

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Неклассический перенос в сильнонеоднородных и резко контрастных средах

Л.А. Большов, П.С. Кондратенко, Л.В. Матвеев

Дан обзор физических моделей неклассических процессов переноса примеси в сильнонеоднородных средах с различными типами пространственного распределения характеристик. Рассмотрен перенос в регулярно неоднородных, фрактальных и статистически однородных резко контрастных, а также в жидких средах в условиях конвекции Рэлея – Бенчара. Проведён анализ поведения концентрации примеси в основной области локализации и на асимптотически далёких расстояниях от источника. Исследовано влияние на режимы переноса, возникающее вследствие присутствия коллоидов, а также заградительных барьеров, окружающих источник примеси. Представлен асимптотический подход к расчёту концентрации в среде, обладающей крупномасштабными неоднородностями в распределении транспортных характеристик.

Ключевые слова: супердиффузия, субдиффузия, асимптотики концентрации, перколяционные среды, двойная пористость, сорбция

PACS numbers: 05.60.Cd, 66.10.C–

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2018.08.038423>

Содержание

1. Введение (691).
 2. Регулярно неоднородные среды (693).
 - 2.1. Постановка задачи.
 - 2.2. Поведение примеси в основной области локализации.
 - 2.3. Асимптотики концентрации на больших расстояниях.
 3. Перколяционные среды (694).
 - 3.1. Изотропная модель случайной адvection с дальнодействующими корреляциями.
 - 3.2. Перколяционные среды с конечной длиной корреляции.
 - 3.3. Анизотропные перколяционные среды.
 - 3.4. Двупористые перколяционные среды.
 - 3.5. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными.
 4. Статистически однородные среды с двойной пористостью (697).
 5. Эффекты сорбции (697).
 6. Перенос в периодических ячеистых течениях (698).
 7. Процессы переноса в присутствии диффузионных барьеров (699).
 - 7.1. Постановочные соотношения.
 - 7.2. Стационарный барьер.
 - 7.3. Деградирующий барьер.
 8. Асимптотический подход к описанию процессов переноса (700).
 9. Заключение (701).
- Список литературы (701).

1. Введение

Под неклассическим переносом обычно подразумевают перенос примеси, когда размер области локализации возрастает со временем не по корневому закону, как в классической диффузии, а пропорционально времени в степени $\gamma \neq 1/2$:

$$R \propto t^\gamma. \quad (1)$$

Если $\gamma > 1/2$, то говорят о супердиффузии, если $\gamma < 1/2$, то — о субдиффузии. Аномальные процессы транспорта встречаются в самых разных областях естествознания, таких как физика плазмы [1, 2], физика полупроводников [3, 4], астрофизика [5], биофизика [6, 7], гидрогеология [8, 9] и многих других [10]. Особое место в этом ряду занимают геологические среды, в частности, в связи с практической проблемой захоронения радиоактивных отходов. В последние десятилетия накоплен обширный массив данных полевых наблюдений, свидетельствующих о том, что во многих случаях транспорт примесей, растворённых в грунтовых водах геологических сред, не описывается классическими закономерностями, основывающимися на законах Дарси и Фика, причём расхождение может достигать нескольких порядков [11]. Именно на этот круг задач и были ориентированы исследования, представленные в данном обзоре, хотя развитые модели имеют гораздо более широкую область применения.

Исторически первые модели, описывающие неклассический транспорт, относятся к 1930-м годам. По-видимому, первой была работа Хинчина и Леви [12], в которой миграция частицы рассматривалась как результат её последовательных скачков различной длины и длительности. Если функции распределения вероятности прыжков достаточно медленно убывали с увеличением указанных

Л.А. Большов*, П.С. Кондратенко†, Л.В. Матвеев‡

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН,
ул. Большая Тульская 52, 115191 Москва, Российская Федерация
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),

Институтский пер. 9, 141701 Долгопрудный, Московская обл.,
Российская Федерация

E-mail: *bolshov@ibrae.ac.ru, †kondrat@ibrae.ac.ru,
‡matweev@ibrae.ac.ru

Статья поступила 10 мая 2018 г.,
после доработки 13 августа 2018 г.

параметров, то оказывалось, что среднеквадратичное смещение частицы возрастало со временем по неклассическому закону.

В дальнейшем этот подход активно использовался в других моделях неклассического транспорта, таких, например, как модель случайных блужданий в непрерывном времени (Continuous Time Random Walk (CTRW) model). В основе данной модели лежит усреднённое описание миграции ансамбля частиц с использованием уже упомянутой функции распределения. При этом полагается, что свойства среды (вероятности прыжков) распределены по пространству однородно. Вид функции распределения должен выводиться из конкретных физических механизмов миграции отдельных частиц. Такая модель была предложена в [13], и в дальнейшем она многократно использовалась для решения задач аномального переноса в самых разных вариантах (см., например, обзор [14] и указанную там литературу). Отметим недавнюю работу [15], в которой этот подход был применён для описания миграции загрязнений в трещиноватых скалах.

Фактически на основе тех же принципов (через введение распределений вероятности прыжков) строятся модели "дробной диффузии" [16–22]. Если в CTRW-моделях распределение концентрации непосредственно выводится из суммирования вероятностей отдельных прыжков, то в моделях "дробной диффузии" для описания эволюции концентрации строятся уравнения типа законов сохранения, но содержащие производные (временные и пространственные) дробных порядков. При такой постановке с учётом соответствующих граничных условий можно рассматривать задачи переноса в области, состоящей из нескольких подобластей с разными свойствами, а также учитывать присутствие внешних полей. Следует подчеркнуть, что как в CTRW-моделях, так и в моделях, описываемых уравнениями с дробными производными, в случае, когда перенос примеси в основном облаке осуществляется в аномальном супердиффузионном режиме, концентрация на асимптотически больших расстояниях убывает по степенному закону. Применение данных подходов для анализа конкретных физических явлений можно найти в [10] (см. также [23–28]).

В последнее время для описания неклассического переноса активно развивается подход, в котором предполагается, что динамика системы (вероятность и характеристики скачков) может зависеть от значений концентрации примеси [29]. В этом случае в качестве управляющего уравнения рассматривается нелинейное уравнение Фоккера–Планка, решение которого также может привести к аномальным режимам переноса. В более общем случае модели этого типа учитывают взаимодействие между частицами примеси, включая возможность их анигиляции [30]. Применение данного подхода может быть обосновано, если концентрация мигрирующих частиц достаточно велика.

В ряде работ (см., например, [31]) развивается подход, в котором учитывается наличие корреляций в реализации последовательных скачков мигрирующих частиц (или в более общем случае корреляций в движении частицы [32, 33]). То есть проявление неклассического характера переноса является результатом немарковской динамики.

Заметим, что описание переноса на основе элементарных скачков мигрирующих частиц в неоднородных средах является в определённом смысле абстрактным математическим приёмом. При таком подходе подразумевается,

что, когда длина единичного скачка существенно превосходит характерные размеры неоднородности среды, функции распределения вероятностей уже содержат в себе информацию о свойствах корреляций в распределении этих неоднородностей. Однако, когда размеры неоднородностей существенно превосходят масштабы физических длин свободного пробега частиц, представляется более естественным проводить моделирование на основе конкретных физических механизмов переноса (адвекции и диффузии), учёта значительных пространственных вариаций констант переноса и реальной геометрии среды. Именно такой подход был принят в исследованиях, результатам которых посвящён настоящий обзор.

Вероятно, впервые такой подход для описания неклассического переноса был реализован в работе [1], где была рассмотрена слоистая среда, в которой примесь вдоль каждого слоя переносилась с постоянной скоростью, причём направление скорости от слоя к слою изменялось случайным образом. Перенос между слоями был обусловлен диффузией. В итоге усреднённый перенос вдоль слоёв на временах, при которых облако примеси занимало большое количество слоёв, оказывался супердиффузионного типа. Именно, рост облака примеси в плоскости слоёв определялся закономерностью

$$R \propto t^{3/4}. \quad (2)$$

Интересно, что в работе [1] данный процесс рассматривался применительно к задачам переноса частиц в замагниченной плазме. Впоследствии (приблизительно через 10 лет) этот закон был "переоткрыт" как раз в задачах переноса в слоистых геологических формациях [34].

Спецификой транспорта в геологических средах является то, что этот процесс происходит в виде переноса примесей в растворе в грунтовых водах по каналам, сформированным пустотами в породе (порами, трещинами). Механизмами переноса являются адвекция, т.е. перенос со скоростью локального течения, и молекулярная диффузия в растворе. В итоге уравнение для концентрации в каналах имеет вид закона сохранения массы с потоком классического вида, включающим в себя адвекцию и диффузию.

Для дальнейшего построения теории необходимо усреднение уравнения для концентрации по пространству либо по ансамблю реализаций. При этом ключевыми являются два фактора: геометрия каналов и сильный контраст в распределении свойств среды.

Что касается первого фактора, то условно все среды с точки зрения корреляции в распределении неоднородностей можно разбить на три класса: 1) простейший тип — регулярно неоднородные среды, как, например, трещина в пористой среде; 2) статистически однородные резко контрастные среды; 3) переколяционные среды, или среды, которые в пределах некоторого, достаточно большого, пространственного масштаба обладают фрактальными свойствами.

Суть второго фактора заключается в следующем. Если мы имеем трещиновато-пористую (например, геологическую) среду и трещины в ней обладают достаточно большой апертурой, то скорость просачивания жидкости по трещинам будет гораздо больше, чем по окружающей трещине пористой матрице. Различие, как правило, настолько велико, что в главном приближении мы можем в пористой матрице пренебречь просачиванием и рассмат-

ривать только диффузию. В итоге можно считать, что среда состоит из двух подсистем: сильнопроницаемой и слабопроницаемой. Такое приближение носит название двупористой среды [35]. Примерами такой среды являются изолированные трещины в пористой матрице, трещиновато-пористые среды с непрерывным распределением трещин, песчано-глинистые формации.

Структура обзора такова. В разделах 2–4 рассмотрен неклассический транспорт в регулярно неоднородных, перколяционных и статистически однородных средах соответственно. Раздел 5 посвящён анализу влияния эффектов сорбции на перенос. В разделе 6 рассмотрены процессы переноса в периодических течениях жидкости, обусловленных конвекцией Рэлея–Бенара. В разделе 7 проводится анализ роли слабопроницаемого заградительного барьера, окружающего источник примеси. В разделе 8 представлен асимптотический подход к расчёту концентрации при переносе в среде с крупномасштабными неоднородностями. Краткие выводы сформулированы в разделе 9.

2. Регулярно неоднородные среды

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим транспорт примеси в регулярно неоднородных средах в следующей постановке. Среда состоит из двух областей: геометрически правильной, сильнопроницаемой области I, которую удобно назвать трещиной, и остальной части пространства (область II), заполненной пористой, но слабопроницаемой матрицей. Далее рассмотрим трещины двух видов: плоскопараллельный слой толщиной a (рис. 1a) и бесконечный цилиндр с площадью поперечного сечения $s \sim a^2$ (рис. 1b).

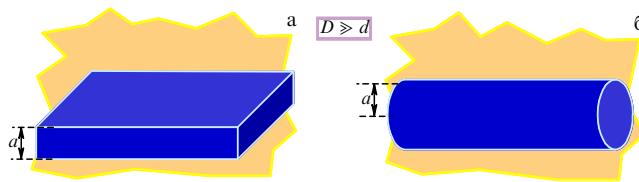


Рис. 1. Регулярно неоднородные среды.

Для начала будем считать, что в обеих областях перенос определяется диффузией, так что для концентрации $n(\mathbf{r}, t)$ в области I справедливо уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n, \quad (3)$$

а концентрация $c(\mathbf{r}, t)$ в области II описывается уравнением

$$\frac{\partial c}{\partial t} = d \Delta c. \quad (4)$$

Резкий контраст свойств означает то, что имеет место сильное неравенство:

$$D \gg d. \quad (5)$$

На границе двух областей справедливы условия равенства концентраций и нормальных компонент плотностей потоков. В начальный момент вся примесь сосредоточена в трещине в начале координат. Данная модель впервые

была предложена А.М. Дыхне, поэтому мы называем её моделью Дыхне [36].

2.2. Поведение примеси в основной области локализации

Качественный анализ показал, что характер переноса в такой системе зависит от интервала времени. На малых временах, $t \ll t_1$, где

$$t_1 = \frac{a^2}{4d}, \quad (6)$$

доля примеси, вышедшей за пределы трещины, пренебрежимо мала и перенос вдоль трещины происходит по классическому диффузионному закону с коэффициентом D . При $t > t_1$ частицы в результате случайных блужданий будут временно покидать трещину, причём с возрастанием t они будут проводить в трещине всё меньшую часть времени и при $t \gg t_1$ в основном будут находиться в матрице. При этом в течение определённого временного интервала, как и при $t < t_1$, перенос будет оставаться обусловленным диффузией в трещине. Доля времени, которую частицы проводят в трещине в форме плоскопараллельного слоя, и, соответственно, диффундируют в плоскости трещины с коэффициентом D , можно оценить как $\tau(t) \sim a/\sqrt{dt}$. Следовательно, размер облака, содержащего основное количество примеси, в плоскости трещины будет возрастать по закону

$$R^2(t) \sim \int_{t_1}^t D\tau(t') dt' \sim D\sqrt{t_1 t}. \quad (7)$$

Перенос по матрице вдоль трещины на этом этапе даёт очень малый вклад, и, таким образом, матрица действует как ловушка. Это и приводит к возникновению неклассического, субдиффузионного, режима $R \propto t^{1/4}$.

По существу, перенос примеси, согласно формуле (7), происходит с эффективным коэффициентом диффузии (зависящим от времени) — средневзвешенным по области, занимаемой примесью, включая как быструю, так и медленную подсистему среды. Правомерность такого рассуждения обусловлена тем, что перенос по обеим подсистемам происходит согласованно благодаря условиям на границе между ними.

Аналогично, для быстрой среды в форме бесконечного цилиндра размер облака примеси вдоль оси цилиндра возрастает по закону

$$R(t) \sim \sqrt{Dt_1 \ln \frac{t}{t_1}}, \quad (8)$$

где $t_1 = s/(4d)$.

Такие (субдиффузионные) режимы переноса действуют до тех пор, пока текущее время $t_1 \ll t \ll t_2$, где для плоскопараллельного слоя

$$t_2 = \left(\frac{D}{d} \right)^2 t_1, \quad (9)$$

а для цилиндра

$$t_2 = t_1 \frac{D}{d} \ln \frac{D}{d}. \quad (10)$$

На временах $t \gg t_2$ доля времени, проводимого частицами в трещине, становится настолько малой, что она уже перестаёт влиять на перенос, который теперь опреде-

ляется свойствами матрицы. В итоге при $t \gg t_2$ режим переноса соответствует медленной классической диффузии с малым коэффициентом d . Таким образом, в модели Дыхне на временах $t \ll t_1$ реализуется быстрая классическая диффузия, на интервале $t_1 \ll t \ll t_2$ — субдиффузия, а при $t \gg t_2$ — медленная классическая диффузия.

Аналогично была рассмотрена обобщённая модель Дыхне, в которой в трещине учитывается помимо диффузии адвекция примеси с постоянной скоростью \mathbf{u} (вектор \mathbf{u} лежит либо в плоскости трещины для плоскопараллельного слоя, либо вдоль оси трещины для цилиндра) [37]. В этом случае поведение системы зависит от числа Пекле $\text{Pe} = ua/d$, которое определяет относительную скорость процессов диффузии и адвекции. При $\text{Pe} \ll 1$ поведение примеси описывается теми же закономерностями, что и в простой модели Дыхне. При $\text{Pe} \gg 1$ возникают новые неклассические режимы — квазидиффузионные [38]. Последние характеризуются тем, что среднее смещение частиц $X(t)$ возрастает со временем по тому же закону, что и размер облака примеси $R(t)$. Скорость движения фронта зависит от формы трещины. Для плоской трещины смещение фронта пропорционально квадратному корню из времени:

$$X(t) \sim R(t) \sim \sqrt{D_u t}, \quad (11)$$

где D_u — так называемый коэффициент квазидиффузии,

$$D_u = u^2 t_1. \quad (12)$$

Аналогично для бесконечного цилиндра имеет место логарифмическая квазидиффузия:

$$X(t) \sim R(t) \sim ut_1 \ln \frac{t}{t_1}. \quad (13)$$

2.3. Асимптотики концентрации на больших расстояниях

Все перечисленные в разделе 2.2 режимы, которые ранее были получены [39, 40] на основе качественных оценок, могут быть выведены из точного решения задачи. Вместе с тем точное решение позволяет также рассчитать поведение концентрации на асимптотически больших расстояниях от источника, $r \gg R(t)$. Это поведение также зависит от временного интервала. На малых временах концентрация убывает как гауссова кривая и характеризуется большим коэффициентом диффузии. Когда в основном облаке режим переноса сменяется субдиффузионным, асимптотика становится двухступенчатой. Ближняя ступень описывается растянутой экспонентой и определяется субдиффузией, а дальняя ступень — гауссовой экспонентой с большим коэффициентом диффузии, т.е. как и в режиме на предыдущем интервале времени. На самых поздних временах асимптотика становится трёхступенчатой: две дальние части — прежние, а ближняя часть определяется текущим режимом медленной классической диффузии.

Такая структура асимптотики при больших временах для трещины в форме плоскопараллельного слоя схематически показана на рис. 2.

Таким образом, из модели Дыхне можно сделать следующие выводы: в резко контрастных средах слабопроницаемые области служат ловушками, сильно замедляющими скорость переноса примеси. Это замедление приводит к возникновению субдиффузионных режимов, зависящих от геометрии среды и механизмов транспорта.

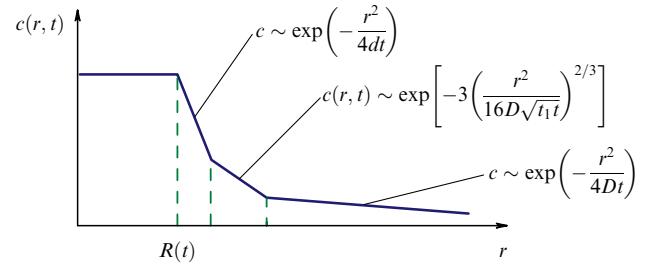


Рис. 2. Многоступенчатая структура концентрации на асимптотически далёких расстояниях от источника при $t \gg t_2$ для трещины в форме плоскопараллельного слоя.

Возникающая во времени смена режимов переноса в основном облаке приводит к многоступенчатой структуре концентрационных асимптотик. При этом соблюдается закономерность: более удалённые части асимптотики определяются более ранними режимами переноса в основном объёме. Самая близкая ступень соответствует текущему режиму.

3. Перколяционные среды

Перейдём к средам, в которых система каналов с высокой проницаемостью имеет вид перколяционного кластера [41, 42]. В природе такая ситуация часто встречается в трещиноватых геологических формациях [43], а также в пористых средах, если имеется сильный разброс пор по размерам. Особенностью перколяционных сред является то, что в диапазоне больших пространственных масштабов начиная с некоторого, обозначим его a , и вплоть до размеров корреляционного радиуса ξ , они являются фрактальными и обладают свойством масштабной инвариантности. На масштабах больше ξ эти среды становятся статистически однородными.

Отметим, что сами перколяционные кластеры обладают внутренней структурой [41] — они состоят из пронизывающего всю среду остова, по которому и происходит перенос на большие расстояния, и тупиков, которые являются конечными, и каждый из них присоединяется к остову в одной точке. Пример перколяционного кластера в рамках модели случайных целых связей приведён на рис. 3.

3.1. Изотропная модель случайной адвекции с дальнодействующими корреляциями

В изотропной модели случайной адвекции с дальнодействующими корреляциями в качестве механизма переноса в перколяционной среде учитывается только адвекция по остову. Уходом примеси в тупики и матрицу пренебрегается.

Уравнение для микроскопической концентрации \hat{c} при переносе по перколяционному кластеру имеет вид стандартного закона сохранения, в котором поток определяется адвекцией в случайном поле скоростей:

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{V}\hat{c}) = 0. \quad (14)$$

Целью теории является описание переноса для величин, усреднённых по ансамблю реализаций, $c = \langle \hat{c} \rangle$. Поле скоростей полагается несжимаемым. Корреляционная длина ξ в распределении скорости считается равной бес-

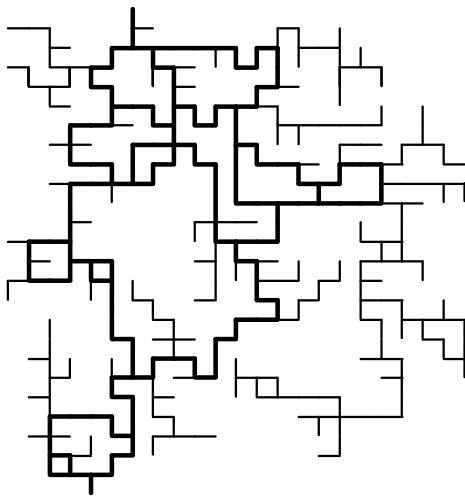


Рис. 3. Схематическое изображение переколяционного кластера. Остов выделен жирными линиями, тупики показаны тонкими линиями.

конечности. Среднее по ансамблю реализаций значение скорости полагается равным нулю, так что характеристиками, определяющими перенос, являются корреляционные функции скорости.

Как было указано, на масштабах $r \gg a$ среда обладает фрактальными свойствами (a носит название нижней границы фрактальности). Как следствие, в этой области отсутствует пространственный масштаб, характеризующий систему, что в свою очередь позволяет воспользоваться идеями теории критических явлений [44, 45] и полагать, что процесс переноса на расстояниях $r \gg a$ обладает свойством масштабной инвариантности. Последнее означает, что при преобразовании подобия $\mathbf{r} \rightarrow \lambda \mathbf{r}$ значение произвольной величины описывается соотношением $A \rightarrow \lambda^{A_h} A$. Показатель степени A_h носит название масштабной размерности величины A . Поэтому парная корреляционная функция скорости при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gg a$ имеет вид

$$\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}_1) \mathbf{V}(\mathbf{r}_2) \rangle \propto V^2 \left(\frac{a}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right)^{2h}, \quad (15)$$

где h — масштабная размерность скорости. Считаем, что n -точечная корреляционная функция скорости адвекции при преобразовании координат $\mathbf{r} \rightarrow \lambda \mathbf{r}$ приобретает, аналогично парному коррелятору (15), множитель λ^{nh} .

Переходя к описанию концентрации, усреднённой по ансамблю реализаций, мы в общем случае приходим от (14) к интегро-дифференциальному уравнению, исследование которого проводилось разными способами: на основе анализа масштабных размерностей [46] и с помощью диаграммной техники Фейнмана [47]. Оба метода привели к одинаковым результатам, которые состоят в следующем. Характер переноса примеси зависит от скорости убывания корреляционной функции, т.е. от параметра h . Если $h > 1$, то перенос происходит в режиме классической диффузии, так что концентрация описывается гауссовым профилем, в том числе и на асимптотически больших расстояниях. При $h < 1$ реализуется режим супердиффузии, так что размер облака примеси возрастает со временем по закону

$$R(t) \sim (a^h V t)^\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{1+h}. \quad (16)$$

Существенно, что при этом убывание концентрации в асимптотике описывается "сжатой" экспонентой:

$$c(r, t) \cong \frac{B}{(4\pi)^{3/2} R^3(t)} \left(\frac{r}{R(t)} \right)^{3(2\gamma-1)} \times \\ \times \exp \left[- \left(C \frac{r}{R(t)} \right)^{1/(1-\gamma)} \right], \quad (17)$$

где $R(t)$ определяется формулой (16), а B и C — константы порядка единицы. Таким образом, убывание на больших расстояниях оказывается более быстрым, чем в классическом случае [46].

Подчеркнём, что постановка анализируемой здесь и других задач о переносе примеси предполагает фиксированные начальные условия для распределения концентрации.

Рассматриваемая в этом разделе среда является фрактальной, но в то же время пространственно неупорядоченной. Поэтому результат расчёта концентрации является средним по ансамблю реализации среды — в том же смысле, что и корреляционные функции скорости адвекции. Оценки, сделанные с учётом факта бесконечного радиуса корреляции, показывают, что при статистическом описании процессов переноса в модели случайной адвекции относительная неопределённость концентрации может достигать порядка единицы.

С целью приблизить модель случайной адвекции к реальным средам далее рассмотрим влияние следующих факторов: конечной величины корреляционной длины, анизотропии переколяционных сред и роли ловушек (тупиков и окружающей переколяционный кластер слабопроницаемой пористой матрицы).

Отметим, что ранее модель случайной адвекции исследовалась в работах [48, 49], где были получены соотношения для основной области распределения примеси. Однако там вопрос об асимптотике концентрации остался открытым.

3.2. Переколяционные среды с конечной длиной корреляции

Если корреляционная длина конечна, $\xi < \infty$, то поведение примеси зависит от временного интервала [50]. На временах, при которых размер облака примеси меньше корреляционного радиуса ξ , свойства среды, определяющие перенос, остаются такими же, как и в бесконечной фрактальной среде. Поэтому перенос (при условии $h < 1$) происходит в режиме супердиффузии, по закону (16). На временах, на которых размер облака примеси превосходит ξ , $t \gg t_\xi$, среда становится статистически однородной и, следовательно, перенос происходит в классическом диффузионном режиме. Отметим, что качественно этот результат был ранее получен при численном моделировании диффузии частицы по фрактальному кластеру с конечной длиной корреляции [51], где на больших временах наблюдался переход от субдиффузии к классической диффузии.

Эффективный коэффициент диффузии определяется соотношениями

$$D_{\text{eff}} \sim \frac{\xi^2}{t_\xi}, \quad t_\xi \sim \frac{\xi^{1+h}}{Va^h}. \quad (18)$$

Закономерности поведения концентрации на асимптотически далёких расстояниях состоят в следующем. На

временах, меньших t_ξ , убывание концентрации с увеличением расстояния описывается сжатой экспонентой, как и прежде. На больших временах, $t \gg t_\xi$, асимптотики становятся двухступенчатыми. Ближняя ступень соответствует текущему режиму классической диффузии, а дальняя — предшествующему режиму супердиффузии. Асимптотическая структура здесь подчиняется общему правилу, установленному для регулярно неоднородных сред: чем более далёкой является ступень, тем более ранним режимом она определяется, при этом самая близкая ступень отвечает режиму текущего времени.

3.3. Анизотропные перколяционные среды

В общем случае анизотропия при переносе в геологических средах присутствует, по-видимому, всегда и она обусловлена такими факторами, как, например, вектор силы тяжести. Описание течения в этом случае находится в рамках проблемы направленной перколяции, и данная проблема исследовалась в работах [52–54]. В этих работах показано, что степенное убывание корреляционной функции скорости остаётся справедливым и при наличии анизотропии, что в конечном итоге является результатом свойства самоподобия фрактальной среды. Однако при наличии анизотропии свойства среды по-разному изменяются при масштабировании пространства вдоль и поперёк оси анизотропии. Поэтому при рассмотрении свойства масштабной инвариантности среды необходимо ввести ещё один масштабный индекс, β , для координат в базисной плоскости, так что вместо преобразования $r \rightarrow \lambda r$ следует рассматривать преобразование

$$\{z \rightarrow \lambda z, \mathbf{r}_\perp \rightarrow \lambda^\beta \mathbf{r}_\perp\}. \quad (19)$$

Исследование показало [55], что, в зависимости от величины параметра β , возможны два случая, сильной и слабой анизотропии. При слабой анизотропии ($h < 1, 1/(1+h) < \beta < 2/(1+h)$) перенос происходит в режиме супердиффузии во всех направлениях, хотя и с разной скоростью:

$$R_{\parallel}(t) \sim (a^h V t)^{1/(1+h)}, \quad R_{\perp}(t) \sim (b^{\beta(1+h)-1} V t)^{1/[\beta(1+h)]}. \quad (20)$$

При сильной анизотропии ($h < 1, \beta > 2/(1+h)$) перенос в продольном направлении по-прежнему — супердиффузионный, а в базисной плоскости — классический диффузионный:

$$R_{\parallel}(t) \sim (a^h V t)^{1/(1+h)}, \quad R_{\perp}(t) \sim \sqrt{D_{\perp} t}. \quad (21)$$

Важно также отметить, что при наличии анизотропии имеет место аномальный дрейф, когда среднее смещение частиц возрастает по супердиффузионному закону, как и размер облака примеси вдоль оси анизотропии $\langle z \rangle \sim \sim \sqrt{\langle z^2 \rangle} = R_{\parallel}(t)$.

Заметим, что для анизотропных сред с конечным интервалом фрактальности в соответствии с (19) имеются две корреляционные длины: ξ_{\parallel} и ξ_{\perp} — связанные соотношением

$$\frac{\xi_{\parallel}}{a_{\parallel}} = \left(\frac{\xi_{\perp}}{a_{\perp}}\right)^{\beta}, \quad (22)$$

где a_{\parallel} и a_{\perp} — нижние границы фрактальности в продольном направлении и в базисной плоскости соответственно.

На масштабах, больших интервала фрактальности, необходимо учитывать среднюю скорость, для которой справедливо

$$v \approx V \left(\frac{\xi_{\parallel}}{a_{\parallel}}\right)^h. \quad (23)$$

В итоге на больших временах, $t \gg t_\xi$, выражение для концентрации принимает вид

$$c \approx \frac{1}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{D_{\xi_{\parallel}} D_{\xi_{\perp}}^2}} \exp \left[-\frac{(z - vt)^2}{4D_{\xi_{\parallel}} t} - \frac{\mathbf{r}_{\perp}^2}{4D_{\xi_{\perp}} t} \right], \quad (24)$$

где

$$D_{\xi_{\parallel}} \sim v \xi_{\parallel}, \quad D_{\xi_{\perp}} \sim \xi_{\perp}^2 t_{\xi}^{-1}, \quad (25)$$

и поведение в асимптотике имеет двухступенчатый вид.

3.4. Двупористые перколяционные среды

В реальных перколяционных средах всегда содержатся ловушки. Можно предложить как минимум два источника возникновения ловушек: во-первых, как уже указывалось, имеются тупики перколяционного кластера, во-вторых, сам перколяционный кластер часто бывает погружен в пористую, хотя и слабопроницаемую среду. Тогда в уравнение переноса для величин, усреднённых по ансамблю реализаций, так же как и в модель Дыхне, входит описывающее обмен примесью между оставом и ловушками слагаемое, имеющее следующий интегро-дифференциальный вид:

$$Q(r, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \varphi(t-t') c(r, t') dt', \quad (26)$$

где интегральное ядро определяется свойствами масштабной инвариантности среды [56, 57]. Отсюда следует, что существует большой интервал времени, $t_1 < t < t^*$, при котором ядро имеет степенной вид: $\varphi(t) \sim \sim (1/t_1)(t_1/t)^{\alpha}$, где α характеризует убывание ядра в интервале самоподобия. На больших временах, $t > t^*$, когда ловушки насыщаются, ядро убывает со временем экспоненциально. В итоге показатель, отвечающий за скорость роста облака примеси, определяется как свойствами поля скоростей, так и свойствами ловушек [58]:

$$R(t) \sim (a^h V t_1^{\alpha})^{(1-\alpha)/(1+h)} \propto t^{(1-\alpha)/(1+h)}. \quad (27)$$

В зависимости от соотношения между параметрами h и α (но при условии $h < 1$) перенос может происходить в режиме как супердиффузии, так и субдиффузии.

3.5. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными

Для сравнения теоретических результатов с экспериментальными была предложена вытекающая из выводов модели случайной адвекции интерполяционная формула, которая описывает поведение концентрации на фиксированном расстоянии от источника примеси в зависимости от времени:

$$c(r, t) \propto \left(\frac{t_0}{t}\right)^{3/(1+h)} \exp \left[-\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/h} \right], \quad (28)$$

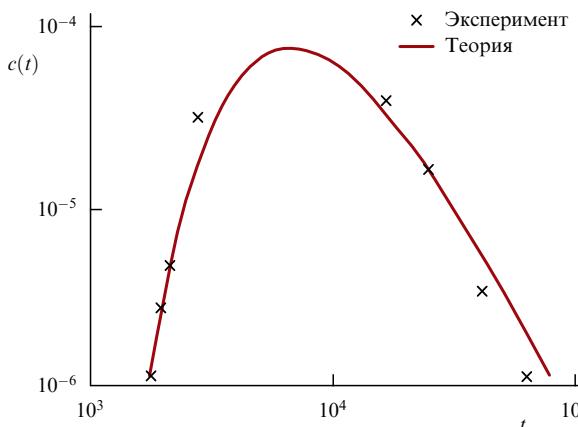


Рис. 4. Сравнение результатов расчёта по формуле (28) с данными тройсерных экспериментов [59].

где t_0 и h — подгоночные параметры. Эксперимент [59] проводился в трещиноватых кристаллических породах. Впрыскивание и откачка тройсера происходили в сходящейся слабодипольной конфигурации. В качестве тройсеров были выбраны тяжёлая вода, бромиды, пентафтобензойная кислота, диффузионные свойства которых сильно различаются. Поведение концентрации для всех тройсеров оказалось очень схожим на малых временах и практически совпадающим на больших. Отсюда был сделан вывод о том, что диффузионный обмен частицами между сильнопроницаемой системой трещин и слабопроницаемой матрицей не оказывает влияния на процессы переноса примеси. На рисунке 4 проведено сравнение теоретических результатов с экспериментальными.

Отметим, что интерполяционная формула хорошо описывает данные эксперимента при $h \approx 0,4$, демонстрируя, что перенос в эксперименте происходит в режиме супердиффузии.

4. Статистически однородные среды с двойной пористостью

Важным (и, возможно, наиболее часто встречающимся) классом сильновеоднородных сред являются резко контрастные, статистически однородные среды. Пример такой среды, состоящей из хорошо проницаемых каналов и слабопроницаемых блоков, заполняющих пространство между каналами, приведён на рис. 5. Важно, что некласси-

ческие режимы переноса здесь реализуются на временах, при которых размер облака примеси значительно преувеличивает характерные масштабы неоднородности среды (определенными размерами блоков).

В литературе, как правило, описание транспорта в такой среде строится на основе модели Герке – ван Генухтена [60], в которой обмен примесью между быстрой и медленной подсистемами рассматривается в "приближении среднего поля". Последнее подразумевает, что обменные потоки определяются разностью локальных средних концентраций в блоках и каналах. Однако нетрудно показать, что часто время выравнивания концентрации на масштабах слабопроницаемого блока оказывается очень велико. Например, для геологических трещиновато-пористых сред даже для небольших по геологическим меркам размерах блоков $b \approx 10$ см при характерных значениях коэффициента молекулярной диффузии в насыщенных пористых средах $d \approx 10^{-7}$ см² с⁻¹ время выравнивания концентрации в блоках составляет несколько десятков или сотен лет. Таким образом, для адекватного описания транспорта на указанных масштабах времён необходимо учитывать сохраняющиеся градиенты концентрации.

Для этого в работах [61, 62] была развита неравновесная модель двойной пористости, в рамках которой перенос на большие расстояния описывался уравнением для концентрации в быстрой подсистеме (по системе каналов), включающим в себя слагаемое, определяющее обмен между подсистемами, в виде (26). Выражение для ядра в (26) зависит в общем случае от формы слабопроницаемых областей, но на малых ($t \ll t_a$) и больших ($t \gg t_b$) временах (см. ниже) его вид оказывается универсальным [57]. Это позволило описать режимы переноса (в том числе неклассические) в широких временных интервалах.

В итоге были получены следующие результаты. Совокупность и последовательность режимов переноса определяются соотношением между тремя характерными временами: t_a , t_b и t_u . Величина $t_a \approx a^2/d$ (аналог времени t_1 для регулярно неоднородных сред), где a — апертура каналов, — определяет время, при котором становится существенным вклад слабопроницаемых областей; $t_b \approx b^2/d$ — время выравнивания концентрации на масштабах блока; $t_u = 4d/u^2$, где u — средняя скорость фильтрации грунтовых вод, — характеризует относительную роль адвекции и диффузии в трещинах.

В зависимости от соотношения между указанными временами могут реализоваться до семи режимов переноса. Например, в случае $t_u \ll t_a \ll t_b$ в широком диапазоне времён $t_a \ll t \ll t_b$ перенос описывается аномальными режимами: вдоль средней скорости u перенос происходит в режиме квазидиффузии, при котором среднее смещение $\langle r_{\parallel} \rangle$ и размер облака примеси R_{\parallel} описываются формулами (11), где $D_u = u^2 t_a$, а в поперечном направлении — в режиме степенной субдиффузии, описываемой формулой (7). На малых и больших временах перенос происходит в режиме классической адвекции – диффузии, но с разными средними скоростями и эффективными коэффициентами дисперсии.

5. Эффекты сорбции

Преимущество развитого нами подхода заключается в том, что при описании неклассических режимов можно естественным образом учитывать дополнительные процессы, влияющие на перенос, например процессы сорбции.

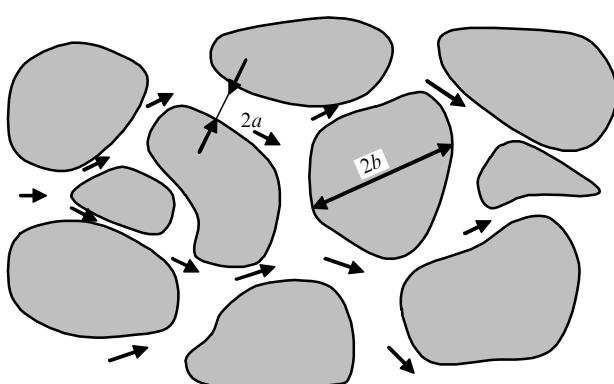


Рис. 5. Схематическое изображение двупористой среды.

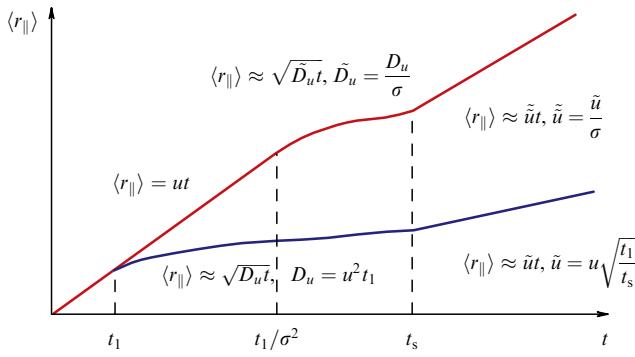


Рис. 6. Среднее смещение частиц примеси при её миграции в статистически однородной двупористой среде при наличии коллоидов. Время t_s соответствует характерному времени выравнивания концентрации примеси на масштабах пористых блоков.

Известно, что сорбция примеси в матрице при переносе в пористых средах приводит к существенному замедлению процесса. Например, на больших временах средняя скорость переноса и эффективный коэффициент дисперсии уменьшаются в K раз, где $K = 1 + k_d$ — так называемый коэффициент задержки, а коэффициент распределения k_d связывает равновесную концентрацию примеси в растворе с концентрацией примеси, адсорбированной в матрице [63]. С другой стороны, если в среде имеются коллоидные частицы (микроскопические частицы размером от нескольких десятков нанометров до нескольких десятков микрометров, которые могут присутствовать в грунтовых водах, адсорбировать и переносить примесь), то это может привести к существенному ускорению переноса в средах с двойной пористостью. Причиной такого ускорения является то, что вследствие больших размеров коллоидных частиц по сравнению размерами пор в слабопроницаемой матрице процесс их ухода в матрицу подавлен. В итоге эти частицы беспрепятственно переносятся со скоростью грунтовых вод по трещинам и переносят с собой адсорбированную на них примесь.

Учёт коллоидной подсистемы при описании переноса примеси был рассмотрен для двупористых сред разных типов [64–66]. Важным параметром модели является коэффициент распределения σ , связывающий равновесные значения концентрации примеси в растворе c и концентрации примеси, адсорбированной на коллоидах, m :

$$c_{\text{eq}} = \sigma m_{\text{eq}}. \quad (29)$$

На рисунке 6 приведены результаты расчётов среднего смещения частиц примеси для систем с коллоидами (верхняя кривая) и без них (нижняя кривая). Видно, что при условии $\sigma \ll 1$, которое соответствует сильной адсорбирующей способности коллоидов, наличие коллоидов в грунтовых водах существенно ускоряет перенос. Учёт данного процесса особенно важен при оценке скорости загрязнения окружающей среды.

6. Перенос в периодических ячеистых течениях

Развитый подход оказался удобным для построения моделей переноса в задачах, казалось бы, не имеющих отношения к резко контрастным двупористым средам. Именно, идеология двупористых сред была применена к

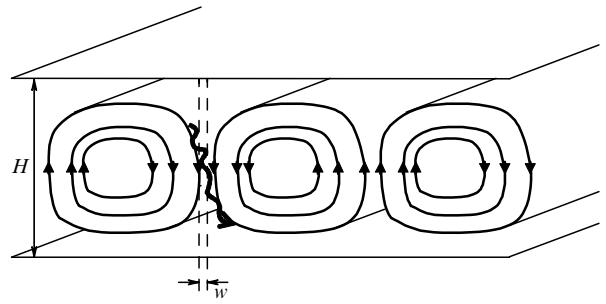


Рис. 7. Схематическое изображение течения в цепочке роллов, которое формируется в слое жидкости, нагреваемой снизу.

описанию переноса в однородных средах, в которых возникают регулярные течения [67]. Известно, что в слое жидкости, нагреваемом снизу, при достаточно больших числах Рэлея возникают периодические замкнутые течения — цепочки из роллов и решётки из гексагональных ячеек. Анализ данных течений с точки зрения переноса растворённых во флюиде частиц позволяет выделить в жидкости области двух сортов. Одни области способны быстро переносить примесь, другие представляют собой ловушки. Соответственно, перенос в такой среде будет определяться как переносом по быстрым областям, так и торможением, обусловленным наличием ловушек.

Рассмотрим цепочку из роллов, формирующихся в слое жидкости толщиной H . В структуре течения такого типа можно выделить системы двух областей. Одна система объединяет периферийные трубы тока толщиной $w \approx \sqrt{Hd/V}$, где V — скорость течения на периферии ячеек, d — коэффициент молекулярной диффузии. Толщина w определяется из условия, что частица, движущаяся вдоль границы между двумя роллами, успевает перейти из одного ролла в другой. Другая система объединяет внутренние области роллов (рис. 7).

Система первых областей аналогична хорошо проницаемой подсистеме в модели двойной пористости, а внутренние области играют роль ловушек. В итоге поведение примеси, изначально сосредоточенной, например, на левой границе, описывается следующим образом. На малых временах, $t < \tau_H$, где $\tau_H = H^2/d$ — время диффузии примеси на масштабах ячейки, перенос происходит в субдиффузионном режиме, при котором возрастание размера облака примеси в направлении вдоль цепочки определяется выражением

$$R^2 \approx 2VH\sqrt{\frac{\pi H}{V}}t. \quad (30)$$

На больших временах, $t > \tau_H$, распространение примеси описывается классической диффузией с эффективным коэффициентом [42]

$$D_{\text{eff}} \approx d\sqrt{Pe}, \quad (31)$$

где для удобства введено число Пекле $Pe = HV/d$.

При больших значениях числа Рэлея течение в роллах становится флюкутирующим, хотя в среднем (во времени) сохраняет вид замкнутых ячеек. В этом случае развитая модель [67] предсказывает линейное возрастание эффективного коэффициента диффузии с увеличением амплитуды флюктуаций. Это следует из того, что при наличии флюктуаций скорости, характеризуемых амплитудой Δv и периодом τ_f , коэффициент молекулярной диффузии в

формулах модели (например, (31)) следует заменить эффективным коэффициентом $d \approx (\Delta v)^2 \tau_f$. Выводы модели (величина коэффициента диффузии D_{eff} , его зависимость от амплитуды флуктуаций) для этого случая находятся в неплохом согласии с результатами эксперимента [68].

В периодической решётке гексагональных ячеек геометрия течения такова, что скорость перескока активных частиц из одной пограничной трубки в другую лимитируется диффузией не на границе между ячейками, а в области вблизи центров ячеек. Это обусловлено уширением пограничных трубок тока при их прохождении через центр ячейки. В итоге увеличения эффективного коэффициента диффузии по сравнению с d не происходит. Однако если учесть возможность перемещения частиц между трубками тока за счёт их диффузии в азимутальном направлении, то увеличение эффективного коэффициента диффузии оказывается пропорциональным логарифму числа Пекле,

$$D_{\text{eff}} \approx d \ln \text{Pe}. \quad (32)$$

В области чисел Рэлея, при которых течение в слое жидкости становится флуктуирующим, увеличение D_{eff} для решётки из гексагональных ячеек может быть значительным. Действительно, из экспериментальных данных [69] следует, что флуктуации течения будут приводить к интенсивному перемешиванию примеси в области вблизи центров гексагональных ячеек. Если ввести размер области перемешивания l и характерное время перемешивания τ_l , то из модели [67] следует, что эффективный коэффициент диффузии для случая $l \ll H \text{Pe}^{-1/4}$ определится выражением $D_{\text{eff}} \approx l^2 / \tau_l$, а в обратном пределе $D_{\text{eff}} \approx H^2 / (\tau_l \sqrt{\text{Pe}})$.

7. Процессы переноса в присутствии диффузионных барьёров

В разделах 2–6 предполагалось, что в начальный момент вся примесь сосредоточена непосредственно в среде миграции. В этом разделе изложены результаты решения более общей задачи. Теперь источник примеси отделён от основной среды окружающим его заградительным барьером, представляющим собой компактную область пространства, заполненную слабопроницаемой средой. Присутствие барьера приводит к тому, что выход примеси в основную среду будет постепенным (зависящим от времени), что в существенной мере модифицирует режимы переноса и поведение концентрации на асимптотически далёких от источника расстояниях.

В разделах 7.1–7.3 представлены постановка задачи и результаты для стационарного барьера [70] и барьера, испытывающего деградацию [71]. Для определённости перенос примеси в среде миграции описывается моделью случайной адvection с бесконечной длиной корреляции (см. раздел 3.1), а внутри барьера — классической диффузией.

7.1. Постановочные соотношения

С учётом линейности задачи среднюю по ансамблю реализаций концентрацию примеси можно представить в виде

$$c(\mathbf{r}, t) = \int_0^t dt' Q(t - t') G(\mathbf{r}, t'), \quad (33)$$

где $G(\mathbf{r}, t)$ — функция Грина в задаче о безбарьерном прототипе (в отсутствие барьера) с заданным распределением

концентрации в начальный момент, $Q(t)$ — эффективная мощность источника примеси, представляющая собой полный поток частиц примеси из барьера в основную среду. Величина $Q(t)$ удовлетворяет очевидному условию:

$$\int_0^\infty dt' Q(t') = N_0, \quad (34)$$

где N_0 — полное число частиц примеси.

В качестве характеристик режимов переноса задачи удобно выбрать полное число активных частиц примеси — вышедших к моменту t из барьера в среду миграции,

$$N(t) = \int d^3 \mathbf{r} c(\mathbf{r}, t), \quad (35)$$

и размер $R(t)$ основной области локализации,

$$R^2(t) = N^{-1}(t) \int d^3 \mathbf{r} r^2 c(\mathbf{r}, t). \quad (36)$$

Ещё одной характеристикой является асимптотика концентрации на далёких расстояниях от источника:

$$c(\mathbf{r}, t) \propto \exp(-\Phi(r, t)), \quad r \gg R(t). \quad (37)$$

Отметим, что характеристики переноса примеси в отсутствие барьера (в задаче о безбарьерном прототипе) получаются из соотношений (16), (17), если протяжённый во времени источник заменить мгновенным источником: $Q(t) \rightarrow N_0 \delta(t - 0)$. Размер основной области локализации и показатель экспоненты в асимптотике концентрации для безбарьерного прототипа обозначим соответственно как $R_*(t)$ и $\Phi_*(r, t)$.

7.2. Стационарный барьер

Считается, что барьер представляет собой шар, заполненный слабопроницаемой однородной средой. В центре шара находится источник, который в начальный момент содержит N_0 частиц примеси. Перенос примеси внутри барьера происходит посредством классической диффузии с коэффициентом d . Радиус барьера R_b мал по сравнению со всеми другими линейными размерами задачи. Число активных частиц и размер основной области локализации зависят от соотношения между текущим временем t и характерным временем диффузии через барьер $t_b = R_b^2 / (4d)$. В предельных случаях указанные величины имеют вид:

$$N(t) \cong N_0 \begin{cases} 4\sqrt{\frac{t_b}{t}} \exp\left(-\frac{t_b}{t}\right), & t \ll t_b, \\ 1, & t \gg t_b, \end{cases} \quad (38)$$

$$R(t) \sim \begin{cases} R_*(t_{\text{eff}}(t)), & t \ll t_b, \\ R_*(t), & t \gg t_b, \end{cases} \quad t_{\text{eff}}(t) = \frac{t^2}{t_b}. \quad (39)$$

Отметим, что действие барьера на малых временах ($t \ll t_b$) не только существенно снижает количество активных частиц — их становится экспоненциально мало, но и значительно замедляет режим переноса, приводя к замене реального времени эффективным временем $t_{\text{eff}}(t) \ll t$. На больших временах ($t \gg t_b$) влияние барьера на число активных частиц и на режим переноса прекращается.

Показатель экспоненты в асимптотике концентрации в присутствии барьера при $t \ll t_b$ определяется выраже-

ниями:

$$\Phi(r, t) = \frac{t_b}{t} + \frac{1}{\gamma^\gamma(1-\gamma)^{1-\gamma}} \frac{r}{R_*(t_{\text{eff}}(t))}, \quad \Phi_*(r, t) \frac{t}{t_b} \ll 1, \quad (40)$$

$$\Phi(r, t) = 2\sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{t_b}{t} \Phi_*(r, t)} + \Phi_*(r, t), \quad \Phi_*(r, t) \frac{t}{t_b} \gg 1. \quad (41)$$

Следовательно, на малых временах, $t \ll t_b$, асимптотическая структура концентрации является двухступенчатой. Первые слагаемые в (40), (41) определяют количество активных частиц, принимающих участие в формировании концентрационных асимптотик.

На больших временах, $t \gg t_b$, и умеренно далёких расстояниях, когда $\Phi_*(r, t)t_b/t \ll 1$, наличие барьера на асимптотику не влияет, и мы имеем $\Phi(r, t) \approx \Phi_*(r, t)$. На более далёких расстояниях, при $\Phi_*(r, t)t_b/t \gg 1$, выражение для показателя экспоненты сводится к выражению для $\Phi(r, t)$ в (41). Таким образом, и на больших временах асимптотика концентрации является двухступенчатой.

7.3. Деградирующий барьер

Практический интерес представляет задача о переносе примеси в присутствии барьера, испытывающего разрушение. В отличие от переноса в случае стационарного барьера, перенос примеси в деградирующем барьере моделируется переменным, возрастающим со временем, коэффициентом диффузии $d(t)$. После введения безразмерного времени

$$u(t) = 4R^{-2} \int_0^t d(t') dt' \quad (42)$$

результаты для деградирующего барьера получаются из формул (39)–(42), справедливых для стационарного барьера, посредством замены

$$\frac{t}{4t_b} \rightarrow u(t), \quad t_{\text{eff}}(t) \rightarrow \tilde{t}_{\text{eff}}(t) \equiv u^2(t) \left(\frac{du}{dt} \right)^{-1}. \quad (43)$$

Характер смены режимов переноса в реальном времени находится в прямой зависимости от сценария деградации (зависимости $d(t)$). Возможны два предельных сценария разрушения: 1) быстрый, при котором на малом отрезке времени коэффициент диффузии $d(t)$ практически неограниченно возрастает; 2) медленный сценарий, в котором коэффициент $d(t)$ возрастает по медленному степенному закону.

Смена режимов переноса во времени при быстром и медленном сценариях изображена на рис. 8 и 9.

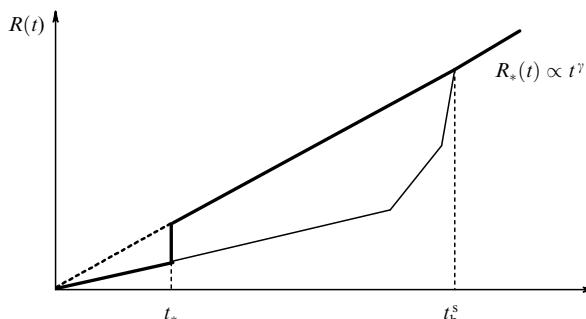


Рис. 8. Размер основной области локализации (схематически) в зависимости от времени в случае быстрой деградации. Тонкая линия — стационарный барьер, жирная — деградирующий барьер; t_* — начало деградации, $t_b^s = R_b^2/(4d(0))$ — время выхода из стационарного барьера.

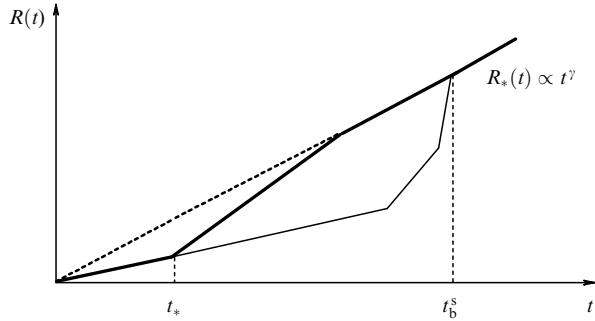


Рис. 9. Размер основной области локализации (схематически) в зависимости от времени в случае медленной деградации. Тонкая линия — стационарный барьер, жирная — деградирующий барьер; t_* — начало деградации, $t_b^s = R_b^2/(4d(0))$ — время выхода из стационарного барьера.

8. Асимптотический подход к описанию процессов переноса

Обычно при аналитическом описании неклассических процессов переноса среда на больших пространственных масштабах предполагается в среднем однородной. Между тем реальные среды обладают крупномасштабными неоднородностями. В такой ситуации даже классические процессы адвекции–диффузии требуют проведения довольно трудоёмких численных расчётов. Дополнительные, причём принципиальные, трудности возникают в случае неклассических процессов, для которых управляющие уравнения для концентрации являются интегро-дифференциальными, а входящие туда ядра остаются, вообще говоря, в деталях неизвестными.

С целью преодоления указанных трудностей в [72] был предложен новый подход, основанный на асимптотическом описании процессов переноса. Подразумевается важная для практики ситуация, в которой расстояние от источника примеси до точки наблюдения велико по сравнению с размерами основной области локализации примеси в заданный момент времени. Как показывает анализ, на таких расстояниях, с одной стороны, формирование концентрации обусловлено коротковолновой частью механизма переноса, а с другой — зависимость концентрации от расстояния до источника носит экспоненциальный характер. Формально, таким образом, ситуация напоминает имеющую место в волновой оптике или квантовой механике ситуацию, в которой становятся применимыми приближение геометрической оптики или квазиклассическое приближение (см. [73, 74]) соответственно. Показатель экспоненты (квазизиклон) $\Gamma(\mathbf{r}, t)$, $\Gamma \gg 1$, в выражении для концентрации удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка, решение которого ищется на основе канонического формализма.

В результате возникает представление о том, что концентрационный сигнал от источника примеси достигает точки наблюдения \mathbf{r} , распространяясь по линейной траектории $\{l\}$ (аналогу луча), форма которой находится на основе обобщённого принципа Ферма

$$\delta_{\{l\}, p} \left[\int_0^{\mathbf{r}} dl \kappa(p, \mathbf{r}_l) - pt \right] = 0. \quad (44)$$

Здесь dl — дифференциальный элемент траектории концентрационного сигнала, $\kappa(p, \mathbf{r}_l)$ — квазиволновой вектор,

определеняемый ближайшим к вещественной оси волнового вектора полюсом образа Фурье – Лапласа функции Грина в задаче для однородной среды с параметрами, совпадающими с таковыми в точке на траектории \mathbf{r}_l неоднородной среды. Минимизация в (44) происходит не только по множеству концентрационных траекторий, но и по квазичастоте p — переменной Лапласа. Начало координат выбрано внутри области локализации источника примеси. Квазийконал, квазиволновой вектор и квазичастота, в отличие от своих аналогов из геометрической оптики, являются не вещественными, а чисто мнимыми.

В итоге концентрация примеси принимает вид

$$c(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) \exp [-\Gamma(\mathbf{r}, t)], \quad (45)$$

где квазийконал $\Gamma(\mathbf{r}, t)$ определяется выражением

$$\Gamma(\mathbf{r}, t) = \min_{\{l\}, p} \left[\int_0^{\mathbf{r}} dl \kappa(p, \mathbf{r}_l) - pt \right], \quad (46)$$

а предэкспонента $A(\mathbf{r}, t)$, являясь решением линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, сводится к интегралам вдоль концентрационной траектории. Подынтегральные выражения представляют собой функции параметров среды, которые вследствие её неоднородности зависят от координат.

Принципиально важно, что вместо определения интегральных ядер, входящих в управляющие уравнения для концентрации, решение задачи требует только, чтобы было известно ограниченное число параметров. Например, в модели случайной адvection таких параметров всего три.

9. Заключение

Основные выводы, вытекающие из представленных в обзоре результатов, состоят в следующем.

С точки зрения неклассических процессов переноса сильнонеоднородные среды можно разбить на три категории: регулярно неоднородные, фрактальные и статистически однородные резко контрастные среды. В большинстве случаев с течением времени происходит смена режимов переноса в основной области локализации примеси. Убывание концентрации на расстояниях, асимптотически далёких по сравнению с размером основной области локализации, всегда является экспоненциальным. Смена режимов во времени приводит к многоступенчатой асимптотике, причём более далёкие ступени определяются более ранними режимами переноса, а самая близкая ступень определяется текущим режимом.

В регулярно неоднородных средах, состоящих из сильнопроницаемой области, окружённой в одном либо двух измерениях слабопроницаемой матрицей, могут реализоваться режимы быстрой и медленной классической диффузии, субдиффузии и квазидиффузии.

В изотропных фрактальных (перколяционных) средах с достаточно сильно действующими корреляциями скоростей адvection перенос сначала происходит в режиме супердиффузии, который на поздних временах сменяется классической диффузией (если длина корреляции конечна).

В анизотропных фрактальных средах с достаточно медленным убыванием пространственных корреляций в продольном направлении реализуется режим супердиффузии, сопровождающийся аномальным дрейфом. Характер переноса в поперечном направлении зависит от сте-

пени анизотропии. Для слабой анизотропии имеет место супердиффузия, а для сильной — классическая диффузия.

Для статистически однородных резко контрастных сред существуют длительные интервалы времени, в течение которых перенос вдоль скорости течения происходит в режиме квазидиффузии (среднее смещение частиц и размер облака примеси возрастают со временем по корневому закону), а в плоскости, перпендикулярной средней скорости, имеет место субдиффузия.

Сорбция примеси на коллоидах в резко контрастных средах может привести к значительному ускорению процесса переноса.

Перенос примеси в нестационарной жидкой среде, возникающий в условиях конвекции Рэлея – Бенара, до некоторой степени аналогичен переносу в резко контрастных средах. Для течений с квазивременными ячейками (цепочки роллов) субдиффузионный режим на малых временах сменяется диффузионным режимом на больших временах. В последнем случае эффективный коэффициент диффузии возрастает в \sqrt{Pe} раз по сравнению с молекулярным коэффициентом диффузии. Для течений в виде решётки из гексагональных ячеек эффективный коэффициент диффузии больше молекулярного коэффициента в $\ln Pe$ раз. При наличии флюктуаций течения эффективные коэффициенты диффузии могут существенно возрасти.

Присутствие слабопроницаемого заградительного однородного барьера, окружающего источник примеси, приводит к значительному замедлению режимов переноса на ранних временах. Асимптотика концентрации на далёких расстояниях приобретает дополнительную ступень, предшествующую той, которая имеет место в отсутствие барьера. Деградация барьера может привести как к модификации режима переноса на ранних временах, так и к сокращению соответствующего ему временного интервала.

На асимптотически далёких расстояниях к расчёту концентрации при переносе в средах с крупномасштабными неоднородностями применим подход, аналогичный таковому в квазиклассическом приближении (в квантовой механике) и геометрической оптике. Результат сводится к одномерным интегралам по траектории концентрационного сигнала (квазилуча), которая определяется на основе вариационного принципа — аналога принципа Ферма в геометрической оптике.

Авторы выражают благодарность Российскому научному фонду (грант № 18-19-00533) за финансовую поддержку.

Список литературы

1. Дрейзин Ю А, Дыхне А М *ЖЭТФ* **63** 242 (1973); Dreizin Yu A, Dykhne A M *Sov. Phys. JETP* **36** 127 (1973)
2. Бакунин О Г *УФН* **185** 271 (2015); Bakunin O G *Phys. Usp.* **58** 252 (2015)
3. Gu Q et al. *Phys. Rev. Lett.* **76** 3196 (1996)
4. Sher H, Lax M *Phys. Rev. B* **7** 4491 (1973)
5. Зеленый Л М, Милованов А В *УФН* **174** 809 (2004); Zelenyi L M, Milovanov A V *Phys. Usp.* **47** 749 (2004)
6. Weiss M, Hashimoto H, Nilsson T *Biophys. J.* **84** 4043 (2003)
7. Banks D S, Fradin C *Biophys. J.* **89** 2960 (2005)
8. Neuman S P *Water Resources Res.* **26** 1749 (1990)
9. Sahimi M *Phys. Rep.* **306** 213 (1998)
10. Bouchaud J-P, Georges A *Phys. Rep.* **195** 127 (1990)
11. Bolshov L, Kondratenko P, Prusse K, Semenov V *Vadose Zone J.* **7** 1135 (2008)

12. Khintchine A, Lévy P *CR Acad. Sci. Paris* **202** 374 (1936)
13. Montroll E W, Weiss G J. *Math. Phys.* **6** 167 (1965)
14. Metzler R, Klafter J *Phys. Rep.* **339** 1 (2000)
15. Sahimi M *Phys. Rev. E* **85** 016316 (2012)
16. Монин А С *ДАН СССР* **105** 256 (1955)
17. Balakrishnan V *Physica A* **132** 569 (1985)
18. Wyss W *J. Math. Phys.* **27** 2782 (1986)
19. Schneider W R, Wyss W *J. Math. Phys.* **30** 134 (1989)
20. Compte A *Phys. Rev. E* **53** 4191 (1996)
21. Чукбар К В *ЖЭТФ* **108** 1875 (1995); Chukbar K V *JETP* **81** 1025 (1995)
22. Учайкин В В *УФН* **173** 847 (2003); Uchaikin V V *Phys. Usp.* **46** 821 (2003)
23. Fisher D S *Phys. Rev. A* **30** 960 (1984)
24. Дыхне А М, Напартович А П "Перенос резонансного излучения в неоднородной плазме", Препринт (М.: ИАЭ, 1970)
25. Gevorkian Z S, Lozovik Y E *J. Phys. A* **20** L659 (1987)
26. Кравцов В Е, Лернер И В, Юдсон В И *ЖЭТФ* **91** 569 (1986); Kravtsov V E, Lerner I V, Yudson V I *Sov. Phys. JETP* **64** 336 (1986)
27. Deem M W *Phys. Rev. E* **51** 4319 (1995)
28. Шкилев В П *ЖЭТФ* **128** 655 (2005); Shkilev V P *JETP* **101** 562 (2005)
29. Lutsko J F, Boon J P *Phys. Rev. E* **77** 051103 (2008)
30. Lutsko J F, Boon J P *Phys. Rev. E* **88** 022108 (2013)
31. Calvo I, Sánchez R *J. Phys. A* **41** 282002 (2008)
32. Кляцкин В И *Динамика стохастических систем* (М.: Физматлит, 2002)
33. Кляцкин В И *Стochastic equations глазами физика* (М.: Физматлит, 2001)
34. Matheron G, De Marsily G *Water Resour. Res.* **16** 901 (1980)
35. Баренблатт Г И, Желтов Ю П, Kochina И Н *Приклад. матем. мех.* **24** 852 (1960); Barenblatt G I, Zheltov Yu P, Kochina I N *J. Appl. Math. Mekh.* **24** 1286 (1960)
36. Dykhne A M et al. *J. Hydraulic Res.* **43** 213 (2005)
37. Дворецкая О А, Кондратенко П С, Матвеев Л В *ЖЭТФ* **137** 67 (2010); Dvoretskaya O A, Kondratenko P S, Matveev L V *JETP* **110** 58 (2010)
38. Чукбар К В *ЖЭТФ* **109** 1335 (1996); Chukbar K V *JETP* **82** 719 (1996)
39. Кондратенко П С, Матвеев Л В *ЖЭТФ* **131** 494 (2007); Kondratenko P S, Matveev L V *JETP* **104** 445 (2007)
40. Dykhne A et al. *Vadose Zone J.* **7** 1145 (2008)
41. Шкловский Б И, Эфрос А Л *УФН* **117** 401 (1975); Shklovskii B I, Efros A L *Sov. Phys. Usp.* **18** 845 (1975)
42. Isichenko M B *Rev. Mod. Phys.* **64** 961 (1992)
43. Bonnet E et al. *Rev. Geophys.* **39** 347 (2001)
44. Паташинский А З, Покровский В Л *Флуктуационная теория фазовых переходов* (М.: Наука, 1975); Пер. на англ. яз.: Patashinskii A Z, Pokrovskii V L *Fluctuation Theory of Phase Transitions* (Oxford: Pergamon Press, 1979)
45. Ma Sh *Modern Theory of Critical Phenomena* (Reading, Mass.: W.A. Benjamin, 1976); Пер. на англ. яз.: Ma III *Современная теория критических явлений* (М.: Мир, 1980)
46. Dykhne A M, Dranikov I L, Kondratenko P S, Matveev L V *Phys. Rev. E* **72** 061104 (2005)
47. Драников И Л, Кондратенко П С, Матвеев Л В *ЖЭТФ* **125** 1082 (2004); Dranikov I L, Kondratenko P S, Matveev L V *JETP* **98** 945 (2004)
48. Koch D L, Brady J F *Phys. Fluids* **31** 965 (1988)
49. Koch D L, Brady J F *Phys. Fluids* **1** 47 (1989)
50. Kondratenko P S, Matveev L V *Phys. Rev. E* **75** 051102 (2007)
51. Guyer R A *Phys. Rev. B* **34** 7816 (1986)
52. Obukhov S P *Physica A* **101** 145 (1980)
53. Cardy J L, Sugar R L *J. Phys. A* **13** L423 (1980)
54. Frey E, Täuber U C, Schwabl F *Phys. Rev. E* **49** 5058 (1994)
55. Kondratenko P S, Matveev L V *Phys. Rev. E* **83** 021106 (2011)
56. Дыхне А М, Кондратенко П С, Матвеев Л В *Письма в ЖЭТФ* **80** 464 (2004); Dykhne A M, Kondratenko P S, Matveev L V *JETP Lett.* **98** 945 (2004)
57. Матвеев Л В *ЖЭТФ* **145** 754 (2014); Matveev L V *JETP* **118** 662 (2014)
58. Bolshov L, Kondratenko P, Matveev L, Pruess K *Vadose Zone J.* **7** 1152 (2008)
59. Becker M W, Shapiro A M *Water Resour. Res.* **36** 1677 (2000)
60. Gerke H H, van Genuchten M T *Water Resour. Res.* **29** 305 (1993)
61. Матвеев Л В *ЖЭТФ* **142** 943 (2012); Matveev L V *JETP* **115** 829 (2012)
62. Matveev L V *Physica A* **406** 119 (2014)
63. Румынин В Г *Геомиграционные модели в гидрогеологии* (СПб.: Наука, 2011)
64. Матвеев Л В *ЖЭТФ* **135** 1200 (2009); Matveev L V *JETP* **108** 1044 (2009)
65. Bolshov L A, Kondratenko P S, Matveev L V *Phys. Rev. E* **84** 041140 (2011)
66. Kutsepalov V A, Matveev L V *Chaos Solitons Fractals* **81** 480 (2015)
67. Matveev L V *Int. J. Heat Mass Transfer* **95** 15 (2016)
68. Solomon T H, Gollub J P *Phys. Rev.* **38** 6280 (1988)
69. Gebhart B et al. *Buoyancy-induced Flows and Transport* (Washington, D.C.: Hemisphere Publ. Corp., 1988); Пер. на русск. яз.: Гебхарт Б и др. *Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен* Т. 1, 2 (М.: Мир, 1991)
70. Дворецкая О А, Кондратенко П С *ЖЭТФ* **143** 799 (2013); Dvoretskaya O A, Kondratenko P S *JETP* **116** 698 (2013)
71. Кондратенко П С, Леонов К В *ЖЭТФ* **152** 398 (2017); Kondratenko P S, Leonov K V *JETP* **125** 340 (2017)
72. Кондратенко П С *Письма в ЖЭТФ* **106** 581 (2017); Kondratenko P S *JETP Lett.* **106** 604 (2017)
73. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Физматлит, 2005); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 2004)
74. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика: нерелятивистская теория* (М.: Физматлит, 2004); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 2004)

Nonclassical transport in highly heterogeneous and sharply contrasting media

L.A. Bolshov*, P.S. Kondratenko†, L.V. Matveev‡

Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Bol'shaya Tul'skaya 52, 115191 Moscow, Russian Federation;

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),

Institutskii per. 9, 141701 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation

E-mail: *bolshov@ibrae.ac.ru, †kondrat@ibrae.ac.ru, ‡matweev@ibrae.ac.ru

The physical models of nonclassical transport processes in highly heterogeneous media with different types of spatial distribution of characteristics are reviewed. The transport in a regularly heterogeneous, fractal and statistically homogeneous sharply contrasting, as well as in liquid media under the condition of Rayleigh – Benard convection is considered. The behavior of the impurity concentration in the main localization region and at asymptotically large distances from the source is analyzed. The effect on the transport regimes arising due to the presence of colloids, as well as the barriers surrounding the impurity source, is investigated. An asymptotic approach to the calculation of the concentration in a medium with large-scale heterogeneities in the distribution of transport characteristics is presented.

Keywords: superdiffusion, subdiffusion, concentration asymptotics, percolation media, double porosity, sorption

PACS numbers: 05.60.Cd, 66.10.C–

Bibliography — 74 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **189** (7) 691 – 702 (2019)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2018.08.038423>

Received 10 May 2018, revised 13 August 2018

Physics – Uspekhi **62** (7) (2019)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2018.08.038423>