части — когерентно. Таким образом, наблюдается переход к режиму химерных состояний. Наблюдаемые химерные структуры характеризуются тем, что все элементы решётки находятся либо в положительной, либо в отрицательной области значений. Реализуются химеры, аналогичные фазовым и амплитудным химерам, обнаруженным в цепочках логистических отображений или хаотических автогенераторов [75, 91].

С увеличением силы связи σ происходит бифуркация химерных структур, принадлежащих различным аттракторам (либо отрицательному, либо положительному), и возникает новый тип химер, характеризующийся тем, что элементы когерентных кластеров находятся в окрестности одного аттрактора, а элементы, принадлежащие некогерентным кластерам, нерегулярным образом распределены между двумя аттракторами. Такие химеры не могут существовать в системах связанных осцилляторов с одним аттрактором. Все элементы системы при этом колеблются в пределах своего аттрактора, никогда не переключаясь на другой. Данный тип химеры назван *двухъямной химерой*. Пример подобной структуры приведён на рис. 14.

Отметим, что большинство химер, наблюдающихся в решётке, являются комбинированными, т.е. включают в себя некогерентные кластеры, характерные для химер разного типа: фазовых, амплитудных и двухъямных.

10. Внешняя и взаимная синхронизация химерных состояний

Эффекты синхронизации химерных структур исследовались нами на примерах систем связанных ансамблей различных осцилляторов с хаотической динамикой [124, 160]. Для наглядности рассмотрим наиболее простой пример синхронизации химерных структур в системе двух связанных ансамблей из колец логистических отображений с нелокальной связью с введением расстройки по управляющим параметрам. Уравнения системы имеют вид:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= f_i^t + \frac{\sigma_1}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (f_j^t - f_i^t) + \gamma_{21} F_i^t, \\ y_i^{t+1} &= g_i^t + \frac{\sigma_2}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} (g_j^t - g_i^t) - \gamma_{12} F_i^t, \\ f_i^t &= \alpha_1 x_i^t (1 - x_i^t), \quad g_i^t = \alpha_2 y_i^t (1 - y_i^t). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь α_1 и α_2 — параметры нелинейности логистических отображений, σ_1 и σ_2 — коэффициенты нелокальной связи, P и R — число соседей с каждой стороны i -го элемента первого и второго колец соответственно, $N = 1000$ — число элементов в каждом кольце, $F_i^t = g_i^t - f_i^t$ — функция диссипативной связи между кольцами, γ_{21} и γ_{12} — коэффициенты связи между кольцами. В случае внешней

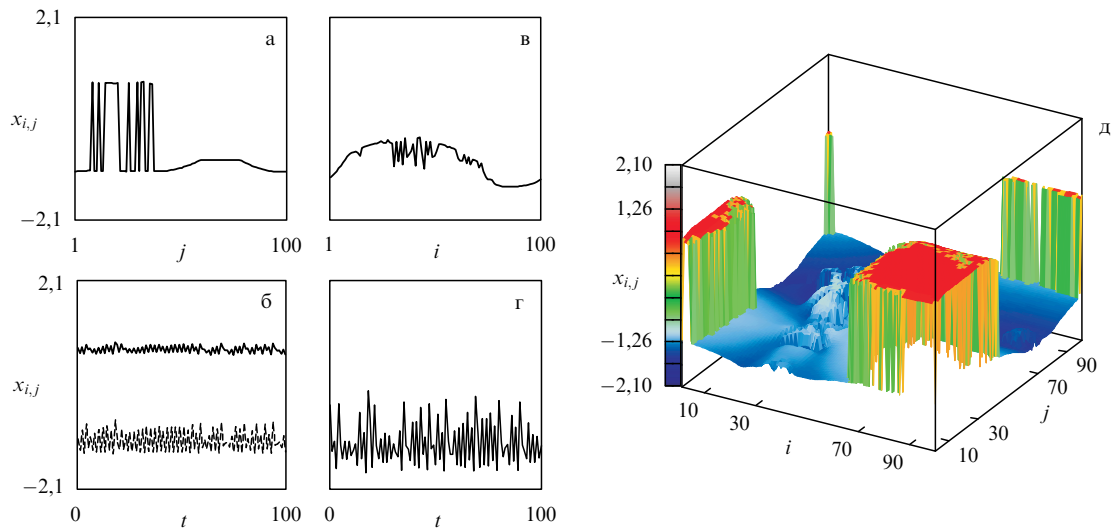


Рис. 14. Двухъямная химера в системе (15) при $r = 0,35$, $\sigma = 0,444$. (а–г) Пространственные срезы и временные реализации колебаний для выбранных элементов. Пространственный срез $j = 6$ (рис. а) и реализация колебаний во времени для двух соседних элементов $i = 49$, $j = 6$ и $i = 50$, $j = 6$ (рис. б), соответствующие участку решётки с двухъямной химерой; пространственный срез $j = 50$ (рис. в) и реализация колебаний во времени для элемента $i = 31$, $j = 50$ из амплитудной химеры (рис. г), соответствующие участку решётки с амплитудной химерой. (д) Трёхмерный снимок мгновенного состояния решётки. Другие параметры: $\alpha = 2,9$, $\beta = 10$, $N = 100$.

синхронизации $\gamma_{21} = 0$, $\gamma_{12} = \gamma$. Для режима взаимной синхронизации $\gamma_{21} = \gamma_{12} = \gamma$.

10.1. Внешняя синхронизация пространственно-временных структур

Установим параметры первого и второго колец так, чтобы в них в отсутствие связи реализовывались различные пространственно-временные структуры. Зафиксируем параметры, одинаковые для первого и второго кольца, $R = P = 320$ и $N = 1000$, и выберем значения $\alpha_1 = 3,7$, $\sigma_1 = 0,23$ и $\alpha_2 = 3,85$, $\sigma_2 = 0,15$. Рисунок 15 иллюстрирует пространственно-временные профили амплитуд двух колец в отсутствие связи между ними. Как видно, в первом кольце x_i^t реализуется режим фазовой и амплитудной химер (рис. 15а), а во втором кольце y_i^t при указанных выше параметрах устанавливается режим, близкий к пространственно-временному хаосу (рис. 15б). Выбор конкретных значений параметров, указанных выше, не является принципиальным. Главное требова-

ние, необходимое для исследования эффекта синхронизации, состоит в том, чтобы выбранные значения параметров обеспечивали различия в пространственно-временных структурах колец в отсутствие связи. Отметим, что пространственно-временные профили, с помощью которых в этом разделе иллюстрируется динамика элементов связанных колец, представляют собой набор 100 последних мгновенных профилей состояний ансамблей (или 100 последних итераций системы (16)).

Теперь будем наблюдать за эволюцией структур во втором кольце при введении однонаправленной связи, т.е. когда первое (управляющее) кольцо логистических отображений воздействует на второе (управляемое) кольцо с коэффициентом связи $\gamma_{12} = \gamma$, $\gamma_{21} = 0$. Расчёты показали, что с введением связи и возрастанием γ пространственные структуры во втором кольце видоизменяются, постепенно приближаясь к виду структуры управляющего кольца (рис. 15а). При достижении коэффициента связи величины $\gamma = 0,40$ и более структура в

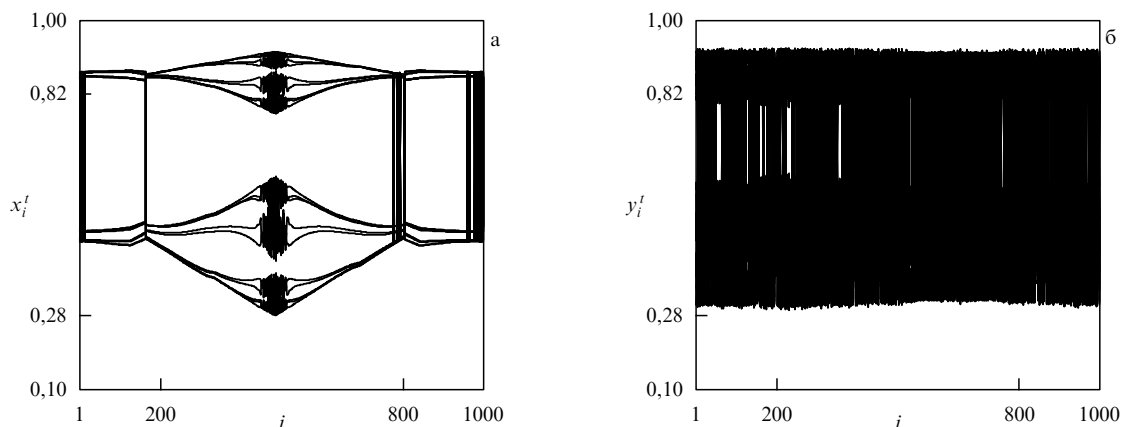


Рис. 15. Пространственно-временные профили амплитуд x_i^t в первом кольце (а) и y_i^t во втором кольце (б) логистических отображений в отсутствие связи между кольцами.

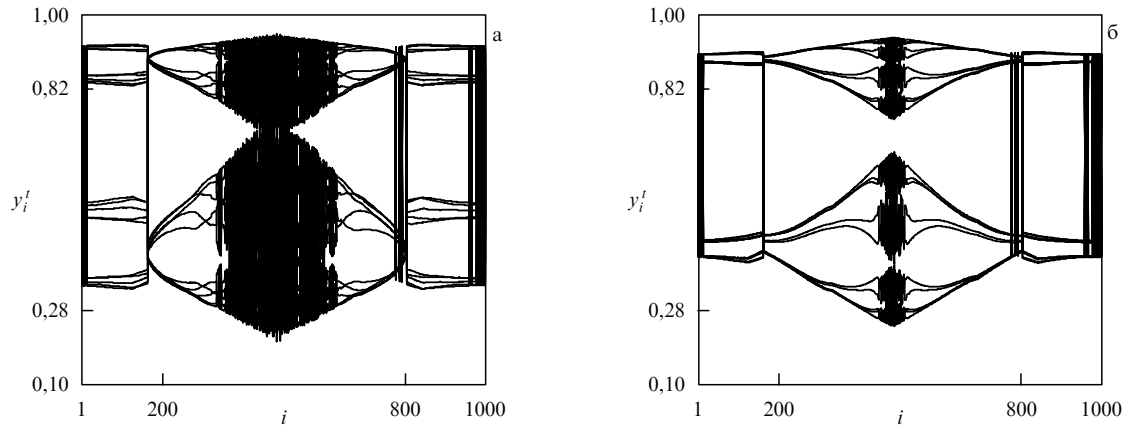


Рис. 16. Пространственно-временные профили амплитуд y_i^t во втором кольце для режимов отсутствия эффекта внешней синхронизации при $\gamma = 0,15$ (а) и его наличия при $\gamma = 0,45$ (б).

управляемом кольце становится идентичной по виду структуре в управляющем кольце. Рисунок 16 иллюстрирует сказанное.

Для доказательства того, что имеет место внешняя синхронизация химерных структур, результатов, представленных на рис. 16, строго говоря, недостаточно. Необходимо количественно обосновать идентичность синхронных структур и показать существование конечной области синхронизации в пространстве параметров системы. Одной из возможных количественных характеристик синхронной динамики двух осцилляторов может служить коэффициент взаимной корреляции:

$$R_i = \frac{\langle \tilde{x}_i(t) \tilde{y}_i(t) \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{x}_i^2(t) \rangle \langle \tilde{y}_i^2(t) \rangle}}, \quad (17)$$

$$\tilde{x}_i(t) = x_i(t) - \langle x_i(t) \rangle,$$

$$\tilde{y}_i(t) = y_i(t) - \langle y_i(t) \rangle,$$

где x_i и y_i — амплитуды колебаний в первом и втором связанных ансамблях, угловые скобки означают усреднение по времени, $i = 1, 2, \dots, N$ — номера соответствующих элементов взаимодействующих ансамблей. Синхронной динамике осцилляторов отвечает равенство $R_i = 1$ для всех осцилляторов ансамбля, а при отсутствии синхронизации коэффициент R меньше единицы. Расчёты показали, что структура, приведённая рис. 16б, действительно является идентичной, а значит, синхронной первоначальной структуре, которая наблюдается в управляющем кольце в отсутствие связи между кольцами (рис. 15а). В этом случае коэффициент взаимной корреляции $R_i > 0,99$ и данное условие выполняется в конечной области изменения управляющих параметров. Таким образом, можно говорить, что при односторонней связи химерная структура первого (управляющего) кольца синхронизует структуру во втором (управляемом) кольце, реализуется эффект внешней синхронизации химерных структур.

Более показательным является эксперимент, результаты которого представлены на рис. 17. Зафиксируем $\alpha_2 = 3,85$ в управляемом кольце и построим область синхронизации на плоскости двух параметров: коэффициент связи γ и параметр нелинейности управляющего кольца α_1 . Изменения параметра α_1 вызовут изменение

вида пространственно-временных структур в управляющем кольце. Как показали расчёты, структуры в управляющем кольце, которые реализуются при вариации α_1 , синхронизуют подобные структуры в управляемом кольце при увеличении коэффициента связи γ . Далее, варьируя коэффициент связи, проведём расчёты коэффициента взаимной корреляции R и построим область синхронизации, представленную на рис. 17. В заштрихованной области А коэффициент $R > 0,99$. Последнее означает, что в области А реализуются структуры, полностью синхронные структурам в управляющем кольце. При этом необходимо иметь в виду, что при вариации параметров α_1 и γ внутри области А на рис. 17 будут наблюдаться различные структуры вследствие изменения параметра α_1 в управляющем кольце. Однако всюду в области А структуры в первом и втором кольцах будут синхронными. Отметим, что из рис. 17 видно наличие порога синхронизации, который обусловлен неидентичностью индивидуальных осцилляторов ансамблей и нелокальной связью.

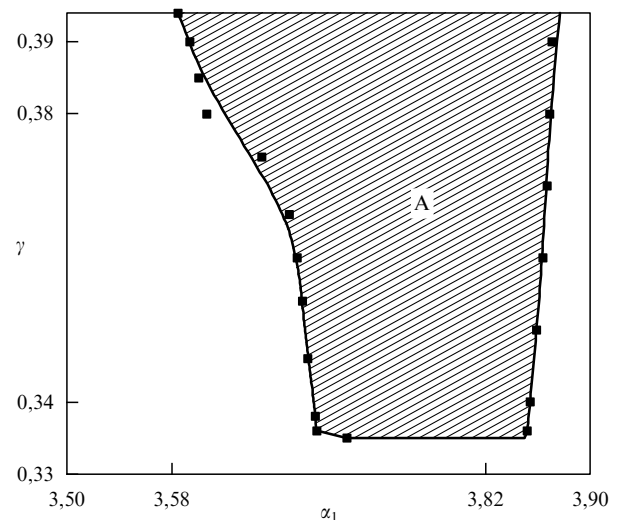


Рис. 17. Область внешней синхронизации пространственно-временных структур в системе (16) на плоскости параметров (α_1, γ) при $\alpha_2 = 3,85$, $\sigma_1 = 0,23$, $\sigma_2 = 0,15$. В заштрихованной области А коэффициент взаимной корреляции колебаний осцилляторов x_i^t и y_i^t $R_i > 0,99$.

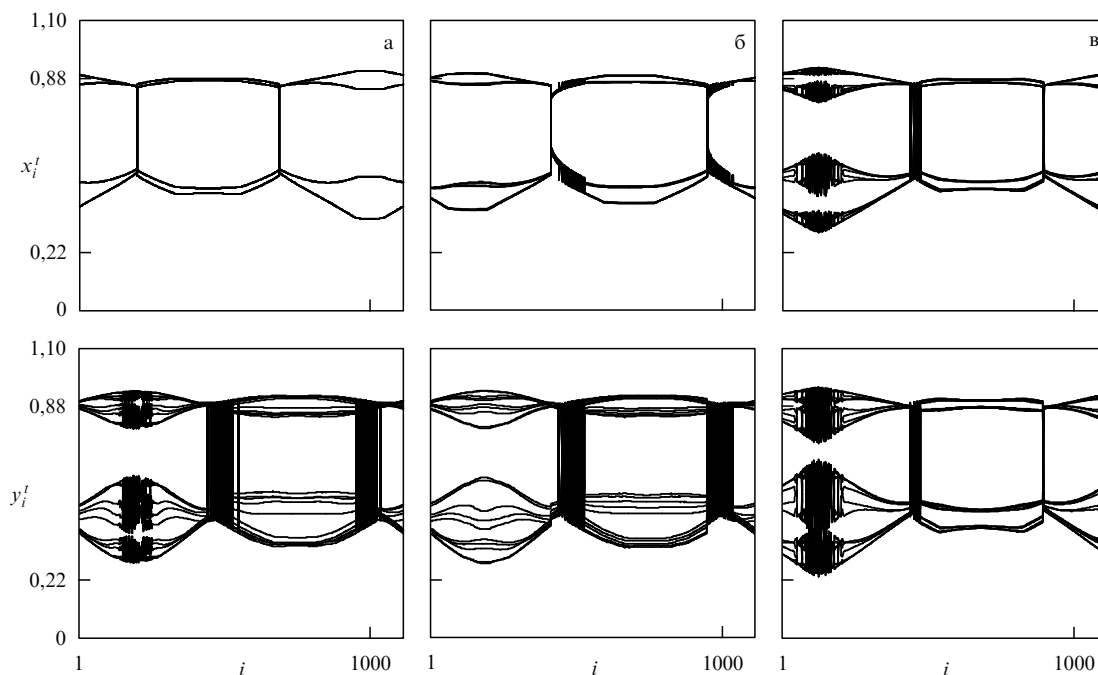


Рис. 18. Эффект взаимной синхронизации химерных структур в симметрично связанных ансамблях x_i^t (верхний ряд) и y_i^t (нижний ряд) для значений параметра связи γ : 0 (а), 0,025 (б), 0,075 (в), при $\alpha_1 = 3,7$, $\alpha_2 = 3,85$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,28$.

10.2. Взаимная синхронизация пространственно-временных структур

С целью исследования взаимной синхронизации химерных структур введём в уравнения связанных колец (16) симметричную двустороннюю связь, положив $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$. Вводя небольшую расстройку по параметрам α_1 и α_2 в ансамблях логистических отображений, получим в отсутствие связи различающиеся химерные структуры в первом и втором кольцах (рис. 18а). С введением связи, как показали расчёты, структуры начинают сближаться и при $\gamma > 0,07$ химерные структуры синхронизируются (рис. 18в).

Расчёты коэффициента взаимной корреляции показали, что в режиме синхронизации $R > 0,99$ и это условие выполняется в конечной области изменения коэффициента связи. Таким образом, можно говорить о реализации эффекта взаимной синхронизации химерных структур в связанных ансамблях (16). Отметим, что синхронные структуры не совпадают по виду со структурами в первом и втором ансамблях при отсутствии связи, что хорошо видно из рис. 18в.

Описанные закономерности эффекта синхронизации структур взаимодействующих ансамблей (16) качественно соответствуют классической теории синхронизации предельного цикла. Этот факт позволяет рассматривать описанные результаты как обобщение представлений классической теории синхронизации периодических автоколебаний для случая синхронизации пространственно-временных структур в системах связанных ансамблей нелинейных осцилляторов.

11. Заключение

В настоящем обзоре представлены результаты исследований различных типов пространственно-временных структур, реализующихся в ансамблях нелокально свя-

занных хаотических осцилляторов с дискретным и непрерывным временем. Рассмотрены относительно несложные ансамбли в виде одномерного кольца нелокально связанных осцилляторов и систем двух взаимосвязанных ансамблей. Основное внимание уделено исследованиям динамических и статистических свойств химерных структур, для которых характерно сосуществование в ансамбле выделенных в пространстве кластеров с когерентной и некогерентной динамикой.

Остановимся кратко на основных результатах. В разделе 2 представлены результаты исследований так называемых фазовых химер. Расчёты проводились на простом примере одномерного кольца нелокально связанных логистических отображений в хаотическом режиме индивидуальных осцилляторов. Выявлено, что некогерентный кластер фазовой химеры представляет собой конечное число осцилляторов ансамбля, колебания которых нерегулярно в пространстве меняют "фазу" колебаний. В разделе 3 представлен механизм образования фазовой химеры и её статистические характеристики. В разделе 4 описана химерная структура нового типа, названная амплитудной. Приведены результаты исследования механизма реализации, статистических характеристик и времени жизни кластеров амплитудной химеры. Численными расчётами подтверждено, что возникновение фазовых и амплитудных химерных структур является типичным для широкого класса ансамблей с нелокальной связью, в которых в качестве индивидуальных элементов используются различные дискретные или дифференциальные системы, реализующие переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода.

Представлена взаимосвязь типов химерных структур в ансамблях из хаотических осцилляторов с типом хаотического аттрактора в индивидуальном осцилляторе. В разделе 5 приведены результаты, свидетельствующие о том, что химерные структуры возникают в ансамблях

осцилляторов с аттракторами негиперболического типа и пока не найдены в ансамблях с квазигиперболическими аттракторами. На основе этого предложено использовать в качестве индивидуальных осцилляторов ансамблей базовые модели в виде дискретных отображений Эно и Лози. Ансамбль из элементов Эно представляет собой систему с негиперболическим аттрактором, а ансамбль из элементов Лози описывает систему с квазигиперболическим аттрактором. С помощью указанных моделей возможно описать закономерности и свойства пространственно-временных структур в широком классе ансамблей из хаотических осцилляторов. Особенностью ансамблей осцилляторов с квазигиперболическим типом аттракторов является реализация структур, содержащих осцилляторы с резкими выбросами амплитуд (режимы уединённых состояний).

Раздел 6, посвящённый описанию режимов уединённых состояний, содержит результаты исследований механизмов реализации указанного режима. Выявлено, что причиной рождения уединённого состояния является эффект потери системой Лози свойства квазигиперболическости и возникновение режима бистабильности. В разделе 7 представлены результаты анализа системы двух взаимодействующих ансамблей из нелокально связанных отображений Эно и Лози. Приведено описание химерной структуры нового типа — химеры уединённых состояний (solitary state chimera), некогерентный кластер которой включает в себя осцилляторы в режиме уединённых состояний. В разделе 8 приведены результаты оригинальных исследований механизмов возникновения режимов уединённых состояний и химеры уединённых состояний в одномерном кольце нелокально связанных отображений Эно. Обосновано, что и здесь причиной реализации указанных режимов является рождение бистабильности. В разделе 9 представлены результаты численного анализа по так называемой двухъямной химере, которая реализуется в широком классе бистабильных осцилляторов. В разделе 10 обсуждаются результаты исследований эффектов внешней и взаимной синхронизации химерных структур в наиболее простой системе двух взаимодействующих одномерных ансамблей из нелокально связанных логистических отображений. Эти результаты свидетельствуют о том, что закономерности эффектов внешней и взаимной синхронизации пространственно-временных структур, включая химерные состояния, качественно соответствуют классической теории синхронизации предельного цикла.

В настоящее время усилия многих исследователей направлены на изучение процессов образования пространственно-временных структур в более сложных многокомпонентных системах. Такие системы состоят из нескольких взаимосвязанных ансамблей нелинейных осцилляторов различного типа с различными топологией и типом связи как между осцилляторами внутри ансамблей, так и между ансамблями. Авторы надеются, что представленные в настоящем обзоре результаты окажутся полезными при решении указанных более сложных задач.

Авторы пользуются приятной возможностью выразить глубокую благодарность сотрудникам Технического университета Берлина Е. Schöll и А. Zakharova за плодотворные дискуссии и совместную работу по ряду проблем, изложенных в обзоре. Мы благодарны также сотрудникам кафедры радиофизики и нелинейной дина-

мики Саратовского университета Т.Е. Вадивасовой, Н.И. Семёновой, И.А. Шепелеву, А.В. Буху и Е.В. Рыбаловой за участие в получении ряда результатов и активное их обсуждение.

Результаты, представленные в настоящем обзоре, получены при финансовой поддержке в рамках грантов Российского фонда фундаментальных исследований № 15-02-02288, Российского научного фонда № 16-12-10175, государственного задания Министерства образования и науки РФ № 3.8616.2017/БЧ, SFB 910.

Список литературы

1. Nicolis G, Prigogine I *Self-Organization in Non-Equilibrium Systems: from Dissipative Structures to Order Through Fluctuations* (New York: Wiley, 1977); Пер. на русск. яз.: Николис Г, Пригожин И *Самоорганизация в неравновесных системах: От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации* (М.: Мир, 1979)
2. Ланда П С *Автоколебания в распределённых системах* (М.: Наука, 1983)
3. Haken H *Synergetics. An Introduction. Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry, and Biology* 3rd ed. (Berlin: Springer, 1983)
4. Полак Л С, Михайлов А С *Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах* (М.: Наука, 1983)
5. Kuramoto Y *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)
6. Васильев В А, Романовский Ю М, Яхно В Г *Автоволновые процессы* (М.: Наука, 1987)
7. Афраимович В С и др. *Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях с синхронизацией* (Под ред. А В Гапонова-Грехова, М И Рабиновича) (Горький: ИПФ, 1989); Пер. на англ. яз.: Afraimovich V S et al. *Stability, Structures, and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks* (World Scientific Series on Nonlinear Science A, Vol. 6, Eds A V Gaponov-Grekhov, M I Rabinovich) (Singapore: World Scientific, 1994)
8. Epstein I R, Pojman J A *An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics: Oscillations, Waves, Patterns, and Chaos* (New York: Oxford Univ. Press, 1998)
9. Winfree A T *The Geometry of Biological Time* (New York: Springer, 2001)
10. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J *Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001)
11. Mosekilde E, Maistrenko Yu, Postnov D *Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems* (River Edge, NJ: World Scientific, 2002)
12. Nekorkin V I, Velarde M G *Synergetic Phenomena in Active Lattices. Patterns, Waves, Solitons, Chaos* (Berlin: Springer, 2002)
13. Лоскутов А Ю, Михайлов А С *Основы теории сложных систем* (М. – Ижевск: Инст-т компьютер. исслед., 2007)
14. Malchow H, Petrovskii S V, Venturino E *Spatiotemporal Patterns in Ecology and Epidemiology: Theory, Models, and Simulation* (Boca Raton, FL: Chapman and Hall. CRC Press, 2007)
15. Osipov G V, Kurths J, Zhou C *Synchronization in Oscillatory Networks* (Berlin: Springer, 2007)
16. Jones C K R T *Trans. Am. Math. Soc.* **286** 431 (1984)
17. Waller I, Kapral R *Phys. Rev. A* **30** 2047 (1984)
18. Pertsov A M, Ermakova E A, Panfilov A V *Physica D* **14** 117 (1984)
19. Ermentrout G B, Troy W C *SIAM J. Appl. Math.* **39** 623 (1986)
20. Гапонов-Грехов А В, Рабинович М И *Изв. вузов. Радиофизика* **30** (2) 131 (1987); Gaponov-Grekhov A V, Rabinovich M I *Radio-phys. Quantum Electron.* **30** 93 (1987)
21. Sakaguchi H, Shinomoto S, Kuramoto Y *Prog. Theor. Phys.* **77** 1005 (1987)
22. Strogatz S H, Mirollo R E *J. Phys. A* **21** L699 (1988)
23. Strogatz S H, Mirollo R E *Physica D* **31** 143 (1988)
24. Kaneko K *Physica D* **37** 60 (1989)
25. Kaneko K *Physica D* **34** 1 (1989)

26. Кузнецов А П, Кузнецов С П *Изв. вузов. Радиофизика* **34** 1079 (1991); Kuznetsov A P, Kuznetsov S P *Radiophys. Quantum Electron.* **34** 845 (1991)
27. Астахов В В, Безручко Б П, Пономаренко В И *Изв. вузов. Радиофизика* **34** 35 (1991); Astakhov V V, Bezruchko B P, Ponomarenko V I *Radiophys. Quantum Electron.* **34** 28 (1991)
28. Cross M C, Hohenberg P C *Rev. Mod. Phys.* **65** 851 (1993)
29. Nekorkin V I, Makarov V A *Phys. Rev. Lett.* **74** 4819 (1995)
30. Абарбанель Г Д и др. *УФН* **166** 363 (1996); Abarbanel H D et al. *Phys. Usp.* **39** 337 (1996)
31. Nekorkin V I, Kazantsev V B, Velarde M G *Phys. Lett. A* **236** 505 (1997)
32. Nekorkin V I, Voronin M L, Velarde M G *Eur. Phys. J. B* **9** 533 (1999)
33. Belykh V N, Belykh I V, Hasler M *Phys. Rev. E* **62** 6332 (2000)
34. Nagai Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **84** 4248 (2000)
35. Belykh V N, Belykh I V, Mosekilde E *Phys. Rev. E* **63** 036216 (2001)
36. Zaritski R M, Pertsov A M *Phys. Rev. E* **66** 066120 (2002)
37. Борисюк Г Н и др. *УФН* **172** 1189 (2002); Borisjuk G N et al. *Phys. Usp.* **45** 1073 (2002)
38. Елькин Ю Е *Матем. биология и биоинформ.* **1** (1) 27 (2006)
39. Anishchenko V S et al. *New J. Phys.* **8** 84 (2006)
40. Belykh V N et al. *Chaos* **18** 037106 (2008)
41. Shabunin A, Feudel U, Astakhov V *Phys. Rev. E* **80** 026211 (2009)
42. Rosin D P et al. *Phys. Rev. Lett.* **110** 104102 (2013)
43. Motter A E et al. *Nature Phys.* **9** 191 (2013)
44. Клиньшов В В, Некоркин В И *УФН* **183** 1323 (2013); Klinshov V V, Nekorkin V I *Phys. Usp.* **56** 1217 (2013)
45. Pecora L M et al. *Nature Commun.* **5** 4079 (2014)
46. Масленников О В, Некоркин В И *УФН* **187** 745 (2017); Maslennikov O V, Nekorkin V I *Phys. Usp.* **60** 694 (2017)
47. Kuramoto Y, Battogtokh D *Nonlin. Phenomena Complex Syst.* **5** 380 (2002)
48. Abrams D M, Strogatz S H *Phys. Rev. Lett.* **93** 174102 (2004)
49. Abrams D M et al. *Phys. Rev. Lett.* **101** 084103 (2008)
50. Laing C R *Phys. Rev. E* **81** 066221 (2010)
51. Laing C R *Physica D* **240** 1960 (2011)
52. Martens E A, Laing C R, Strogatz S H *Phys. Rev. Lett.* **104** 044101 (2010)
53. Motter A E *Nature Phys.* **6** 164 (2010)
54. Wolfrum M, Omelchenko O E *Phys. Rev. E* **84** 015201(R) (2011)
55. Omelchenko I et al. *Phys. Rev. Lett.* **106** 234102 (2011)
56. Omelchenko I et al. *Phys. Rev. E* **85** 026212 (2012)
57. Omelchenko I et al. *Phys. Rev. Lett.* **110** 224102 (2013)
58. Rosin D P, Rontani D, Gauthier D J *Phys. Rev. E* **89** 042907 (2014)
59. Maistrenko Yu L et al. *Int. J. Bifurcat. Chaos* **24** 1440014 (2014)
60. Zakharova A, Kapeller M, Schöll E *Phys. Rev. Lett.* **112** 154101 (2014)
61. Yeldesbay A, Pikovsky A, Rosenblum M *Phys. Rev. Lett.* **112** 144103 (2014)
62. Sethia G C, Sen A *Phys. Rev. Lett.* **112** 144101 (2014)
63. Böhm F et al. *Phys. Rev. E* **91** 040901(R) (2015)
64. Dudkowski D, Maistrenko Yu, Kapitaniak T *Phys. Rev. E* **90** 032920 (2014)
65. Panaggio M J, Abrams D M *Nonlinearity* **28** R67 (2015)
66. Semenova N et al. *Europhys. Lett.* **112** 40002 (2015)
67. Omelchenko I et al. *Phys. Rev. E* **91** 022917 (2015)
68. Maistrenko Yu et al. *New J. Phys.* **17** 073037 (2015)
69. Olmi S et al. *Phys. Rev. E* **92** 030901(R) (2015)
70. Hizanidis J et al. *Phys. Rev. E* **92** 012915 (2015)
71. Santos M S et al. *Phys. Lett. A* **379** 2188 (2015)
72. Laing C R *Phys. Rev. E* **92** 050904(R) (2015)
73. Clerc M G et al. *Phys. Rev. E* **93** 052204 (2016)
74. Hizanidis J, Lazarides N, Tsironis G P *Phys. Rev. E* **94** 032219 (2016)
75. Богомолов С А и др. *Письма в ЖТФ* **42** (14) 103 (2016); Bogomolov S A et al. *Tech. Phys. Lett.* **42** 765 (2016)
76. Семенова Н И, Анищенко В С *Нелинейная динамика* **12** 295 (2016)
77. Vadivasova T E et al. *Chaos* **26** 093108 (2016)
78. Kemeth F P et al. *Chaos* **26** 094815 (2016)
79. Ulonska S et al. *Chaos* **26** 094825 (2016)
80. Semenova N et al. *Phys. Rev. Lett.* **117** 014102 (2016)
81. Schöll E *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **225** 891 (2016)
82. Semenov V et al. *Europhys. Lett.* **115** 10005 (2016)
83. Banerjee T et al. *Phys. Rev. E* **94** 032206 (2016)
84. Sawicki J et al. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **226** 1883 (2017)
85. Tsigkri-DeSmedt N D et al. *Eur. Phys. J. B* **90** 139 (2017)
86. Вадивасова Т Е и др. *Письма в ЖТФ* **43** (2) 68 (2017); Vadivasova T E et al. *Tech. Phys. Lett.* **43** 118 (2017)
87. Semenova N I et al. *Regul. Chaot. Dyn.* **22** 148 (2017)
88. Rybalova E et al. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **226** 1857 (2017)
89. Shepelev I A et al. *Phys. Lett. A* **381** 1398 (2017)
90. Semenova N I et al. *Chaos* **27** 061102 (2017)
91. Bogomolov S A et al. *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* **43** 25 (2017)
92. Shepelev I A, Zakharova A, Vadivasova T E *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* **44** 277 (2017)
93. Shepelev I A et al. *Nonlinear Dyn.* **90** 2317 (2017)
94. Zakharova A et al. *Chaos* **27** 114320 (2017)
95. Shepelev I A, Vadivasova T E *Phys. Lett. A* **382** 690 (2018)
96. Shepelev I A et al. *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* **54** 50 (2018)
97. Shepelev I A, Strelkova G I, Anishchenko V S *Chaos* **28** 063119 (2018)
98. Bukh A V et al. *Regul. Chaot. Dyn.* **23** 325 (2018)
99. Hagerstrom A M et al. *Nature Phys.* **8** 658 (2012)
100. Tinsley M R, Nkomo S, Showalter K *Nature Phys.* **8** 662 (2012)
101. Nkomo S, Tinsley M R, Showalter K *Phys. Rev. Lett.* **110** 244102 (2013)
102. Larger L, Penkovsky B, Maistrenko Yu *Phys. Rev. Lett.* **111** 054103 (2013)
103. Martens E A et al. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **110** 10563 (2013)
104. Kapitaniak T et al. *Sci. Rep.* **4** 6379 (2014)
105. Larger L, Penkovsky B, Maistrenko Yu *Nature Commun.* **6** 7752 (2015)
106. Hart J D et al. *Chaos* **26** 094801 (2016)
107. Ponomarenko V I, Kulminskiy D D, Prokhorov M D *Phys. Rev. E* **96** 022209 (2017)
108. Kasimatis T, Hizanidis J, Provata A *Phys. Rev. E* **97** 052213 (2018)
109. Rattenborg N C, Amlaner C J, Lima S L *Neurosci. Biobehavior. Rev.* **24** 817 (2000)
110. Rattenborg N C et al. *Nature Commun.* **7** 12468 (2016)
111. Rothkegel A, Lehnertz K *New J. Phys.* **16** 055006 (2014)
112. Andrzejak R G et al. *Sci. Rep.* **6** 23000 (2016)
113. Laing C R, Chow C C *Neural Comput.* **13** 1473 (2001)
114. Sakaguchi H *Phys. Rev. E* **73** 031907 (2006)
115. Hizanidis J et al. *Sci. Rep.* **6** 19845 (2016)
116. Davidenko J M et al. *Nature* **355** 349 (1992)
117. Cherry E M, Fenton F H *New J. Phys.* **10** 125016 (2008)
118. Motter A E et al. *Nature Phys.* **9** 191 (2013)
119. Nishikawa T, Motter A E *New J. Phys.* **17** 015012 (2015)
120. Martens E A, Klemm K *Front. Phys.* **6** 62 (2017)
121. Shepelev I A et al. *Nonlinear Dyn.* **94** 1019 (2018)
122. Boccaletti S et al. *Phys. Rep.* **544** 1 (2014)
123. Andrzejak R G, Ruzszen G, Malvestio I *Chaos* **27** 053114 (2017)
124. Bukh A et al. *Chaos* **27** 111102 (2017)
125. Шарковский А Н и др. *Динамика одномерных отображений* (Киев: Наукова думка, 1989); Пер. на англ. яз.: Sharkovsky A N et al. *Dynamics of One-Dimensional Maps* (Boston: Kluwer Acad. Publ., 1997)
126. May R M *Nature* **261** 459 (1976)
127. Rössler O E *Phys. Lett. A* **57** 397 (1976)
128. Анищенко В С *Сложные колебания в простых системах* 2-е изд. (М.: Либроком, 2009)
129. Анищенко В С, Вадивасова Т Е *Лекции по нелинейной динамике* (М. – Ижевск: РХД, 2011)
130. Madan R N (Ed.) *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos* (Singapore: World Scientific, 1993)
131. Dziubak V, Maistrenko Yu, Schöll E *Phys. Rev. E* **87** 032907 (2013)
132. Lorenz E N *J. Atmos. Sci.* **20** 130 (1963)
133. Лоренц Э, в сб. *Странные аттракторы* (Под ред. Я Г Синяя, Л П Шильникова) (М.: Мир, 1981) с. 88, Пер. на русск. яз. [132]
134. Афраймович В С, Быков В В, Шильников Л П *ДАН СССР* **234** 336 (1977); Afraimovich V S, Bykov V V, Shil'nikov L P *Sov. Phys. Dokl.* **22** 253 (1977)

135. Shilnikov L P, in *The Hopf Bifurcation and Its Applications* (Applied Mathematical Sciences, Vol. 19, Eds J E Marsden, M McCracken) (New York: Springer-Verlag, 1976); Пер. на русск. яз.: Шильников Л П, в *Бифуркация рождения цикла и ее приложения* (Под ред. Дж Марсден, М Мак-Кракен) (М.: Мир, 1980) с. 317
136. Feigenbaum M J *J. Stat. Phys.* **19** 25 (1978)
137. Кузнецов С П *УФН* **181** 121 (2011); Kuznetsov S P *Phys. Usp.* **54** 119 (2011)
138. Afraimovich V S, Shilnikov L P, in *Nonlinear Dynamics and Turbulence* (Eds G I Barenblatt, G Iooss, D D Joseph) (Boston: Pitman, 1983) p. 1
139. Shilnikov L P *Int. J. Bifurc. Chaos* **07** 1953 (1997)
140. Hénon M *Commun. Math. Phys.* **50** (1) 69 (1976); Пер. на русск. яз.: Хенон М, в сб. *Странные аттракторы* (Под ред. Я Г Сина, Л П Шильникова) (М.: Мир, 1981) с. 152
141. Lozi R *J. Phys. Colloques* **39** (C5) C5-9 (1978)
142. Шильников Л П, в сб. *Методы качественной теории дифференциальных уравнений* (Отв. ред. Е А Леонтович-Андропова) (Горький: ГГУ, 1986) с. 150
143. Гаврилов Н К, Шильников Л П *Мат. сб.* **88** 475 (1972); Gavrilov N K, Šil'nikov L P *Math. USSR-Sbornik* **17** 467 (1972)
144. Гаврилов Н К, Шильников Л П *Мат. сб.* **90** 139 (1973); Gavrilov N K, Šil'nikov L P *Math. USSR-Sbornik* **19** 139 (1973)
145. Быков В В, Шильников Л П, в сб. *Методы качественной теории и теория бифуркаций* (Отв. ред. Л П Шильников) (Горький: ГГУ, 1989) с. 151
146. Rybalova E V, Strelkova G I, Anishchenko V S *Chaos Solitons Fractals* **115** 300 (2018)
147. Ashwin P, Buescu J, Stewart I *Nonlinearity* **9** 703 (1996)
148. Ott E, Sommerer J C *Phys. Lett. A* **188** 39 (1994)
149. Hasler M, Maistrenko Y L *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **44** 856 (1997)
150. Gibbs H M *Optical Bistability: Controlling Light with Light* (Orlando: Academic Press, 1985)
151. Hänggi P, Talkner P, Borkovec M *Rev. Mod. Phys.* **62** 251 (1990)
152. Schlögl F *Z. Phys.* **253** 147 (1972)
153. Goldbeter A *Biochemical Oscillations and Cellular Rhythms* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996)
154. Izhikevich E M *Dynamical Systems in Neuroscience. The Geometry of Excitability and Bursting* (Cambridge: MIT Press, 2007)
155. May R M *Nature* **269** 471 (1977)
156. Benzi R, Sutera A, Vulpiani A *J. Phys. A* **14** L453 (1981)
157. Guttal V, Jayaprakash C *Ecol. Model.* **201** 420 (2007)
158. Benzi R *Nonlin. Processes Geophys.* **17** 431 (2010)
159. Skjolding H et al. *SIAM J. Appl. Math.* **43** 520 (1983)
160. Bukh A V, Strelkova G I, Anishchenko V S *Нелинейная динамика* **14** 419 (2018)

Spatio-temporal structures in ensembles of coupled chaotic systems

G.I. Strelkova^(*), V.S. Anishchenko^(**)

N.G. Chernyshevskii Saratov State University,
ul. Astrakhanskaya 83, 410012 Saratov, Russian Federation
E-mail: ^(*) strelkovagi@info.sgu.ru, ^(**) wadim@info.sgu.ru

We present a review of numerical results of studies of the complex dynamics of one- and two-dimensional networks (ensembles) of nonlocally coupled identical chaotic oscillators in the form of discrete- and continuous-time systems, as well as lattices of coupled ensembles. We show that these complex networks can demonstrate specific types of spatio-temporal patterns in the form of chimera state. The latter is known as the coexistence of spatially localized domains of coherent (synchronized) and incoherent (asynchronous) dynamics in a network of nonlocally coupled identical oscillators. In the review phase, amplitude, double-well chimeras and solitary states are described and their basic characteristics are analyzed and compared. We focus on two basic discrete-time models, the Henon and Lozi maps, which can be used to describe the typical chimera structures and solitary states in networks of a wide range of chaotic oscillators. We discuss the bifurcation mechanisms of their appearance and evolution. In conclusion, we describe effects of synchronization of chimera states in coupled ensembles of chaotic maps.

Keywords: ensembles, nonlocal coupling, chimera states, spatio-temporal structure, synchronization, discrete maps, dynamical chaos

PACS numbers: 05.45.Ra, 05.45.Xt, **05.65.+b**

Bibliography — 160 references

Received 10 October 2018, revised 10 January 2019

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **190** (2) 160–178 (2020)

Physics – Uspekhi **63** (2) (2020)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2019.01.038518>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2019.01.038518>