Май 2019 г. *Том 189, № 5*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Материальные уравнения и уравнения Максвелла для изотропных сред; волны с отрицательной групповой скоростью и отрицательные значения $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$

В.П. Макаров, А.А. Рухадзе

Часто используемые уравнения Максвелла, содержащие поля $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ *и* $\mathbf{H}$, *обосновываются только в рамках линейных материальных уравнений и только для изотропных сред. Показано, что учёт отличия магнитной проницаемости* $\mu(\omega)$ *от единицы в обычно применяемом дисперсионном уравнении является превышением точности. Поэтому при пренебрежении пространственной дисперсией поперечные волны существуют лишь в областях частот с* $\varepsilon(\omega) > 0$ *и имеют положительную групповую скорость.*

Ключевые слова: тензор проводимости, тензор диэлектрической проницаемости, изотропные среды, диэлектрическая и магнитная проницаемости, фазовая и групповая скорости поперечной электромагнитной волны

PACS numbers: 03.50.De, 41.20.Jb DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2019.01.038522

Содержание

1. Введение

История проблемы, которая обсуждается в настоящей статье, достаточно полно — начиная с работ Л.И. Мандельштама, изложена в обзоре В.М. Аграновича и Ю.Н. Гарштейна [1]. В [2] Л.И. Мандельштам обратил внимание на один из возможных отборов физически реализуемых решений уравнений Максвелла. Согласно [2] поле в равновесной среде вдали от источника должно удовлетворять условию: поток энергии направлен от источника. Следуя [3], мы называем это условие принципом излучения Мандельштама. Используя этот принцип, Мандельштам указал на интересную особенность преломления монохроматической плоской волны на границе раздела двух изотропных сред. Если волны в обеих средах имеют положительную (или отрицательную) групповую скорость [1], то преломление — "обычное": преломлённый и падающий лучи лежат по разные стороны от нормали к поверхности раздела. Если же групповая скорость волны в одной из сред положительна, а в другой — отрицательна, то преломление — "необычное": преломлённый и падающий лучи лежат по одну сторону от нормали к поверхности раздела. Теперь это преломление называют отрицательным преломлением [1].

Вопрос о знаке групповой скорости волны в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu(\omega)$ был решён Д.В. Сивухиным [4] и В.Е. Пафомовым [5]. Дисперсионное уравнение для поперечной электромагнитной волны выражается в виде [6, § 83]

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\, \varepsilon(\omega)\, \mu(\omega). \tag{1.1}$$

[1] Везде, где не оговорено особо, рассматривается изотропная среда. В изотропной среде групповая и фазовая скорость волны либо параллельны, либо антипараллельны; считается, что в первом случае групповая скорость положительна, а во втором — отрицательна.

В.П. Макаров [1,2,3], **А.А. Рухадзе** [1,2]
[1] Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, ул. Вавилова 38, 119991 Москва, Российская Федерация
[2] Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Институтский пер. 9, 141701 Долгопрудный, Московская обл., Российская Федерация
[3] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская ул. 5, 105005 Москва, Российская Федерация
E-mail: vpmac@ran.gpi.ru

Статья поступила 17 июля 2017 г., после доработки 27 декабря 2018 г.

При пренебрежении диссипацией энергии поля (т.е. при вещественных $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$) волна не затухает (т.е. волновой вектор $\mathbf{k}$ — вещественный, $\mathbf{k}^2 > 0$), если произведение $\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega) > 0$, т.е. если $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega) > 0$ или $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega) < 0$. Из (1.1) следует соотношение между групповой и фазовой скоростями волны:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{gr}} = \frac{\partial\,\omega}{\partial\,\mathbf{k}} = \frac{2\omega\,\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)}{\partial(\omega^2\varepsilon\,\mu)/\partial\omega}\,\mathbf{v}_{\mathrm{ph}}\,,$$
$$\mathbf{v}_{\mathrm{ph}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)}}\,\frac{\mathbf{k}}{k}\,. \tag{1.2}$$

Плотность энергии поперечной волны [6, § 83]

$$\overline{U} = \frac{1}{8\pi\,\omega\,\mu(\omega)}\,\frac{\partial\omega^2\varepsilon\,\mu}{\partial\omega}\,\overline{E^2}\,, \tag{1.3}$$

где $\overline{E^2}$ — средний по периоду $2\pi/\omega$ квадрат напряжённости электрического поля. Так как в равновесной среде $\overline{U} > 0$ [6, § 80], из (1.2) и (1.3) следуют условия Сивухина [4]:

$$\varepsilon(\omega),\ \mu(\omega) > 0 \Rightarrow \mathbf{v}_{\mathrm{gr}} \uparrow\uparrow \mathbf{v}_{\mathrm{ph}}\,,$$
$$\varepsilon(\omega),\ \mu(\omega) < 0 \Rightarrow \mathbf{v}_{\mathrm{gr}} \uparrow\downarrow \mathbf{v}_{\mathrm{ph}}\,. \tag{1.4}$$

Заметим, что формулы (1.1)–(1.4) являются следствием только уравнений Максвелла [6, § 77]

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0\,,\ \ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,,\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0\,,\ \ \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{1.5}$$

и материальных уравнений, которые для монохроматических полей имеют вид [6, § 77]

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu(\omega)\,\mathbf{H}\,. \tag{1.6}$$

В ряде работ, опубликованных после обзора [1], особое место занимает статья С.Г. Раутиана [7], на которую мы уже обращали внимание в [8]. Наиболее впечатляющий результат работы [7] состоит в следующем утверждении: в однородной изотропной среде, характеризующейся диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu(\omega)$, в оптической области спектра волны с отрицательной групповой скоростью не существуют. Отрицательная групповая скорость волн в экспериментально исследуемых материалах обусловлена, согласно [7, с. 1023], не отрицательными значениями $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$, а периодической неоднородностью среды.

Нам казалось, что работа С.Г. Раутиана [7] вызовет широкое обсуждение, но она осталась, по существу, не замеченной. Например, в обзорах [9, 10] статья [7] даже не упоминается (хотя в [9] обсуждается уже практическое применение волн с отрицательной групповой скоростью). Это тем более удивительно, что доказательство того, что групповая скорость волны может быть только положительной, в [7], по существу, отсутствует. Автор [7] напоминает, что сам Д.В. Сивухин в статье [4] писал: "Среды с $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$ не известны. Вопрос о принципиальной возможности существования таких сред не выяснен". С.Г. Раутиан продолжает [7, с. 1023]: "За прошедшие с тех пор более чем 50 лет положение дел не изменилось и, уверен, не изменится никогда — в оптической области спектра существование непрерывных однородных сред с $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$ невозможно". Это утверждение, в котором автор уверен, никак в [7] не обсуждается, т.е. имеет характер некоторого постулата. Из этого постулата и условий Сивухина (1.4) положительность групповой скорости волны получается как прямое следствие.

Следует заметить, что задолго до опубликования [7] Д.В. Сивухин без объяснения причины, по существу, отказался от своего результата (1.4). В книге *Оптика*, на которую в [7] присутствует ссылка по другому поводу, Д.В. Сивухин без доказательства утверждает [11, § 64]: "Можно показать, что в случае электромагнитных волн в изотропных средах направления распространения фазы и энергии совпадают", а при выводе формул Френеля предупреждает читателя о том, что "$\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ существенно положительны" [11, § 67]. В связи с этим отметим недавно опубликованную работу [12], в которой обсуждаются формулы Френеля при отрицательных значениях $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$.

Цель настоящей статьи — без привлечения каких-либо дополнительных постулатов типа постулата Раутиана [7] ответить на вопрос: может ли поперечная электромагнитная волна распространяться в изотропной среде, если на частоте волны ω диэлектрическая и магнитная проницаемости среды $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ отрицательны? В качестве первого шага мы приведём решение задачи о распространении электромагнитного импульса от квазимонохроматического источника в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu(\omega)$.

2. Излучение квазимонохроматического источника в изотропной среде

Пусть в рассматриваемой области среды находится источник поля, с которым связана плотность зарядов $\rho_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r}, t)$ и плотность создаваемого ими тока $\mathbf{j}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r}, t)$. Вместо уравнений (1.5) теперь имеем уравнения [6, § 75]

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\mathrm{ext}}\,, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,,$$
$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0\,, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_{\mathrm{ext}}\,. \tag{2.1}$$

Закон сохранения сторонних (по отношению к среде) зарядов, связанных с источником, — уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho_{\mathrm{ext}}}{\partial t} + \operatorname{div}\,\mathbf{j}_{\mathrm{ext}} = 0 \tag{2.2}$$

получается из первого и четвёртого уравнений в (2.1).

Будем полагать, что источник — квазимонохроматический:

$$\rho_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\rho^{(0)}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r}, t)\exp\,(-\mathrm{i}\,\omega t)\,,$$
$$\mathbf{j}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\,\mathbf{j}^{(0)}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r}, t)\exp\,(-\mathrm{i}\,\omega t)\,, \tag{2.3}$$

где $\rho^{(0)}_{\mathrm{ext}}$ и $\mathbf{j}^{(0)}_{\mathrm{ext}}$ — медленные (по сравнению с $\exp\,(-\mathrm{i}\,\omega t)$) функции времени: если эти функции характеризуются некоторым временем τ, то

$$\frac{1}{\omega\tau} \ll 1\,. \tag{2.4}$$

Уравнения (2.1) — линейные, материальные уравнения — также линейные. Следовательно, поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ имеют вид, аналогичный (2.3): например, $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \operatorname{Re}\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r},t)\exp(-\mathrm{i}\,\omega t)$.

Полагая, что диссипация энергии поля в среде пренебрежимо мала (диэлектрическая и магнитная проницаемости вещественные), в нулевом приближении по параметру (2.4) материальные уравнения записываем в виде (1.6). Тогда уравнения (2.1) сводятся к уравнениям для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)}\,\rho_{\text{ext}}\,, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\mu(\omega)}{c}\,\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\,,\\ &\operatorname{div}\mathbf{H} = 0\,, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\varepsilon(\omega)}{c}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_{\text{ext}}\,.\end{aligned} \tag{2.5}$$

По аналогии с [13, § 17] вводим векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ и скалярный потенциал $\varphi(\mathbf{r},t)$ так, чтобы удовлетворялись второе и третье уравнения в (2.5):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \operatorname{rot}\mathbf{A}\,, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu(\omega)}{c}\,\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon(\omega)}\nabla\varphi\,. \tag{2.6}$$

При этом первое и четвёртое уравнения в (2.5) приводятся к уравнениям для φ и $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}&\nabla^2\varphi + \frac{\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A} = -4\pi\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)\,,\\ &\nabla^2\mathbf{A} - \frac{\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)}{c^2}\,\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\frac{1}{c}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A}\right) =\\ &\qquad = -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)\,.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Выбор потенциалов $\mathbf{A}$ и φ в (2.6) не однозначен (см. [13, § 18]): потенциалы

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla f\,, \quad \tilde{\varphi} = \varphi - \frac{\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)}{c}\,\frac{\partial f}{\partial t}\,, \tag{2.8}$$

где $f(\mathbf{r},t)$ — произвольная функция, дают для полей $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ те же выражения, что и потенциалы $\mathbf{A}$ и φ. Функцию $f(\mathbf{r},\mathbf{t})$ в (2.8) выберем так, чтобы удовлетворялось условие Лоренца [13, § 46]

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0\,. \tag{2.9}$$

При этом уравнения (2.7) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}&\nabla^2\varphi - \frac{\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)}{c^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)\,,\\ &\nabla^2\mathbf{A} - \frac{\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)}{c^2}\,\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)\,,\end{aligned} \tag{2.10}$$

В нулевом приближении по параметру (2.4) $\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2 = -\omega^2\mathbf{A}, \partial^2\varphi/\partial t^2 = -\omega^2\varphi$ и уравнения (2.10) вне источника — это уравнения для монохроматической волны, которую в небольших участках пространства на достаточном удалении от источника можно рассматривать как плоскую [13, § 66], причём волновой вектор и частота связаны дисперсионным уравнением (1.1). Чтобы поле не затухало, необходимо выполнение неравенства $\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega) > 0$.

Решение уравнений (2.10) аналогично решению такой же задачи для излучения в вакууме [13, § 62] — в виде запаздывающих или опережающих потенциалов:

$$\begin{aligned}&\varphi(\mathbf{r},t) = \int\frac{\mathrm{d}V'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\rho_{\text{ext}}\left(\mathbf{r}',t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v_{\text{ph}}}\right),\\ &\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int\frac{\mathrm{d}V'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathbf{j}_{\text{ext}}\left(\mathbf{r}',t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v_{\text{ph}}}\right),\end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\mathrm{d}V' = \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'$, $v_{\text{ph}} = \omega\sqrt{\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)}/c$ — фазовая скорость волны. Используя уравнение непрерывности (2.2), можно проверить, что условие Лоренца (2.9) с φ и $\mathbf{A}$ из (2.11) удовлетворяется при любом (но одинаковом в φ и $\mathbf{A}$) знаке перед $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v_{\text{ph}}$.

Обозначим как a порядок величины линейных размеров источника. На большом расстоянии r от источника, таком что

$$\frac{a}{r} \ll 1\,, \tag{2.12}$$

функции φ и $\mathbf{A}$ (2.11) в нулевом приближении по параметру (2.12) представляются в виде [13, § 66]

$$\begin{aligned}&\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{r}\int\mathrm{d}V'\rho_{\text{ext}}\left(\mathbf{r}',t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v_{\text{ph}}}\right),\\ &\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{cr}\int\mathrm{d}V'\,\mathbf{j}_{\text{ext}}\left(\mathbf{r}',t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v_{\text{ph}}}\right).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Временем $\sim a/v_{\text{ph}}$ в $t \mp |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v_{\text{ph}} \approx t \mp r/v_{\text{ph}} \pm \mathbf{r}\,\mathbf{r}'/(r\,v_{\text{ph}})$ можно пренебречь, если за это время распределение зарядов в источнике заметно не изменяется, т.е. если $a/v_{\text{ph}} \ll 1/\omega$. Это условие равносильно условию [13, § 66]

$$\frac{a}{\lambda} \ll 1\,, \tag{2.14}$$

где $\lambda = 2\pi v_{\text{ph}}/\omega$ — длина волны в среде. Из (2.13) в нулевом приближении по малому параметру (2.14) находим [13, § 66]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{cr}\int\mathrm{d}V'\,\mathbf{j}_{\text{ext}}\left(\mathbf{r}',t \mp \frac{r}{v_{\text{ph}}}\right) = \frac{1}{cr}\,\dot{\mathbf{d}}\left(t \mp \frac{r}{v_{\text{ph}}}\right), \tag{2.15}$$

где дипольный момент источника

$$\mathbf{d}(t) = \int\mathrm{d}V\,\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r},t)\,\mathbf{r}\,. \tag{2.16}$$

В выражении для $\varphi(\mathbf{r},t)$ (2.13) необходимо сохранить и член первого порядка по параметру (2.14); полагая, что полный заряд источника равен нулю, находим

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \pm\,\mathbf{r}\,\dot{\mathbf{d}}\left(t \mp \frac{r}{v_{\text{ph}}}\right)\frac{1}{r^2}\,. \tag{2.17}$$

Подставляя в формулы (2.6) потенциалы (2.15) и (2.17), получаем выражения для полей на расстояниях от источника $r \gg \lambda \gg a$ (см. (2.12) и (2.14)):

$$\begin{aligned}&\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \pm\,\frac{1}{crv_{\text{ph}}}\,\ddot{\mathbf{d}}\left(t \mp \frac{r}{v_{\text{ph}}}\right) \times \frac{\mathbf{r}}{r}\,,\\ &\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \pm\,\frac{\mu(\omega)\,v_{\text{ph}}}{c}\,\mathbf{H}(\mathbf{r},t) \times \frac{\mathbf{r}}{r}\,.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Используя эти выражения, находим вектор плотности потока энергии (вектор Умова – Пойнтинга) [6, § 80]:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{H} = \pm\,\mu(\omega)\,v_{\text{ph}}H^2(\mathbf{r},t)\,\frac{\mathbf{r}}{4\pi r}\,. \tag{2.19}$$

В соответствии с принципом Мандельштама (см. раздел 1) поток энергии на большом расстоянии от источника направлен от него: $\mathbf{S}\uparrow\uparrow\mathbf{r}$. Поэтому, согласно (2.19), во всех формулах надо брать верхний знак, если $\mu(\omega)>0$, и — нижний, если $\mu(\omega)<0$. Окончательные выражения для полей и плотности потока энергии имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\pm\frac{1}{cv_{\rm ph}r}\,\ddot{\mathbf{d}}\left(t\mp\frac{r}{v_{\rm ph}}\right)\times\frac{\mathbf{r}}{r}\,,\\
&\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\sqrt{\frac{\mu(\omega)}{\varepsilon(\omega)}}\,\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\times\frac{\mathbf{r}}{r}\,,\\
&\mathbf{S}(\mathbf{r},t)=\frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu(\omega)}{\varepsilon(\omega)}}\,H^2(\mathbf{r},t)\,\frac{\mathbf{r}}{r}\,,
\end{aligned}\tag{2.20}$$

где верхний (нижний) знак относится к случаю $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)>0$ $(\varepsilon(\omega),\,\mu(\omega)<0)$. Напомним, что $\mathbf{d}(t)=\mathrm{Re}\,\mathbf{d}^{(0)}(t)\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, где $\mathbf{d}^{(0)}(t)$ — медленная (по сравнению с $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$) функция.

Из (2.20) получается, что поток энергии от источника в среде, для которой $\varepsilon(\omega)<0$ и $\mu(\omega)<0$, принимаемый в некоторый момент времени t, определяется движением зарядов в источнике, которое ещё только состоится в будущем в момент $t+r/v_{\rm ph}$, — в противоречии с принципом причинности следствие опережает причину[2].

Таким образом, дисперсионное уравнение (1.1) неприменимо для всех сред в области частот, где диэлектрическая и магнитная проницаемости принимают отрицательные значения. Но дисперсионное уравнение (1.1), как отмечалось в разделе 1, непосредственно следует из уравнений Максвелла (1.5) и материальных уравнений (1.6). Для того чтобы найти причину ошибочности дисперсионного уравнения (1.1) и получить правильное дисперсионное уравнение, надо выяснить, как материальные уравнения (1.6) появляются в теории электромагнитного поля. Мы будем обсуждать этот вопрос, следуя [6, 16–18].

3. Уравнения Максвелла и материальные уравнения для изотропной среды

Исходим из уравнений электромагнитного поля в виде уравнений Максвелла – Лоренца [16, § 27; 17, § 1; 18, § 1]

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\,\mathbf{E}=4\pi\rho\,,\quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,,\\
&\mathrm{div}\,\mathbf{B}=0\,,\quad \mathrm{rot}\,\mathbf{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}\,,
\end{aligned}\tag{3.1}$$

где (в отсутствие сторонних зарядов) ρ и $\mathbf{j}$ — средняя плотность зарядов и средняя плотность тока зарядов среды (средние величины в том смысле, что флуктуации не учитываются [18, § 1]). Напряжённость электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитная индукция $\mathbf{B}$ определяются выражением для силы, действующей на точечный заряд q, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$ (силы Лоренца),

$$\mathbf{F}=q\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right).\tag{3.2}$$

В первом и четвёртом уравнениях (3.1) содержится закон сохранения зарядов среды

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\mathbf{j}=0\,.\tag{3.3}$$

Уравнения (3.1) можно представить в эквивалентном виде, "более обычном для макроскопической электродинамики" [16, § 28], если в правую часть четвёртого уравнения ввести вектор $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},t)$, называемый, как и $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$, электрической индукцией [6, § 103; 17, § 1]:

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{D}}}{\partial t}=\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+4\pi\mathbf{j}\,.\tag{3.4}$$

Интегрируя (3.4), получаем (см. [17, § 1])

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+4\pi\int_{-\infty}^{t}\mathbf{j}(\mathbf{r},t')\,\mathrm{d}t'+4\pi\,\mathbf{P}^{(-)}(\mathbf{r})\,,\tag{3.5}$$

где $\mathbf{P}^{(-)}(\mathbf{r})$ — пока произвольный не зависящий от времени вектор. Учитывая первое уравнение в (3.1) и уравнение непрерывности (3.3) и требуя выполнения условия

$$\mathrm{div}\,\mathbf{P}^{(-)}=-\rho^{(-)}(\mathbf{r})\,,\tag{3.6}$$

где $\rho^{(-)}(\mathbf{r})\equiv\rho(\mathbf{r},t=-\infty)$, находим, что $\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{D}}=0$. Таким образом, наряду с системой уравнений (3.1) справедлива эквивалентная ей система уравнений[3] [6, § 103; 16, § 28; 17, § 1; 18, § 1]:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{D}}=0\,,\quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,,\\
&\mathrm{div}\,\mathbf{B}=0\,,\quad \mathrm{rot}\,\mathbf{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{\mathbf{D}}}{\partial t}\,,
\end{aligned}\tag{3.7}$$

в которой $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},t)$ определяется согласно (3.5) и (3.6). К уравнению (3.6), учитывая электрическую нейтральность всей среды, следует добавить условие, что вне среды (в вакууме, где $\rho^{(-)}(\mathbf{r})=0$) $\mathbf{P}^{(-)}(\mathbf{r})=0$ [6, §§ 6, 77]. Заметим, что при этом вектор $\mathbf{P}^{(-)}(\mathbf{r})$ ещё не определяется однозначным образом: в области внутри вещества к нему можно прибавить любой вектор вида $\mathrm{rot}\,\mathbf{f}$ [6, § 6].

Разлагая все величины в (3.7) в интегралы Фурье по времени и пространству, можно получить соотношения между соответствующими фурье-компонентами:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{k}\,\tilde{\mathbf{D}}_{\omega\mathbf{k}}=0\,,\quad \mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}=\frac{\omega}{c}\,\mathbf{B}_{\omega\mathbf{k}}\,,\\
&\mathbf{k}\,\mathbf{B}_{\omega\mathbf{k}}=0\,,\quad \mathbf{k}\times\mathbf{B}_{\omega\mathbf{k}}=-\frac{\omega}{c}\,\tilde{\mathbf{D}}_{\omega\mathbf{k}}\,.
\end{aligned}\tag{3.8}$$

Аналогично из (3.5) находим (см. [17, § 2]):

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\omega\mathbf{k}}=\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}+8\pi^2\,\mathbf{j}_{\omega\mathbf{k}}\delta_+(\omega)+4\pi\delta(\omega)\,\mathbf{P}^{(-)}_{\mathbf{k}}\,,\tag{3.9}$$

где [19, § 5]

$$\delta_+(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\exp(\mathrm{i}\omega t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\delta(\omega)+\frac{\mathrm{i}}{2\pi\omega}\,,\tag{3.10}$$

[2] Заметим, что рассмотренная задача решалась в статьях [14, 15]; согласно [14, 15], излучение в среде с отрицательными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей направлено к источнику!

[3] Уравнения Максвелла в такой форме представлены ещё в первом (1957 г.) издании [6] в § 83.

особенность при $\omega = 0$ в последнем слагаемом следует понимать в смысле главного значения. Рассматривая переменные во времени поля, слагаемые с $\delta(\omega)$ в (3.9) будем опускать [6, § 96] и полагать, что

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\omega\mathbf{k}} = \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} + \frac{4\pi\,\mathrm{i}}{\omega}\,\mathbf{j}_{\omega\mathbf{k}}\,. \tag{3.11}$$

Переход от уравнений Максвелла в виде (3.7) для трёх полей, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и $\tilde{\mathbf{D}}$, к уравнениям Максвелла в виде (1.5) для четырёх полей, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$, осуществляется разбиением тока $\mathbf{j}$ на часть, связанную с поляризацией $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$, и часть, связанную с намагниченностью $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ [6, § 79; 17, § 2; 18, § 1],

$$\mathbf{j}\,(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial(\tilde{\mathbf{D}}-\mathbf{E})}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}\,, \tag{3.12}$$

после чего вводятся поля

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + 4\pi\,\mathbf{P}(\mathbf{r},t)\,,$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}(\mathbf{r},t) - 4\pi\,\mathbf{M}(\mathbf{r},t) \tag{3.13}$$

и получаются уравнения (1.5).

Векторы $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ определяются так же, как в теории статических полей. Поляризация $\mathbf{P}$ определяется так, чтобы выполнялись условия [6, § 6]

$$\mathrm{div}\,\mathbf{P} = -\rho(\mathbf{r}) \tag{3.14}$$

и $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = 0$ вне тела. Доказывается, что сама поляризация — это дипольный момент единицы объёма в том смысле, что взятый по всему объёму тела интеграл

$$\int \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V = -\int \mathbf{r}\,\mathrm{div}\,\mathbf{P}\,\mathrm{d}V = \int \mathbf{P}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V. \tag{3.15}$$

И в переменных полях определение (3.14) не противоречит равенству (3.12) и уравнению непрерывности (3.3) [6, § 77]. Намагниченность $\mathbf{M}$ определяется так, что [6, § 29]

$$c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M} = \mathbf{j} \tag{3.16}$$

и $M = 0$ вне тела. Доказывается, что сама намагниченность — это магнитный момент единицы объёма в том смысле, что взятый по всему объёму тела интеграл

$$\frac{1}{2c}\int \mathbf{r}\times\mathbf{j}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int \mathbf{r}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{M}\,\mathrm{d}V = \int \mathbf{M}\,\mathrm{d}V. \tag{3.17}$$

Из (3.12) видно, что определение (3.16), введённое в статическом пределе, в переменном поле не пригодно и $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ не может рассматриваться как магнитный момент единицы объёма [6, § 79]. Таким образом, вопрос о корректности равенства (3.12) (и, следовательно, уравнений (1.5)) сводится к вопросу о смысле, который имеет вектор $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$. Далее мы покажем, как этот вопрос можно решить в рамках линейной электродинамики однородной изотропной среды.

Материальное уравнение для однородной среды, находящейся в стационарных условиях, в линейном приближении имеет вид [4] [6, § 103; 17, § 2]

$$j_i\,(\mathbf{r},t) = \int \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}V' g_{ij}\,(t-t',\,\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,E_j\,(\mathbf{r}',t')\,. \tag{3.18}$$

[4] По всем дважды повторяющимся индексам $i,j,l\ldots = x,y,z$ везде подразумевается суммирование.

Для соответствующих фурье-компонент получается соотношение

$$j_{i\omega\mathbf{k}} = \sigma_{ij}\,(\omega,\mathbf{k})\,E_{j\omega\mathbf{k}}\,, \tag{3.19}$$

где тензор проводимости

$$\sigma_{ij}\,(\omega,\mathbf{k}) = \int \mathrm{d}V \exp\,(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}) \int \mathrm{d}t \exp\,(\mathrm{i}\omega t)\,g_{ij}\,(t,\mathbf{r})\,. \tag{3.20}$$

Из (3.11) и (3.19) следует, что

$$\tilde{D}_{i\omega\mathbf{k}} = \varepsilon_{ij}\,(\omega,\mathbf{k})\,E_{j\omega\mathbf{k}}\,, \tag{3.21}$$

где тензор диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{ij}\,(\omega,\mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi\mathrm{i}}{\omega}\,\sigma_{ij}\,(\omega,\mathbf{k})\,. \tag{3.22}$$

Для изотропной и обладающей центром симметрии (негиротропной) среды тензор диэлектрической проницаемости представляется в виде [6, § 103; 16, § 28; 17, § 2; 18, § 1]

$$\varepsilon_{ij}\,(\omega,\mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\varepsilon^{\mathrm{tr}}\,(\omega,k) + \frac{k_i k_j}{k^2}\,\varepsilon^{\mathrm{l}}\,(\omega,k)\,, \tag{3.23}$$

где $\varepsilon^{\mathrm{tr}}$ и ε^{l} — функции абсолютной величины волнового вектора (и частоты). В аналогичном виде записывается и тензор проводимости с соответствующими функциями $\sigma^{\mathrm{tr}}(\omega,k)$ и $\sigma^{\mathrm{l}}(\omega,k)$. Вектор $\tilde{\mathbf{D}}_{\omega\mathbf{k}}$ (3.21) с $\varepsilon_{ij}\,(\omega,\mathbf{k})$ из (3.23) представляется в виде

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\omega\mathbf{k}} = \frac{1}{k^2}\left[\varepsilon^{\mathrm{l}}\,(\omega,k)\mathbf{k}\,(\mathbf{k}\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}) + \varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega,k)\,\mathbf{k}\times(\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}\times\mathbf{k})\right]. \tag{3.24}$$

Решения уравнений (3.8) с $\tilde{\mathbf{D}}_{\omega\mathbf{k}}$ из (3.24) — это продольные и поперечные волны с соответствующими дисперсионными уравнениями [6, §§ 105, 106; 17, § 6]:

$$\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega,k) = 0\,,\quad \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} \uparrow\uparrow \mathbf{k}\,, \tilde{\mathbf{D}}_{\omega\mathbf{k}} = 0\,,\quad \mathbf{B}_{\omega\mathbf{k}} = 0\,, \tag{3.25}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega,k)\,,\quad \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} \perp \mathbf{k}\,,\quad \mathbf{B}_{\omega\mathbf{k}} \perp \mathbf{k}\,,\quad \mathbf{B}_{\omega\mathbf{k}} \perp \mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}\,, \tag{3.26}$$

поэтому $\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega,k)$ называют продольной диэлектрической проницаемостью, а $\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega,k)$ — поперечной.

Заметим, что для гиротропной (не обладающей центром симметрии) изотропной среды в тензоре (3.23) добавляется слагаемое [6, § 104; 18, § 1]

$$\mathrm{i}\,\frac{c}{\omega}\,f(\omega,k)\,e_{ijl}\,k_l\,, \tag{3.27}$$

где f — псевдоскаляр, а в $\tilde{\mathbf{D}}_{\omega\mathbf{k}}$ (3.24) добавляется слагаемое $\mathrm{i}\,(c/\omega) f(\omega,k)\,\mathbf{E}_{\omega k}\times\mathbf{k}$.

Используя второе уравнение из (3.8), равенство (3.24) можно записать в другом виде:

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\omega\mathbf{k}} = \varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega,k)\,\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}} - \frac{\omega}{ck^2}\left[\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega,k) - \varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega,k)\right]\mathbf{k}\times\mathbf{B}_{\omega\mathbf{k}}\,. \tag{3.28}$$

С этим выражением для $\tilde{\mathbf{D}}_{\omega\mathbf{k}}$ четвёртое уравнение в (3.8) принимает следующий вид:

$$\left[1-\frac{\omega^2}{c^2k^2}\left(\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega,k)-\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega,k)\right)\right]\mathbf{B}_{\omega\mathbf{k}}= \\ =-\frac{\omega}{c}\,\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega,k)\,\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}\,. \tag{3.29}$$

Вместо двух функций, $\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega,k)$ и $\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega,k)$, характеризующих тензор диэлектрической проницаемости изотропной среды (3.23), можно ввести их две любые комбинации. Из (3.29) видно, что удобно ввести функции $\varepsilon(\omega,k)$ и $\mu(\omega,k)$, которые называются просто диэлектрической проницаемостью и магнитной проницаемостью среды:

$$\begin{aligned}&\varepsilon(\omega,k)=\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega,k)\,,\\ &\frac{1}{\mu(\omega,k)}=1-\frac{\omega^2}{c^2k^2}\left(\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega,k)\,-\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega,k)\right).\end{aligned} \tag{3.30}$$

После того как введены $\varepsilon(\omega,k)$ и $\mu(\omega,k)$ согласно (3.30), можно ввести векторы

$$\mathbf{D}_{\omega\mathbf{k}}=\varepsilon(\omega,k)\,\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}\,,\quad \mathbf{H}_{\omega\mathbf{k}}=\frac{1}{\mu(\omega,k)}\mathbf{B}_{\omega\mathbf{k}}\,, \tag{3.31}$$

так что (см. (3.28), (3.30) и (3.31))

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\omega\mathbf{k}}=\mathbf{D}_{\omega\mathbf{k}}-\frac{c}{\omega}\left(\mu(\omega,k)-1\right)\mathbf{k}\times\mathbf{H}_{\omega\mathbf{k}}\,. \tag{3.32}$$

(В гиротропных средах $\mathbf{D}_{\omega\mathbf{k}}$ содержит ещё слагаемое $\mathrm{i}(c/\omega)f(\omega,k)\,\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}\times\mathbf{k}$.)

При учёте (3.32) уравнения (3.8) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}&\mathbf{k}\mathbf{D}_{\omega\mathbf{k}}=0\,,\quad \mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}=\frac{\omega}{c}\,\mathbf{B}_{\omega\mathbf{k}}\,,\\ &\mathbf{k}\mathbf{B}_{\omega\mathbf{k}}=0\,,\quad \mathbf{k}\times\mathbf{H}_{\omega\mathbf{k}}=-\frac{\omega}{c}\,\mathbf{D}_{\omega\mathbf{k}}\,.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Дифференциальные уравнения для самих полей $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$, и $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ получаются из (3.33) и имеют вид (1.5).

Из (3.11), (3.31) и (3.32) следует, что

$$\mathbf{j}_{\omega\mathbf{k}}=-\mathrm{i}(\omega\mathbf{P}_{\omega\mathbf{k}}-c\mathbf{k}\times\mathbf{M}_{\omega\mathbf{k}})\,, \tag{3.34}$$

где фурье-компоненты поляризации $\mathbf{P}_{\omega\mathbf{k}}$ и намагниченности $\mathbf{M}_{\omega\mathbf{k}}$ определяются согласно равенствам

$$\mathbf{P}_{\omega\mathbf{k}}=\kappa(\omega,k)\,\mathbf{E}_{\omega\mathbf{k}}\,,\quad \mathbf{M}_{\omega\mathbf{k}}=\frac{\chi(\omega,k)}{\mu(\omega,k)}\,\mathbf{B}_{\omega\mathbf{k}}\,, \tag{3.35}$$

в которые введены диэлектрическая и магнитная восприимчивости

$$\begin{aligned}&\kappa(\omega,k)=\frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon(\omega,k)-1\right),\\ &\chi(\omega,k)=\frac{1}{4\pi}\left(\mu(\omega,k)-1\right).\end{aligned} \tag{3.36}$$

Из (3.34) непосредственно следует равенство (3.12), в котором поляризация $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ и намагниченность $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ определяются из (3.35).

Дисперсионное уравнение (3.26) для поперечных волн в изотропной негиротропной среде можно выразить через $\varepsilon(\omega,k)$ и $\mu(\omega,k)$. Из (3.30) и (3.26) находим, что для поперечной волны

$$\mu(\omega,k)=\frac{\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega,k)}{\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega,k)} \tag{3.37}$$

и дисперсионное уравнение выражается как

$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon(\omega,k)\,\mu(\omega,k)\,. \tag{3.38}$$

4. Диэлектрическая и магнитная проницаемости $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$

Пренебрежение пространственной дисперсией в тензоре проводимости σ_{ij} (3.20) и в тензоре диэлектрической проницаемости ε_{ij} (3.22) означает, что ток $\mathbf{j}(\mathbf{r},\mathbf{t})$ и индукция $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r},t)$ в точке $\mathbf{r}$ определяются полем $\mathbf{E}$ только в этой точке. Для этого необходимо считать, что функция $g_{ij}(t,\mathbf{r})$ в (3.18) пропорциональна $\delta(\mathbf{r})$. Тогда σ_{ij} и ε_{ij} не зависят от $\mathbf{k}$ и являются функциями только частоты ω, учитывающими частотную дисперсию: $\sigma_{ij}(\omega)$ и $\varepsilon_{ij}(\omega)$. Для изотропных сред $\varepsilon_{ij}(\omega)$ сводится к некоторой скалярной функции $\tilde{\varepsilon}(\omega)$:

$$\varepsilon_{ij}(\omega)=\tilde{\varepsilon}(\omega)\,\delta_{ij}\,. \tag{4.1}$$

На самом деле функция

$$f_{ij}(\omega,\mathbf{r})=\int \mathrm{d}t\,\exp\left(\mathrm{i}\omega t\right)g_{ij}\left(t,\mathbf{r}\right), \tag{4.2}$$

стоящая множителем при $\exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r})$ в (3.20), существенно убывает на некотором конечном расстоянии[5] $a_0(\omega)$ [6, § 103]. При $k\gg 1/a_0(\omega)$ тензор проводимости

$$\sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k})=\int \mathrm{d}V\exp\left(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}\right)f_{ij}(\omega,\mathbf{r}) \tag{4.3}$$

обращается в нуль (см. (3.22)):

$$\sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k})\big|_{k\to\infty}=0\,,\quad \varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})\big|_{k\to\infty}=\delta_{ij}\,. \tag{4.4}$$

При $k\ll 1/a_0(\omega)$ экспоненциальный множитель в (4.3) можно разложить в ряд: $\exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r})=1-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}+\ldots$ и представить $\sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})$ в виде ряда по степеням $\mathbf{k}$, точнее по степеням малого параметра

$$\frac{k}{k_0(\omega)}\ll 1\,,\quad k_0(\omega)=\frac{1}{a_0(\omega)}\,. \tag{4.5}$$

Слагаемые, не содержащие параметра (4.5), соответствуют пренебрежению пространственной дисперсией:

$$\varepsilon_{ij}(\omega)=\varepsilon_{ij}(\omega,0)\,. \tag{4.6}$$

Для $\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega)\equiv\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega,0)$ и $\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega)\equiv\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega,0)$ изотропной среды (см. (3.23)), учитывая (4.1) и (3.30), имеем [6, § 103; 17, § 3]:

$$\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega)=\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega)=\varepsilon(\omega)=\tilde{\varepsilon}(\omega),\ \varepsilon_{ij}(\omega)=\varepsilon(\omega)\,\delta_{ij}\,. \tag{4.7}$$

[5] Это расстояние может быть различным для различных компонентов тензора f_{ij} [6, § 103].

Действительно, из (3.23) находим:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{ii}(\omega,\mathbf{k})=2\,\varepsilon^{\rm tr}(\omega,k)+\varepsilon^{\rm l}(\omega,k)\,,\\ &\frac{k_ik_j}{k^2}\,\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})=\varepsilon^{\rm l}(\omega,k)\,,\end{aligned}\tag{4.8}$$

а из (4.1) получаем соотношения

$$\varepsilon_{ii}(\omega)=3\tilde{\varepsilon}(\omega)\,,\quad \frac{k_ik_j}{k^2}\varepsilon_{ij}(\omega)=\tilde{\varepsilon}(\omega)\,.\tag{4.9}$$

Сравнивая (4.8) при $k\to 0$ и (4.9), получаем формулы (4.7).

Из (3.30) следует, что магнитная проницаемость $\mu(\omega)$, в которой пространственной дисперсией пренебрегается, отлична от единицы только при учёте пространственной дисперсии в $\varepsilon^{\rm tr}(\omega,k)$ и $\varepsilon^{\rm l}(\omega,k)$; используя (4.7), находим [6, § 103]

$$\frac{1}{\mu(\omega)}=1-\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial k^2}\left(\varepsilon^{\rm tr}(\omega,k)-\varepsilon^{\rm l}(\omega,k)\right)\Big|_{k=0}\,.\tag{4.10}$$

По порядку величины $|\partial\varepsilon^{\rm tr}/\partial k^2|\sim|\partial\varepsilon^{\rm l}/\partial k^2|\sim|\varepsilon(\omega)|/k_0^2(\omega)$. Поэтому

$$\left|\frac{1}{\mu(\omega)}-1\right|\sim\frac{\omega^2}{c^2k_0^2(\omega)}\,|\varepsilon(\omega)|\,.\tag{4.11}$$

Напомним известный результат Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица о магнитной проницаемости вещества [6, § 79]: "...не имеет смысла пользоваться магнитной проницаемостью уже начиная с оптической области частот, и при рассмотрении соответствующих явлений надо полагать $\mu=1$. Учёт отличия между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ в этой области был бы явным превышением точности. Фактически же учёт отличия μ от 1 является превышением точности для большинства явлений уже при частотах, гораздо более низких, чем оптические"[6]. В [6, § 103] содержится важное замечание, касающееся связи этого результата с эффектом пространственной дисперсии. Учитывая это замечание, можно полагать, что ограничение оптическими частотами — лишнее: отличие $\mu(\omega)$ от 1 может быть существенным лишь в исключительных случаях (см. ниже). Действительно, в общем случае

$$k_0(\omega)\sim\frac{1}{a_0(\omega)}\sim\frac{\omega}{v_0}\,,\tag{4.12}$$

где v_0 — скорость тех частиц (квазичастиц), которые вносят существенный вклад в диэлектрическую проницаемость на данной частоте ω. Подставляя (4.12) в (4.11), получаем

$$\left|\frac{1}{\mu(\omega)}-1\right|\sim\left(\frac{v_0}{c}\right)^2,\tag{4.13}$$

если $\varepsilon(\omega)\sim 1$. Параметр $v_0/c\ll 1$ (в квантовой механике, если v_0 — электронная скорость, $v_0/c\sim\alpha$, где $\alpha=e^2/(\hbar c)$ — постоянная тонкой структуры) — это малый параметр в теории взаимодействия вещества с электромагнитным полем. Исключение из результата (4.13) может быть связано, как всегда в теории возмущений, только с резонансной ситуацией, когда частота ω достаточно близка к частоте ω_0 некоторого перехода между энергетическими уровнями среды.

В полном наборе квантовых чисел, характеризующих состояния среды, присутствует $\mathbf{p}$ — импульс частицы (молекулы, если среда — газ) или квазиимпульс квазичастицы (экситона в оптической области спектра, оптического фонона в инфракрасной области). Это обстоятельство проявляется в знаменателях сумм, входящих в выражения для $\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})$, (см. [1; 18, § 12]). При частоте ω, близкой к некоторой резонансной частоте ω_0 неподвижного атома или молекулы, знаменатель в $\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})$ равен $\hbar(\omega-\omega_0)-[\varepsilon(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})-\varepsilon(\mathbf{p})]=\hbar(\omega-\omega_0)-\hbar\mathbf{k}\mathbf{v}(\mathbf{p})$, где $\varepsilon(\mathbf{p})$ — кинетическая энергия частицы (атома или молекулы), $\mathbf{v}(\mathbf{p})$ — её скорость. Теперь, в случае, близком к резонансу, пространственная дисперсия становится существенной не при $k\geqslant\omega/v_0$, а при $k\geqslant|\omega-\omega_0|/\bar{v}$, где $\bar{v}$ — средняя скорость частицы [6, § 103], т.е. теперь $k_0(\omega)$ определяется не по формуле (4.12), а по формуле

$$k_0(\omega)\sim\frac{|\omega-\omega_0|}{\bar{v}}\,.\tag{4.14}$$

Из (4.11) теперь имеем (вместо (4.13))

$$\left|\frac{1}{\mu(\omega)}-1\right|\sim\left(\frac{\bar{v}}{c}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega-\omega_0}\right)^2|\varepsilon(\omega)|\,,\tag{4.15}$$

и отличие $\mu(\omega)$ от единицы может быть заметным. Надо, разумеется, иметь в виду, что расстройка $|\omega-\omega_0|$ не может быть слишком малой, так как везде пренебрегается диссипацией энергии поля.

При частоте ω, близкой к некоторой резонансной частоте ω_0 конденсированной среды [1; 6, § 106; 18, § 12], тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})$ содержит слагаемое со знаменателем, равным $\hbar(\omega-\omega_0)-\hbar^2k^2/(2m_{\rm ex})$, где $\hbar\omega_0$ — энергия неподвижного экситона (или оптического фонона), $m_{\rm ex}$ — его эффективная масса (она может быть и отрицательной). Пространственная дисперсия становится существенной при $k^2\geqslant|m_{\rm ex}(\omega-\omega_0)|/\hbar$, т.е. $k_0(\omega)$ определяется не по формуле (4.12), а по формуле

$$k_0^2(\omega)\sim\frac{|m_{\rm ex}(\omega-\omega_0)|}{\hbar}\,.\tag{4.16}$$

Из (4.11) получаем (вместо (4.13))

$$\left|\frac{1}{\mu(\omega)}-1\right|\sim\frac{\hbar\omega}{|m_{\rm ex}|c^2}\,\frac{\omega}{|\omega-\omega_0|}\,|\varepsilon(\omega)|\,,\tag{4.17}$$

отличие $\mu(\omega)$ от единицы тоже может быть заметным.

Низкочастотное значение магнитной восприимчивости $\chi_0\equiv\chi(\omega)|_{\omega=0}$ не обязательно равно статическому значению магнитной восприимчивости $\chi_{\rm st}\equiv\chi(k)|_{k=0}$, где $\chi(k)=\chi(\omega,k)|_{\omega=0}$, так как функции $\chi(k)$ и $\chi(\omega)=\chi(\omega,k)|_{k=0}$ получаются из $\chi(\omega,k)$ разложением по степеням различных малых параметров. Например, для одноатомного газа [20] $\chi(\omega)$ получается при пренебрежении малым параметром $ka_{\rm B}/(\omega/\omega_{\rm R})\ll 1$, где $a_{\rm B}=\hbar^2/(me^2)$ — величина порядка "радиуса" атома, а $\hbar\omega_{\rm R}=\hbar^2/(ma_{\rm B}^2)$ — характерная энергия электронов. Предельное значение восприимчивости χ_0 получается затем при пренебрежении малым параметром $\omega/\omega_{\rm R}\ll 1$ и состоит из двух не зависящих от температуры T частей,

[6] Этот результат содержится ещё в первом (1957 г.) издании *Электродинамики сплошных сред* [6]; в первом издании он приведён в § 60.

соответствующих диамагнетизму Ланжевена и парамагнетизму Ван Флека [20, 21]. Восприимчивость $\chi(k)$ получается при пренебрежении малым параметром

$$\frac{\hbar\omega}{(\hbar k)^2/M} \ll 1\,,$$

где M — масса молекулы. Статическое значение восприимчивости $\chi_{\rm st}$ получается затем при пренебрежении малым параметром $\hbar k/(M\bar v) \ll 1$, где $\bar v$ — средняя скорость молекулы. Оно отличается от χ_0 слагаемым $\sim 1/T$, соответствующим парамагнетизму Ланжевена [20, 21].

В электронной бесстолкновительной плазме [17, § 26] $\chi(\omega)$ получается из $\chi(\omega,k)$ разложением по степеням малого параметра $k\bar v/\omega \ll 1$, где $\bar v$ — средняя скорость электронов (см. (4.5) и (4.12)), а статическая восприимчивость $\chi(k)$ получается из $\chi(\omega,k)$ разложением по степеням малого параметра $\omega/(k\bar v) \ll 1$. В однородном поле $\chi_{\rm st} = \chi(k)|_{k=0}$ получается из $\chi(k)$ разложением по степеням ещё одного малого параметра, $\hbar k/(m\bar v) \ll 1$, где m — масса электрона, и соответствует парамагнетизму Паули и диамагнетизму Ландау [17, § 26].

Обратимся к дисперсионному уравнению для поперечных волн (3.38). Из (3.37) и (4.7) следует, что при пренебрежении пространственной дисперсией в этом уравнении нужно положить $\mu(\omega) = 1$ и представить его в виде

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon(\omega)\,. \tag{4.18}$$

Соответственно, фазовая скорость волны $v_{\rm ph} = c/(\varepsilon(\omega))^{1/2}$ (и, следовательно, показатель преломления $n = (\varepsilon(\omega))^{1/2}$). Уравнение (4.18) получается и из (3.26), если учесть (4.7). При этом, разумеется, должно выполняться условие (4.5), которое используется при получении уравнения (4.18):

$$\left(\frac{k}{k_0(\omega)}\right)^2 = \varepsilon(\omega)\,\frac{\omega^2}{c^2k_0^2(\omega)} \ll 1\,. \tag{4.19}$$

При частотах ω далёких от резонансных частот среды ω_0, $k_0(\omega)$ определяется согласно (4.12), $\varepsilon(\omega) \sim 1$ и условие (4.19) приводится к неравенству $(v_0/c)^2 \ll 1$, которое всегда выполняется. При частоте ω, близкой к некоторой частоте перехода ω_0 газовой среды, $k_0(\omega)$ определяется согласно (4.14) и условие (4.19) ограничивает минимальную величину $|\omega - \omega_0|$:

$$\frac{|\omega-\omega_0|}{\omega} \gg \sqrt{\varepsilon(\omega)}\,\frac{\bar v}{c}\,. \tag{4.20}$$

Сравнение с (4.15) показывает, что при этом, как и следовало ожидать, $|\mu(\omega) - 1| \ll 1$. При частоте ω, близкой к некоторой частоте перехода ω_0 конденсированной среды, $k_0(\omega)$ определяется согласно (4.16) и условие (4.19) тоже приводит к ограничению минимальной величины $|\omega - \omega_0|$:

$$\frac{|\omega-\omega_0|}{\omega} \gg \varepsilon(\omega)\,\frac{\hbar\omega}{|m_{\rm ex}|c^2}\,. \tag{4.21}$$

Сравнение с (4.17) показывает, что при этом, как и должно быть, $|\mu(\omega) - 1| \ll 1$. Если условие (4.20) (или (4.21)) не выполняется, то дисперсионное уравнение (4.18) не справедливо и необходимо решать точное дисперсионное уравнение (3.26) или (3.38).

Если пространственная дисперсия мала, то её можно учесть в (3.26) или (3.38) по теории возмущений, тем самым уточнив дисперсионное уравнение (4.18). Не повышая порядок алгебраического уравнения (3.26), определяющего k^2, подставим в него следующее выражение для поперечной диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon^{\rm tr}(\omega,k) = \varepsilon(\omega) + \left.\frac{\partial\varepsilon^{\rm tr}(\omega,k)}{\partial k^2}\right|_{k=0} k^2\,. \tag{4.22}$$

В результате вместо (4.18) получаем более точное уравнение:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon(\omega)\,\tilde\mu(\omega)\,, \tag{4.23}$$

где мало отличающаяся от единицы функция

$$\tilde\mu(\omega) = 1 + \frac{\omega^2}{c^2}\left.\frac{\partial\varepsilon^{\rm tr}(\omega,k)}{\partial k^2}\right|_{k=0} \tag{4.24}$$

не совпадает с магнитной проницаемостью, которая определяется по формуле (см. (4.10) при $|\mu(\omega) - 1| \ll 1$),

$$\mu(\omega) = 1 + \frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial k^2}\left(\varepsilon^{\rm tr}(\omega,k) - \varepsilon^{\rm l}(\omega,k)\right)\big|_{k=0}\,. \tag{4.25}$$

Таким образом, в общепринятом дисперсионном уравнении для поперечных волн (1.1) и в формуле для фазовой скорости (1.2) надо полагать $\mu(\omega) = 1$, учёт отличия в них $\mu(\omega)$ от единицы — "явное превышение точности" [6, § 79]. Однако авторы обзора [1] в качестве дисперсионного уравнения для поперечных волн получают обычное уравнение (1.1). Как они это делают? Для удобства читателей мы к формулам из [1] будем присоединять номера этих же формул из настоящей статьи: например, (19)–(4.10) обозначает формулу (19) из [1] и эту же формулу (4.10) из нашей работы. Авторы [1, с. 1056] пишут: "Легко видеть, что, если в дисперсионном уравнении для поперечных поляритонов (16)–(3.26) положить

$$\varepsilon^{\rm tr}(\omega,k) = \varepsilon(\omega) + \frac{c^2k^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{1}{\mu(\omega)}\right), \tag{20)–(4.26}$$

то (16)–(3.26) становится *тождественным* уравнению (3)–(1.1)". Это действительно легко увидеть: подставляем (4.26) в (3.26) и получаем (1.1). Но можно ли "положить" (20)–(4.26)? Если равенство (20)–(4.26), которое используют авторы [1], переписать, учитывая (18)–(4.7), в виде

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{\mu(\omega)} &= \frac{\omega^2}{c^2k^2}\left(\varepsilon^{\rm tr}(\omega,k) - \varepsilon(\omega)\right) = \\ &= \frac{\omega^2}{c^2}\left.\frac{\partial\varepsilon^{\rm tr}(\omega,k)}{\partial k^2}\right|_{k=0},\end{aligned} \tag{4.27}$$

то становится очевидным, что оно не противоречит определению $\mu(\omega)$, которое даётся формулой (19)–(4.10), только в случае, когда

$$\left|\frac{\partial\varepsilon^{\rm tr}(\omega,k)}{\partial k^2}\right|_{k=0} \gg \left|\frac{\partial\varepsilon^{\rm l}(\omega,k)}{\partial k^2}\right|_{k=0}\,. \tag{4.28}$$

Заметим, что только тогда, когда это неравенство справедливо, функция $\tilde{\mu}(\omega)$ (4.24) не будет отличаться от магнитной проницаемости $\mu(\omega)$ (4.25). Однако для выполнения неравенства (4.28) нет никаких оснований. На самом деле авторы [1] своей формулой (20)–(4.26) вводят новую функцию, обозначая её так же, как магнитную проницаемость. Сравнение (4.27) с (4.24) показывает, что эта их функция совпадает с нашей функцией $\tilde{\mu}(\omega)$ (4.24). Впрочем, и сами авторы [1, с. 1065] далее пишут, что "уравнением (20)–(4.26) задана уже некая эффективная восприимчивость". Потому мы считаем, что, по существу, наш результат, касающийся поперечной волны в изотропной среде при малой пространственной дисперсии, не противоречит соответствующему результату [1].

5. Заключение

Сформулируем основные результаты.

1. Показано, как в рамках линейных материальных уравнений для однородной изотропной среды можно строго перейти от уравнений электродинамики в форме Максвелла–Лоренца для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ (3.1) к уравнениям Максвелла для четырёх полей, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ (1.5). Эта возможность существенно связана с тем, что число независимых скалярных функций, характеризующих электродинамические свойства такой среды ($\varepsilon^{\mathrm{l}}(\omega,k)$, $\varepsilon^{\mathrm{tr}}(\omega,k)$ или $\varepsilon(\omega,k)$, $\mu(\omega,k)$), равно числу вводимых в теорию новых векторов ($\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$ или $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$) согласно (3.12) и (3.13). При этом сначала по формулам (3.30) и (3.23) определяются диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega,k)$ и магнитная проницаемость $\mu(\omega,k)$ при учёте частотной дисперсии и пространственной дисперсии, и только затем по формулам (3.31) определяются фурье-компоненты полей $\mathbf{D}_{\omega\mathbf{k}}$ и $\mathbf{H}_{\omega\mathbf{k}}$ (и, следовательно, сами поля $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$).

2. Аналогичная проблема для анизотропных сред представляется намного более сложной: необходимо знать, по какому принципу один вектор (плотность тока в среде) разбивается на два вектора (называемые поляризацией и намагниченностью) (см. формулу (3.34)), или, что, по существу, то же самое, как однозначно ввести вместо тензора проводимости $\sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k})$ (3.20) два тензора, один из которых определяет электрическую индукцию, $D_{i\omega\mathbf{k}} = \varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})\,E_{j\omega\mathbf{k}}$, а другой — напряжённость магнитного поля, $B_{i\omega\mathbf{k}} = \mu_{ij}(\omega,\mathbf{k})\,H_{j\omega\mathbf{k}}$. Мы не знаем решения этой проблемы и поэтому ограничились только изотропными средами.

3. Известный результат Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица о том, что магнитная проницаемость $\mu(\omega) \approx 1$, связанный, как указано в [6, § 79], с малой пространственной дисперсией, справедлив, вообще говоря, при всех, а не только при оптических частотах. Исключения могут быть при резонансных частотах, близких к частотам переходов между соответствующими состояниями среды.

4. Поперечные волны с отрицательной групповой скоростью в рамках теории, оперирующей диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu(\omega)$ (т.е. при пренебрежении в них пространственной дисперсией), не существуют. Этот вывод никак не связан с постулатом С.Г. Раутиана [7] об отсутствии частот в оптической области, для которых диэлектрическая $\varepsilon(\omega)$ и магнитная $\mu(\omega)$ проницаемости принимают отрицательные значения. Он прямо следует из правильного дисперсионного уравнения для поперечных волн, которое для всех изотропных негитротропных сред (включая так называемые метаматериалы) при пренебрежении пространственной дисперсией выражается в виде (4.18). Это уравнение можно получить из обычно используемого уравнения (1.1), если положить в нём $\mu(\omega) = 1$. Учёт слабой пространственной дисперсии приводит к дисперсионному уравнению (4.23), в которое входит некоторая функция $\tilde{\mu}(\omega)$ (4.24), отличающаяся от магнитной проницаемости $\mu(\omega)$ (4.25). Следовательно, распространение электромагнитных волн принадлежит тем процессам, для которых учёт отличия $\mu(\omega)$ от единицы является превышением точности [6, § 79]. Волны с отрицательной групповой скоростью могут существовать только при тех частотах, при которых пространственная дисперсия становится значительной [1, 8, 20], при этом дисперсионное уравнение записывается в виде (3.26) или (3.38).

Список литературы

1. Агранович В М, Гартштейн Ю Н *УФН* **176** 1051 (2006); Agranovich V M, Gartstein Yu N *Phys. Usp.* **49** 1029 (2006)
2. Мандельштам Л И *ЖЭТФ* **15** 475 (1945)
3. Болотовский Б М, Столяров С Н, в сб. *Проблемы теоретической физики. Памяти И.Е. Тамма* (Отв. ред. В И Ритус) (М.: Наука, 1972) с. 267
4. Сивухин Д В *Оптика и спектроскопия* **3** 308 (1957)
5. Пафомов В Б *ЖЭТФ* **36** 1853 (1959); Pafomov V B *Sov. Phys. JETP* **9** 1321 (1959)
6. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1984)
7. Раутиан С Г *УФН* **178** 1017 (2008); Rautian S G *Phys. Usp.* **51** 981 (2008)
8. Макаров В П, Рухадзе А А *УФН* **181** 1357 (2011); Makarov V P, Rukhadze A A *Phys. Usp.* **54** 1285 (2011)
9. Кильдишев А В, Шалаев В М *УФН* **181** 59 (2011); Kildishev A V, Shalaev V M *Phys. Usp.* **54** 53 (2011)
10. Топтыгин И Н, Левина К *УФН* **186** 146 (2016); Toptygin I N, Levina K *Phys. Usp.* **59** 141 (2016)
11. Сивухин Д В *Общий курс физики* Т.4 *Оптика* (М.: Наука, 1985)
12. Фисанов В В *Изв. вузов. Физика* **59** (8) 49 (2016); Fisanov V V *Russ. Phys. J.* **59** 1181 (2016)
13. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1980)
14. Векленко Б А *Инженерная физика* (1) 23 (2015)
15. Векленко Б А *Инженерная физика* (2) 15 (2015)
16. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979); Пер. на англ. яз.: Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Physical Kinetics* (Oxford: Pergamon Press, 1981)
17. Силин В П, Рухадзе А А *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред* (М.: Атомиздат, 1961)
18. Агранович В М, Гинзбург В Л *Кристаллооптика с учетом просранственной дисперсии и теория экситонов* (М.: Наука, 1965); Пер. на англ. яз.: Agranovich V M, Ginzburg V G *Crystal Optics with Spatial Dispersion, and Excitons* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)
19. Владимиров В С *Уравнения математической физики* (М.: Наука, 1967); Пер. на англ. яз.: Vladimirov V S *Equations of Mathematical Physics* (Moscow: Mir, 1984)

20. Макаров В П, Рухадзе А А *ЖЭТФ* **125** 345 (2004); Makarov V P, Rukhadze A A *JETP* **98** 305 (2004)

21. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* Т. 1 (М.: Наука, 1976); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics* Vol. 1 (Oxford: Pergamon Press, 1980)

Material equations and Maxwell equations for isotropic media; waves with negative group velocity and negative values of $\varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$

V.P. Makarov [1,2,3], **A.A. Rukhadze** [1,2]
[1] *Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Vavilova 38, 119991 Moscow, Russian Federation*
[2] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Institutskii per. 9, 141701 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation*
[3] *Bauman Moscow State Technical University, ul. 2-ya Baumanskaya 5, 105005 Moscow, Russian Federation*
E-mail: *vpmac@ran.gpi.ru*

The frequently used Maxwell equations that contain **E**, **B**, **D** and **H** fields are only substantiated in the framework of linear material equations and for isotropic media alone. We have shown that the account of the deviation of magnetic permittivity $\mu(\omega)$ from unity in the usually employed dispersion equation implies false precision. Therefore, if spatial dispersion is neglected, transverse waves only exist in the energy region where $\varepsilon(\omega) > 0$ and have a positive group velocity.

Keywords: conductivity tensor, dielectric permittivity tensor, isotropic media, electric and magnetic permittivity, phase and group velocity of transverse electromagnetic wave

PACS numbers: 03.50.De, 41.20.Jb

Bibliography — 21 references

Received 17 July 2017, revised 27 December 2018

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **189** (5) 519–528 (2019)

Physics – Uspekhi **62** (5) (2019)

DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2019.01.038522

DOI: https://doi.org/10.3367/UFNe.2019.01.038522