

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Электромагнитные аналогии в задачах электро- и магнитостатики

Г.Н. Гайдуков, И.Н. Горбатый

Из законов Био–Савара и Кулона выведено утверждение, лежащее в основе электромагнитной аналогии: магнитное поле \mathbf{B} , созданное током I в проводящем контуре L , и электрическое поле \mathbf{E} тонкого двойного заряженного слоя площадью S , ограниченного тем же контуром L , связаны соотношением $\mathbf{B} = (\epsilon_0 \mu_0 I / p_{1e}) \mathbf{E}$, где p_{1e} — электрический дипольный момент, приходящийся на единицу площади S , ϵ_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные. Приведены примеры использования электромагнитной аналогии при решении ряда задач электро- и магнитостатики.

Ключевые слова: электростатика, магнитостатика, электрический диполь, магнитный диполь, ёмкость, индуктивность

PACS numbers: 03.50.De, 41.20.Cv, 41.20.Gz

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2018.03.038303>

Содержание

1. Введение (441).
 2. Электромагнитная аналогия (442).
 3. Поле точечного магнитного диполя (442).
 4. Доказательство теорем о циркуляции и потоке вектора магнитной индукции (443).
 5. Когда магнитные линии являются замкнутыми кривыми? (443).
 6. Магнитное поле соленоида (444).
 7. Индуктивность соленоида (445).
 8. Электрическое поле и ёмкость конденсатора (446).
 9. Заключение (447).
 10. Приложение. Индуктивность короткого соленоида (447).
- Список литературы (448).

1. Введение

Аналогия магнитных и электрических полей отмечалась в ряде учебников [1–5]. Так, в учебнике Дж. Стрэттона [2] подчёркивается, что любое магнитостатическое поле может быть заменено тождественным по структуре электростатическим полем, создаваемым соответствующим распределением диполей и двойных заряженных слоёв, в учебнике В. Смайта [4] отмечается экспериментальный факт, состоящий в том, что два малых токовых витка взаимодействуют с такими же силами и моментами, как и электрические диполи, расположенные вме-

сто витков и ориентированные вдоль нормали к их плоскостям. В книге Э. Парселла [5] сопоставляются выражения для индукции \mathbf{B} поля магнитного диполя и напряжённости \mathbf{E} поля электрического диполя — эти выражения различаются лишь постоянным множителем. Сравнивая поле \mathbf{B} однородно намагниченного цилиндра и поле \mathbf{E} однородно поляризованного цилиндра, Э. Парселл отмечает, что вне цилиндра эти поля совпадают и поле \mathbf{B} можно рассчитать так же, как и в электростатике, если ввести в рассмотрение магнитные заряды или скалярный магнитный потенциал, связанный с токами.

В настоящей статье выводится формула, определяющая связь магнитного поля \mathbf{B} , созданного током I в проводящем контуре L , и электрического поля \mathbf{E} тонкого двойного заряженного слоя площадью S , ограниченного тем же контуром L . На основе этой формулы далее выводится выражение для индукции магнитного поля точечного магнитного диполя, доказываются теоремы о циркуляции и потоке вектора индукции в магнитостатике, выводится достаточное условие замкнутости магнитных линий, анализируется магнитное поле вне и внутри соленоида, выводится формула для индуктивности соленоида с учётом краевых эффектов. Каждая из перечисленных задач может быть решена на основе законов магнитостатики, но предлагаемый в статье метод электромагнитной аналогии позволяет получать результаты проще, опираясь на решения соответствующих задач электростатики.

Электромагнитная аналогия "работает в обе стороны", и некоторые задачи электростатики с её помощью можно свести к более простым задачам магнитостатики. В качестве примера рассматриваются задачи о вычислении электрического поля вне плоского конденсатора и определении его ёмкости.

Г.Н. Гайдуков, И.Н. Горбатый. Национальный исследовательский университет "Московский институт электронной техники" (МИЭТ), пл. Шокина 1, 124498 Зеленоград, Москва, Российская Федерация
E-mail: gaid-miet@yandex.ru, i_n_gorbatyi@mail.ru

Статья поступила 6 ноября 2017 г.

2. Электромагнитная аналогия

Рассмотрим двойной заряженный слой, одна поверхность которого однородно заряжена с поверхностной плотностью $+\sigma$, а другая — с плотностью $-\sigma$. Толщина слоя d предполагается малой по сравнению с его продольными размерами. Тогда можно говорить о поверхности S , по которой однородно распределён дипольный момент с поверхностной плотностью $p_{1e} = |\mathbf{p}_{1e}| = \sigma d$. Дипольный момент элементарной площадки dS направлен вдоль нормали к ней и равен $d\mathbf{p}_e = p_{1e} dS$. Из закона Кулона следует, что потенциал в точке A электростатического поля, созданного элементарной "дипольной" площадкой dS , выражается формулой [1–3]

$$d\varphi = \frac{\mathbf{r} d\mathbf{p}_e}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

где \mathbf{r} — вектор, проведённый от площадки к точке A . Тогда потенциал поля, созданного всем двойным слоем в точке A , имеет вид

$$\varphi = \frac{p_{1e}}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} dS}{r^3} = \frac{p_{1e}}{4\pi\epsilon_0} \Omega,$$

где $\Omega = \int_S \mathbf{r} dS/r^3$ — телесный угол, под которым видна поверхность S из точки A , причём знак Ω считается совпадающим со знаком заряда той стороны поверхности S , которая видна из точки A . Вектор напряжённости поля двойного слоя вычислим по формуле

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{p_{1e}}{4\pi\epsilon_0} \text{grad } \Omega.$$

Найдём приращение телесного угла $d\Omega$ при перемещении точки A на $d\mathbf{p}$ [1]. При вычислении $d\Omega$ будем считать точку A неподвижной, а каждую точку поверхности S переместим на $-d\mathbf{p}$, как показано на рис. 1. Тогда $d\Omega = \int_{\Delta S} \mathbf{r} dS/r^3$, где ΔS — боковая поверхность косого цилиндра с образующей $d\rho$ (см. рис. 1). Элемент площади этой поверхности выразим формулой $dS = [-d\mathbf{p} d\mathbf{l}]$. Проводя циклическую перестановку в смешанном произведении, получим $\mathbf{r} dS = -d\mathbf{p} [d\mathbf{l}r]$ и $d\Omega = -d\mathbf{p} \oint_L [d\mathbf{l}r]/r^3$. Поскольку $d\Omega = d\mathbf{p} \text{grad } \Omega$, то $\text{grad } \Omega = -\oint_L [d\mathbf{l}r]/r^3$ и

$$\mathbf{E} = \frac{p_{1e}}{4\pi\epsilon_0} \oint_L \frac{[d\mathbf{l}r]}{r^3}. \quad (1)$$

Заметим, что формула (1) отличается лишь постоянным коэффициентом от выражения

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{[d\mathbf{l}r]}{r^3}, \quad (2)$$

определяющего по закону Био–Савара индукцию магнитного поля в точке A , порождаемого током I в тонком проводе, совмещённом с контуром L . Таким образом, магнитное поле \mathbf{B} тока I , протекающего в тонком проводе, имеющем форму контура L , и электрическое поле \mathbf{E} тонкого двойного заряженного слоя S , ограниченного контуром L , связаны соотношением

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0 I} = \frac{\epsilon_0}{p_{1e}} \mathbf{E}. \quad (3)$$

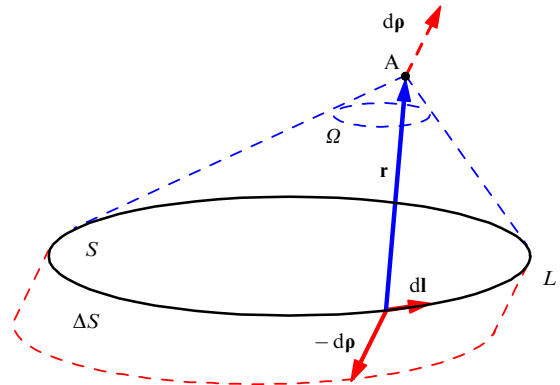


Рис. 1. К выводу формулы (1). L — контур, ограничивающий поверхность S , $d\mathbf{l}$ — элемент длины этого контура, \mathbf{r} — вектор, проведённый от $d\mathbf{l}$ к точке A . Направление обхода контура связано с направлением \mathbf{p}_{1e} правилом правого винта.

Формула (3), вытекающая из законов Кулона и Био–Савара, справедлива для бесконечно тонкого провода с током и бесконечно тонкого двойного заряженного слоя с однородно распределённым по его поверхности дипольным моментом p_{1e} . Если замкнутый провод имеет конечное поперечное сечение с характерным размером Δ , то его можно разбить на бесконечно тонкие замкнутые проводники и каждый из них сопоставить с тонким двойным заряженным слоем. Наложение таких слоёв приведёт к формированию двойного электрического слоя толщиной Δ . В силу принципа суперпозиции полей формула (3) останется справедливой для всех удалённых от провода на расстояние $r \gg \Delta$ точек пространства, не попадающих внутрь двойного заряженного слоя толщиной Δ . Формулу (3) можно положить в основу метода электромагнитной аналогии, позволяющего сводить задачи магнитостатики к электростатическим задачам и наоборот. Ниже даны примеры использования этого метода.

3. Поле точечного магнитного диполя

В качестве первого примера использования метода электромагнитной аналогии выведем с помощью (3) формулу для индукции магнитного поля точечного магнитного диполя. При этом будем считать, что формула

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(3(\mathbf{p}_e \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p}_e \right) \quad (4)$$

для вектора напряжённости электростатического поля точечного электрического диполя выведена (см., например, [3]). Точечный электрический диполь будем рассматривать в виде малой дипольной площадки ΔS с моментом $\mathbf{p}_e = p_{1e} \Delta S \mathbf{n}$, а точечный магнитный диполь — в виде витка с током I , который совмещён с границей площадки ΔS . Магнитный момент такого диполя $\mathbf{p}_m = I \Delta S \mathbf{n}$, где \mathbf{n} — вектор нормали к ΔS . Из (3), (4) следует

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p}_m \right). \quad (5)$$

Вывод формулы (5) непосредственно из закона Био–Савара существенно более сложный [5].

4. Доказательство теорем о циркуляции и потоке вектора магнитной индукции

Доказательство теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции

$$\oint_C \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (6)$$

в магнитостатике значительно сложнее, чем доказательство соответствующей теоремы

$$\oint_C \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \quad (7)$$

в электростатике (здесь C — произвольный геометрический контур). Поэтому часто в учебниках по общей физике доказательство теоремы (6) опускают [6, 7] или приводят для частного случая, в котором токи I текут по бесконечно длинным прямым проводам [5, 8]. Метод электромагнитной аналогии позволяет доказать теорему (6), опираясь на электростатическую теорему (7). Для доказательства заменим произвольный замкнутый провод с током I двойным электрическим слоем с поверхностной плотностью $\pm\sigma$ и толщиной d , которую далее устремим к нулю. При этом величина поверхностной плотности электрического момента $p_{1e} = (\sigma d)_{d \rightarrow 0}$ остаётся конечной. Пусть геометрический контур C пронизывает контур с током и, соответственно, двойной электрический слой (рис. 2). Интеграл (7) представим в виде суммы:

$$\int_{\text{ext}} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{\text{int}} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

Первый интеграл вычисляется по части контура C , которая расположена вне двойного электрического слоя, а поле \mathbf{E}_{ext} — это "дипольное поле", вычисляемое как векторная сумма полей (4) отдельных диполей. Второй интеграл вычисляется по части контура, расположенной внутри электрического слоя:

$$\int_{\text{int}} \mathbf{E}_{\text{int}} d\mathbf{l} = -\frac{\sigma d}{\varepsilon_0} \Big|_{d \rightarrow 0} = -\frac{p_{1e}}{\varepsilon_0}.$$

Поэтому

$$\int_{\text{ext}} \mathbf{E}_{\text{ext}} d\mathbf{l} = \frac{p_{1e}}{\varepsilon_0}.$$

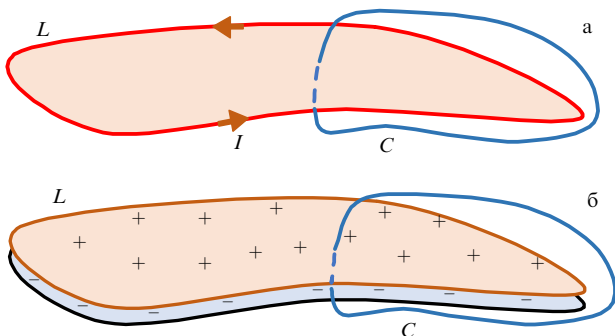


Рис. 2. К доказательству теоремы о циркуляции вектора \mathbf{B} . (а) L — контур с током I , C — произвольный геометрический контур. (б) Двойной электрический слой, ограниченный контуром L , и геометрический контур C .

Вычисляя циркуляцию вектора \mathbf{B} для соответствующего контура с током и того же геометрического контура C (см. рис. 2), учтём, что в любой точке пространства, не попадающей внутрь двойного электрического слоя, справедливо соотношение (3). Поэтому

$$\int_{\text{ext}} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{I}{p_{1e}} \int_{\text{ext}} \mathbf{E}_{\text{ext}} d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

В соответствии с законом Био – Савара магнитное поле в свободном от токов пространстве конечно, и, так как $d \rightarrow 0$, $\int_{\text{int}} \mathbf{B} d\mathbf{l} = 0$. Таким образом, $\oint_C \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_{\text{ext}} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I$. Если геометрический контур C не охватывает токовый контур L , то очевидно, что циркуляция вектора индукции равна нулю.

Докажем теперь теорему о потоке вектора индукции \mathbf{B} . Источником магнитного поля, как и выше, будем считать постоянный ток I в тонком замкнутом проводе, совмещённом с контуром L . Рассмотрим произвольную односвязную замкнутую поверхность S_0 , которая не пересекается контуром L . Тогда поверхность двойного слоя S , ограниченного контуром L , можно выбрать так, что она целиком будет находиться вне замкнутой поверхности S_0 . Поток вектора напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность S_0 по теореме Гаусса равен нулю,

$$\oint_{S_0} \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0.$$

Поскольку поле \mathbf{B} тока и поле \mathbf{E} дипольной поверхности S связаны соотношением (3),

$$\oint_{S_0} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (8)$$

Рассмотрение случая многосвязной поверхности S_0 требует дополнительного анализа, который здесь опускается. Используя принцип суперпозиции, доказательство теорем (6), (8) можно обобщить для произвольной системы замкнутых постоянных токов.

5. Когда магнитные линии являются замкнутыми кривыми?

Известно [1, 9, 10], что даже в простых токовых конфигурациях магнитные линии не обязательно образуют замкнутые петли. Можно поставить вопрос: в каких случаях магнитные линии являются замкнутыми кривыми? Метод электромагнитной аналогии позволяет найти широкий класс токовых конфигураций, в которых магнитные линии оказываются замкнутыми кривыми, — это любая из систем замкнутых токов, расположенных в одной плоскости.

Доказательство можно привести непосредственно в магнитостатике, но переход от токов к соответствующим двойным заряженным слоям делает доказательство простым и наглядным. Действительно, из симметрии электростатической задачи следует, что если из некоторой точки плоского двойного электрического слоя вышла силовая линия, то она будет зеркально симметричной относительно плоскости слоя и, следовательно, вернётся в исходную точку, но с другой стороны слоя. В силу (3) так же будет себя вести и магнитная линия

контура с током той же конфигурации. Заметим, что указанное выше условие замкнутости магнитных линий является достаточным, но не необходимым.

6. Магнитное поле соленоида

Если соленоид имеет круглое сечение, то с помощью закона Био–Савара нетрудно рассчитать индукцию магнитного поля в точках, расположенных на оси соленоида [5]. Для других точек интегрирование становится технически сложным, и ещё большие сложности возникают в случае, когда сечение соленоида не является круглым.

Если предположить, что соленоид бесконечно длинный, то с помощью теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции можно вычислить поле в любой точке, расположенной внутри соленоида: $B_0 = \mu_0 nI$, где n — число витков на единицу длины. Вывод этой формулы приводится практически во всех учебниках при предположении, что вне соленоида индукция магнитного поля равна нулю. Однако строго обосновать это предположение в рамках курса общей физики непросто [11].

Использование электромагнитной аналогии позволяет задачу расчёта магнитного поля соленоида свести к электростатической задаче. Как обычно, пренебрежём дискретностью витков, а соленоид будем считать прямым цилиндром, обтекаемым током. Примем, что образующая цилиндра параллельна оси x , а поперечное сечение площади S имеет произвольную форму. По боковой поверхности цилиндра течёт постоянный ток, перпендикулярный оси x , с постоянной линейной плотностью $I_S = IN/l = In$, где N — число витков, l — длина соленоида, $n = N/l$. Мысленно разобьём соленоид на узкие слои толщиной dl каждый, перпендикулярные оси x . Каждый слой с протекающим по его периферии током $dI = In dl$, заменим двойным заряженным слоем с поверхностной плотностью заряда $\pm\sigma$ и плотностью электрического момента $dp_{1e} = \sigma dl$ (рис. 3). Совокупность таких заряженных слоёв создаёт такое же электрическое поле, как и два основания цилиндра, однородно заряженных с плотностями $\pm\sigma$. В соответствии с (3) магнитное поле соленоида в точках пространства, расположенных вне цилиндра, можно рассчитать по формуле

$$\mathbf{V} = \beta(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2), \tag{9}$$

где $\beta = \epsilon_0 \mu_0 nI / \sigma$, $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ — электрическое поле в тех же точках пространства, создаваемое основаниями цилиндра, первое из которых однородно заряжено с поверхностной плотностью $+\sigma$, а второе — с плот-

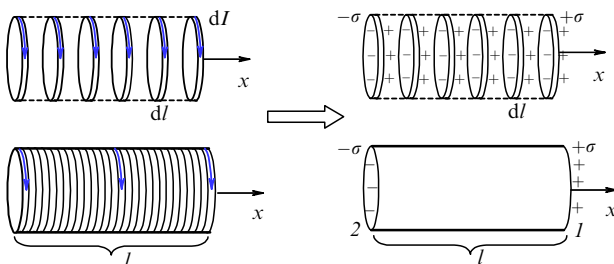


Рис. 3. К расчёту магнитного поля вне соленоида.

ностью $-\sigma$. В точках, удалённых от оснований цилиндра на расстояния, значительно превышающие характерные размеры поперечного сечения цилиндра, заряды на основаниях цилиндра можно считать точечными, тогда

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma S}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right), \quad \mathbf{V} = B_0 \frac{S}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right), \tag{10}$$

где вектор \mathbf{r}_1 проведён в "точку наблюдения" от северного полюса соленоида, а \mathbf{r}_2 — от южного. Заметим, что формула (10) справедлива для поперечного сечения любой формы.

Если соленоид длинный, то магнитное поле \mathbf{V} у его торца вне соленоида совпадает с точностью до постоянного множителя с электрическим полем $\mathbf{E} \approx \mathbf{E}_1$ однородно заряженной площадки, совмещённой с торцом соленоида, поскольку полем второго заряженного торца можно пренебречь. Отсюда, в частности, следует: 1) нормальная компонента вектора индукции у торца длинного соленоида однородна в его плоскости; 2) магнитные линии вне длинного соленоида симметричны относительно плоскости торца соленоида; 3) магнитные линии, исходящие из граничных точек торца соленоида, являются прямыми, перпендикулярными его образующей. Линии поля $\mathbf{V} = \beta\mathbf{E}_1$ для полубесконечного соленоида приведены на рис. 4. При вычислении поля \mathbf{E}_1 однородно заряженного диска использовано численное интегрирование, а способ вычисления поля \mathbf{V} внутри соленоида обсуждается ниже.

Для вычисления магнитного поля внутри соленоида, имеющего форму прямого цилиндра (не обязательно с круглым сечением), мысленно сделаем в нём узкую перпендикулярную к образующей цилиндра щель шириной $\Delta \ll \sqrt{S}$ (рис. 5). Магнитное поле в щели будет

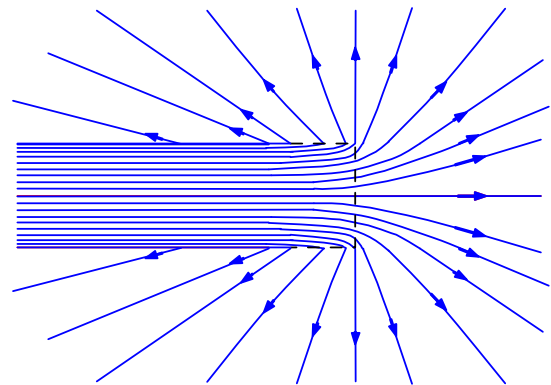


Рис. 4. Линии поля \mathbf{V} вблизи торца полубесконечного соленоида.

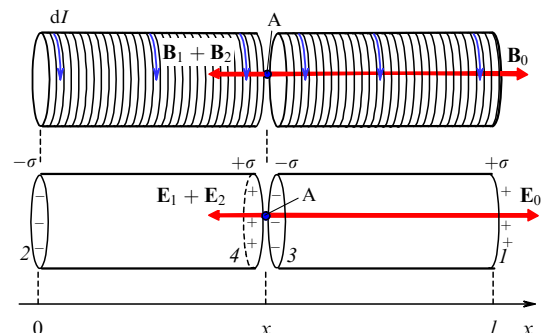


Рис. 5. К расчёту магнитного поля внутри соленоида.

практически таким же, как и в целом соленоиде (за исключением узкой области шириной $\sim l \rightarrow 0$ вблизи цилиндрической поверхности). В соответствии с электромагнитной аналогией задача сводится к расчёту напряжённости электрического поля, созданного в выбранной точке А четырьмя однородно заряженными плоскими торцами двух соленоидов (обозначенных как 1–4 на рис. 5), и в дальнейшем пересчёте полей по формуле

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 = \beta(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4).$$

Электрическое поле $E_0 = |\mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4| = \sigma/\epsilon_0$ создают бесконечно близко прилегающие к точке А однородно заряженные плоскости с плотностями заряда $+\sigma$ и $-\sigma$, а поля \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 — заряженные торцы исходного соленоида. Магнитное поле $|\mathbf{B}_0| = \beta E_0 = \mu_0 In$ одинаково во всех сечениях соленоида, а расчёт поля $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \beta(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)$ в общем случае требует использования численных методов. В частном случае кругового цилиндра поле $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ на его оси симметрии можно выразить аналитически. Так, напряжённости отрицательно заряженного диска радиусом R , расположенного при $x = 0$, и положительно заряженного диска того же радиуса, расположенного при $x = l$, определяются соответственно формулами

$$E_{2x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{|x|}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right),$$

$$E_{1x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{|x-l|}{x-l} - \frac{x-l}{\sqrt{(x-l)^2 + R^2}} \right).$$

Вид зависимости поля $E_{1x} + E_{2x}$ от x приведён на рис. 6а. Если в области $0 < x < l$ к полю $E_{1x} + E_{2x}$ добавить однородное поле E_0 , то получим справедливую при любых x формулу

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{x-l}{\sqrt{(x-l)^2 + R^2}} \right),$$

не содержащую точек разрыва (рис. 6б). В соответствии с магнитоэлектрической аналогией индукция магнитного поля на оси кругового соленоида определится как:

$$B_x = \beta E_x = \frac{\mu_0 In}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{x-l}{\sqrt{(x-l)^2 + R^2}} \right).$$

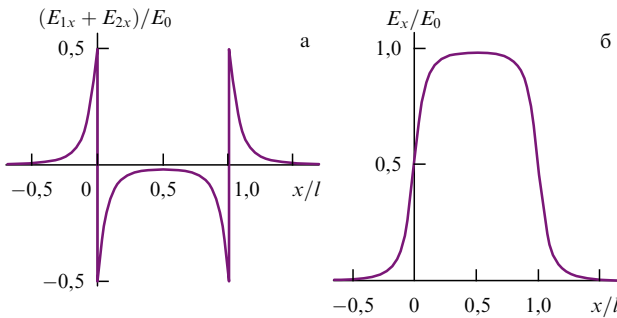


Рис. 6. (а) Электрическое поле на оси двух разноименно заряженных параллельных дисков. (б) Поле тех же дисков, к которому в области, расположенной между дисками, добавлено однородное поле E_0 ($l/R = 5$).

Конечно, эту формулу можно получить и непосредственно из закона Био–Савара [5].

Заметим, что поле $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ является электростатическим, а вот "немного" подправленное поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \gamma \mathbf{E}_0$ (где $\gamma = 1$ внутри и $\gamma = 0$ вне цилиндра) таковым уже не является, оно становится непотенциальным и бездивергентным: тангенциальная составляющая поля терпит разрыв на цилиндрической поверхности, а нормальная составляющая изменяется непрерывно на заряженных поверхностях при $x = 0$ и $x = l$.

7. Индуктивность соленоида

Выше показано, что индукция магнитного поля внутри соленоида, имеющего форму прямого цилиндра, может быть представлена в виде $\mathbf{B}_{int} = \beta(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)$, где $|\mathbf{E}_0| = \sigma/\epsilon_0$, а $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ — напряжённость электростатического поля, созданного основаниями цилиндра, однородно заряженными с поверхностными плотностями $+\sigma$ и $-\sigma$. Вычислим индуктивность L такого соленоида с длиной l , площадью поперечного сечения S и плотностью намотки $n = N/l$. Поток вектора магнитной индукции через обмотку соленоида $\Phi = \int_0^l \Phi_1(x) n dx$, где поток через поперечное сечение с координатой x (см. рис. 5)

$$\Phi_1(x) = \beta E_0 S + \beta \int_S (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) d\mathbf{S}.$$

Введём обозначение

$$F_{1x} = -\sigma \int_S \mathbf{E}_1 d\mathbf{S}, \quad F_{2x} = \sigma \int_S \mathbf{E}_2 d\mathbf{S},$$

тогда

$$\Phi = \beta E_0 S n l + \frac{\beta}{\sigma} \int_0^l (F_{2x} - F_{1x}) dx. \tag{11}$$

Величине $F_{2x}(x)$ можно придать простой физической смысл: она равна проекции силы, действующей на положительно заряженное основание цилиндра со стороны отрицательно заряженного основания, если длина цилиндра равна x . Поэтому интеграл $-\int_0^l F_{2x}(x) dx$ равен работе внешних сил по медленному раздвижению противоположно заряженных пластин (оснований цилиндра), первоначально вплотную прижатых друг к другу, на расстояние l . Эта работа равна изменению электрической энергии системы. Поскольку начальная энергия системы, когда однородно заряженные с плотностями $\pm\sigma$ пластины прижаты друг к другу, равна нулю, для энергии W_C этих пластин, разнесённых на расстояние l , можно записать

$$W_C = - \int_0^l F_{2x}(x) dx.$$

Таким же способом получим

$$W_C = - \int_l^0 F_{1x}(x) dx = \int_0^l F_{1x}(x) dx.$$

Подставляя вычисленные интегралы в (11), найдём магнитный поток:

$$\Phi = \beta E_0 S n l - 2 \frac{\beta n}{\sigma} W_C.$$

После подстановки в эту формулу E_0 , β и проведения простых преобразований получим для индуктивности

$L = \Phi/I$ соленоида

$$L = L_0 \left(1 - \frac{W_C}{q^2/2C_0} \right), \quad (12)$$

где $L_0 = \mu_0 N^2 S/l$, $C_0 = \epsilon_0 S/l$. Смысл этих обозначений понятен: L_0 — индуктивность соленоида в предельном случае, когда $l \gg \sqrt{S}$ и краевые эффекты для поля \mathbf{B} несущественны, C_0 — ёмкость конденсатора, обкладки которого совпадают с торцами соленоида в случае, когда $l \ll \sqrt{S}$, без учёта краевых эффектов. Формулу (12) можно представить в симметричном виде:

$$\frac{W_L}{(L_0 I^2/2)} + \frac{W_C}{(q^2/2C_0)} = 1, \quad (13)$$

где $W_L = \Phi I/2$ — энергия магнитного поля соленоида при токе I , а W_C — энергия электростатического поля совмещённых с торцами соленоида пластин, по одной из которых однородно распределён заряд q , а по другой — заряд $-q$. Формулы (12), (13) справедливы в широкой области параметров. Предполагается лишь, что соленоид имеет форму прямого цилиндра, а его обмотка тонкая и плотная. При этом поперечное сечение цилиндра может иметь произвольную форму, также произвольным может быть соотношение между длиной цилиндра l и его поперечным размером \sqrt{S} .

Вычислим с помощью (12) индуктивность длинного соленоида с учётом краевых эффектов. Предположим, что соленоид имеет круглое сечение радиуса R и его длина $l \gg R$. Тогда энергию W_C можно представить в виде $W_C = 2W_1 + W_{12}$, где $W_1 = 2\sigma^2 R^3/3\epsilon_0$ — энергия уединённого однородно заряженного диска, а энергия взаимодействия двух разноимённо заряженных удалённых дисков имеет вид

$$W_{12} \approx -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} = -\frac{\sigma^2 \pi^2 R^4}{4\pi\epsilon_0 l}.$$

Определяя из этих соотношений W_C и подставляя в (12), найдём

$$L \approx L_0 \left(1 - \frac{8}{3\pi} \frac{R}{l} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \right). \quad (14)$$

Формула (14) выражает индуктивность длинного соленоида с учётом краевых эффектов и совпадает в первом и втором порядках малости с формулой, полученной непосредственным решением значительно более сложной магнитостатической задачи [12].

С помощью (13) можно вычислить индуктивность и короткого соленоида ($R \gg l$):

$$L = \mu_0 N^2 R \left(\ln \frac{8R}{l} - \frac{1}{2} \right). \quad (15)$$

Однако в этом случае при вычислении W_C возникают эллиптические интегралы и простота вывода теряется (см. приложение).

8. Электрическое поле и ёмкость конденсатора

Рассмотрим плоский конденсатор с площадью обкладок S и расстоянием между обкладками l . В дальней зоне ($r \gg \sqrt{S}$) электрическое поле конденсатора совпадает с полем точечного диполя с дипольным моментом

$p_e = \epsilon_0 S U$, где U — напряжение на конденсаторе. Вблизи заряженного конденсатора электростатическое поле исследовалось в работе [13]. В случае, когда расстояние между обкладками значительно меньше всех других характерных размеров ($l \ll r, \sqrt{S}$), решена краевая задача и получены формулы для потенциала и напряжённости электрического поля вблизи конденсаторов с круглыми и прямоугольными обкладками.

Метод электромагнитной аналогии позволяет получить основные результаты работы [13] существенно проще. Плоский конденсатор в приближении $l \ll r, \sqrt{S}$ можно считать двойным электрическим слоем площадью S с плотностью момента $p_{1e} = ql/S = \epsilon_0 U$, который ограничен контуром L . Из (3) следует, что напряжённость электрического поля вне конденсатора определяется формулой

$$\mathbf{E} = \left(\frac{U}{\mu_0 I} \right) \mathbf{B}, \quad (16)$$

где \mathbf{B} — индукция магнитного поля тока I , протекающего вдоль границы обкладок. Из (16) следует, что линии поля \mathbf{E} плоского конденсатора с обкладками любой формы на расстояниях r от границ обкладок значительно превышающих l , совпадают с линиями поля \mathbf{B} тока I , протекающего вдоль границ обкладок. В частности, вблизи краёв плоского конденсатора ($\sqrt{S} \gg r \gg l$) линии напряжённости поля \mathbf{E} представляют собой окружности. Отметим, что похожий подход использован ранее в работе [14], где показано, что если на плоскости заданы постоянные потенциалы внутри и вне некоторого контура, то для полупространства, ограниченного этой плоскостью, традиционная задача Дирихле электростатики сводится к задаче Био – Савара.

Найдём напряжённость электрического поля на оси симметрии плоского конденсатора с круглыми обкладками. Сначала с помощью (2) вычислим магнитное поле на оси кругового тока:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}},$$

а затем с помощью (16) найдём напряжённость электрического поля на оси конденсатора:

$$E = \frac{UR^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}},$$

где z — расстояние от центра обкладок до точки наблюдения, отсчитанное вдоль оси симметрии, R — радиус обкладок. Эта формула совпадает с полученной в работе [13]. Если обкладки конденсатора квадратные, то таким же способом получим формулу

$$E = \frac{Ua^2}{2\pi(z^2 + a^2/4) \sqrt{z^2 + a^2/2}}$$

для напряжённости поля вне конденсатора на оси z , проходящей через середины обкладок (a — сторона квадрата).

Оценим поправку к ёмкости плоского конденсатора, обусловленную краевыми эффектами. Рассмотрим сначала две *однородно* заряженные пластины, одна из которых имеет заряд q , а другая — заряд $-q$. Пластины расположены, как в плоском конденсаторе, параллельно

друг другу на расстоянии l . Электрическую энергию такой системы с помощью (12) представим в виде

$$W_C = \frac{q^2}{2C_0} \left(1 - \frac{L}{L_0}\right). \tag{17}$$

Если теперь "разморозить" заряды, сделав пластины проводящими, то заряды перераспределятся так, что каждая пластина станет эквипотенциальной. В таком процессе электрическая энергия системы уменьшится и станет равной $q^2/2C$, где C — ёмкость конденсатора. Из $q^2/2C < W_C$ и выражения (17) следует неравенство

$$C > \frac{C_0}{1 - (L/L_0)}, \tag{18}$$

которое можно представить в симметричном виде:

$$\frac{C_0}{C} + \frac{L}{L_0} < 1. \tag{19}$$

Неравенства (18), (19), как и формулы (12), (13), справедливы при любой форме обкладок и произвольном расстоянии между ними.

В специальном случае, когда обкладки конденсатора круглые, а расстояние l между ними значительно меньше их радиуса R , из (15), (18) следует

$$C > C_0 \left[1 + \frac{l}{\pi R} \left(\ln \frac{8R}{l} - 0,5\right)\right].$$

Отсюда для поправки к ёмкости, обусловленной учётом краевых эффектов, получим

$$\delta C = \frac{C - C_0}{C_0} > \frac{l}{\pi R} \left(\ln \frac{8R}{l} - 0,5\right).$$

Этот результат согласуется с известной формулой Кирхгофа [15]:

$$\delta C = \frac{l}{\pi R} \left(\ln \frac{16\pi R}{l} - 1\right) = \frac{l}{\pi R} \left(\ln \frac{8R}{l} + 0,84\right).$$

9. Заключение

Электромагнитную аналогию, выражаемую формулой (3), можно сопоставить с теоремой Ампера [1–4], которая устанавливает эквивалентность магнитных полей, создаваемых магнитным листком и постоянным электрическим током, текущим по контуру, совмещённому с краем этого листка. Магнитным листком, как известно, называют поверхность, одна сторона которой однородно покрыта "северными", а другая — "южными" магнитными зарядами с одинаковой поверхностной плотностью. Гипотетические магнитные заряды во многих отношениях эквивалентны электрическим, в частности удовлетворяют "магнитному закону Кулона" [1–4], поэтому неудивительно, что теорема, аналогичная теореме Ампера, имеет место для электрических зарядов.

Метод электромагнитной аналогии не требует использования сложной математики, а его обоснование можно провести и без строгого вывода формулы (1), опираясь только на примечательный факт, состоящий в том, что поля \mathbf{E} и \mathbf{B} точечных электрического и магнитного диполей подобны и формулы для этих полей различаются лишь постоянным множителем. Тогда с

помощью данного метода теорему о циркуляции вектора индукции в магнитостатике можно доказать на уровне, доступном для студентов первого курса.

Применение электромагнитной аналогии к исследованию магнитного поля соленоида позволило обнаружить ряд интересных закономерностей. Так, магнитное поле \mathbf{B} прямого соленоида во внешней области подобно электростатическому полю \mathbf{E} двух разноимённо заряженных пластин, совмещённых с торцами соленоида, а поле \mathbf{B} внутри соленоида подобно электрическому полю этих пластин, к которому добавлено однородное поле. Указанные закономерности справедливы при любой длине соленоида и произвольной форме поперечного сечения.

Методом электромагнитной аналогии получена формула, устанавливающая связь магнитной энергии соленоида и электрической энергии двух разноимённо заряженных пластин, совмещённых с торцами соленоида. С помощью этой формулы найдено выражение для индуктивности длинного соленоида с учётом краевых эффектов, которая совпадает с известной формулой в первом и втором порядках малости. Методом электромагнитной аналогии получены формулы для электрического поля вне плоского конденсатора, которые ранее были выведены значительно более сложным способом. Получена связь ёмкости конденсатора и индуктивности катушки той же геометрии в виде неравенства, справедливого при произвольной форме обкладок и произвольном расстоянии между ними. Это неравенство использовано для оценки поправки к ёмкости плоского конденсатора вследствие краевых эффектов.

Электромагнитную аналогию можно, видимо, эффективно применять при решении и других задач электро- и магнитостатики.

10. Приложение.

Индуктивность короткого соленоида

Вычислим энергию W_C , рассматривая процесс зарядки пластин как перенос бесконечно малыми порциями $dq = 2\pi r\sigma dr$ положительного заряда с отрицательной обкладки на положительную, причём переносимый на каждом шаге заряд предполагается распределённым с постоянной плотностью σ по кольцу радиусом r шириной dr . Приращение энергии $dW_C = (\varphi_A - \varphi_B) dq$, где φ_A и φ_B — потенциалы на краях положительно и отрицательно заряженных дисков, радиусом r каждый, при этом $\varphi_B = -\varphi_A$. В силу принципа суперпозиции $\varphi_A = \varphi_1 - \varphi_2$, где $\varphi_1 = \sigma r/\pi\epsilon_0$ — потенциал в точке 1 на краю уединённого однородно заряженного диска радиусом r , φ_2 — потенциал поля такого же диска в точке 2, отстоящей от плоскости диска на расстоянии l , а от оси диска — на расстояние r (рис. 7а).

Разбивая диск на кольцевые зоны с центром в точке 1 (рис. 7б) и используя принцип суперпозиции, получим

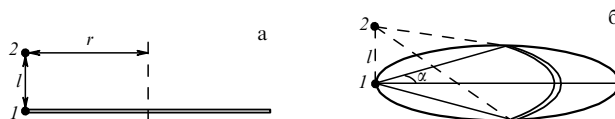


Рис. 7. К выводу формулы (15).

выражение для потенциала в точке 2:

$$\varphi_2 = \varphi_1 \int_0^{\pi/2} \frac{\alpha \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{\delta^2 + \cos^2 \alpha}} d\alpha,$$

где $\delta = l/2r$. После интегрирования по частям это выражение приводится к виду

$$\varphi_2 = \varphi_1 \left(E(r) \sqrt{1 + \delta^2} - \frac{\pi \delta}{2} \right),$$

$$E(r) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \delta^2}} d\alpha.$$

Энергия двух разноименно однородно заряженных пластин определяется интегралом

$$W_C = 4\pi\sigma \int_0^R (\varphi_1 - \varphi_2) r dr =$$

$$= W_0 \left(1 + \frac{8R}{3\pi l} - \frac{8}{\pi l R^2} \int_0^R E(r) r^2 \sqrt{1 + \delta^2} dr \right),$$

где $W_0 = q^2/(2C_0)$, $q = \sigma\pi R^2$. Изменяя в правой части порядок интегрирования, получим

$$\frac{W_C}{W_0} = 1 + \frac{8R}{3\pi l} -$$

$$- \frac{l^2}{3\pi R^2 \delta_0^3} \int_0^{\pi/2} \left[(\cos^2 \alpha + \delta_0^2)^{3/2} - \delta_0^3 \right] \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha},$$

где $\delta_0 = l/(2R)$. Результат интегрирования, справедливый для произвольных l/R , можно представить в виде

$$\frac{W_C}{W_0} = 1 + \frac{4}{3\pi\delta_0} - \frac{4}{3\pi} \left(\kappa D + \frac{1}{\kappa} E \right). \quad (20)$$

Здесь D и E — эллиптические интегралы,

$$D = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \alpha d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha,$$

$k = 1/(1 + \delta_0^2)$, $\kappa = \sqrt{1 - k^2}$. В интересующем нас случае, когда $\delta_0 \ll 1$, эллиптические интегралы представимы в виде [16]

$$E \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \kappa^2, \quad D \approx \lambda - 1 + \frac{3}{4} \left(\lambda - \frac{4}{3} \right) \kappa^2,$$

Electromagnetic analogies in electro- and magnetostatics problems

G.N. Gaidukov, I.N. Gorbatyi

National Research University of Electronic Technology (MIET),
pl. Shokina 1, 124498 Zelenograd, Moscow, Russian Federation
E-mail: gaid-miet@yandex.ru, i_n_gorbatyi@mail.ru

A relation underlying the electromagnetic analogy method has been derived from the Biot–Savart and Coulomb laws: the magnetic field \mathbf{B} generated by a current I in a closed conducting loop L and the electric field \mathbf{E} of a thin double charged layer of the area S bounded by the same loop L are linked by the formula: $\mathbf{B} = (\varepsilon_0 \mu_0 I / p_{1e}) \mathbf{E}$, where p_{1e} is the electric moment per unit area S and $\varepsilon_0 \mu_0$ are permittivity and permeability of free space. Examples are given where this electromagnetic analogy may be used for solving a number of electro- and magnetostatics problems.

Keywords: electrostatics, magnetostatics, electric dipole, magnetic dipole, capacitance, inductance

PACS numbers: 03.50.De, 41.20.Cv, 41.20.Gz

Bibliography — 16 references
Uspekhi Fizicheskikh Nauk **189** (4) 441–448 (2019)
DOI: <https://doi.org/10.3367/UFN.2018.03.038303>

где $\lambda = \ln(4/\kappa)$, и из формулы (20) после преобразований следует

$$\frac{W_C}{W_0} = 1 - \frac{l}{\pi R} \left(\ln \frac{8R}{l} - \frac{1}{2} \right).$$

Используя (12), теперь легко получить формулу (15) для индуктивности короткого соленоида. Эта формула совпадает с соответствующей формулой, полученной непосредственным решением магнитостатической задачи [12].

Список литературы

1. Тамм И Е *Основы теории электричества* (М.: Наука, 1966); Пер. на англ. яз.: Tamm I E *Fundamentals of the Theory of Electricity* (Moscow: Mir Publ., 1979)
2. Stratton J A *Electromagnetic Theory* (New York: McGraw-Hill, 1941); Пер. на русск. яз.: Страттон Дж А *Теория электромагнетизма* (М.–Л.: Гостехиздат, 1948)
3. Сивухин Д В *Общий курс физики* Т. 3. *Электричество* (М.: Наука, 1977)
4. Smythe W R *Static and Dynamic Electricity* (New York: McGraw-Hill, 1950); Пер. на русск. яз.: Смайт В *Электростатика и электродинамика* (М.: ИЛ, 1954)
5. Purcell E M *Electricity and Magnetism* (Berkeley Physics Course, Vol. 2) (New York: McGraw-Hill, 1965); Пер. на русск. яз.: Парселл Э *Электричество и магнетизм* (Берклевский курс физики, Т. 2) (М.: Физматлит, 1975)
6. Иродов И Е *Электромагнетизм. Основные законы* (М.: Бином, 2003)
7. Черноуцан А И *Краткий курс физики* (М.: Физматлит, 2002)
8. Савельев И Е *Курс общей физики* Т. 2 *Электричество и магнетизм. Волны. Оптика* (М.: Астрель, 2002); Пер. на англ. яз. предыдущ. изд-ия: Savelyev I V *Physics, A General Course* Vol. 2 *Electricity and Magnetism, Waves, Optics* (Moscow: Mir Publ., 1980)
9. Hosoda M et al. *Phys. Rev. E* **80** 067202 (2009)
10. Lieberherr M *Am. J. Phys.* **78** 1117 (2010)
11. Dasgupta B V *Am. J. Phys.* **52** 258 (1984)
12. Калантаров П Л, Цейтлин Л А *Расчет индуктивностей* (Л.: Энергоатомиздат, 1986)
13. Parker G W *Am. J. Phys.* **70** 502 (2002)
14. Oliveira M N, Miranda J A *Eur. J. Phys.* **22** 31 (2001)
15. Кирхгоф Г Р *Избранные труды* (М.: Наука, 1988)
16. Jahnke E, Emde F, Lösch F *Tafeln höherer Funktionen* (Stuttgart: Teubner, 1960); Пер. на англ. яз.: *Tables of Higher Functions* (New York: McGraw-Hill, 1960); Пер. на русск. яз.: Янке Е, Эмде Ф, Леш Ф *Специальные функции* (М.: Физматлит, 1977)

Received 6 November 2017

Physics – Uspekhi **62** (4) (2019)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFN.2018.03.038303>