Апрель 2019 г. **Том 189, № 4**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Физика адронов в магнитном поле

М.А. Андрейчиков, Б.О. Кербиков, Ю.А. Симонов

Представлен новый подход к исследованию релятивистских составных систем во внешнем магнитном поле. Методом континуального интеграла получен релятивистский гамильтониан, включающий в себя конфайнмент, одноглюонный обмен и спин-спиновое взаимодействие. Вычислена зависимость от величины магнитного поля масс кварк-антикварковых состояний, которые в отсутствие поля отвечают ρ- *и* π-*мезонам, а также зависимость массы нейтрона от магнитного поля. Наиболее интересные явления происходят в сверхсильных магнитных полях порядка* $10^{18}-10^{20}$ Гс*, которые на короткое время возникают в периферических столкновениях релятивистских тяжёлых ионов.*

Ключевые слова: релятивистский гамильтониан кварковой системы, магнитное поле, псевдоимпульс, цветовое кулоновское и спин-спиновое взаимодействия, регуляризация, метод конституентной сепарации

PACS numbers: **12.39.–x**, **14.40.–n**, 11.15.Tk DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2019.02.038526

Содержание

1. Введение

Задача о поведении адронов, кварков и атомов в сильных магнитных полях (МП) в последние годы привлекает большое внимание [1–3]. Это связано с возникновением сверхсильных МП $eB \sim \Lambda_{\rm QCD}^2 \sim 10^{19}$ Гс, где e — заряд электрона, B — индукция магнитного поля, $\Lambda_{\rm QCD}$ — масштабная константа квантовой хромодинамики (КХД)[1], на начальной стадии процесса периферических столкновений релятивистских тяжёлых ионов на ускорителях RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) и LHC (Large Hadron Collider) [4–6]. Такое МП является наиболее сильным из когда-либо созданных в лабораторных условиях. Предсказывается, что на четыре порядка более слабое поле существует на поверхности специального класса нейтронных звёзд — магнетаров [7, 8]. МП $eB \sim \Lambda_{\rm QCD}^2$ оказывает непосредственное влияние на динамику кварков внутри адронов. Для поля $eB \simeq 10^{19}$ Гс магнитный радиус (радиус Ландау) $l_{\rm B} = (|e|B)^{-1/2} \simeq$ $\simeq 0{,}45$ фм оказывается меньше характерного радиуса адрона. В атомных системах аналогом данного критического поля является "атомное поле" $B_{\rm a} = \alpha^2 m_{\rm e}^2/|e| =$ $= 2{,}35 \times 10^9$ Гс, отвечающее равенству магнитного и боровского радиусов атома водорода, $a_{\rm B} = (\alpha m_{\rm e})^{-1}$. При достижении критического, или швингеровского [9], МП $B_{\rm cr} = m_{\rm e}^2/|e| = \alpha^2 B_{\rm a} = 4{,}414 \times 10^{13}$ Гс движение электрона в плоскости, перпендикулярной направлению МП, становится релятивистским. Энергетический спектр в симметричной калибровке $\mathbf{A} = (1/2)\,\mathbf{B} \times \mathbf{r}$, которая будет использоваться в дальнейшем, выражается как

$$\varepsilon^2 - m^2 - p_z^2 = |e|B\left[2n_\perp + 1 + \left(|s| - \frac{es}{|e|}\right)\right] - e\sigma_z B\,, \quad (1)$$

где МП направлено вдоль оси z, $n_\perp = 0, 1, \ldots, s$ — проекция углового момента на направление поля, $\sigma = \pm 1$ — удвоенная проекция спина на ось z.

Нижний уровень Ландау (Lowest Landau Level — LLL) отвечает состояниям с $es \geqslant 0$, $n_\perp = 0$, $e\sigma_z > 0$. Движение

М.А. Андрейчиков (*1), **Б.О. Кербиков** (†1, 2, 3), **Ю.А. Симонов** (‡1)
(1) Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Алиханова,
Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт",
ул. Б. Черёмушкинская 25, 117218 Москва, Российская Федерация
(2) Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация
(3) Московский физико-технический институт (государственный университет),
Институтский пер. 9, 141700 Долгопрудный, Московская обл., Российская Федерация
E-mail: *andreichicov@mail.ru, † borisk@itep.ru, ‡ simonov@itep.ru

Статья поступила 14 декабря 2017 г., после доработки 30 января 2019 г.

[1] Используется релятивистская система единиц $\hbar = c = 1$, $e^2 = 4\pi\alpha$, в которой 1 ГэВ$/e = 1{,}69 \times 10^{20}$ Гс, 1 ГэВ$^2 \simeq 5{,}12 \times 10^{19}$ Гс.

электрона в направлении вдоль МП остаётся нерелятивистским до тех пор, пока энергия связи не превысит m_e, поэтому LLL имеет энергию $\varepsilon \simeq m + p_z^2/(2m)$.

Ещё одно характерное значение МП, интенсивно обсуждавшееся в последние годы, — это $B_\rho = m_\rho^2/|e| \simeq \simeq 10^{20}$ Гс, где m_ρ — масса ρ-мезона. Рассматривая ρ-мезон как элементарную частицу с гиромагнитным отношением $g_\rho = 2$ (см. ниже) и записывая дисперсионную формулу (1) для LLL заряженного поляризованного ρ-мезона, получаем

$$m_{\rho^\pm}^2(B) = m_{\rho^\pm}^2(B=0) - eB\,. \qquad (2)$$

В более подробной записи eB следует заменить выражением $(e_{\rho^\pm} s_z)B$, $s_z = \pm 1$ для ρ^+ и ρ^- соответственно. Из уравнения (2) следует, что $m_{\rho^\pm}(B_\rho) = 0$, а при $B > B_\rho$ масса становится мнимой. Обращение массы заряженного ρ-мезона в нуль указывает на возможность образования конденсата заряженных векторных мезонов. Формула (2) впервые была приведена в работе [10], авторы которой подчёркивали, что внутренняя структура ρ-мезона в этой формуле никак не отражена. Следует сказать, что, поскольку поле ρ-мезона не является полем Янга – Миллса и не обладает свойством перенормируемости, вопрос о том, действительно ли $g_\rho = 2$, требует отдельного исследования. Однако обзор многочисленных работ на эту тему не входит в нашу задачу. Кратко говоря, равенство $g_\rho = 2$ выполняется с неплохой точностью в эксперименте и на решётках. Согласно недавнему решёточному расчёту [11] $g_\rho = 2{,}11 \pm 0{,}001$, правила сумм КХД приводят к результатам $1{,}8 \pm 0{,}3$ [12] и $2{,}4 \pm 0{,}4$ [13], анализ данных эксперимента BaBar даёт $2{,}1 \pm 0{,}5$ [14]. Роль больших радиационных поправок к g_ρ подчёркнута в [15].

Спустя десятилетие после опубликования работы [10] генерация МП порядка B_ρ стала реальностью в столкновениях тяжёлых ионов и вопрос о конденсате ρ-мезонов стал предметом многочисленных исследований. Следует прежде всего отметить работы М.Н. Чернодуба и соавторов [16, 17]. Дискуссия о существовании конденсата велась по нескольким направлениям. В работе [18] было высказано утверждение о том, что конденсация противоречит теореме Вафы – Виттена [19], согласно которой в векторных теориях типа КХД невозможно спонтанное нарушение глобальных внутренних симметрий, в частности изотопической симметрии. После введения постоянного МП, направленного вдоль оси z, сохраняется остаточная диагональная изотопическая $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{I}_3}$-симметрия. Появление конденсата нарушает $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{I}_3}$, что, по теореме Вафы – Виттена, должно привести к появлению голдстоуновского бозона. Согласно [18] отсутствие этого бозона эквивалентно отсутствию конденсата. В ответ на критику в [20] утверждается, что безмассовый бозон становится продольной модой фотона. В следующей работе [21] показано, что конденсат является неоднородным, поэтому его наличие не противоречит теореме. Наконец, в [22] предложена более слабая формулировка теоремы Вафы – Виттена, допускающая существование конденсата.

Параллельно вопрос об обращении в нуль массы заряженного ρ-мезона в сильном МП и существовании конденсата исследовался в рамках решёточных расчётов [11, 17, 18, 23 – 25]. В работе [23] обнаружено появление в сильном МП конденсата с квантовыми числами заряженного ρ-мезона. С другой стороны, согласно [11, 17, 24, 25] масса $\rho^\pm$-мезонов остаётся конечной, конденсат в сильном МП и тахионная мода отсутствуют. В работе [11] отмечается, что обращению в нуль массы заряженного ρ-мезона в сильном МП препятствует квадратичный по полю член в дисперсионной формуле для энергии, отвечающий дипольной магнитной поляризуемости. Комбинированные аналитические и решёточные расчёты, приведённые в [25], показывают, что масса остаётся конечной. Важно заметить, что общим недостатком решёточных расчётов является невозможность учёта расщепления компонент u и $\bar{\mathrm{d}}$ $(\bar{\mathrm{u}}, \mathrm{d})$ в волновой функции $\rho^\pm$-мезона в сильном МП.

По нашему мнению, ключевую роль в этой дискуссии должно играть то обстоятельство, что ρ-мезон имеет внутреннюю структуру. Радиус Ландау, отвечающий B_ρ, составляет всего $l_{\mathrm{B}} \simeq 0{,}3$ фм. Исследование внутренней структуры и спектра адронов в МП, достигающем B_ρ или превышающем эту величину, является центральной темой данного обзора. Вопрос об обращении, точнее о необращении, массы $\rho^\pm$-мезона в нуль последовательно решён в упомянутой выше работе [25]. С формальной точки зрения этот вывод можно подкрепить вариантом теоремы Вафы – Виттена, приведённым Вайнбергом [26]: составные частицы не могут быть безмассовыми, если их составляющие имеют ненулевую массу. Аналогично дискуссии о конденсате заряженных ρ-мезонов, в своё время возникали споры вокруг "вакуума Саввиди" [27 – 29] или о конденсате промежуточных W-бозонов [30, 31]. С нашей точки зрения, обсуждение конденсации глюонов или W-бозонов является более содержательным по сравнению с обсуждением ρ-конденсата, поскольку соответствующие теории перенормируемы.

Из приведённых выше утверждений можно сделать вывод о том, что в магнитном поле, превышающем величину $B_\sigma = \sigma/|e|$, где $\sigma = 0{,}15 - 0{,}18$ ГэВ^2 — натяжение струны КХД [32, 33], в частности при $B \gtrsim B_\rho$, учёт внутренней структуры ρ-мезона играет существенную роль, обеспечивая, как показано в разделах 5, 6 и 10, его стабильность. Исследование внутренней структуры и спектра адронов в МП, достигающем значения B_σ или превышающем это значение, является центральной темой данного обзора. В обзоре изложен новый подход, основанный на представлении Фока – Фейнмана – Швингера для функции Грина кварка. Метод построения функции Грина в виде континуального интеграла в КХД обобщён для включения МП. Электромагнитное поле влияет как непосредственно на кварки, так и благодаря кварковым петлям на глюонную структуру. Теория, первоначально развитая для кварковых систем с нулевым полным электрическим зарядом, распространена на заряженные системы, в частности на $\rho^\pm$- и $\pi^\pm$-мезоны. Мы покажем, что сколь угодно сильное МП не приводит к коллапсу кварковой системы.

Изучение свойств составных квантовых систем в сильном МП имеет длительную историю, обсуждение которой не входит в нашу задачу. Ограничимся упоминанием небольшого числа ключевых работ. В пионерской работе Шиффа и Снайдера [34] задача об атоме водорода в сильном МП решена в адиабатическом приближении, использованном во всех последующих работах. В последнее десятилетие задача об атоме водорода в МП получила существенное развитие, отражённое в обзорах [35, 36]. Согласно квантовой механике [37] энергия

основного состояния атома водорода логарифмически возрастает с увеличением B по закону $\varepsilon_0 = \lambda_0^2\,\mathrm{Ry}$, $\lambda_0 = \ln(B/B_\mathrm{a})$.

Исследования последних лет показали, что этот результат справедлив лишь как оценка по порядку величины. Более точный результат получен в [35] посредством приравнивания логарифмических производных волновой функции внутреннего короткодействующего и кулоновского потенциалов на расстоянии z, удовлетворяющем условию $l_\mathrm{B} \ll z \ll a_\mathrm{B}$. Когда МП достигает величины $B \gtrsim (3\pi/\alpha)B_\mathrm{cr} \simeq 5{,}7 \times 10^{16}$ Гс, становятся существенными радиационные поправки, приводящие к экранированию кулоновского потенциала. В итоге энергия основного состояния "замораживается" [36–38] на значении $E_\infty \simeq -1{,}7$ кэВ [36]. При учёте конечного радиуса протона уровень выталкивается наверх до значения энергии связи $E'_\infty \simeq -0{,}65$ кэВ. В разделе 5 мы увидим, что аналогичное явление экранирования кулоновского потенциала одноглюонного обмена играет важную роль в стабильности спектра мезона в сильном МП. Сильное МП приводит, кроме того, к модификации эффекта Зеемана в атоме водорода, в частности к небольшому смещению известной радиолинии 21 см [39].

Радиационные и релятивистские поправки к уровням водородоподобных атомов подробно рассмотрены в обзоре [40].

Используемый в литературе формализм решения задачи о связанном состоянии в МП достаточно разнообразен. Остановимся на двух ключевых пунктах: аналитическом выражении для пропагатора и разделении внешних и внутренних переменных в МП. Выражение для релятивистского пропагатора в однородном МП получил Швингер [9], используя формализм собственного времени, введённый ранее Фоком [41]. Другую широко известную формулу для пропагатора вывел Ритус [42]. В работах, которые обсуждаются в настоящем обзоре, используется пропагатор в представлении Фока–Фейнмана–Швингера в виде континуального интеграла. Соответствующий материал представлен в разделе 4.

Для того чтобы вычислить спектр уровней составной системы в МП, необходимо прежде всего отделить движение центра инерции. В МП оператор полного импульса не коммутирует с гамильтонианом, поэтому вводится псевдоимпульс, или магнитный импульс, который является интегралом движения для электрически нейтральной системы. Определение и свойства этой величины обсуждаются в разделе 2. Квантовой механике составных систем в МП посвящены обзоры [43, 44]. В [45, 46] описаны различные физические процессы во внешних электромагнитных полях.

Остановимся кратко на представленных в литературе результатах вычислений спектров и волновых функций адронов в МП. Имеется достаточно много решёточных вычислений [18, 24–49]. Основные выводы, полученные в результате этих расчётов, состоят в том, что массы ρ^--мезона с проекцией спина на направление МП $s_z = -1$ и ρ^+-мезона с $s_z = +1$ убывают с возрастанием поля, но не обращаются в нуль, что соответствовало бы конденсации ρ-мезонов [16]. Что касается массы ρ^0-мезона, то в решёточных расчётах неизбежно происходит $\rho^0-\pi^0$-смешивание в МП. Возможно, именно в этом заключается причина убывания массы ρ^0-мезона с $s_z = 0$ [47]. Другой трудностью, с которой сталкиваются решёточные расчёты, является разделение вкладов $u\bar{u}$- и $d\bar{d}$-состояний в структуру мезона. Отдельного более подробного обсуждения и сравнения с нашими результатами заслуживают недавно опубликованные решёточные расчёты спектра масс мезонов в МП [50]. Такое сравнение проведено в разделе 11, здесь лишь отметим, что явления конденсации ρ-мезонов в работе [50] не обнаружено.

В работах [51, 52] зависимость масс мезонов от величины МП изучалась аналитическими методами. Влияние статического однородного МП на уровни чармония и боттомония исследовалось в работе [51]. Найдены массы различных состояний и зависимость вероятностей их образования от величины МП. Использовался нерелятивистский формализм, что оправдано для тяжёлых кварков, метод псевдоимпульса (см. раздел 2) и корнельский потенциал. Вследствие того что даже с использованием псевдоимпульса не происходит полного разделения переменных, спектр связанных состояний в МП зависит от импульса центра масс системы.

В работе [53] рассматривалось влияние МП на конституентную массу кварков. В итоге массы адронов в МП определяются суммой масс кварков, которые в свою очередь зависят от знака величины es, где $s = +1$, если спин кварка ориентирован вдоль направления МП, и $s = -1$, если он направлен против поля. Массой кварка авторы [53] называют энергию LLL. Траектории зависимости масс мезонов от величины МП расщепляются в соответствии со знаком величины es.

В [54] проблема масс адронов в МП исследовалась в модели Намбу–Иона-Лазинио [55]. Пропагаторы кварков записывались в представлении Ритуса [42]. Сумма кварковых петель была представлена в виде уравнения Швингера–Дайсона. Показано, что масса мезона $\rho^\pm$ с проекцией $\sigma_z = \pm 1$ в приближении LLL не стремится к нулю с возрастанием поля, но с учётом высших уровней Ландау (вплоть до $n = 20$) обращается в нуль даже при умеренной величине МП. Этот результат выглядит противоречивым.

В работе [56] свойства мезонов в МП рассматривались в рамках уравнений Швингера–Дайсона и Бете–Солпитера с использованием представления Ритуса для пропагатора [42]. Особое внимание уделялось зависимости плотности мезонных состояний, которая оказалась пропорциональной B^2. В межкварковом взаимодействии учитывался только линейный потенциал. Сделан вывод о том, что массы мезонов почти не зависят от величины МП, что противоречит приведённым выше результатам решёточных расчётов.

В работе [57] зависимость масс ρ-мезонов от слабого МП определялась при предположении о доминирующей роли виртуального распада $\rho \to \pi\pi$. С возрастанием МП массы ρ^0- и $\rho^\pm$-мезонов убывают.

В [52] исследовалось поведение масс ρ-мезонов с возрастанием МП при конечной температуре. Утверждается, что при температурах, близких к критической, с возрастанием температуры массы мезонов убывают, а с возрастанием МП, наоборот, увеличиваются.

Обзор построен следующим образом. Раздел 2 содержит изложение квантовой механики составной системы в МП. Вводится понятие псевдоимпульса, с помощью которого проводится квазиразделение внешних и внутренних степеней свободы. Разделы 3 и 4 являются центральными в обзоре. С использованием метода континуального интеграла Фока–Фейнмана–Швингера построен

релятивистский гамильтониан составной системы, учитывающий наличие МП и невылетание, а также получены аналитические выражения для массовых спектров и волновых функций мезонов и нейтрона. Для изучения поведения заряженных мезонов в МП в разделе 4 предложен метод конституентной сепарации, в основе которого лежит представление волновой функции адрона в виде произведения волновых функций отдельных кварков, а также получены аналитические выражения для асимптотик массовых спектров в пределе $eB \to \infty$.

Раздел 5 посвящён пертурбативным поправкам, обусловленным одноглюонным обменом и спин-спиновым взаимодействием. Без учёта влияния МП на виртуальные кварковые петли и регуляризации точечного спин-спинового взаимодействия эти поправки могли бы привести к коллапсу основного состояния.

В разделе 6 рассмотрено явление магнитной фокусировки. Показано, что это явление приводит к сдвигу радиолинии водорода 21 см в сильном МП.

В разделе 7 рассматриваются смешивание и расщепление волновых функций адронов с различными проекциями спинов под действием МП.

Раздел 8 посвящён влиянию сильного МП на однопионный обмен, которое приводит к эффективному увеличению константы сверхтонкого взаимодействия для бариона.

В разделе 9 обсуждаются киральные эффекты в МП, благодаря которым масса пиона остаётся конечной в сколь угодно сильном поле.

Раздел 10 посвящён общему утверждению, согласно которому адроны остаются стабильными в сколь угодно сильном магнитном поле.

В разделе 11 подробно описаны результаты расчётов, представлены графики зависимости масс от величины МП, проведено сравнение с результатами решёточных расчётов.

В заключении (раздел 12) суммируются основные результаты, полученные для адронов в МП с помощью метода релятивистского гамильониана, а также кратко обсуждаются вопросы, которые могут быть рассмотрены в будущем в рамках данного формализма.

2. Система фермионов в постоянном однородном магнитном поле

Уровни энергии заряженной частицы со спином 1/2, помещённой в постоянное однородное МП, направленное вдоль оси z и заданное в симметричной калибровке $\mathbf{A} = (1/2)\,\mathbf{B} \times \mathbf{r}$, находятся с помощью решения уравнения Дирака и определяются формулой (1).

Рассмотрим систему, состоящую из двух взаимодействующих частиц с потенциалом взаимодействия $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. В отсутствие МП частицы образуют связанное состояние с дискретным спектром по координате относительного движения $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и непрерывным спектром свободного движения центра масс с импульсом $\mathbf{P}$. Как отмечалось во введении, в МП оператор импульса центра масс $\mathbf{P}$ не коммутирует с гамильтонианом. Имеется существенное различие между электрически нейтральной и заряженной как целое системами. Электрически нейтральная система обладает интегралом движения — псевдоимпульсом [43, 44, 58–62], который в МП обеспечивает трансляционную инвариантность системы как целого и описывает непрерывную часть спектра. Первоначальную идею о существовании интеграла движения в магнитном поле для одной частицы можно получить из классического уравнения $\dot{\mathbf{p}} = e(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$. Далее, обобщая для квантового случая, получим

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{P}} - e\hat{\mathbf{A}} + e\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{r}}\,, \tag{3}$$

где $\hat{\mathbf{p}}$ — обычный (кинетический) импульс, $\hat{\mathbf{P}} = -\mathrm{i}\nabla$ — обобщённый (канонический) импульс. В квантовом случае $\hat{\mathbf{K}}$ также оказывается интегралом движения, т.е. $[\hat{\mathbf{K}}, \hat{H}] = 0$, но компоненты $\hat{K}_x$ и $\hat{K}_y$ (при направлении МП $\mathbf{B} \parallel z$) не могут быть диагонализованы одновременно, $[\hat{K}_x, \hat{K}_y] = -\mathrm{i}eB$. С математической точки зрения существование $\hat{\mathbf{K}}$ следует из инвариантности гамильтониана относительно группы магнитных трансляций (трансляционная инвариантность ведущего центра орбиты Ландау в магнитном поле) и калибровочной группы. Если в стационарном состоянии диагонализована компонента K_x, то положение ведущего центра орбиты Ландау даётся выражением

$$y_0 = -\frac{K_x}{eB}\,, \tag{4}$$

а кратность вырождения в плоскости xy с площадью $S = L_x L_y$:

$$g = L_x \int \mathrm{d}K_x = |e|SB\,, \tag{5}$$

где L — линейный размер системы.

В симметричной калибровке $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (1/2)\,\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ псевдоимпульс приобретает вид

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{P} + \frac{1}{2}\,\mathbf{B} \times \mathbf{r}\,. \tag{6}$$

Понятие псевдоимпульса обобщается для случая электрически нейтральной системы двух или нескольких частиц в постоянном однородном МП. Рассмотрим две нерелятивистские частицы с зарядами $e_1 = e > 0$, $e_2 = -e$ и массами m_1, m_2. Гамильтониан, не включающий в себя члены $\boldsymbol{\sigma}_i\mathbf{B}$ и спин-зависящее взаимодействие, имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_B + \hat{V} = \frac{1}{2m_1}\left(\mathbf{p}_1 - e\mathbf{A}(\mathbf{r}_1)\right)^2 + \\ + \frac{1}{2m_2}\left(\mathbf{p}_2 + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_2)\right)^2 + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,. \tag{7}$$

Введём переменные:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M}\,, \quad M = m_1 + m_2\,,$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = -\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\,, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\,,$$

$$\boldsymbol{\pi} = -\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}\,, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}\,, \quad s = \frac{m_1 - m_2}{M}\,.$$

В симметричной калибровке получим

$$\hat{H}_B = \frac{1}{2M}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{2}\,\mathbf{B} \times \boldsymbol{\eta}\right)^2 + \frac{1}{2\mu}\left(\boldsymbol{\pi} - \frac{e}{2}\,\mathbf{B} \times \mathbf{R} + s\,\frac{e}{2}\,\mathbf{B} \times \mathbf{r}\right)^2. \tag{8}$$

Для рассмотренной двухчастичной системы коммутирующий с гамильтонианом (7), (8) оператор псевдо-

импульса в симметричной калибровке имеет следующий вид:

$$\hat{\mathbf{K}} = \sum_{i=1}^{2}\left(\mathbf{p}_i + \frac{1}{2}\, e_i \mathbf{B}\times\mathbf{r}_i\right) = \mathbf{P} + \frac{e}{2}\,\mathbf{B}\times\boldsymbol{\eta} = \\ = -\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}} + \frac{e}{2}\,\mathbf{B}\times\boldsymbol{\eta}\,. \tag{9}$$

Поскольку псевдоимпульс является интегралом движения, собственные функции $\Psi(\mathbf{R},\boldsymbol{\eta})$ можно выбрать таким образом, чтобы они являлись собственными функциями всех трёх компонент оператора $\hat{\mathbf{K}}$:

$$\hat{\mathbf{K}}\Psi(\mathbf{R},\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{K}\Psi(\mathbf{R},\boldsymbol{\eta})\,, \tag{10}$$

где $\hat{\mathbf{K}}$ — оператор псевдоимпульса, $\mathbf{K}$ — его собственное значение. Представим волновую функцию в виде $\psi(\mathbf{R},\boldsymbol{\eta}) = \exp(\mathrm{i}\mathbf{v}\mathbf{R})\varphi(\boldsymbol{\eta})$ с неизвестным пока вектором $\mathbf{v}$. Тогда

$$\hat{\mathbf{K}}\Psi(\mathbf{R},\boldsymbol{\eta}) = \left(\mathbf{v} + \frac{e}{2}\,\mathbf{B}\times\mathbf{r}\right)\exp(\mathrm{i}\mathbf{v}\mathbf{R})\varphi(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{K}\exp(\mathrm{i}\mathbf{v}\mathbf{R})\varphi(\boldsymbol{\eta})\,. \tag{11}$$

Отсюда находим $\mathbf{v}$ и получаем $\Psi(\mathbf{R},\boldsymbol{\eta})$ в виде

$$\Psi(\mathbf{R},\boldsymbol{\eta}) = \exp\left[\mathrm{i}\left(\mathbf{K} - \frac{e}{2}\,\mathbf{B}\times\boldsymbol{\eta}\right)\mathbf{R}\right]\varphi(\boldsymbol{\eta})\,. \tag{12}$$

С помощью (12) уравнение $\hat{H}\Psi = E\Psi$ сводится к уравнению для $\varphi(\boldsymbol{\eta})$:

$$\left[\frac{\mathbf{K}^2}{2M} - \frac{e}{M}(\mathbf{K}\times\mathbf{B})\boldsymbol{\eta} + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2\mu} + \frac{e^2}{8\mu}(\mathbf{B}\times\boldsymbol{\eta})^2 - \\ - \frac{e}{2}\,\frac{s}{\mu}\mathbf{B}(\boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{\pi}) + V(\boldsymbol{\eta})\right]\varphi_K(\boldsymbol{\eta}) = E\varphi_K(\boldsymbol{\eta})\,. \tag{13}$$

Полного разделения переменных $\mathbf{R}$ и $\boldsymbol{\eta}$ не произошло, поскольку из-за второго слагаемого в (13) движение центра масс связано с внутренним движением. Связь имеет вид электростатического потенциала электрического поля $(\mathbf{K}_\perp\times\mathbf{B})/M$, где $\mathbf{K}_\perp = K_x\boldsymbol{\eta}_x + K_y\boldsymbol{\eta}_y$, а МП направлено вдоль оси z. Другими словами, можно говорить об эффекте Штарка, обусловленном движением центра масс. Связь внутренних и внешних переменных напоминает влияние углового движения электрона в атоме водорода на радиальное движение за счёт слагаемого $l(l+1)$.

Для осцилляторного потенциала уравнение (13) допускает аналитическое решение. Рассмотрение этого случая важно для дальнейшего изложения, так как при исследовании зависимости массы мезона от величины МП на первом этапе будет использоваться осцилляторное приближение для межкваркового взаимодействия.

Выберем потенциал в виде

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\gamma}\,\mathbf{r}^2 + \frac{\sigma\gamma}{2}\,,$$

который с последующей минимизацией по параметру γ с точностью порядка 5 % воспроизводит линейный потенциал в рассматриваемом интервале значений. (В этом разделе мы опускаем аддитивный параметр $\sigma\gamma/2$, но вновь вернёмся к его рассмотрению в разделе 4.) Массы кварков будем считать равными между собой, $m_1 = m_2 = m$, а орбитальный момент относительного движения l положим равным нулю. В этом случае уровни энергии выражаются как

$$E(\mathbf{K}, n_\perp, n_z, l) = 2\Omega(2n_\perp + 1) + \omega\left(n_z + \frac{1}{2}\right) + \\ + \frac{1}{4m}\left[\frac{K_x^2 + K_y^2}{1 + \gamma e^2 B^2/(2\sigma m)} + K_z^2\right], \tag{14}$$

$$\Omega = \frac{eB}{m}\sqrt{1 + \frac{2\sigma m}{\gamma e^2 B^2}}\,, \qquad \omega = \sqrt{\frac{\sigma}{2\gamma m}}\,. \tag{15}$$

Из формулы (14) видно, что для осцилляторного потенциала основным состоянием является состояние с $\mathbf{K} = 0$.

Остановимся кратко на разделении переменных и псевдоимпульса для системы трёх частиц [44, 63]. Имея в виду нейтрон, рассмотрим две частицы с зарядами $-e/3$ и координатами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, а также третью частицу с зарядом $2e/3$ и координатой $\mathbf{r}_3 (e > 0)$. Сумму масс обозначим как $m_+ = 2m + m_3$. Выберем, как и прежде, симметричную калибровку МП и введём координаты Якоби с соответствующими сопряжёнными импульсами

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\sqrt{2}}\,, \quad \boldsymbol{\xi} = \sqrt{\frac{m_{\mathrm{u}}}{2M}}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_3), \quad \mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i\,\mathbf{r}_i\,. \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\pi} = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}, \quad \mathbf{q} = -\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}}, \quad \mathbf{P} = -\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\,. \tag{17}$$

Псевдоимпульс такой системы имеет вид

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{P} - \frac{e}{2}\sqrt{\frac{M}{2m_3}}\,\mathbf{B}\times\boldsymbol{\xi}\,. \tag{18}$$

Проводя выкладки, аналогичные тем, которые привели от (7) к (13), приходим к следующему выражению для гамильтониана во внешнем МП, но без взаимодействия между частицами и для $\mathbf{K} = 0$:

$$\hat{H}_B = -\frac{1}{2m}(\Delta_\xi + \Delta_\eta) + \frac{1}{2m}\left(\frac{eB}{4}\right)^2\left[\frac{m_+^2}{m_3^2}(\boldsymbol{\xi}_\perp)^2 + (\boldsymbol{\eta}_\perp)^2\right] + \\ + \frac{eB}{4m}\left(\frac{m_3 - 2m}{m_3}\,\mathbf{L}^{(\xi)} + \mathbf{L}^{(\eta)}\right). \tag{19}$$

Здесь $\mathbf{L}^{(\xi)}$ и $\mathbf{L}^{(\eta)}$ — орбитальные моменты по соответствующим координатам Якоби, коммутирующие между собой. В разделе 5 формулы (18), (19) используются для исследования зависимости массы нейтрона от величины МП.

Для заряженной системы описанное выше разделение переменных оказывается невозможным. Если формально ввести псевдоимпульс, то, как в случае одной заряженной частицы, компоненты K_x и K_y нельзя диагонализовать одновременно. Центр масс заряженной системы теряет трансляционную инвариантность и прецессирует в плоскости, перпендикулярной направлению МП, с частотой $\Omega = (e_1 + e_2)B/(m_1 + m_2)$. Движение центра масс не исчерпывается тривиальной прецессией, поскольку внешние и внутренние степени свободы не разделены. Вследствие движения центра масс возникает осциллирующее электрическое поле и система как целое движется сложным образом [64]. Разделение переменных допускает только система с равными массами, $m_1 = m_2$ [65]. Невозможность разделить переменные для заряженной системы заставляет искать приближённые методы решения

задачи. В работе [25] предложен метод конституентной сепарации, для которого нулевым приближением служит совокупность невзаимодействующих частиц. Этот метод рассматривается в разделе 4.

3. Релятивистский формализм для кварковой системы в магнитном поле

Задачей этого раздела является введение в общий релятивистский формализм, позволяющий описывать системы с квантово-электродинамическим (КЭД) и квантово-хромодинамическим взаимодействием во внешнем МП в терминах релятивистского гамильтониана (РГ). Предлагаемый подход применим к широкому классу систем: атомам, молекулам, ядрам, адронам — при сколь угодно сильном МП. Необходимо учесть, что сильное МП не только действует на заряженные конституенты, но и изменяет само ядро взаимодействия. Более того, сильное МП может сделать вакуум нестабильным, что также следует учитывать. Указанные обстоятельства накладывают ограничения на использование метода Бете – Солпитера, поскольку непертурбативное КХД-взаимодействие нельзя описывать по теории возмущений совокупностью обменных диаграмм. Кроме того, в релятивистской теории усиление взаимодействия приводит в рамках уравнения Бете – Солпитера к коллапсу [66]. Метод интеграла по путям, предложенный в [67] и развитый в [68 – 72], позволяет избежать указанных проблем и последовательно решить задачу о спектре и волновых функциях.

В рассматриваемом подходе взаимодействие между компонентами составной системы вводится релятивистским и калибровочно-инвариантным образом через петлю Вильсона. Начнём с рассмотрения одночастичной функции Грина фермиона в евклидовом четырёхмерном (4D) пространстве [73]:

$$S(x,y) = (m + \hat{D})^{-1}_{xy}\,, \qquad \hat{D} = \hat{\partial} - \mathrm{i}g\hat{A} - \mathrm{i}e\hat{A}^{(\mathrm{e})}\,, \tag{20}$$

где $A_\mu = (\lambda^a/2)\,A^a_\mu$ $(a = 1, 2, \ldots, 8)$, $A^{(\mathrm{e})}_\mu$ — векторные потенциалы глюонного и электромагнитного полей соответственно. С помощью дираковского проекционного оператора определим скалярную функцию Грина $G(x,y)$ согласно $S(x,y) = (m - \hat{D})G(x,y)$. Функцию $G(x,y)$ можно представить в виде континуального интеграла (представление Фока – Фейнмана – Швингера [70] (Fock – Feynman – Schwinger Representation — FFSR)):

$$G(x,y) = \left(\frac{1}{m^2 - D^2_\mu}\right)_{xy} = \\ = \int_0^\infty \mathrm{d}s\,(D^4z)_{xy}\exp\left(-K\right)\Phi(x,y)\Phi_\sigma(x,y)\,, \tag{21}$$

где K — кинетическое ядро,

$$K = m^2 s + \frac{1}{4}\int_0^s \mathrm{d}\tau\left(\frac{\mathrm{d}z_\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)^2, \tag{22}$$

Φ и Φ_σ — динамические ядра,

$$\Phi(x,y) = P_A\exp\left(\mathrm{i}g\int_y^x (gA_\mu + eA^{(\mathrm{e})}_\mu)\,\mathrm{d}z_\mu\right), \\ \Phi_\sigma(x,y) = P_F\exp\left(\int_0^s \mathrm{d}\tau\,\sigma_{\mu\nu}(gF_{\mu\nu} + eB_{\mu\nu})\right). \tag{23}$$

Здесь $(D^4z)_{xy}$ — мера интегрирования, охватывающая все пути, соединяющие точки y и x в евклидовом 4D-пространстве; P_A и P_F — операторы упорядочения пути и поверхности соответственно, поскольку A_μ и $F_{\mu\nu}$ содержат цветовые матрицы; $\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ и $\sigma_{\mu\nu}B_{\mu\nu}$ — матрицы Дирака 4×4, $\sigma_{\mu\nu} = (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)/(4\mathrm{i})$, например

$$\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{H} & \boldsymbol{\sigma}\mathbf{E} \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{E} & \boldsymbol{\sigma}\mathbf{H} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Важное отличие релятивистского континуального интеграла (22) от нерелятивистского аналога состоит в следующем. В квантовой механике мера интегрирования имеет вид $D^3z = D^3z(t)$, а время t играет роль параметра упорядочения, так как последовательные участки траектории $\mathbf{z}(t)$ упорядочены во времени. В релятивистском интеграле по путям подобную роль играет монотонно возрастающее собственное время τ, а $z_4(\tau)$ содержит монотонную, $\bar{z}_4(\tau)$, и флуктуирующую, $\tilde{z}_4(\tau)$, компоненты, т.е. $z_4(\tau) = \bar{z}_4(\tau) + \tilde{z}_4(\tau)$. Очевидно, что $\tilde{z}_4(\tau)$ соответствует той части траектории, которая именуется Z-графом, содержащим рождение $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$- и $\mathrm{q}\bar{\mathrm{q}}$-пар. Учёт данных траекторий необходим в порядке e^4 для КЭД и g^4 для КХД. Пренебрегая этим эффектом в первом порядке, можно считать. что время $\bar{z}_4(\tau)$ пропорционально τ, $\bar{z}_4(\tau) = 2\omega\tau \equiv t_{\mathrm{E}}$. Аналогичным образом величина ω связана с полным собственным временем s согласно $s = T/(2\omega)$, где T — полное евклидово время, $T = |x_4 - y_4|$. В итоге функция Грина (21) приобретает вид (для простоты опускаем Φ_σ)

$$G(x,y) = (m^2 - \hat{D}^2)^{-1}_{xy} = \\ = T\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{2\omega^2}\,(D^3z)_{xy}\exp\left(-K(\omega)\right)\langle\Phi(x,y)\rangle\,, \tag{25}$$

где

$$K(\omega) = \int_0^T \mathrm{d}t_{\mathrm{E}}\left[\frac{\omega}{2} + \frac{m^2}{2\omega} + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}t_{\mathrm{E}}}\right)^2\right], \tag{26}$$

а $\langle\Phi(x,y)\rangle = \int Dz_4\Phi(x,y)$ при пренебрежении флуктуациями выражается как

$$\langle\Phi(x,y)\rangle = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi T}}\exp\left\{\mathrm{i}\int_y^x \left[eA^{(\mathrm{e})}_\mu(\bar{z},t_{\mathrm{E}}) + gA_\mu(\bar{z},t_{\mathrm{E}})\right]\mathrm{d}z_\mu\right\}, \tag{27}$$

где $\mathrm{d}z_\mu = (\mathrm{d}z_i, \mathrm{d}t_{\mathrm{E}})$. Подобное представление функции Грина пары кварк – антикварк выглядит следующим образом:

$$G_1(x,y)G_2(x,y) = \\ = \frac{T}{8\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\omega_1^{3/2}}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\omega_2^{3/2}}\,(D^3z_1)_{xy}(D^3z_2)_{xy}\exp\left(-A(W)\right)\langle W\rangle\,, \tag{28}$$

где $A = K_1(\omega_1) + K_2(\omega_2)$, $\langle W\rangle$ — петля Вильсона, содержащая электромагнитные и глюонные поля,

$$\left\langle W(A, A^{(\mathrm{e})})\right\rangle = \left\langle P\exp\left[\mathrm{i}\oint (eA^{(\mathrm{e})}_\mu + gA_\mu)\,\mathrm{d}z_\mu\right]\right\rangle. \tag{29}$$

Далее под электромагнитными полями подразумевается внешнее однородное МП $A^{(\mathrm{e})}_\mu = (\mathbf{A}^{(\mathrm{e})}_\mu, 0)$, а по вакуумным полям A_μ, коррелятор $F_{\mu\nu}$ которых отличен от нуля, проводится усреднение. Связь усреднений вильсонов-

ской петли с потенциалом хорошо известна [74]. В рассматриваемой постановке задачи в гауссовом приближении [32] имеем [67, 75–79]

$$\langle W\rangle = Z_W \exp\left[-\int V_0\big(r(t_{\rm E})\big)\,{\rm d}t_{\rm E}\right], \tag{30}$$

где $r(t_{\rm E}) = |\bar{z}_1(t_{\rm E}) - \bar{z}_2(t_{\rm E})|$, а $V_0(r)$ представляет собой сумму непертурбативного потенциала конфайнмента и вклада одноглюонного обмена (One Gluon Exchange — OGE):

$$V_0(r) = V_{\rm conf}(r) + V_{\rm OGE}(r)\,, \tag{31}$$

где $V_{\rm conf}$ и $V_{\rm OGE}$ выражаются через вакуумные гауссовы корреляторы стохастических цветовых полей:

$$V_{\rm conf}(r) = 2r\int_0^r {\rm d}\lambda \int_0^\infty {\rm d}v\, D(\lambda, v) \to \sigma r\,, \quad r\to\infty\,, \tag{32}$$

$$V_{\rm OGE}(r) = \int_0^r \lambda\,{\rm d}\lambda \int_0^\infty {\rm d}v\, D_1(\lambda, v) = -\frac{4}{3}\frac{\alpha_{\rm s}}{r}\,, \tag{33}$$

$$\sigma = 2\int_0^\infty {\rm d}v \int_0^\infty {\rm d}\lambda\, D(\lambda, v)\,, \tag{34}$$

где $\alpha_{\rm s}$ — константа сильного взаимодействия, σ — натяжение струны линейного потенциала конфайнмента. Скалярные функции D и D_1 входят в представление для квадратичного кумулянта (коррелятора) глюонных полей [32, 78, 79]:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu\lambda\sigma}(x,y) &\equiv g^2\frac{1}{N_{\rm c}}\,{\rm tr}\,\big\langle F_{\mu\nu}(x)\Phi F_{\lambda\sigma}(y)\Phi\big\rangle = \\ &= (\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda})D(x-y) + \\ &+ \frac{1}{2}\,\partial_\mu\Big\{\big[(h_\lambda\delta_{\nu\sigma} - h_\sigma\delta_{\nu\lambda}) + (\mu\lambda\leftrightarrow\nu\sigma)\big]D_1(x-y)\Big\}\,, \end{aligned} \tag{35}$$

где $h_\mu \equiv x_\mu - y_\mu$, $N_{\rm c}$ — число цветов. На заключительном этапе функцию Грина, представленную в виде интеграла по траекториям, можно записать с помощью оператора эволюции. Например, для одной частицы в отсутствие внешнего поля

$$\int (D^3z)_{xy}\exp\big(-K(\omega)\big) = \langle x|\exp\big(-H(\omega)T\big)|y\rangle\,, \tag{36}$$

где $H(\omega)$ — релятивистский гамильтониан свободной частицы $H(\omega) = (\mathbf{p}^2 + m^2)/(2\omega) + \omega/2$. Поскольку основное внимание в данном обзоре уделяется изучению основных состояний адронов в МП при различных ориентациях магнитных моментов кварков, в пределе $T\to\infty$ интегралы по ω в (25) и (28) могут быть вычислены методом стационарной фазы, т.е. при

$$\left.\frac{\partial H(\omega)}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_0} = 0\,. \tag{37}$$

Отсюда для свободной релятивистской частицы $\omega_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, $H(\omega_0) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Функцию Грина системы кварк–антикварк во внешнем МП (28) можно по аналогии с (36) представить в виде

$$\begin{aligned} &G_1(x,y)G_2(x,y) = \\ &= \frac{T}{8\pi}\int_0^\infty \frac{{\rm d}\omega_1}{\omega_1^{3/2}}\int_0^\infty \frac{{\rm d}\omega_2}{\omega_2^{3/2}}\,\big\langle x\big|\exp\big[-H(\omega_1,\omega_2,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)T\big]\big|y\big\rangle\,. \end{aligned} \tag{38}$$

Входящий в (38) гамильтониан включает в себя потенциал V_0, определённый в (31). В симметричной калибровке, учитывая, что $\int {\rm d}\tau\,\sigma_{\mu\nu}B_{\mu\nu} = \int {\rm d}t_{\rm E}/(2\omega)\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}$, имеем

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{i=1}^{2}\left[\left(\frac{\mathbf{p}_i - (e_i/2)(\mathbf{B}\times\mathbf{r}_i)}{2\omega_i}\right)^2 + \frac{\omega_i^2 + m_i^2 - e_i\,\boldsymbol{\sigma}_i\mathbf{B}}{2\omega_i}\right] + \\ &+ V_0(\mathbf{r}) \equiv H_B + H_\sigma + V_0(\boldsymbol{\eta})\,, \end{aligned} \tag{39}$$

где как H_B и H_σ обозначены первое и второе слагаемое под знаком суммы.

Вся непертурбативная динамика мезона содержится в гамильтониане (39). Для вычисления массы основного состояния необходимо выделить в функции Грина проекцию на пространство внутренних степеней свободы, т.е. провести в (38) следующее интегрирование:

$$\begin{aligned} &\int {\rm d}^3(x-y)\,\big\langle x\big|\exp\big[-H(\omega_1,\omega_2,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)T\big]\big|y\big\rangle = \\ &= \sum_n \varphi_n^2(\boldsymbol{\eta})\exp\big[-M_n(\omega_1,\omega_2)T\big]\,, \end{aligned} \tag{40}$$

где $\varphi_n(\boldsymbol{\eta})$ — волновая функция внутреннего движения. Масса M_0 основного состояния находится с помощью вычисления интеграла (38) методом стационарной фазы. Таким образом, непертурбативная, или динамическая, масса определяется следующей системой уравнений:

$$\hat{H}|\varphi_0\rangle = M_0(\omega_1,\omega_2)|\varphi_0\rangle\,, \tag{41}$$

$$\left.\frac{\partial M_0}{\partial\omega_i}\right|_{\omega_i=\omega_i^{(0)}} = 0, \qquad i = 1,2\,. \tag{42}$$

Решение задачи о спектре гамильтониана (39) подробно рассмотрено в разделе 4. Полная масса $M_{\rm tot}$ складывается из непертурбативной массы M_0, отвечающей основному состоянию гамильтониана (39), и пертурбативных поправок трёх типов:

$$M_{\rm tot} = M_0 + \Delta M_{\rm OGE} + \Delta M_{\rm SS} + \Delta M_{\rm SE}\,. \tag{43}$$

Здесь $\Delta M_{\rm OGE} = \langle\varphi_0|\hat{V}_{\rm OGE}|\varphi_0\rangle$ — вклад одноглюонного обмена, $\Delta M_{\rm SS}$ порождается цветомагнитным спин-спиновым взаимодействием, $\Delta M_{\rm SE}$ — вклад собственной энергии кварков. Все три указанных слагаемых будут рассмотрены в разделе 6. Пока лишь отметим, что одноглюонный обмен и спин-спиновое взаимодействие являются возможными источниками неустойчивости спектра (падение на центр).

4. Методы вычисления спектров адронов в магнитном поле

Как показано в разделе 2, задача о спектре электрически нейтральной системы в МП допускает квазиразделение внешних и внутренних переменных. Благодаря введению псевдоимпульса спектр уровней гамильтониана (7) определяется уравнением (13). Релятивистским аналогом (7) является полученный в разделе 3 гамильтониан (39), зависящий от "динамических масс" кварков ω_i. В релятивистском случае вместо выражения (8) следует записать

$$\begin{aligned} \hat{H}_B &= \frac{1}{2(\omega_1+\omega_2)}\left[\mathbf{P} - \frac{e}{2}(\mathbf{B}\times\boldsymbol{\eta})\right]^2 + \\ &+ \frac{1}{2\tilde{\omega}}\left[\boldsymbol{\pi} - \frac{e}{2}(\mathbf{B}\times\mathbf{R}) + \frac{e}{2}\,s\mathbf{B}\times\boldsymbol{\eta})\right]^2, \end{aligned} \tag{44}$$

входящие в эту формулу величины определены в разделе 2 с точностью до замены $m_i \to \omega_i$, $\mu \to \tilde{\omega}$. Следуя изложенному в разделе 2 формализму (формулы (9)–(13)), вводим псевдоимпульс и приходим к уравнению для волновой функции внутреннего движения $\varphi_K(\boldsymbol{\eta})$:

$$\left\{\frac{1}{2(\omega_1+\omega_2)}\left[\mathbf{K}-e(\mathbf{B}\times\boldsymbol{\eta})\right]^2+\frac{1}{2\tilde{\omega}}\left[\boldsymbol{\pi}+\frac{e}{2}\,s(\mathbf{B}\times\boldsymbol{\eta})\right]^2+\right.$$
$$\left.+\,V_0(\boldsymbol{\eta})\right\}\varphi_K(\boldsymbol{\eta})=\varepsilon(\omega_1,\omega_2)\varphi_K(\boldsymbol{\eta})\,. \qquad (45)$$

Согласно нерелятивистской формуле (13) и её релятивистскому аналогу (45), движение центра масс влияет на внутреннее движение благодаря не только слагаемому $\mathbf{K}^2/2(\omega_1+\omega_2)$, но и, что более важно, выражению $(\mathbf{K}\times\mathbf{B})\boldsymbol{\eta}/(\omega_1+\omega_2)$. Именно поэтому волновая функция $\varphi_K(\boldsymbol{\eta})$ имеет индекс K. Ясную физическую картину может дать аналитическое решение уравнения (45). Первый шаг — это разделение движения в плоскости, перпендикулярной полю, и вдоль МП. Представим функцию $\varphi_K(\boldsymbol{\eta})$ в следующем виде [58–62]:

$$\varphi_K(\boldsymbol{\eta})=\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{s}{2}\,\mathbf{K}_\perp\boldsymbol{\eta}\right)\varphi'_K(\boldsymbol{\eta}')\,, \qquad (46)$$

где

$$\mathbf{K}_\perp=\mathbf{e}_xK_x+\mathbf{e}_yK_y\,,\quad \boldsymbol{\eta}'=\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_0\,,\quad \boldsymbol{\eta}_0=-\frac{\mathbf{K}\times\mathbf{B}}{eB^2}\,. \qquad (47)$$

Подставляя (46) и (47) в (45), приходим к следующему уравнению:

$$\left[\frac{K_z^2}{2(\omega_1+\omega_2)}-\frac{1}{2\tilde{\omega}}\frac{\partial^2}{\partial\eta_z'^2}-\frac{1}{2\tilde{\omega}}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta_x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta_y'^2}\right)-\frac{eB}{2}\,\frac{s}{\tilde{\omega}}l_z'+\right.$$
$$\left.+\,\frac{e^2B^2}{8\tilde{\omega}}(\eta_x'^2+\eta_y'^2)\right]\varphi'_K(\boldsymbol{\eta}')=\varepsilon(\omega_1,\omega_2)\varphi'_K(\boldsymbol{\eta}')\,. \qquad (48)$$

Поперечная часть уравнения (48) описывает уровни Ландау заряженной частицы в МП [37] с центром, смещённым на расстояние $\boldsymbol{\eta}_0$ за счёт эффективного электрического поля, действующего на внутренние переменные. Нас интересуют основные состояния мезонов. Поэтому положим в (48) $l_z'=0$. Тогда для собственных значений $\varepsilon(\omega_1,\omega_2)$ получим

$$\varepsilon(\omega_1,\omega_2)=\frac{K_z^2}{2(\omega_1+\omega_2)}+\frac{p_z^2}{2\tilde{\omega}}+\frac{eB}{2\tilde{\omega}}(2n_\rho+1)\,, \qquad (49)$$

где $\rho^2=\eta_x'^2+\eta_y'^2$, $n_\rho=0,1,2,\ldots$ Заметим, что выражение (49) не сводится к сумме собственных значений энергии двух независимых частиц на уровнях Ландау с нулевым орбитальным моментом

$$\varepsilon'(\omega_1,\omega_2)=\frac{p_{z1}^2}{2\omega_1}+\frac{eB}{2\omega_1}(2n_{\rho1}+1)+\frac{p_{z2}^2}{2\omega_2}+\frac{eB}{2\omega_2}(2n_{\rho2}+1)\,. \qquad (50)$$

Нетрудно убедиться в том, что выражения (49) и (50) дают эквивалентные спектры и одинаковую степень вырождения состояний.

Обратимся теперь к решению задачи о спектре гамильтониана (39), составной частью которого является гамильтониан (44). Решить задачу с линейным потенциалом конфайнмента $V_0(\boldsymbol{\eta})=V_{\mathrm{conf}}(\eta)=\sigma\eta$, $\sigma=0{,}18$ ГэВ^2 [80] можно только численно. Поэтому мы воспользуемся представлением потенциала конфайнмента в квадратичной форме. Точность этого метода для собственных значений примерно 5 % [80]. Сделаем следующую замену:

$$V_0(\boldsymbol{\eta})=\sigma\eta\to\frac{\sigma}{2}\left(\frac{\eta^2}{\gamma}+\gamma\right), \qquad (51)$$

где γ — положительный вариационный параметр. Минимизируя (51) по γ, мы возвращаемся к исходному потенциалу конфайнмента.

Полагая орбитальный момент по-прежнему равным нулю, приходим к задаче отыскания собственных значений и собственных функций следующего гамильтониана:

$$\hat{H}=\hat{H}_B+\frac{\sigma}{2\gamma}\,\boldsymbol{\eta}^2+\frac{\sigma\gamma}{2}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\omega_i^2+m_i^2-e_i\boldsymbol{\sigma}_i\mathbf{B}}{2\omega_i}\,. \qquad (52)$$

Выражение (46) следует заменить следующим [62]:

$$\varphi_K(\boldsymbol{\eta})=\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{s}{2}\,\alpha\mathbf{K}_\perp\boldsymbol{\eta}\right)\chi_k(\mathbf{r})\,, \qquad (53)$$

где

$$\alpha=\left(1+\frac{(\omega_1+\omega_2)\sigma}{\gamma e^2B^2}\right)^{-1},$$
$$\mathbf{r}=\boldsymbol{\eta}-\alpha\boldsymbol{\eta}_0=\left(\eta_x+\frac{\alpha}{eB}\,K_y,\quad \eta_y-\frac{\alpha}{eB}\,K_x,\eta_z\right), \qquad (54)$$

величина $\boldsymbol{\eta}_0$ определена формулой (47). Подставив (53) в уравнение $\hat{H}\varphi_K(\boldsymbol{\eta})=M\varphi_K(\boldsymbol{\eta})$, после несложных выкладок получим результат для собственных значений:

$$M_{K,n_\perp,n_z}(\omega_1,\omega_2,\gamma)=\frac{1}{2\tilde{\omega}}\left[eB\sqrt{1+\frac{4\sigma\tilde{\omega}}{\gamma e^2B^2}}(2n_\rho+1)+\right.$$
$$\left.+\,\sqrt{\frac{4\sigma\tilde{\omega}}{\gamma}}\left(n_z+\frac{1}{2}\right)\right]+\sum_{i=1}^{2}\frac{\omega_i^2+m_i^2-e_i\boldsymbol{\sigma}_i\mathbf{B}}{2\omega_i}+\frac{\sigma\gamma}{2}+$$
$$+\,\frac{1}{2(\omega_1+\omega_2)}\left[K_z^2+K_\perp^2(1-\alpha)\right]. \qquad (55)$$

Нас интересуют массы основных состояний с $n_\rho=n_z=0$. Из (55) видно, что минимальному значению M отвечает $K=0$. Это обстоятельство является особенностью осцилляторного потенциала V_{conf}. Подробно зависимость собственных значений от величины псевдоимпульса обсуждается в работе [49]. Важной особенностью осцилляторного приближения является наличие простой связи между средним значением кинетического импульса системы $\mathbf{P}=\sigma_j(-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}_j-e_j\mathbf{A}_j)$ и величиной псевдоимпульса [49],

$$\langle\mathbf{P}\rangle=\left(\frac{4K_x}{1+\gamma e^2B^2/(4\sigma\tilde{\omega})}\,,\ \frac{4K_y}{1+\gamma e^2B^2/(4\sigma\tilde{\omega})}\,,\ K_z\right). \qquad (56)$$

Так как в (55) всегда $\alpha<1$, мезон в основном состоянии в осцилляторном приближении благодаря связи (56) является покоящимся. Волновая функция основного состояния с $n_\perp=n_z=0$ и $K=0$ и, соответственно, $\mathbf{r}=\boldsymbol{\eta}$, имеет вид

$$\varphi(\boldsymbol{\eta})=\frac{1}{\sqrt{\pi^{3/2}r_\perp^2r_z}}\exp\left(-\frac{\eta_\perp^2}{2r_\perp^2}-\frac{\eta_z^2}{2r_z^2}\right), \qquad (57)$$

$$r_\perp=\sqrt{\frac{2}{|e|B}}\left(1+\frac{4\sigma\tilde{\omega}}{\gamma e^2B^2}\right)^{-1/4},\quad r_z=\left(\frac{\gamma}{\sigma\tilde{\omega}}\right)^{1/4}. \qquad (58)$$

Как сказано во введении, влияние МП определяется безразмерным параметром eB/σ. Применительно к задаче о спектре адронов в МП мы будем называть поле слабым, если $eB/\sigma \ll 1$ (т.е. $eB \ll 10^{19}$ Гс), и сильным, если $eB/\sigma \gg 1$. Можно показать [80], что в сильном поле $r_\perp \approx \sqrt{2/(|e|B)}$, $r_z \approx 1/\sqrt{\sigma}$ и волновая функция мезона приобретает форму вытянутого эллипсоида. Размер данного эллипсоида вдоль оси z ограничен натяжением струны, тогда как в случае атома водорода такое ограничение отсутствует. Из сравнения формул (49) и (55) видно, что в пределе сильного поля энергетический спектр, отвечающий движению в плоскости, перпендикулярной полю, имеет вид уровней Ландау $\varepsilon(n_\perp) = [eB/(2\tilde{\omega})](2n_\perp + 1)$. Как отмечалось выше, спектр уровней (49) эквивалентен сумме собственных значений двух независимых частиц на уровнях Ландау в МП. Данное наблюдение лежит в основе метода конституентной сепарации (КС), основная идея которого рассмотрена в этом разделе ниже. Связь между движением в плоскости, перпендикулярной полю, и движением вдоль поля возникает при одновременной минимизации $M(\omega_1, \omega_2, \gamma)$ по всем трём параметрам. В слабом поле, $eB/\sigma \ll 1$, зависимость энергии от МП определяется слагаемым $e_i\boldsymbol{\sigma}_i\mathbf{B}$ в выражении (55). т.е. взаимодействием магнитных моментов кварков с МП.

Итак, мы вычислили спектр и нашли волновые функции гамильтониана (41). Динамическая масса основного состояния выражается в виде

$$M(\omega_1, \omega_2, \gamma) = \frac{1}{2\tilde{\omega}}\left[eB\sqrt{1 + \frac{4\sigma\tilde{\omega}}{\gamma e^2 B^2}} + \sqrt{\frac{\sigma\tilde{\omega}}{\gamma}}\right] + \\ + \sum_{i=1}^{2} \frac{\omega_i^2 + m_i^2 - e_i\boldsymbol{\sigma}_i\mathbf{B}}{2\omega_i} + \frac{\sigma\gamma}{2}\,, \tag{59}$$

а волновые функции имеют осцилляторный вид (57), (58).

Полная масса мезона складывается, согласно (46), из динамической массы (59) и пертурбативных поправок $\Delta M_{\rm OGE}$, $\Delta M_{\rm SS}$ и $\Delta M_{\rm SE}$. Эти величины рассмотрены в разделе 5.

Обсудим вопрос о динамической массе нейтрона в МП [81]. Будем исходить из полученного в разделе 2 нерелятивистского гамильтониана (19) для трёх частиц в МП. Сделаем замену $m_i \to \omega_i$, а орбитальные моменты в основном состоянии положим равными нулю. Далее необходимо добавить слагаемые, описывающие взаимодействие магнитных моментов кварков с МП, конфайнмент, цветовое кулоновское взаимодействие и спин-спиновые силы. В итоге приходим к следующему гамильтониану для нейтрона:

$$\hat{H}_{\rm N} = \hat{H}_{\rm B} + V_\sigma + V_{\rm conf} + V_{\rm OGE} + V_{\rm SS} + \Delta M_{\rm SE}\,, \tag{60}$$

где $\hat{H}_B$ получается из (19) с помощью упомянутой ранее замены, а потенциалы приобретают вид

$$V_\sigma = -\sum_{i=1}^{3} \frac{e_i\boldsymbol{\sigma}_i\mathbf{B}}{2\omega_i}, \quad V_{\rm conf} = \sigma\sum_{i=1}^{3}|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{\rm Y}|\,. \tag{61}$$

Координата $\mathbf{x}_{\rm Y}$ отвечает точке ветвления струны (точке Торричелли). Тот факт, что три кварка в барионе образуют так называемую Y-конфигурацию, даётся явным вычислением с помощью данного метода [33], а также подтверждается решёточными расчётами [82–84]. Выражения для вкладов одноглюонного обмена и собственно-энергетической части аналогичны соответствующим величинам для мезонов. Потенциал конфайнмента аппроксимируется осцилляторным выражением

$$V_{\rm conf} = \sigma\sum_{i=1}^{3}|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{\rm Y}| \to 3\,\frac{\sigma\gamma}{2} + \frac{\sigma}{2\gamma}\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{\rm Y})^2 \to \\ \to \frac{3\sigma\gamma}{2} + \frac{\sigma}{2\gamma}\left(\frac{\omega_3^2 + 2\omega^2}{\omega_+\omega_3}\,\boldsymbol{\xi}^2 + \boldsymbol{\eta}^2\right), \tag{62}$$

где $\omega_1 = \omega_2 = \omega_{\rm d} = \omega$, $\omega_3 = \omega_{\rm u}$, $\omega_+ = 2\omega + \omega_3$. Последняя цепочка в (62) отвечает тому, что мы отождествляем точку Торричелли $\mathbf{x}_{\rm Y}$ с центром масс, что для почти равных масс является хорошим приближением. Уравнение для основного состояния нейтрона без учёта вкладов $V_{\rm OGE}$, $V_{\rm SS}$ и $\Delta M_{\rm SE}$ имеет вид

$$(\hat{H}_B + V_\sigma + V_{\rm conf})\varphi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = M_0(\omega_i, \gamma)\varphi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})\,. \tag{63}$$

Полная волновая функция бариона является произведением координатной $\varphi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$ и спин-ароматовой функций. В МП нарушается сразу несколько симметрий:

1) смешиваются состояния $J = 1/2$ и $J = 3/2$;

2) аналогичным образом смешиваются изотопические состояния $I = 1/2$ и $I = 3/2$;

3) слагаемые гамильтониана H_B и $V_{\rm conf}$ не обладают симметрией относительно инверсии $\boldsymbol{\eta} \to -\boldsymbol{\eta}$.

Можно показать [81], что при включении МП с учётом приведённых выше симметрийных соображений низшему состоянию отвечает спин-ароматовая функция $\mathrm{d}_-\mathrm{d}_-\mathrm{u}_+$. В приближении (62) для $V_{\rm conf}$ уравнение (63) сводится к известному в квантовой механике уравнению для потенциала в виде суммы потенциалов двух осцилляторов. Выражение для динамической массы нейтрона получается посредством решения спектральной задачи (63) для трёхчастичного обобщения гамильтониана (39) с учётом (62), а также спиновых и релятивистских слагаемых V_σ для конфигурации $\mathrm{d}_-\mathrm{d}_-\mathrm{u}_+$

$$\frac{M_0}{\sqrt{\sigma}} = \Omega_{\xi\perp} + \Omega_{\eta\perp} + \frac{1}{2}\left(\Omega_{\xi\parallel} + \Omega_{\eta\parallel}\right) + \frac{3\sqrt{\sigma}\gamma}{2} + \\ + \frac{m_{\rm d}^2 + \omega^2 - eB/2}{\omega\sqrt{\sigma}} + \frac{m_{\rm u}^2 + \omega_3^2 - eB}{2\omega_3\sqrt{\sigma}}\,, \tag{64}$$

где

$$\Omega_{\xi\perp} = \left[\left(\frac{eB}{4\sigma}\right)^2 \frac{a_+^2}{a^2 a_3^2} + \frac{a_3^2 + 2a^2}{\beta a a_+ a_3}\right]^{1/2}, \\ \Omega_{\eta\perp} = \left[\left(\frac{eB}{4\sigma}\right)^2 \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\beta a}\right]^{1/2}, \\ \Omega_{\xi\parallel} = \left(\frac{a_3^2 + 2a^2}{\beta a a_+ a_3}\right)^{1/2}, \quad \Omega_{\eta\parallel} = \frac{1}{\sqrt{\beta a}} \tag{65}$$

и введены обозначения $\omega = a\sqrt{\sigma}$, $\omega_3 = a_3\sqrt{\sigma}$, $\gamma = \beta/\sqrt{\sigma}$, $a_+ = 2a + a_3$. Параметры a, a_3 и β находятся из условий

$$\left.\frac{\partial M(\omega_i, \gamma)}{\partial \omega_i}\right|_{\omega_i = \omega_i^{(0)}} = 0, \qquad \left.\frac{\partial M_0(\omega_i, \gamma)}{\partial \gamma}\right|_{\gamma = \gamma^{(0)}} = 0\,. \tag{66}$$

Волновая функция факторизуется в виде произведения четырёх осцилляторных функций, $\varphi(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \varphi_1(\eta_\perp)\varphi_2(\eta_\parallel)\psi_1(\xi_\perp)\psi_2(\xi_\parallel)$, отвечающих движению по координатам $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\xi}$ в плоскости, перпендикулярной МП,

и вдоль МП. Как и мезон, нейтрон испытывает сжатие в плоскости, перпендикулярной полю, а в направлении вдоль поля его характерный размер определяется натяжением струны σ.

Таким образом, использование псевдоимпульса позволяет разделить переменные только в ряде специальных случаев — для мезонов необходимым условием является электронейтральность системы, а в случае бариона накладывается дополнительное ограничение на проекции спинов кварков. Как видно из формул (14) и (15), безразмерным параметром, характеризующим массовый спектр адрона в магнитном поле, является отношение eB/σ. В режиме сильного поля ($eB/\sigma \gg 1$) влияние конфайнмента в плоскости, перпендикулярной направлению МП, сильно подавлено, поэтому можно рассматривать кварки, независимо движущиеся по ларморовским орбитам, имеющим общий центр. Используя осцилляторное приближение для потенциала конфайнмента (53), можно разделить движения вдоль направления магнитного поля, которое определяется в основном конфайнментом, и в перпендикулярной ему плоскости, поэтому можно записать $M(\omega_1, \omega_2, \gamma) = M_\perp + M_3$. Приближение независимых кварков позволяет представить волновую функцию в виде произведения:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_1^\perp(\mathbf{r}_\perp^{(1)})\psi_2^\perp(\mathbf{r}_\perp^{(2)})\psi^z(z^{(1)} - z^{(2)})\,. \qquad (67)$$

Результат вычисления вклада от продольного движения аналогичен результатам, полученным для случая нейтральных мезонов (55), т.е.

$$M_3 = \sqrt{\frac{4\sigma\tilde{\omega}}{\gamma}}\left(n_z + \frac{1}{2}\right) + \frac{K_z^2}{2(\omega_1 + \omega_2)}\,.$$

Осцилляторный потенциал межкваркового взаимодействия можно представить в виде

$$\left(\mathbf{r}_\perp^{(1)} - \mathbf{r}_\perp^{(2)}\right)^2 = \left(\mathbf{r}_\perp^{(1)} - \mathbf{r}_\perp^{0}\right)^2 + \left(\mathbf{r}_\perp^{(2)} - \mathbf{r}_\perp^{0}\right)^2 - \\ - 2\left(\mathbf{r}_\perp^{(1)} - \mathbf{r}_\perp^{0}\right)\left(\mathbf{r}_\perp^{(2)} - \mathbf{r}_\perp^{0}\right) \to \sum_{i=1}^{2}\left(\mathbf{r}_\perp^{(i)} - \mathbf{r}_\perp^{0}\right)^2, \qquad (68)$$

где $\mathbf{r}_\perp^0$ — положение центра масс мезона. При вычислении основного состояния составной системы с потенциалом (68) центр масс можно считать неподвижным в плоскости xy и положить $\mathbf{r}_\perp^0 = 0$. Данное заключение верно в случае заряженных мезонов, так как трансляционная симметрия для центра инерции явно нарушена внешним МП. В случае нейтральных мезонов предположение о мезоне, покоящемся в основном состоянии, также верно, ввиду того что энергия системы достигает минимума при значении псевдоимпульса $K = 0$. С другой стороны, псевдоимпульс основного состояния пропорционален импульсу центра масс $\langle\mathbf{P}\rangle$ (56), $\langle\mathbf{K}\rangle \sim \langle\mathbf{P}\rangle$, для осцилляторного потенциала (62). Приближение (68) приводит к тому, что струна конфайнмента эффективно удлиняется. Чтобы распространить область применимости метода конституентной сепарации на случай слабых полей, $eB/\sigma < 1$, можно ввести эффективное натяжение для каждой из частей струны, σ_1 и σ_2, соединяющих кварки с центром масс. Это можно сделать следующим образом:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{1 + \omega_1/\omega_2}\,, \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma}{1 + \omega_2/\omega_1}\,. \qquad (69)$$

Подробно процедура "перенормировки" натяжения струны описана в приложении к работе [25]. В результате потенциал конфайнмента принимает вид

$$V_{\text{conf}} = \frac{\sigma_1}{2\gamma}\left(\mathbf{r}_\perp^{(1)} - \mathbf{r}_\perp^{0}\right)^2 + \frac{\sigma_2}{2\gamma}\left(\mathbf{r}_\perp^{(2)} - \mathbf{r}_\perp^{0}\right)^2 + \frac{\sigma\gamma}{2}\,. \qquad (70)$$

"Перенормировка" натяжения σ приводит к тому, что динамическая часть массы нейтрального мезона, вычисленная с помощью метода КС, численно совпадает с массой, вычисленной точно с использованием псевдоимпульса (14), во всём диапазоне рассматриваемых магнитных полей. Движение в плоскости xy даёт следующий вклад в энергетический спектр:

$$M_\perp = \sum_{i=1}^{2}(2n_\perp^{(i)} + 1)\Omega_i\,, \qquad \Omega_i = \frac{1}{2\omega_i}\sqrt{(e_iB)^2 + \frac{4\sigma_i\omega_i}{\gamma}}\,. \qquad (71)$$

Метод конституентной сепарации тривиальным образом обобщается для случая системы трёх тел. Основное преимущество метода КС — возможность рассматривать заряженные и нейтральные адроны в едином подходе. Более того, введение эффективного натяжения струны позволяет воспроизвести результаты, полученные с помощью метода псевдоимпульса, с точностью порядка 5 %.

Волновая функция основного состояния адрона в МП, полученная с помощью метода КС, имеет вид

$$\Psi_0 = \left(\frac{\tilde{\omega}^{(0)}\Omega_z}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left[-\frac{\tilde{\omega}^{(0)}\Omega_z}{2}\left(\mathbf{z}^{(1)} - \mathbf{z}^{(2)}\right)^2\right]\times \\ \times\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{\omega_i^{(0)}\Omega_i}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left[-\frac{\omega_i^{(0)}\Omega_1}{2}\left(\mathbf{r}_\perp^{(i)}\right)^2\right]. \qquad (72)$$

Заметим, что волновая функция (72) получена непрерывной деформацией волновой функции при нулевом МП и нулевых угловых моментах кварков l_1 и l_2. В сверхсильном магнитном поле, $eB/\sigma \gg 1$, в приближении независимых кварков необходимо учитывать тот факт, что основное состояние является бесконечно вырожденным по проекциям угловых моментов m_1 и m_2, аналогично вырождению уровней Ландау для одной частицы в симметричной калибровке. Поэтому при вычислении пертурбативных поправок волновые функции должны быть модифицированы. Данная пролема рассмотрена в приложении Б работы [25].

С помощью метода КС можно получить аналитические выражения для асимптотик массовых траекторий адронов в МП. В случае слабых магнитных полей, $eB < \sigma$, можно разложить массу по малому параметру eB/σ и в результате получить

$$M_0(B) = M_0(B = 0) - \sum_{i=1}^{2}\frac{e_i\boldsymbol{\sigma}^{(i)}\mathbf{B}}{2\omega_i^{(0)}} = \\ = M_0(B = 0) - \boldsymbol{\mu}\mathbf{B} + c|e\mathbf{B}|\,, \qquad (73)$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — магнитный момент адрона, слагаемое $c|e\mathbf{B}|$ отвечает энергии прецессии центра масс заряженного адрона в магнитном поле (нижний уровень Ландау). Вычисление магнитных моментов мезонов с помощью метода корреляторов, проведённое в работах [85, 86], показало хорошее согласие с решёточными вычислениями.

В режиме сильных магнитных полей, $eB \geqslant \sigma$, ситуация становится более сложной. Сначала рассмотрим слу-

чай, в котором все кварки и антикварки находятся на нижних уровнях Ландау, т.е. $n_\perp^{(i)} = 0$ и ориентации спинов $e_i\sigma_z^{(i)} = |e_i|$, $i = 1, 2$. Динамическая масса данных состояний стремится к константе в пределе $eB \to \infty$. Действительно, если представить динамическую массу в виде

$$M^{\mathrm{ZHS}} = M_0(eB \gg \sigma) = M_\perp + M_3 + \frac{\sigma\gamma}{2} \simeq$$
$$\simeq M_3 + \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i^2 + \omega_i^2}{2\omega_i} + \frac{\sigma\gamma}{2}\,, \tag{74}$$

то, вычислив стационарные значения $\omega^{(0)} = \omega_i^{(0)} = \sqrt{\sigma}/2$, $\gamma^{(0)} = 1/\sqrt{\sigma}$, получим

$$M^{\mathrm{ZHS}} = 2\sqrt{\sigma}\,. \tag{75}$$

Для нейтральных мезонов аналогичный результат можно получить с помощью метода псевдоимпульса из формулы (59). Для обозначения этих состояний мы будем использовать аббревиатуру ZHS (Zero Hadron State).

Иная картина наблюдается при нарушении равенства $e_i\sigma_z^{(i)} = |e_i|$ одним из кварков в мезоне. Предполагая $e_2\sigma_z^{(2)} \neq |e_2|$, для массы основного состояния имеем

$$M^{\mathrm{I}} = M_\perp^0 + M_3^0 = \frac{\omega_1}{\gamma} + \frac{\sigma}{\gamma e_1 B} + \frac{\sigma}{\gamma e_2 B} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{\tilde{\omega}\gamma}} + \frac{\omega_2^2 + 2e_2 B}{2\omega_2} + \frac{\sigma\gamma}{2}\,, \tag{76}$$

что приводит к следующим стационарным значениям: $\omega_1^{(0)} = 2^{-5/6}\sqrt{\sigma}$, $\omega_2^{(0)} = \sqrt{2e_2 B}$ и $\gamma^{(0)} = 1/\sqrt{2\sigma}$. Соответствующее асимптотическое поведение назовём асимптотикой типа I

$$M^{\mathrm{I}} = \sqrt{2e_2 B} + \sqrt{2\sigma}\,. \tag{77}$$

И наконец, третий вариант — когда ни один из кварков не находится на LLL, т.е. $e_i\sigma_z^{(i)} \neq |e_i|$. Вычисляя стационарную точку аналогично (77), находим $\omega_i^{(0)} = \sqrt{2e_i B}$, $\gamma^{(0)} = 2^{-2/3}(\sigma\tilde{\omega}^{(0)})^{-1/3}$ и соответствующую асимптотику (типа II)

$$M^{\mathrm{II}} = \sqrt{2e_1 B} + \sqrt{2e_2 B}\,. \tag{78}$$

Таким образом, все массовые траектории мезонов в магнитном поле, соответствующие различным ориентациям спинов кварков по отношению к МП, могут быть классифицированы по асимптотикам трёх типов: двум возрастающим с увеличением МП как $\sim \sqrt{eB}$ (I и II) и третьей, стремящейся к постоянному значению (ZHS):

$$\text{ZHS:}\ \ e_1\sigma_z^{(1)} > 0,\ \ e_2\sigma_z^{(2)} > 0,\ \ \tilde{M}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{ZHS}}(eB \gg \sigma) = 2\sqrt{\sigma}\,, \tag{79}$$

$$\text{I:}\ \ e_1\sigma_z^{(1)} > 0,\ \ e_2\sigma_z^{(2)} < 0,\ \ \tilde{M}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{I}}(eB \gg \sigma) = \sqrt{2e_1 B} + \sqrt{2\sigma}\,, \tag{80}$$

$$\text{II:}\ \ e_1\sigma_z^{(1)} < 0,\ \ e_2\sigma_z^{(2)} < 0,\ \ \tilde{M}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{II}}(eB \gg \sigma) = \sqrt{2e_1 B} + \sqrt{2e_2 B}\,. \tag{81}$$

В работе [81] показано, что, помимо основновного непертурбативного вклада, существенный (до 30 %) вклад в полную массу адрона дают пертурбативные поправки. Влияние МП на пертурбативные поправки рассмотрено в разделе 5.

В заключение данного раздела упомянем ещё об одном методе точного разделения переменных, который используется в работе [84]. Этот метод основывается на предположении $e_1 = e_2 = e$ и $\omega_1 = \omega_2$ и, таким образом, описывает нефизические мезоны с зарядами $4/3$ для $\mathrm{u}\bar{\mathrm{u}}$ и $2/3$ для $\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}$. Тем не менее данная модель позволяет получить результат аналитически и она может быть использована для оценочных вычислений. При переходе в гамильтониане (39) к переменным центра масс перекрёстные слагаемые сокращаются и в результате движение центра масс и относительное движение разделяются:

$$H_{\mathrm{q}_1\bar{\mathrm{q}}_2} = \frac{\mathbf{P}^2}{4\omega} + \frac{e^2}{4\omega}(\mathbf{B}\times\mathbf{R})^2 + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{\omega} + \frac{e^2}{16\omega}(\mathbf{B}\times\boldsymbol{\eta})^2 +$$
$$+ \frac{2m^2 + 2\omega^2 - e(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{B}}{2\omega} + \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\eta^2}{\gamma} + \gamma\right) +$$
$$+ V_{\mathrm{OGE}} + V_{\mathrm{SS}} + \Delta M_{\mathrm{SE}}\,. \tag{82}$$

Как и следовало ожидать, движение центра масс заряженного мезона является прецессирующим. Соответствующие собственные значения энергии могут быть легко вычислены,

$$M_n(\omega,\gamma) = \frac{eB}{2\omega}(2N_\perp + 1) + \sqrt{\left(\frac{eB}{2\omega}\right)^2 + \frac{2\sigma}{\omega\gamma}}\,(2n_\perp + 1) +$$
$$+ \sqrt{\frac{2\sigma}{\omega\gamma}}\left(n_\parallel + \frac{1}{2}\right) - \frac{eB}{\omega} + \frac{\sigma\gamma}{2} + \frac{m^2 + \omega^2}{\omega} +$$
$$+ \Delta M_{\mathrm{OGE}} + \Delta M_{\mathrm{SE}} + \langle a_{\mathrm{SS}}\rangle\,. \tag{83}$$

5. Пертурбативные поправки

В разделе 4 представлен релятивистский гамильтониан (41), описывающий непертурбативную динамику кварков внутри мезона, т.е. движение в потенциале конфайнмента и внешнем МП, а также описаны спектр этого гамильтониана и найдены волновые функции для случая нейтральных и заряженных мезонов. Затем аналогичная задача была решена для состоящего из трёх кварков (ddu) нейтрона. Согласно (64) полная масса мезона содержит также пертурбативные поправки, которые можно вычислить в первом порядке теории возмущений, если известна волновая функция основного состояния.

Первая из входящих в (64) поправок — это поправка ΔM_{OGE}, обусловленная одноглюонным обменом. Источником потенциала V_{OGE} является пертурбативная часть коррелятора (35). Матричный элемент $\Delta M_{\mathrm{OGE}} = \langle\varphi_0|V_{\mathrm{OGE}}|\varphi_0\rangle$ отрицателен, и с возрастанием МП его вклад увеличивается. Можно показать [80], что для безмассовых кварков в пределе $eB \gg \sigma$ справедлива оценка

$$\Delta M_{\mathrm{OGE}} \simeq -\sqrt{\sigma}\,\ln\ln\frac{eB}{\sigma}\,. \tag{84}$$

Это явление аналогично обсуждавшемуся во введении возрастанию энергии основного уровня атома водорода в МП. Как и в случае атома, коллапса, т.е. неограниченного убывания массы мезона, не происходит. Цветовой кулоновский потенциал экранируется благодаря влиянию магнитного поля на виртуальные кварк-антикварковые петли.

Остановимся подробнее на получении выражения для потенциала одноглюонного обмена в магнитном поле. Пропагатор глюона с учётом поляризации вакуума кварковыми и глюонными парами имеет вид

$$D(q) = \frac{4\pi}{q^2 - \left[g^2(\mu_0^2)/(16\pi^2)\right]\tilde{\Pi}(q)}\,, \tag{85}$$

где поляризационные операторы глюонов и кварков в однопетлевом приближении выражаются следующим образом:

$$\Pi_{\mathrm{gl}}(q) = -\frac{11}{3}\,N_{\mathrm{c}}\ln\frac{|q^2|}{\mu_0^2}\,,\quad \tilde{\Pi}_{\mathrm{q\bar{q}}}(q) = -\frac{2}{3}n_{\mathrm{f}}q^2\ln\frac{|q^2|}{\mu_0^2}\,, \tag{86}$$

где n_{f} — число ароматов. Магнитное поле при помещении в него глюона начинает оказывать влияние на кварк-антикварковые петли внутри поляризационного оператора $\Pi_{\mathrm{q\bar{q}}}$. В случае сильного поля можно считать, что кварк-антикварковая пара находится на нижнем уровне Ландау, что приводит к модификации поляризационного оператора:

$$\frac{\alpha_{\mathrm{s}}^{(0)}}{4\pi}\,\Pi_{\mathrm{q\bar{q}}}(q) = -\frac{\alpha_{\mathrm{s}}^{(0)}n_{\mathrm{f}}|e_{\mathrm{q}}B|}{\pi}\exp\left(-\frac{q_\perp^2}{2|e_{\mathrm{q}}B|}\right)T\left(\frac{q_3^2}{4m^2}\right), \tag{87}$$

$$T(z) = -\ln\frac{(\sqrt{1+z}+\sqrt{z})}{\sqrt{z(z+1)}} + 1 = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\,z\,, & z \ll 1\,,\\ 1\,, & z \gg 1\,. \end{cases}$$

Данное поведение с точностью до замены $\alpha_{\mathrm{QED}} \to \alpha_{\mathrm{s}}^{(0)}n_{\mathrm{f}}/2$ повторяет поведение электрон-позитронного поляризационного оператора в атоме водорода в магнитном поле, рассмотренное в работах [34–36]. Массовый параметр m в (87), который в случае КЭД отвечает перенормированной массе электрона, заменяется характерной энергией кварк-антикварковой пары в режиме конфайнмента, т.е. $4m^2 \to 4\sigma$. Заметим, что в силу топологии струны конфайнмента (рис. 1) отсутствует непертурбативное взаимодействие между кварком и антикварком внутри виртуальной пары.

В итоге получаем окончательное выражение для потенциала одноглюонного обмена в импульсном представлении в сильном магнитном поле [87]:

$$V_{\mathrm{OGE}}(Q) = 3\alpha_{\mathrm{s}}^{(0)}\,\frac{1}{3}\left\{Q^2\left[1 + \frac{\alpha_{\mathrm{s}}^{(0)}}{4\pi}\,\frac{11}{3}N_{\mathrm{c}}\ln\left(\frac{Q^2+M_B^2}{\Lambda_{\mathrm{QCD}}^2}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha_{\mathrm{s}}^{(0)}n_{\mathrm{f}}|eB|}{\pi}\exp\left(-\frac{Q_\perp^2}{2|e_{\mathrm{q}}B|}\right)T\left(\frac{Q_3^2}{4\sigma}\right)\right\}^{-1}, \tag{88}$$

где $N_{\mathrm{c}} = 3$, $n_{\mathrm{f}} = 2$, $\alpha_{\mathrm{s}}^{(0)} = 0{,}42$, $\Lambda_{\mathrm{QCD}} = 0{,}3$ ГэВ, $M_B^2 = 2\pi\sigma = 1{,}1$ ГэВ^2. Появление параметра M_B^2, величина которого вычислена в [88], предотвращает появление особенности Ландау. Параметр M_B^2 появляется при исследовании пропагатора глюона $G_{\mathrm{gl}}^{-1} = (D(B))_{ab}^2\delta_{\mu\nu} - 2gF_{\mu\nu}^c(B)f^{abc}$ в фоновом стохастическом поле B_μ, $A_\mu = a_\mu + B_\mu$. Глюонный поляризационный оператор в выражении для бегущей константы связи при усреднении по стохастическому фоновому полю,

$$\frac{1}{g^2(Q^2)} = \frac{1}{g^2(\mu^2)} - \frac{11}{3}\,N_{\mathrm{c}}\Pi_{\mathrm{gl}}\left(Q^2,\mu^2\right), \tag{89}$$

может быть интерпретирован при большом N_{c} как объект, определяемый замкнутой двойной глюонной линией (см. рис. 1), внутри которого находится струна конфайнмента в фундаментальном представлении. В результате глюонный поляризационный оператор приобретает естественную инфракрасную регуляризацию, определяющуюся массой глюонной петли M_B.

Вычисление пертурбативной поправки к массе мезона, возникающей вследствие одноглюонного обмена, сводится к усреднению матричного элемента (88) по волновой функции основного состояния мезона (57)

$$\Delta M_{\mathrm{OGE}} = \left\langle V(Q)\right\rangle_{\mathrm{mes}} = \int V(Q)\psi^2(q_\perp,q_3)\,\frac{\mathrm{d}^2q_\perp\,\mathrm{d}q_3}{(2\pi)^3}\,. \tag{90}$$

В результате вытягивание волновой функции в эллипсоид вращения с характерными радиусами $r_\perp \approx \sqrt{2/(eB)}$, $r_3 \approx \sqrt{2/\sigma}$ не приводит больше к "катастрофе цветового Кулона", как видно из рис. 2. Сплошная кривая показывает, что поправка входит в режим насыщения при асимптотически большом магнитном поле, тогда как в случае отсутствия влияния МП на виртуальные кварк-антикварковые пары она неконтролируемым образом уменьшается (штриховая кривая). Аналогичным образом включение кварковых петель обеспечивает регуляризацию вклада в массу нейтрона потенциала одноглюонного обмена [81].

Спин-спиновое взаимодействие $V_{\mathrm{SS}}(r)$ возникает из спин-зависимых ядер $\Phi_\sigma(1)\Phi_\sigma(2)$ (см. (25)), усреднённых по стохастическому вакуумному глюонному полю, $\langle\sigma_{\mu\nu}(1)F_{\mu\nu}(x)\sigma_{\rho\lambda}(2)F_{\rho\lambda}(y)\rangle$. Здесь пертурбативная часть коррелятора даёт релятивистское спин-спиновое взаи-

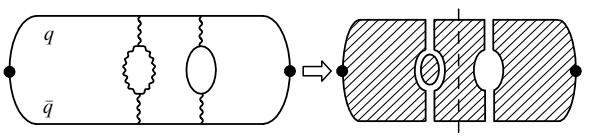

Рис. 1. Одноглюонный обмен между статическим кварком и антикварком в однопетлевом приближении при большом N_{c}. Заштрихованная область соответствует непертурбативному взаимодействию (плёнка минимальной площади).

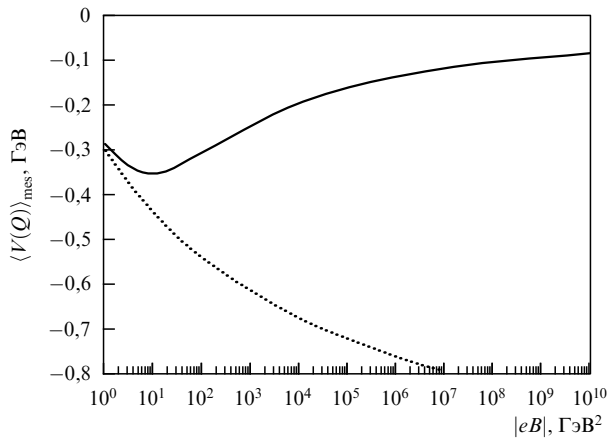

Рис. 2. Вклад потенциала одноглюонного обмена в массу мезона как функция величины МП. Сплошная кривая — с учётом влияния МП на $\mathrm{q\bar{q}}$-петли, а пунктирная — без учёта.

модействие,

$$V_{\rm SS} = \frac{\alpha_{\rm s}}{3\omega_1\omega_2}\left[\frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{r}_1)(\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{r}_2)}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2}{r^3}\right] + \frac{8\pi\alpha_{\rm s}}{9\omega_1\omega_2}(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{r})\,. \tag{91}$$

Положив $i = j$ в корреляторе $\langle\sigma(i)F\sigma(j)F\rangle$, получаем непертурбативную собственно-энергетическую часть для каждого кварка:

$$\Delta M_{\rm SE}(i) = -\frac{3\sigma}{2\pi\omega_i^{(0)}}\,. \tag{92}$$

Из (91) видно, что сверхтонкое взаимодействие с точностью до константы совпадает при замене $\omega_i \to m_i$ со спин-спиновым взаимодействием в квантовой механике. Рассматривая основное состояние мезонов, мы пренебрежём в (91) первым слагаемым (тензорными силами). В разделе 6 при обсуждении эффекта Зеемана в атоме водорода в МП [39] показано, что эти силы становятся заметными тогда, когда волновая функция вытягивается вдоль сверхсильного МП в виде "иглы". При усреднении (91) по волновой функции основного состояния мезона (57) можно увидеть, что тензорное слагаемое имеет более слабую зависимость от МП по сравнению с зависимостью от МП слагаемого с δ-функцией, поэтому вкладом тензорного слагаемого можно пренебречь. В результате поправка сверхтонкого взаимодействия приобретает вид

$$\Delta M_{\rm SS} = \frac{8\pi\alpha_{\rm s}}{9\omega_1\omega_2}\left|\psi(0)\right|^2(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)\,. \tag{93}$$

Из структуры формулы (93) видно, что сверхтонкое взаимодействие не только даёт поправку к массе, но и приводит к смешиванию уровней с различными проекциями спинов, как показано в разделе 7.

Из (57) и (58) видно, что волновая функция основного состояния мезона в сильном МП представляет собой эллипсоид вращения. Благодаря уменьшению поперечного радиуса как $r_\perp \sim \sqrt{2/(|e|B)}$ величина $|\psi(0)|^2 \sim eB$, т.е. она линейно возрастает с увеличением МП. Это возрастание с необходимостью приводит к неконтролируемо быстрому уменьшению матричного элемента (93). С учётом знака минус для основного состояния данная поправка может служить причиной коллапса уже при величине МП $eB \simeq 0{,}4$ ГэВ^2. Отметим, что этот эффект наблюдается в первом порядке теории возмущений, но из-за сингулярной природы δ-образного взаимодействия последовательный учёт сверхтонкого взаимодействия во всех порядках невозможен. С другой стороны, характерная корреляционная длина вакуумных стохастических полей, по которым проводится усреднение при вычислении данного матричного элемента, составляет $\lambda \simeq 1$ ГэВ^2. Поэтому δ-взаимодействие может быть "размазано" с помощью гауссова формфактора по ультрафиолетовому параметру λ:

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \to \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\lambda}\right)^3 \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{\lambda^2}\right). \tag{94}$$

Данная процедура регуляризации приводит к тому, что, как и в случае одноглюонного обмена, поправка (93) входит в насыщение при $eB \simeq 0{,}4$ ГэВ^2, и сценарий коллапса сверхтонкого взаимодействия не реализуется.

В данном разделе мы рассмотрели два возможных сценария коллапса и механизмы их предотвращения. Эти результаты находятся в согласии с общим утверждением о том, что в отсутствие внешних электрических полей собственные значения релятивистского гамильтониана всюду положительны, т.е. МП не может быть причиной нестабильности массового спектра. Данная теорема подробно рассматривается в разделе 10.

6. Магнитная фокусировка

В разделе 5 мы показали, что при величине внешнего МП, сравнимой с характерной энергией парного взаимодействия частиц в системе, возрастание $|\psi(0)|^2$, названное "магнитной фокусировкой" волновой функции, оказывает существенное влияние на пертурбативные поправки [39, 65]. Вернёмся к выражению (13) для гамильтониана двухчастичной системы в МП и обратим внимание на диамагнитное слагаемое $e^2(\mathbf{B}\times\boldsymbol{\eta})^2/(8\mu)$, которое в полярных координатах приобретает осцилляторный вид $(eB)^2\rho^2/(8\mu)$. Наличие такого взаимодействия позволяет на качественном уровне заключить, что в сильном МП величина $|\psi(0)|^2$ будет возрастать почти линейно с увеличением поля, $|\psi(0)|^2 \sim (|e|B)\kappa$, где κ — величина характерного импульса внутреннего движения вдоль оси z.

Как показано в [39], магнитная фокусировка влияет на частоту радиолинии 21 см. Во введении отмечалось, что энергия основного уровня атома водорода в МП по модулю логарифмически возрастает. Волновая функция вытягивается в направлении вдоль поля, отношение продольного размера к поперечному возрастает согласно [35]

$$\frac{r_\parallel}{r_\perp} \sim \frac{\sqrt{H}}{\ln H}\,, \tag{95}$$

где $H = B/B_{\rm a}$. Вследствие фокусировки увеличивается значение волновой функции в начале координат. В пределе $H \gg 1$

$$\left|\psi(0)\right|^2 \sim H\ln H\,. \tag{96}$$

Отклонение волновой функции от сферической формы приводит к появлению тензорных сил. Вследствие усиления $|\psi(0)|^2$ и появления тензорных сил возникает поправка к частоте линии 21 см, которая при $H \gg 1$ составляет [39]

$$\delta\nu \simeq \alpha^6\left(\frac{m_{\rm e}}{m_{\rm p}}\right)m_{\rm e}(H\ln^2 H) \simeq 10^{-6}(H\ln^2 H)\ [\text{МГц}]\,. \tag{97}$$

Фактор $|\psi(0)|^2$ влияет на проходящие в МП реакции с участием противоположно заряженных частиц в начальном или конечном состоянии [65]. Если в конечном состоянии имеются две противоположно заряженные частицы, то вероятность процесса возрастает пропорционально величине

$$\rho(eB) = \frac{w(eB)}{w(0)} \simeq \frac{|e|B}{\kappa^2}\,, \tag{98}$$

где $w(eB)$ — фазовый объём в МП, $w(0) \sim \kappa^2$ — двумерный фазовый объём в отсутствие МП. Основной вклад в усиление даёт LLL. Эффект усиления β-распада в МП был известен ранее [89]. Влияние МП на аннигиляцию позитрония изучалось в работах [90, 91]. Другие процессы в МП обсуждались в [44, 45].

Ещё один важный аспект магнитной фокусировки связан со сверхтонким спин-спиновым взаимодействием. Выше, следуя работе [39], мы показали, как вследствие фокусировки спин-спинового взаимодействия меняется частота радиолинии 21 см. Для КХД-систем в МП, в частности для мезонов, сверхтонкое взаимодействие может, на первый взгляд, привести к нестабильности вакуума. Напомним, что спин-спиновое взаимодействие, рассматриваемое по теории возмущений, может быть представлено в виде объёмного интеграла от выражения, содержащего $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ [73, 92]. Учёт эффектов более высокого порядка "размазывает" δ-функцию и падения на центр, или коллапса, не происходит. В разделе 10 приведена теорема [71], согласно которой сколь угодно сильное МП (в отсутствие внешних электрических полей) не может повлиять на стабильность спектра адронов.

Неожиданным следствием магнитной фокусировки является анизотропия натяжения струны КХД. Недавние решёточные вычисления [93–96] показали, что в МП потенциал конфайнмента $V(\mathbf{R})$ убывает в направлении $\mathbf{R}$, параллельном $\mathbf{B}$, и возрастает в перпендикулярном направлении. Непосредственное взаимодействие МП с глюонным полем отсутствует. Влияние МП на струну осуществляется посредством порождаемых глюонами виртуальных кварк-антикварковых пар в состояниях $^3\mathrm{S}_1$ и $^3\mathrm{P}_0$. Как показано в [100], благодаря магнитной фокусировке пары, движущиеся в плоскости, перпендикулярной МП, получают дополнительную энергию $\Delta E = 2(m_\mathrm{q}^2 + |e_\mathrm{q}B|)^{1/2}$, в то время как $\Delta E = 0$ при движении вдоль направления МП. Анизотропия конфайнмента лежит за пределами точности приводимых в данном обзоре расчётов спектров мезонов и барионов в МП, и она не будет учитываться.

7. Смешивание и расщепление массовых траекторий в магнитном поле

Внешнее магнитное поле нарушает симметрии спина и изоспина, вследствие чего возникает расщепление уровней для различных спин-изоспиновых состояний адронов.

Релятивистский гамильтониан адронов в магнитном поле (39) содержит слагаемые, описывающие взаимодействия магнитных моментов кварков с магнитными полями непертурбативным образом, а также пертурбативную поправку сверхтонкого взаимодействия, зависящую от взаимной ориентации спинов кварков (91).

Для исследования поведения мезонов с различными проекциями спинов на направление МП проекцию релятивистского гамильтониана можно представить в компактной форме в пространстве спиновых состояний:

$$\hat{M}_\mathrm{total} = \left[\langle\psi_0|\hat{M}(B)|\psi_0\rangle + V_\mathrm{OGE} + \Delta M_\mathrm{SE}\right]\hat{1} - \\ - \sum_{i=1}^{2} \frac{e_i\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i\,\mathbf{B}}{2\omega_i^{(0)}} + \frac{8\pi\alpha_\mathrm{hf}}{9\omega_1^{(0)}\omega_2^{(0)}}\left|\psi(0)\right|^2\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2\,. \qquad (99)$$

После вычисления стационарных значений для ω_i с помощью минимизации (39) для каждой из всех возможных конфигураций спинов кварков, $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$, $|--\rangle$, необходимо диагонализовать (99) в пространстве спиновых состояний. С математической точки зрения данная задача аналогична квантово-механической задаче об эффекте Зеемана.

Таблица. Классификация π- и ρ-мезонов по типу асимптотического поведения

№	Состояние мезона	Тип асимптотики
1	$\rho^+(s_z=1) = \lvert\mathrm{u}\uparrow\bar{\mathrm{d}}\uparrow\rangle$	ZHS
2	$\rho^+(s_z=-1) = \lvert\mathrm{u}\downarrow\bar{\mathrm{d}}\downarrow\rangle$	II
3	$\rho^+(s_z=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lvert\mathrm{u}\uparrow\bar{\mathrm{d}}\downarrow\rangle + \lvert\mathrm{u}\downarrow\bar{\mathrm{d}}\uparrow\rangle\right)$	I
4	$\pi^+(s_z=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lvert\mathrm{u}\uparrow\bar{\mathrm{d}}\downarrow\rangle - \lvert\mathrm{u}\downarrow\bar{\mathrm{d}}\uparrow\rangle\right)$	I
5	$\rho^0(s_z=1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lvert\mathrm{u}\uparrow\bar{\mathrm{u}}\uparrow\rangle + \lvert\mathrm{d}\uparrow\bar{\mathrm{d}}\uparrow\rangle\right)$	I
6	$\rho^0(s_z=-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lvert\mathrm{u}\downarrow\bar{\mathrm{u}}\downarrow\rangle + \lvert\mathrm{d}\downarrow\bar{\mathrm{d}}\downarrow\rangle\right)$	I
7	$\rho^0(s_z=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lvert\mathrm{u}\uparrow\bar{\mathrm{u}}\downarrow\rangle + \lvert\mathrm{d}\uparrow\bar{\mathrm{d}}\downarrow\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lvert\mathrm{u}\downarrow\bar{\mathrm{u}}\uparrow\rangle + \lvert\mathrm{d}\downarrow\bar{\mathrm{d}}\uparrow\rangle\right)\right]$	ZHS + II
8	$\pi^0(s_z=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lvert\mathrm{u}\uparrow\bar{\mathrm{u}}\downarrow\rangle + \lvert\mathrm{d}\uparrow\bar{\mathrm{d}}\downarrow\rangle\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lvert\mathrm{u}\downarrow\bar{\mathrm{u}}\uparrow\rangle + \lvert\mathrm{d}\downarrow\bar{\mathrm{d}}\uparrow\rangle\right)\right]$	ZHS + II
9	$\rho^-(s_z=1) = \lvert\mathrm{d}\uparrow\bar{\mathrm{u}}\uparrow\rangle$	II
10	$\rho^-(s_z=-1) = \lvert\mathrm{d}\downarrow\bar{\mathrm{u}}\downarrow\rangle$	ZHS
11	$\rho^-(s_z=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lvert\mathrm{d}\uparrow\bar{\mathrm{u}}\downarrow\rangle + \lvert\mathrm{d}\downarrow\bar{\mathrm{u}}\uparrow\rangle\right)$	I
12	$\pi^-(s_z=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lvert\mathrm{d}\uparrow\bar{\mathrm{u}}\downarrow\rangle - \lvert\mathrm{d}\downarrow\bar{\mathrm{u}}\uparrow\rangle\right)$	I

В отсутствие МП изоспин и полный спин адрона являются сохраняющимися квантовыми числами, с помощью которых можно классифицировать π- и ρ-мезоны, как показано в таблице.

В режиме сильного поля, $eB \gg \sigma$, третье слагаемое в формуле (99), ответственное за смешивание уровней, мало́ по сравнению с остальными, поэтому расщепление массовых траекторий определяется в основном проекциями магнитных моментов кварков на направление МП. Асимптотическое поведение массовых траекторий в пределе $eB \gg \sigma$ было вычислено с помощью метода конституентной сепарации (см. формулы (79)–(81)). В таблице указан тип асимптотического поведения: I, II или ZHS — для всех 12 состояний мезонов, приведённых во второй колонке таблицы.

Состояния 1 и 2 ρ^+-мезона являются "чистыми" и не испытывают смешивания при увеличении МП. Состояния 3 и 4 мезонов ρ^+ $(s=1, s_z=0)$ и π^+ при нулевом МП являются смесью состояний $|\mathrm{u}\uparrow\bar{\mathrm{d}}\downarrow\rangle$ и $|\mathrm{u}\downarrow\bar{\mathrm{d}}\uparrow\rangle$ в равных пропорциях. При увеличении МП волновые функции начинают смешиваться как

$$\pi^+(B), \rho^+(B) = \\ = \alpha\,\frac{|\mathrm{u}\uparrow\bar{\mathrm{d}}\downarrow\rangle + |\mathrm{u}\downarrow\bar{\mathrm{d}}\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \pm \beta\,\frac{|\mathrm{u}\uparrow\bar{\mathrm{d}}\downarrow\rangle - |\mathrm{u}\downarrow\bar{\mathrm{d}}\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \qquad (100)$$

с коэффициентами α и β, зависящими от eB и константы сверхтонкого взаимодействия α_hf. В результате при $eB \to \infty$ имеем $\pi_B^+(B\to\infty) = |\mathrm{u}\downarrow\bar{\mathrm{d}}\uparrow\rangle$ и $\rho_B^+(eB\to\infty) = |\mathrm{u}\uparrow\bar{\mathrm{d}}\downarrow\rangle$, т.е. мезоны π^+ и $\rho^+(s_z=0)$

являются смесью "исходных" мезонов π^+ и $\rho^+(s_z = 0)$ при $eB = 0$ в равных пропорциях.

Ситуация несколько усложняется в случае нейтральных π^0- и ρ^0-мезонов. Благодаря тому что изоспин нарушен явно из-за разных зарядов u- и d-кварков, состояния 9–12 испытывают дополнительное двукратное расщепление — массовая траектория 9, $\rho^-(s = 1, s_z = 1)$, расщепляется на две ветви: $\rho^-(s = 1, s_z = 1)(\mathrm{u\bar{u}})$ и $\rho^-(s = 1, s_z = 1)(\mathrm{d\bar{d}})$. Состояния 10 и 12, отвечающие мезонам $\rho^0(s = 1, s_z = 0)$ и π^0, помимо смешивания, аналогичного смешиванию в случае заряженных мезонов, испытывают двукратное расщепление. В результате пара состояний мезонов π^0 и $\rho^0(s = 1, s_z = 0)$ при $eB = 0$ даёт начало четырём массовым траекториям, а 12 мезонных состояний при $eB = 0$, перечисленные в таблице, дают начало 16 траекториям. Семейства состояний 1–4, 5–8 и 9–12 в таблице имеют аналогичную структуру по спину и различаются изоспиновыми конфигурациями, поэтому в каждом из семейств присутствуют асимптотики всех трёх типов I, II и ZHS.

Наибольшую "опасность" с точки зрения падения на центр представляют ZHS-состояния, непертурбативная часть массы которых становится постоянной при полях $eB \gg \sigma$. В области $eB > \sigma$ поведение этих состояний определяется в основном пертурбативными поправками, которые благодаря механизмам, обсуждавшимся в разделе 5, не приводят к коллапсу всех ZHS-состояний, кроме состояния π^0-мезона. Благодаря киральным эффектам π^0-мезон имеет малую массу, $m_{\pi^0} = 135$ МэВ, поэтому формальное применение результатов, представленных в разделе 5, в данном случае оказывается недостаточным. Влияние МП на киральную структуру π^0-мезона подробно рассмотрено в разделе 9.

Аналогичная ситуация смешивания и расщепления уровней с различными спиновыми проекциями возникает и в задаче трёх тел. В работе [81] рассмотрено смешивание состояний нейтрона и Δ^0-резонанса под действием МП. Там же показано, что цветомагнитное сверхтонкое взаимодействие не может обеспечить наблюдаемую в эксперименте величину расщепления при $eB = 0$, поэтому для объяснения данного факта был привлечён механизм однопионного обмена, который подробно рассматривается в разделе 8.

8. Однопионный обмен в магнитном поле

Рассмотренное ранее спин-спиновое взаимодействие (91) не может обеспечить необходимого расщепления массовых траекторий нейтрона и Δ^0 при нулевом магнитном поле. Из [81] следует, что разница масс нейтрона (n) и Δ^0-резонанса равна $6d \simeq 0{,}15\alpha_s\sqrt{\sigma} \simeq 20$ МэВ для $\alpha_s = 0{,}35$ и $6d \simeq 100$ МэВ для $\alpha_s = 1{,}72$. С другой стороны, измеренное расщепление n и Δ^0 порядка 300 МэВ. Как известно из [101, 102], данная разница может быть получена добавлением пертурбативного взаимодействия V_{OPE} вида однопионного обмена. Однопионный обмен задаётся матричным элементом

$$V_{\mathrm{OPE}}^{(ij)} = 4\pi g_{\mathrm{qq}\pi}^2 \boldsymbol{\tau}(i)\boldsymbol{\tau}(j)\,\frac{\Gamma_i\Gamma_j}{\mathbf{k}^2 + m_\pi^2}\left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \mathbf{k}^2}\right)^2, \qquad (101)$$

где $\Gamma_i = \boldsymbol{\sigma}^{(i)}\mathbf{k}/(\omega_i + M_i)$, $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_i^2}$, $\boldsymbol{\tau}^{(i)}$ — матрицы Паули в изоспиновом пространстве. Можно увидеть, что в пределе $m_{\mathrm{u}} = m_{\mathrm{d}} = m_\pi \to 0$

$$V_{\mathrm{OPE}} \sim \frac{(\boldsymbol{\sigma}_i\mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_i\mathbf{k})}{\omega_i\omega_j\mathbf{k}^2} \to \frac{\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_j}{\omega_i\omega_j},$$

т.е. операторный вид данного взаимодействия в спиновом пространстве полностью аналогичен спин-спиновому: $V_{\mathrm{OPE}} \sim \boldsymbol{\sigma}^{(i)}\boldsymbol{\sigma}^{(j)}$.

Таким образом, с точностью до формфактора в (101), можно ввести эффективную константу сверхтонкого взаимодействия $\alpha_{\mathrm{hf}} = \alpha_s + \alpha_{\mathrm{OPE}}$. В работах [101, 102] показано, что такой подход даёт правильное физическое расщепление для уровней n и Δ^0 (-471 МэВ и -79 МэВ соответственно).

Теперь рассмотрим влияние сильного МП на однопионный обмен. Для этого выделим в (101) вклады от обменов мезонами π^0, π^+ и π^-:

$$V_{\mathrm{OPE}}^{ij} = \frac{4\pi g^2}{\omega_i\omega_j}\left[\frac{(\boldsymbol{\sigma}_i\mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_j\mathbf{k})}{k^2 + m_{\pi^+}^2}\,2\tau_+^i\tau_-^j + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_i\mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_j\mathbf{k})}{k^2 + m_{\pi^-}^2}\,2\tau_-^i\tau_+^j + \right.$$
$$\left. + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_i\mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_j\mathbf{k})}{k^2 + m_{\pi^0}^2}\,2\tau_3^i\tau_3^j\right]\left(\frac{\Lambda^2}{k^2 + \Lambda^2}\right)^2. \qquad (102)$$

Как показано в работе [103], а также решёточными вычислениями [104], массы π^+-мезонов, участвующих в обмене, возрастают с увеличением МП пропорционально $\sim\sqrt{eB}$. В результате два первых слагаемых в (102) сильно подавлены при $eB \geqslant \sqrt{\sigma}$. С другой стороны, масса π^0-мезона становится немного меньше и далее с увеличением eB стремится оставаться постоянной.

Оба этих эффекта приводят к тому, что в режиме сильного МП эффективная константа однопионного взаимодействия уменьшается в три раза, $\alpha_{\mathrm{OPE}}(eB \gg \sigma) = (1/3)\alpha_{\mathrm{OPE}}(eB = 0)$.

9. Мезон π^0 и падение на центр — влияние киральных эффектов

В отличие от ρ-мезонов, пионы являются псевдо-намбу-голдстоуновскими мезонами, поэтому необходимо учитывать, каким образом киральные степени свободы изменяются при приложении сильного внешнего МП.

Влияние МП на киральные эффекты изучалось с помощью киральной теории возмущений, метода эффективного кирального лагранжиана [105–110], в модели Намбу–Иона-Лазинио [111] и с помощью других теоретических методов [112–114]. Решёточные вычисления киральных свойств в МП проведены в работах [104, 115–120]. Модель Намбу–Иона-Лазинио предсказывает рост кирального конденсата согласно [121], что в литературе называется магнитным катализом. (Детальный обзор явления магнитного катализа см. в [122].)

В методе вакуумных корреляторов, используемом авторами настоящего обзора, киральные эффекты описываются с помощью эффективного кирального лагранжиана (Effective Chiral Langrangian — ECL), который был получен непосредственно из лагранжиана КХД в работах [123–126] в отсутствие МП и при наличии МП в [127],

$$L_{\mathrm{ECL}} = N_{\mathrm{c}}\,\mathrm{tr}\log\left[(\hat{D} + m_{\mathrm{f}})\hat{1} + M\hat{U}\right], \qquad (103)$$

где m_{f} — токовая масса кварка, $M(x)$ — скалярное взаимодействие (конфайнмент), т.е. $M(x) \sim \sigma|\mathbf{x}|$ при

больших $|\mathbf{x}|$, и

$$\hat{U} = \exp\left(\mathrm{i}\gamma^s \hat{\phi}\right), \qquad \hat{\phi} = \phi_a t^a \,. \tag{104}$$

Дираковский оператор в (103) определён как $\hat{D} = \gamma^\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)$, где $\mathbf{A} = (\mathbf{x}\times\mathbf{B})/2$. Недавно в работе [128] лагранжиан (103) был использован для вывода шести первых членов стандартной киральной теории возмущений вплоть до порядка $O(p^4)$. Также с помощью ECL получены все стандартные соотношения киральной теории, включая соотношения Гелл-Мана – Окса – Реннера (Gell-Mann – Oakes – Renner — GMOR). Влияние внешнего МП на киральный конденсат и соотношения GMOR изучено в [129], константы распадов пионов вычислены в [130], а влияние МП на массу основного состояния пионов исследовано в [103, 130].

Массы пионов в киральной теории могут быть получены из соотношения GMOR, связывающего массу пиона, величину кирального кваркового конденсата и константы распадов,

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = \bar{m}\left|\langle \bar{\mathrm{q}}\mathrm{q}\rangle\right|, \qquad \bar{m} = \frac{m_\mathrm{u} + m_\mathrm{d}}{2} \,. \tag{105}$$

В работе [130] также показано, что эффективный киральный лагранжиан во внешнем МП диагонален относительно ароматов кварков, поэтому π^0-мезон в магнитном поле расщепляется на две независимые компоненты, $|\mathrm{u}\bar{\mathrm{u}}\rangle$ и $|\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}\rangle$, для каждой из которых справедливо своё соотношение GMOR:

$$m_{\pi_{\mathrm{u}\bar{\mathrm{u}}}}^2 f_{\pi_{\mathrm{u}\bar{\mathrm{u}}}}^2 = m_\mathrm{u}\left|\langle \bar{\mathrm{u}}\mathrm{u}\rangle\right|, \qquad m_{\pi_{\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}}}^2 f_{\pi_{\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}}}}^2 = m_\mathrm{d}\left|\langle \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}\rangle\right|, \tag{106}$$

а кварковый (киральный) конденсат $\langle\bar{\mathrm{q}}\mathrm{q}\rangle$ может быть вычислен согласно [123]:

$$-\langle\bar{\mathrm{q}}\mathrm{q}\rangle = \left\langle \mathrm{tr}\,\frac{1}{M + m_\mathrm{q} + \hat{\partial}}\right\rangle = -\big(M(0) + m\big)G^{(0)}(k=0), \tag{107}$$

где $G^{(0)}(k)$ — функция Грина псевдоскалярного $\mathrm{q}\bar{\mathrm{q}}$-мезона, $M(0) \simeq \sigma\lambda \simeq 0{,}15$ ГэВ, где σ — натяжение струны КХД, λ — корреляционная длина вакуумных глюонных полей. Подчеркнём, что все величины в эффективной киральной теории, построенной с помощью метода корреляторов, вычисляются в терминах $M(0) = \sigma\lambda = 0{,}15$ ГэВ и спектра некиральной функции Грина $G^{(0)}(k)$, вычислению которого посвящён раздел 2. Используя спектральное разложение $Q^{(0)}(k)$ по собственным состояниям некирального релятивистского гамильтониана (55), можно получить выражение для кваркового конденсата:

$$-\langle\mathrm{q}\bar{\mathrm{q}}\rangle = N_\mathrm{c}\big(M(0) + m_i\big)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|\psi_n(0)\right|^2}{m_n} \,. \tag{108}$$

Выражение (108) легко обобщается для случая внешнего МП с учётом проекций спинов каждого кварка на направление МП:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|\psi_n(0)\right|^2}{m_n} \to \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left|\psi_{n,i}^{(+-)}(0)\right|^2}{m_{n,i}^{(+-)}} + \frac{\left|\psi_{n,i}^{(-+)}(0)\right|^2}{m_{n,i}^{(-+)}}\right), \tag{109}$$

где $\psi_{n,i}^{(\pm\mp)}$ — полный набор волновых функций мезона, полученный в некиральном формализме, n — радиальное квантовое число.

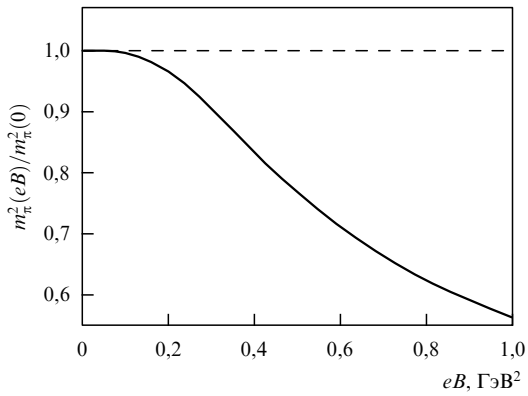

Рис. 3. Масса π^0-мезона с учётом киральных степеней свободы в зависимости от величины магнитного поля (сплошная кривая) в сравнении с результатом, предсказываемым киральной теорией возмущений без учёта непертурбативной динамики (штриховая линия).

Согласно асимптотикам (79) – (81) для π^0-мезона $m_{n,i}^{-+}$ быстро возрастают с увеличением МП, поэтому в сумме (109) можно учитывать только слагаемые с проекцией спина $|+-\rangle$. Таким образом, асимптотическое поведение массы π^0-мезона в пределе сильного МП описывается зависимостью

$$m_{\pi^0}^2 = \frac{\bar{m}}{M(0)}\left(\bar{m}^{(+-)}\right)^2, \tag{110}$$

где $\bar{m}^{(+-)}$ — масса, близкая по значению к массе основного состояния некирального пиона $m_{n,i}$. Как сказано ранее, эффективный киральный лагранжиан диагонален по кварковым ароматам, поэтому траектория π^0-мезона расщепляется в МП на две независимые траектории: $\pi^0(\mathrm{u}\bar{\mathrm{u}})$ и $\pi^0(\mathrm{d}\bar{\mathrm{d}})$. Результирующая масса $\pi^0(\mathrm{u}\bar{\mathrm{u}})$, впервые полученная в работе [103], в зависимости от МП показана на рис. 3. Из рисунка можно увидеть, что траектория массы π^0-мезона, вычисленная с помощью ECL (сплошная кривая), сильно отличается от траектории массы пиона, предсказываемой в рамках стандартной киральной теории возмущений в диапазоне $eB > 0{,}1$ ГэВ^2, в то время как результат ECL демонстрирует хорошее согласие с результатами решёточных расчётов [18, 25, 48].

В случае заряженных мезонов π^+ и π^- ситуация кардинально меняется — они теряют киральные свойства при напряжённости внешнего магнитного поля $eB > \sigma$. Их асимтотическое поведение в сильном МП соответствует типу I согласно общей классификации асимптотик (79) – (81). Таким образом, траектория π^+-мезона, состоящего из u- и $\bar{\mathrm{d}}$-кварков, расщепляется на две траектории, в зависимости от проекций спинов отдельных кварков на направление МП — $M_{+-}(eB > \sigma) \simeq \sqrt{(2/3)eB}$, что соответствует π^+-мезону, и $M_{-+}(eB \gg \sigma) = \sqrt{(4/3)eB}$ для ρ^+-мезона. Из соотношения GMOR можно в итоге получить асимптотику для заряженного кирального пиона

$$M_{+-}(B) = \sqrt{m_\pi^2(0) + \frac{2}{3}\,eB}\,, \tag{111}$$

где $m_\pi^2(0)$ — масса заряженного пиона при $eB = 0$.

Результирующие траектории для заряженного пиона π^- $M_{+-}(B)$ приведены на рис. 4, гле также показано поведение некирального π^--мезона: видно, что масса

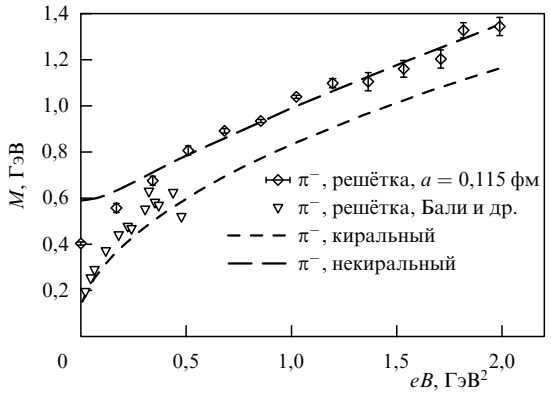

Рис. 4. Масса π^--мезона в зависимости от магнитного поля с учётом киральных эффектов в сравнении с массой в случае некирального π^--мезона, а также с результатами решёточных расчётов [25] с шагом решётки $a = 0{,}115$ и решёточных расчётов Бали и др. [131]. Заряженный пион теряет киральные свойства при $eB \geqslant 0{,}3$ ГэВ^2.

при $eB \to 0$ получается существенно больше. Кроме того, на рис. 4 приведены данные решёточных расчётов [104, 131], которые хорошо согласуются с результатами, полученными в рамках ECL.

Суммируя результаты, описанные в этом разделе, можно заключить, что киральные эффекты не приводят к качественному изменению поведения псевдо-намбу-голдстоуновских мезонов в МП. Асимптотическое поведение траекторий, полученное в рамках некиральной теории (см. формулы (79)–(81)), не изменяется. Существенным является то, что учёт киральных степеней свободы и соотношений GMOR делает массы пионов близкими к физическим при МП, близком к нулевому. Рост кирального конденсата с увеличением магнитного поля также является важным результатом, полученным в рамках ECL в методе корреляторов.

10. Теорема о стабильности спектра в магнитном поле

На основании анализа пертурбативных поправок, проведённого в разделе 5, можно сделать вывод о стабильности основного состояния адрона в сколь угодно сильном внешнем МП. Заметим, что и кулоновская поправка, и поправка сверхтонкого взаимодействия входят в насыщение в результате действия совершенно различных механизмов, поэтому результирующая стабилизация выглядит как нечто искусственное. В данном разделе рассматривается сделанное в работе [71] общее утверждение, справедливое для любой системы КХД + КЭД, помещённой во внешнее МП.

Рассмотрим функцию Грина фермиона, находящегося в электромагнитном поле, $A_\mu^{(\mathrm{e})} = A_\mu^{(\mathrm{e})\mathrm{ext}} + a_\mu^{(\mathrm{e})}$, где $A_\mu^{(\mathrm{e})\mathrm{ext}}$ — внешнее фоновое электромагнитное (ЭМ) поле, $a_\mu^{(\mathrm{e})}$ — квантовое возмущение. Для цветового поля аналогично $A_\mu = A_\mu^{\mathrm{vac}} + A_\mu$, A_μ^{vac} — вакуумное фоновое поле. Начнём с выражения для фермионного пропагатора

$$S(x,y) = (m + \hat{D})^{-1}\,, \quad D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu^{(e)} - \mathrm{i}gA_\mu\,. \qquad (112)$$

На данном этапе следует подчеркнуть, что используется евклидова формулировка теории поля, поэтому $\mu = 1, 2, 3, 4$. Следующее предположение состоит в том, что ЭМ-поле и цветовые поля являются эрмитовыми, т.е. $(A_\mu^{(\mathrm{e})})^+ = A_\mu^{(\mathrm{e})}$ и $A_\mu^+ = A_\mu$. Реальные электрические поля отсутствуют, поэтому $\mathrm{i}A_0^{(\mathrm{e})} = A_4^{(\mathrm{e})} \equiv 0$. Данные соотношения выполняются, если: 1) внешнее ЭМ-поле A_μ^{ext} является эрмитовым, что справедливо для чисто магнитного внешнего поля; 2) вакуумные цветовые поля C_μ^{vac} эрмитовы; 3) квантовые поля C_μ и a_μ также эрмитовы и пространство, т.е. состояния $|\mathrm{in}\rangle$ и $|\mathrm{out}\rangle$, не содержит квантов полей c_μ и a_μ.

При выполнении указанных условий функцию Грина связанного состояния для системы кварк–антикварк $\mathrm{q}\bar{\mathrm{q}}$ или для позитрония $\mathrm{e}\bar{\mathrm{e}}$ можно представить в виде интеграла по путям, где интегрирование ведётся по евклидовым эрмитовым квантовым полям a_μ и c_μ:

$$G_{\mathrm{f}\bar{\mathrm{f}}}(x,y) = \big\langle \mathrm{tr}\,\Gamma_1 S(x,y,A,C)\Gamma_2 S(y,x,A,C)\big\rangle = \\ = Z_{\mathrm{f}\bar{\mathrm{f}}} \int DaDcD\psi D\bar{\psi}\exp\big(-A(\psi,\bar{\psi},A,C)\big)\langle \mathrm{tr}\,\Gamma_1 S\Gamma_2 S\rangle\,, \qquad (113)$$

где Γ_1, Γ_2 — γ-матрицы фермионов в вершинах. Фермионную функцию Грина можно выразить с помощью дираковского проекционного оператора через скалярный пропагатор,

$$S(x,y) = (m - \hat{D})_x (m^2 - \hat{D}^2)^{-1}_{xy}\,. \qquad (114)$$

Возвращаясь к (112), можно увидеть, что для эрмитовых полей $A_\mu^{(\mathrm{e})}$ и A_μ справедливо соотношение $(\mathrm{i}\hat{D})^+ = \mathrm{i}\hat{D}$, поэтому собственные значения оператора $\mathrm{i}\hat{D}$ действительны,

$$\mathrm{i}\hat{D}u_n = \lambda_n u_n\,, \quad \lambda_n \in \Re\,, \qquad (115)$$

а собственные значения квадрированного оператора

$$-\hat{D}^2 u_n = (\mathrm{i}\hat{D})^2 u_n = \lambda_n^2 u_n\,, \quad \lambda_n^2 \geqslant 0\,, \qquad (116)$$

положительно определены. Из разложения скалярного пропагатора $(m^2 - \hat{D}^2)^{-1}$ по собственным значениям,

$$(m^2 - \hat{D}^2)^{-1} = \sum_n \frac{u_n(x)u_n^+(y)}{m^2 + \lambda_n^2}\,, \qquad (117)$$

видно, что пропагатор нигде не обращается в бесконечность. Из выражений (115) и (116) следует, что оператор $(-\hat{D}^2)$ является положительно определённым.

Важно заметить, что в случае составной частицы из фермионов собственные значения (117), входящие в (113), получаются в итоге из квадрированных фермионных пропагаторов. В простейшем случае составной частицы с невзаимодействующими конституентами пропагаторы кварков могут быть получены из решения уравнения Дирака в магнитном поле,

$$E^2 = m_{\mathrm{q}}^2 + p_z^2 + (2n+1)|e|B - (eB)s_z\,, \quad s_z = \pm 1\,, \qquad (118)$$

в итоге основное состояние кварка имеет энергию $E_0^2 = m_{\mathrm{q}}^2$. Поэтому сингулярности знаменателя в исходной кварк-антикварковой функции Грина (113) составной частицы отсутствуют, а вместе с ней отстствует и возможность нестабильности вакуума. В случае точечной векторной частицы со спином $s = 1$ и $g = 2$, рассмотренном в работе [16], изначальная функция Грина имеет

вид (117) с соответствующим спектром:

$$E^2 = m^2 + p_z^2 + (2n+1)|e|B - 2(eB)s_z\,, \quad s_z = -1, 0, +1\,, \tag{119}$$

откуда непосредственно следует возможность $E^2 < 0$ для $e > 0$, $s_z = -1$ при $B = B_{\text{crit}}$. Данный результат непосредственно показывает, что при описании свойств адронов в магнитном поле чрезвычайно важен учёт их внутренней структуры.

Легко увидеть, что при наличии внешних электрических полей ($\boldsymbol{\sigma\varepsilon} \neq 0$) переход в пространство Минковского $\boldsymbol{\sigma\varepsilon} \to \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma\varepsilon}$ нарушает положительную определённость оператора $m^2 - \hat{D}^2$, что приводит к появлению мнимой части функции Грина $G_{\mathrm{f\bar{f}}}$, ответственной за процесс швингеровского рождения $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$-пар во внешнем электрическом поле. В отсутствие внешнего электрического поля ($\boldsymbol{\sigma\varepsilon} = 0$) единственный эффект, к которому приводят квантовые электрические поля, — это обменные процессы, описываемые евклидовыми корреляторами,

$$e^2\langle \boldsymbol{\varepsilon}(x)\boldsymbol{\varepsilon}(y)\rangle = \frac{e^2}{\pi^2}\,\frac{1}{(x_\mu - y_\mu)^2}\,, \tag{120}$$

$$\langle g^2\mathbf{E}(x)\mathbf{E}(\mathbf{y})\rangle = \frac{16g^2}{3\pi^2}\,\frac{1}{(x_\mu - y_\mu)^2} \tag{121}$$

и потенциалами кулоновского взаимодействия $V_{\text{Coul}} = -\alpha/r$. На основании утверждений, сделанных в этом разделе, можно прийти к выводу о том, что вакуум КХД + КЭД сохраняет свою стабильность в чисто магнитном внешнем поле любой величины при отсутствии внешних электрических полей.

11. Массовые траектории адронов в магнитном поле

В заключение приведём массовые спектры адронов, полученные с помощью метода вакуумных корреляторов. На рисунке 5 приведены траектории для полной массы нейтрального ρ^0-мезона, вычисленные аналитически с помощью техники псевдоимпульса для различных спиновых конфигураций с учётом пертурбативных поправок. Видно, что эти результаты находятся в хорошем соответствии с результатами решёточных расчётов [44–46]. Под ρ^+ подразумевается модельный нефизический

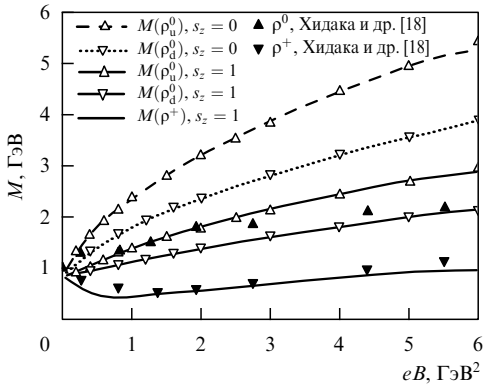

Рис. 5. Массовые траектории ρ^0-мезона, вычисленные с помощью метода корреляторов и техники псевдоимпульса, в сравнении с решёточными данными [18].

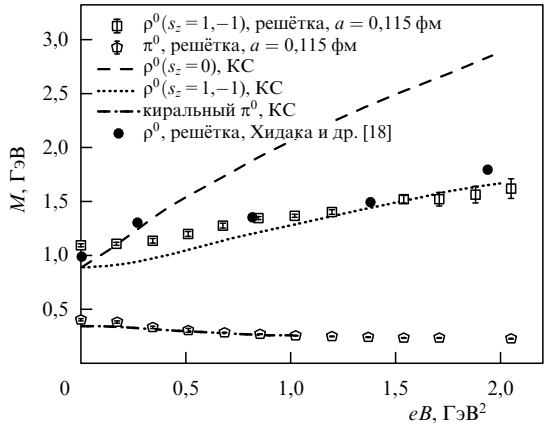

Рис. 6. Массовые траектории нейтральных π^0- и ρ^0-мезонов, состоящих из $\mathrm{u\bar{u}}$-кварков, вычисленные с помощью метода конституентной сепарации (КС), в сравнении с результатами решёточных расчётов [18] с шагом решётки $a = 0{,}115$ фм. Результат для π^0-мезона получен с учётом киральных эффектов.

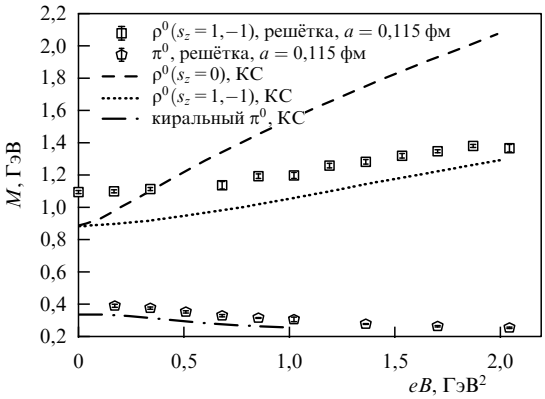

Рис. 7. Массовые траектории нейтральных π^0- и ρ^0-мезонов, состоящих из $\mathrm{d\bar{d}}$-кварков, вычисленные с помощью метода конституентной сепарации, в сравнении с результатами решёточных расчётов [18] с шагом решётки $a = 0{,}115$ фм. Результат для π^0-мезона получен с учётом киральных эффектов.

мезон с зарядами кварков $e_1 = e_2 = 2/3$, для которого возможно разделение переменных [80].

Применение метода конституентной сепарации позволило развить подход, который даёт возможность аналитически вычислять массовые спектры как заряженных, так и нейтральных мезонов единым образом. Основной идеей метода является пренебрежение потенциалом конфайнмента в режиме сильного поля в плоскости, перпендикулярной направлению МП, так как поведение лёгкого адрона в МП характеризуется безразмерным параметром $eB/\sigma \gg 1$. Данный метод является приближённым, в отличие от точного аналитического вычисления динамической массы, полученной для нейтральных мезонов в технике псевдоимпульса. При сравнении результатов, полученных с помощью данного метода для нейтральных мезонов в конфигурациях $\mathrm{u\bar{u}}$ (рис. 6) и $\mathrm{d\bar{d}}$ (рис. 7), с результатами, полученными с помощью псевдоимпульса (см. рис. 5), видно, что погрешность метода конституентной сепарации составляет 15 % для полной массы нейтральных мезонов при $eB < 0{,}75$ ГэВ^2 и порядка 10 % в режиме сильного поля $eB \geqslant 0{,}75$ ГэВ^2. В

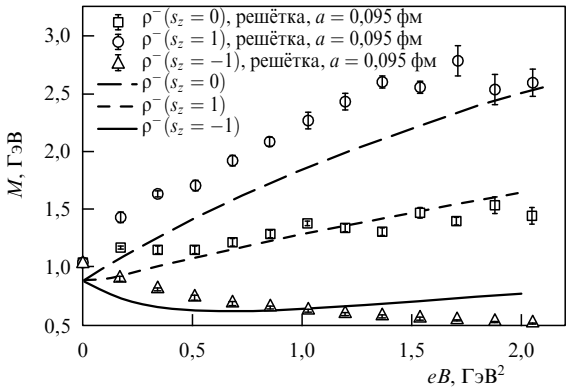

Рис. 8. Массовые траектории заряженного ρ^--мезона, вычисленные с помощью метода конституентной сепарации, в сравнении с решёточными данными.

основном эта погрешность определяется вкладами пертурбативных поправок спин-спинового взаимодействия и цветового кулоновского взаимодействия, вычисленными в первом порядке теории возмущений. Следующим приближением служит введение эффективного потенциала струны, проходящей через центр масс адрона (69), что позволяет точно воспроизвести значение для непертурбативной части энергии (динамической массы) при любом значении МП. Результаты для всех 16 траекторий, с учётом смешивания и расщепления спин-изоспиновых конфигураций мезонов (см. раздел 7) приведены на рис. 4, 6–8. Также с помощью метода КС получены аналитические выражения для асимптотик массовых траекторий в пределе $eB \to \infty$ (79)–(81), описывающие три основных типа асимптотического поведения траекторий (см. таблицу).

Результаты для ρ^+- и π^+-мезонов совпадают с результатами, полученными для ρ^-- и π^--мезонов с точностью до одновременной замены знаков зарядов кварков и проекций спинов противоположными. Как и в случае нейтральных мезонов, заряженные адроны, кварки в которых находятся на нижних уровнях Ландау (ZHS-состояния), содержат в себе опасность коллапса адронов, когда масса адрона за счёт пертурбативных поправок начинает неконтролируемо уменьшаться и становится отрицательной.

Для мезона $\rho^-(s_z = -1)$ (и соответственно для мезона $\rho^+(s_z = 1)$) данный сценарий не реализуется по тем же причинам, что и в случае нейтральных мезонов, — экранирование одноглюонного обмена кварк-антикварковыми парами в МП останавливает возрастание соответствующей поправки, а эффект магнитного фокусирования, приводящий к возрастанию $|\psi(0)|^2$ и соответственно к усилению спин-спинового взаимодействия, стабилизируется благодаря введению конечной корреляционной длины вакуумных полей $\lambda \sim 0{,}2$ фм и регуляризации сингулярного δ-взаимодействия по данному масштабу.

Указанных процедур оказывается недостаточно для того, чтобы остановить коллапс π^0-мезона, который является псевдо-намбу-голдстоуновским и имеет малую массу при $eB = 0$, стремящуюся ещё больше уменьшиться с возрастанием МП. Кроме того, если не рассматривать киральные степени свободы, то метод конституентной сепарации даёт завышенное значение массы заряженного π^--мезона при $eB = 0$ (см. рис. 4). Для решения данной проблемы с помощью метода вакуумных корреляторов получен эффективный киральный лагранжиан, позволяющий корректно учесть киральную природу пиона (см. раздел 9). Результирующие массовые траектории пионов показаны на рис. 3, 4, из которых видно, что учёт киральных свойств позволяет получить физические значения для масс пионов при $eB = 0$, а также непосредственно убедиться в отсутствии коллапса π^0-мезона в МП. Результаты расчётов хорошо согласуются с решёточными данными [18, 50, 131], которые также указывают на отсутствие коллапса в рассматриваемом диапазоне магнитных полей. Данные результаты также находятся в согласии с утверждением о принципиальной невозможности коллапса адрона в сколь угодно сильном МП, сделанным на основании общего анализа собственных значений релятивистского гамильтониана в МП (см. раздел 10).

Качественный анализ кривых, приведённых на рис. 6–8, показывает, что в каждом из семейств, $(\pi^0, \rho^0)(u\bar{u})$, $(\pi^0, \rho^0)(d\bar{d})$, (π^-, ρ^-) и (π^+, ρ^+), включающем в себя по четыре траектории, имеется одно ZHS-состояние (79), динамическая масса которого стремится к постоянному значению с возрастанием МП: два состояния типа I, возрастающие с увеличением МП как $\sim \sqrt{eB}$ (80), и одно возрастающее как $\sim \sqrt{eB}$ состояние типа II (81). Дополнительное двукратное расщепление траекторий $(\pi^0, \rho^0)(u\bar{u})$ и $(\pi^0, \rho^0)(d\bar{d})$ возникает из-за разницы зарядов u- и d-кварков, что приводит к подобию соответствующих массовых траекторий с коэффициентом $\sqrt{2}$.

Как сказано в разделе 4, разделение переменных в технике псевдоимпульса для нейтрона возможно лишь в предположении $\omega_1 = \omega_2$ для d-кварков, что приводит к тому, что спины d-кварков должны быть сонаправленными. Массовая траектория для соответствующей спин-изоспиновой конфигурации $|d_- d_- u_+\rangle$ с учётом пертурбативных поправок показана на рис. 9. Данное состояние обладает наинизшей возможной массой и наиболее подвержено коллапсу, так как все кварки находятся на LLL в пределе $eB \to \infty$. Метод КС позволяет вычислить массовые спектры для всего барионного октета, но пока такого вычисления не проведено.

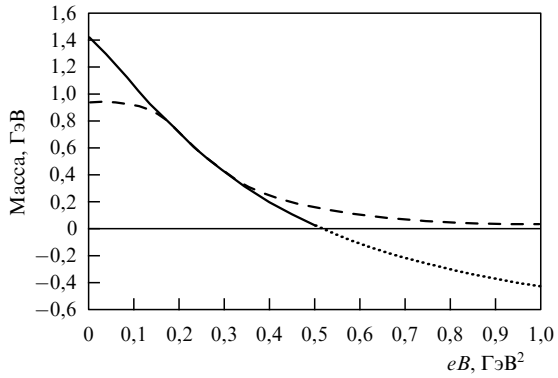

Рис. 9. Масса нейтрона в магнитном поле. Результат аналитического расчёта для чистого состояния $d_- d_- u_+$ показан сплошной кривой. Влияние слабого магнитного поля приводит к зеемановскому смешиванию уровней нейтрона и Δ^0 (штриховая кривая в диапазоне $0 < eB < 0{,}25$ ГэВ^2). В области сильного поля, $0{,}42 < eB < 0{,}9$ ГэВ^2, теория возмущений становится неприменимой. В этой области штриховой кривой показано гипотетическое поведение массы нейтрона.

Предполагается, что расщепление ~ 300 МэВ между нейтроном и Δ^0 при $eB = 0$ обеспечивается спин-спиновым взаимодействием. Однако, в отличие от константы в мезонном случае, α_s, играющая роль константы сверхтонкого цветомагнитного взаимодействия, слишком мала для того, чтобы обеспечить наблюдаемое в экспериментах значение для данного расщепления, что и приводит к расщеплению ~ 35 МэВ. Поэтому в разделе 8 рассмотрен механизм однопионного обмена, который позволяет увеличить константу сверхтонкого взаимодействия [81, 101] и обеспечивает необходимое расщепление между n и Δ. Введённая таким способом $\alpha_{\rm hf}$ начинает зависеть от МП вследствие изменения масс виртуальных пионов магнитным полем, что приводит к величине $\alpha_{\rm hf}(eB \to \infty) \simeq \simeq (1/3)\alpha_{\rm hf}(eB = 0)$.

Сплошная кривая на рис. 9 показывает динамику состояния $\mathrm{d\_d\_u_+}$, для которого возможно аналитическое вычисление, со сверхтонким взаимодействием, рассматриваемым в первом порядке теории возмущений. В диапазоне $0 < eB < 0{,}25$ ГэВ^2 волновая функция нейтрона испытывает зеемановское смешивание с другими спиновыми конфигурациями, поэтому штриховая кривая, соответствующая массе нейтрона, проходит ниже массовой траектории чистого состояния $\mathrm{d\_d\_u_+}$ и берёт начало при $eB = 0$ в точке, соответствующей физической массе нейтрона $m_{\rm n} = 940$ МэВ. В диапазоне $0{,}42 < eB < 0{,}9$ ГэВ^2 пунктирная кривая соответствует области, в которой теория возмущений для сверхтонкого взаимодействия становится неприменимой и при учёте лишь первого порядка теории возмущений масса может стать отрицательной. Штриховой линией в области $0{,}42 < eB < 0{,}9$ ГэВ^2 показано гипотетическое поведение массовой траектории нейтрона согласно общей теореме о стабильности, рассмотренной в разделе 10.

Как видно из предыдущего рассмотрения, аналитически вычисленные траектории масс ρ- и π-мезонов во всех случаях находятся в неплохом согласии с результатами расчётов на решётке, что, например, ясно видно из рис. 5 для ρ^0- и ρ^+-мезонов и из рис. 4 для π^--мезона. Особый интерес представляет траектория массы нейтрона, для которого пока нет расчётов на решётках. Наблюдающиеся расхождения для $\rho^0(s_z = 1)$ на рис. 7 и для $\rho^-(s_z = 1)$ на рис. 8 могут быть объяснены недостаточно высокой точностью решёточных данных.

12. Заключение

В настоящем обзоре мы рассмотрели задачу о влиянии магнитного поля на адроны в наиболее общем релятивистском случае, когда поля могут быть и сколь угодно велики или сколь угодно малы по сравнению с характерными масштабами системы. Это потребовало использования релятивистского интеграла по путям в форме Фока – Фейнмана – Швингера. Для конкретного вычисления энергий и волновых функций был использован релятивистский гамильтониан, который является фактически единственным средством в случае сильного взаимодействия с конфайнментом, так как стандартные методы уравнения Бете – Солпитера не могут быть использованы непосредственно вне рамок теории возмущений. Метод РГ для адронов удобен как в случае слабых полей ($eB \ll \sigma$), где он предсказывает магнитные моменты адронов с точностью около 5 % [85, 86], так и в случае сильных полей ($eB \gg \sigma$), как показано в настоящем обзоре.

Большое внимание было уделено аналитическим методам решения спектральной задачи для нерелятивистского (см. раздел 2) и релятивистского (см. раздел 4) гамильтонианов в МП. Показано, что введение псевдоимпульса позволяет отделить движение центра инерции для электронейтральных систем в МП. Также предложен метод конституентной сепарации, который позволяет рассматривать как заряженные, так и нейтральные адроны в едином формализме, причём точные результаты для массовых спектров, полученные с помощью техники псевдоимпульса, могут быть воспроизведены в рамках КС-метода с точностью порядка 10 – 15 % во всём диапазоне рассматриваемых магнитных полей. Наиболее интересным применением КС-метода может стать вычисление массовых спектров всех частиц барионного октета в МП и сравнение влияния МП на массы нейтрона и протона.

Необходимо отметить разные этапы эволюции динамики в атомных и адронных системах. Если в случае атомов можно выделить критическое поле $eB_{\rm a} = \alpha^2 m_{\rm e}^2$, а также $B_{\rm cr} = \alpha^2 B_{\rm a}$, вызывающее релятивистское движение электрона и, наконец, значение $(3\pi/\alpha)B_{\rm cr}$, при котором радиационные поправки замораживают возрастание энергии связи, то в случае адронов критическим является значение поля $eB_\sigma = \sigma = 0{,}18$ ГэВ$^2 \simeq 10^{19}$ Гс. В результате при бóльших полях движение кварков в плоскости, перпендикулярной направлению **B**, становится индивидуализированным.

Как описано в обзоре, это явление оказывается ключевым для разрешения проблемы так называемого ρ-коллапса [16], основанного на представлении об "элементарности" ρ-мезона.

Мы показали также ещё два возможных сценария коллапса в МП: 1) коллапс из-за одноглюонного обмена; 2) коллапс сверхтонкого взаимодействия — и их благополучное разрешение. В первом случае показано, что виртуальные кварковые петли под действием МП экранируют одноглюонный потенциал и приводят к его насыщению, а во втором случае необходимо учитывать "размазывание" сверхтонкого взаимодействия, обусловленное наличием высших порядков, что подтверждается теоремой о стабильности вакуума в МП.

Особую сложность вопросу о траекториях масс мезонов в МП придаёт сложная динамика КХД с учётом спиновых и изоспиновых степеней свободы. Как показано в разделе 4, возникают траектории трёх типов (I, II и ZHS) и для некоторых мезонов траектории расщепляются на две или даже на четыре линии.

Особый интерес вызывает физика киральных мезонов в магнитном поле, так как сильное МП воздействует на кварки по отдельности, а стандартная киральная теория рассматривает киральный мезон как целое, пренебрегая его кварковой природой. В обзоре показано, что стандартная киральная теория возмущений неприменима к $\pi^\pm$- и π^0-мезонам, при этом для π^0-мезона используется созданная ранее [123 – 126] киральная теория (ECL), обобщённая в [103] с учётом МП. Хорошее согласие с решёточными расчётами подтверждает применимость теории.

Кроме явлений и теории, связанных с адронами, в настоящем обзоре обсуждаются эффекты общего характера, например явление, названное авторами обзора

"магнитной фокусировкой", наблюдавшееся ранее разными исследователями в атомных, молекулярных и адронных системах, но не получившее общего рассмотрения и названия. Так было названо явление (возрастание волновой функции) сближения разнозаряженных компонентов системы при увеличении МП, что было продемонстрировано на примере сдвига частоты радиолинии 21 см атома водорода, а также усиления взаимодействия в конечном состоянии, пропорционального МП (см. уравнение (98)).

Весьма важным в обзоре является исследование нейтрона в МП, которое потребовало использования всех существующих подходов, так как в нейтроне большую роль играют и цветомагнитное сверхтонкое взаимодействие, и пионное обменное взаимодействие (помимо сил конфайнмента и глюонных обменов) — и все эти компоненты взаимодействия изменяются с изменением МП. Результирующая траектория массы нейтрона показана на рис. 9, однако область при МП, большем 0,5 ГэВ^2, остаётся предположительной, так как она сильно зависит от поведения сверхтонкого взаимодействия.

В целом, исследования, обсуждаемые в обзоре, только приоткрывают окно в ранее малоизвестную область. Мы действительно научились описывать явления с сильными взаимодействиями в МП с точностью около 5–10 % и создали релятивистский аппарат, позволяющий повысить эту точность, но область применения может быть весьма широкой, включающей в себя и атомы, и адроны, и ядра, и, наконец, нейтронные звёзды, в случае которых МП весьма велики, не говоря уже о нецентральных ядро-ядерных соударениях и образующейся в них кварк-глюонной плазме. Все эти вопросы требуют дальнейшего развития и новых обзоров.

Исследование поддержано Российским научным фондом (грант № 16-12-10414).

Список литературы

1. Kharzeev D E et al., in *Strongly Interacting Matter in Magnetic Fields* (Lecture Notes in Physics, Vol. 871, Eds D Kharzeev) (Berlin: Springer, 2013) p. 1
2. Andersen O, Naylor W R, Tranberg A *Rev. Mod. Phys.* **88** 025001 (2016)
3. Miransky V A, Shovkovy I A *Phys. Rep.* **576** 1 (2015)
4. Kharzeev D E, McLerran L D, Warringa H J *Nucl. Phys. A* **803** 227 (2008)
5. Skokov V V, Illarionov A Yu, Toneev V D *Int. J. Mod. Phys. A* **24** 5925 (2009)
6. Toneev V, Rogachevsky O, Voronyuk V *Eur. Phys. J. A* **52** 264 (2016)
7. Потехин А Ю *УФН* **180** 1279 (2010); Potekhin A Y *Phys. Usp.* **53** 1235 (2010)
8. Harding A K, Dong Lai *Rep. Prog. Phys.* **69** 2631 (2006)
9. Schwinger J *Phys. Rev.* **82** 664 (1951)
10. Schramm S, Müller B, Schramm A J *Mod. Phys. Lett. A* **07** 973 (1992)
11. Luschevskaya E V, Solovjeva O E, Teryaev O V *J. High Energ. Phys.* **2017** 142 (2017)
12. Samsonov A *JHEP* (12) 061 (2003)
13. Aliev T M, Özpineci A, Savci M *Phys. Lett. B* **678** 470 (2009)
14. Gudiño D G, Sánchez G T *Int. J. Mod. Phys. A* **30** 1550114 (2015)
15. Braguta V V, Onishenko A I *Phys. Rev. D* **70** 033001 (2004)
16. Chernodub M N *Phys. Rev. D* **82** 085011 (2010)
17. Chernodub M N, Van Doorsselaere J, Verschelde H *Phys. Rev. D* **85** 045002 (2012)
18. Hidaka Y, Yamamoto A *Phys. Rev. D* **87** 094502 (2013)
19. Vafa C, Witten E *Nucl. Phys. B* **234** 173 (1984)
20. Chernodub M N *Phys. Rev. D* **86** 107703 (2012)
21. Chernodub M N *Phys. Rev. D* **89** 018501 (2014)
22. Li C, Wang Q *Phys. Lett. B* **721** 141 (2013)
23. Braguta V V et al. *Phys. Lett. B* **718** 667 (2012)
24. Luschevskaya E V et al. *Письма в ЖЭТФ* **101** 750 (2015); *JETP Lett.* **101** 674 (2015)
25. Andreichikov M A et al. *J. High Energ. Phys.* **2017** 7 (2017)
26. Weinberg S *The Quantum Theory of Fields* Vol. 2 (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996)
27. Savvidy G K *Phys. Lett. B* **71** 133 (1977)
28. Matinyan S G, Savvidy G K *Nucl. Phys. B* **134** 539 (1978)
29. Nielsen N K, Olesen P *Nucl. Phys. B* **144** 376 (1978)
30. Ambjørn J, Olesen P *Nucl. Phys. B* **315** 606 (1989)
31. Скалозуб В В *ЯФ* **43** 1045 (1986); Skalozub V V *Sov. J. Nucl. Phys.* **43** 665 (1986)
32. Симонов Ю А *УФН* **166** 337 (1996); Simonov Yu A *Phys. Usp.* **39** 313 (1996)
33. Кузьменко Д С, Симонов Ю А, Шевченко В И *УФН* **174** 3 (2004); Kuz'menko D S, Simonov Yu A, Shevchenko V I *Phys. Usp.* **47** 1 (2004)
34. Schiff L I, Snyder H *Phys. Rev.* **55** 59 (1939)
35. Попов В С, Карнаков Б М *УФН* **184** 273 (2014); Popov V S, Karnakov B M *Phys. Usp.* **57** 257 (2014)
36. Высоцкий М И, Годунов С И *УФН* **184** 206 (2014); Vysotsky M I, Godunov S I *Phys. Usp.* **57** 194 (2014)
37. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Физматлит, 2016); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)
38. Shabad A E, Usov V V *Phys. Rev. D* **77** 025001 (2008)
39. Andreichikov M A, Kerbikov B O, Simonov Yu A *Письма в ЖЭТФ* **99** 286 (2014); *JETP Lett.* **99** 246 (2014)
40. Eides M I, Grotch H, Shelyuto V A *Phys. Rep.* **342** 63 (2001)
41. Fock V *Phys. Z. Sowjetunion* **12** 404 (1937)
42. Ritus V I *Ann. Physics* **69** 555 (1972)
43. Dong Lai *Rev. Mod. Phys.* **73** 629 (2001)
44. Johnson B R, Hirschfelder J O, Yang K-H *Rev. Mod. Phys.* **55** 109 (1983)
45. Тернов И М, Жуковский В Ч, Борисов А В *Квантовые процессы в сильном внешнем поле* (М.: Изд-во МГУ, 1989)
46. Kuznetsov A, Mikheev N *Electroweak Processes in External Electromagnetic Fields* (New York: Springer, 2003)
47. Larina O, Luschevskaya E, Kochetkov O *PoS* **214** 120 (2014); Luschevskaya E V et al., arXiv:1411.0730; Luschevskaya E V, Larina O V *Nucl. Phys. B* **884** 1 (2014)
48. Luschevskaya E V et al. *Nucl. Phys. B* **898** 627 (2015)
49. Bali G S et al. *J. High Energ. Phys.* **2012** 044 (2012)
50. Bali G S et al. *Phys. Rev. D* **97** 034505 (2018)
51. Alford J, Strickland M *Phys. Rev. D* **88** 105017 (2013)
52. Zang R, Fu W, Liu Y *Eur. Phys. J. C* **76** 307 (2016)
53. Taya H *Phys. Rev. D* **92** 014038 (2015)
54. Liu H, Yu L, Huang M *Phys. Rev. D* **91** 014017 (2015)
55. Волков М К, Раджабов А Е *УФН* **176** 569 (2006); Volkov M K, Radzhabov A E *Phys. Usp.* **49** 551 (2006)
56. Hattori K, Kojo T, Su N *Nucl. Phys. A* **951** 1 (2016)
57. Ghosh S et al. *Phys. Rev. D* **84** 094043 (2016)
58. Lamb W E (Jr.) *Phys. Rev.* **85** 259 (1952)
59. Горьков Л П, Дзялошинский И Е *ЖЭТФ* **53** 717 (1967); Gor'kov L P, Dzyaloshinskii I E *Sov. Phys. JETP* **26** 449 (1968)
60. Avron J E, Herbst I W, Simon B *Ann. Physics* **114** 431 (1978)
61. Grotch H, Hegstrom R A *Phys. Rev. A* **4** 59 (1971)
62. Herold H, Ruder H, Wunner G *J. Phys. B* **14** 751 (1981)
63. Simonov Yu A *Phys. Lett. B* **719** 464 (2013)
64. Schmelcher P, Cederbaum L S *Phys. Rev. A* **43** 287 (1991)
65. Simonov Yu A *Phys. Rev. D* **88** 093001(2013)
66. Shabad A E, Usov V V *Phys. Rev. Lett.* **96** 189401 (2006)
67. Simonov Yu A *Nucl. Phys. B* **307** 512 (1988)
68. Simonov Yu A, Tjon J A *Ann. Physics* **228** 1 (1993)
69. Simonov Yu A, Tjon J A *Ann. Physics* **300** 54 (2002)
70. Simonov Yu A *Phys. Rev. D* **88** 025028 (2013)
71. Simonov Yu A *Phys. Rev. D* **88** 053004 (2013)
72. Simonov Yu A *Phys. Rev. D* **90** 013013 (2014)

73. Ахиезер А И, Берестецкий В Б *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1969); Пер. на англ. яз.: Akhiezer A I, Berestetskii V B *Quantum Electrodynamics* (New York: Intersci. Publ., 1965)
74. Макеенко Ю М *УФН* **143** 161 (1984); Makeenko Yu M *Sov. Phys. Usp.* **27** 401 (1984)
75. Simonov Yu A, in *Perturbative and Nonperturbative Aspects of Quantum Field Theory* (Lecture Notes in Physics, Vol. 479, Eds H Latal, W Schweiger) (Berlin: Springer, 1997) p. 139
76. Симонов Ю А *Ядерная физика* **58** 113 (1995); Simonov Yu A *Phys. Atom. Nucl.* **58** 107 (1995)
77. Simonov Yu A, in *QCD, Perturbative or Nonperturbative? Proc. of the XVII Autumn School, 29 September – 4 October 1999, Lisboa, Portugal* (Eds L S Ferreira, P Nogueira, J I Silva-Marcos) (Singapore: World Scientific, 2001)
78. Dosch H G, Simonov Yu A *Phys. Lett. B* **205** 339 (1988)
79. Di Giacomo A, Dosch H G, Shevchenko V I, Simonov Yu A *Phys. Rep.* **372** 319 (2002)
80. Andreichikov M A, Kerbikov B O, Orlovsky V D, Simonov Yu A *Phys. Rev. D* **87** 094029 (2013)
81. Andreichikov M A, Kerbikov B O, Orlovsky V D, Simonov Yu A *Phys. Rev. D* **89** 074033 (2014)
82. Takahashi T T et al. *Phys. Rev. Lett.* **86** 18 (2001)
83. Takahashi T T et al. *Phys. Rev. D* **65** 114509 (2002)
84. Bornyakov V G et al. *Phys. Rev. D* **70** 054506 (2004)
85. Badalian A M, Simonov Yu A *Phys. Rev. D* **87** 074012 (2013)
86. Kerbikov B O, Simonov Yu A *Phys. Rev. D* **62** 093016 (2000)
87. Andreichikov M A, Orlovsky V D, Simonov Yu A *Phys. Rev. Lett.* **110** 162002 (2013)
88. Simonov Yu A *ЯФ* **74** 1252 (2011); *Phys. Atom. Nucl.* **74** 1223 (2011)
89. Kouzakov K A, Studenikin A I *Phys. Rev. C* **72** 015502 (2005)
90. Carr S, Sutherland P *Astrophys. Space Sci.* **58** 83 (1978)
91. Mills A P (Jr.) *Phys. Rev. A* **41** 502 (1990)
92. De Rújula A, Georgi H, Glashow S L *Phys. Rev. D* **12** 147 (1975)
93. Bonati C et al. *Phys. Rev. D* **89** 114502 (2014)
94. Bonati C et al. *Nuovo Cimento C* **38** 11 (2015)
95. Bonati C et al. *PoS* **214** 351 (2015)
96. Bonati C et al. *Phys. Rev. D* **92** 054014 (2015)
97. Bonati C et al. *Phys. Rev. D* **94** 094007 (2016)
98. Bonati C et al. *PoS* **256** 346 (2017)
99. Bonati C et al. *EPJ Web Conf.* **137** 03005 (2017)
100. Simonov Yu A, Trusov M A *Phys. Lett. B* **747** 48 (2015)
101. Simonov Yu A, Tjon J A, Weda J *Phys. Rev. D* **65** 094013 (2002)
102. Weda J, Simonov Yu A, Tjon J A, in *Few-Body Problems in Physics'02. Proc. of the XVIIIth European Conf. on Few-Body Problems in Physics, Bled, Slovenia, September 8 – 14, 2002* (Few-Body Systems, Supplement 14, Eds R Krivec) (Wien: Springer, 2003) p. 57
103. Orlovsky V D, Simonov Yu A *J. High Energ. Phys.* **2013** 136 (2013)
104. Bali G S et al. *Phys. Rev. D* **86** 071502(R) (2012)
105. Shushpanov I, Smilga A V *Phys. Lett. B* **402** 351 (1997)
106. Agasian N O, Shushpanov I A *Phys. Lett. B* **472** 143 (2000)
107. Agasian N O *Phys. Lett. B* **488** 39 (2000)
108. Andersen J O *Phys. Rev. D* **86** 025020 (2012)
109. Andersen J O *J. High Energ. Phys.* **2012** 5 (2012)
110. Cohen T O, McGady D A, Werbos E S *Phys. Rev. C* **76** 055201 (2007)
111. Gatto R, Ruggieri M *Phys. Rev. D* **83** 034016 (2011)
112. Agasian N O, Fedorov S M *Phys. Lett. B* **663** 445 (2008)
113. Fraga E S, Mizher A J *Nucl. Phys. A* **820** 103c (2009)
114. Fraga E S, Palhares L F *Phys. Rev.* **86** 016008 (2012)
115. Buividovich P V et al. *Phys. Lett. B* **682** 484 (2010)
116. Braguta V et al. *PoS* **2010** 190 (2010); *Ядерная физика* **75** 524 (2012); *Phys. Atom. Nucl.* **75** 488 (2012)
117. D'Elia M, Mukherjee S, Sanfilippo F *Phys. Rev. D* **82** 051501(R) (2010)
118. D'Elia M, Negro F *Phys. Rev. D* **83** 114028 (2011)
119. D'Elia M, in *Strongly Interacting Matter in Magnetic Fields* (Lecture Notes in Physics, Vol. 871, Eds D Kharzeev et al.) (Berlin: Springer, 2013) p. 181
120. Ilgenfritz E-M et al. *Phys. Rev. D* **85** 114504 (2012)
121. Gusynin V P, Miransky V A, Shovkovy I A *Phys. Rev. Lett.* **73** 3499 (1994)
122. Shovkovy I A, in *Strongly Interacting Matter in Magnetic Fields* (Lecture Notes in Physics, Vol. 871, Eds D Kharzeev et al.) (Berlin: Springer, 2013) p. 13
123. Simonov Yu A *Phys. Rev. D* **56** 094018 (2002)
124. Simonov Yu A *Ядерная физика* **67** 868 (2004); *Phys. Atom. Nucl.* **67** 846 (2004)
125. Simonov Yu A *Ядерная физика* **67** 1050 (2004); *Phys. Atom. Nucl.* **67** 1027 (2004)
126. Fedorov S M, Simonov Yu A *Письма в ЖЭТФ* **78** 67 (2003); *JETP Lett.* **78** 57 (2003)
127. Simonov Yu A, arXiv:1509.06930
128. Simonov Yu A *Int. J. Mod. Phys. A* **31** 1650104 (2016)
129. Simonov Yu A *J. High Energ. Phys.* **2014** 118 (2014)
130. Симонов Ю А *ЯФ* **79** 277 (2016); Simonov Yu A *Phys. Atom. Nucl.* **79** 419 (2016)
131. Bali G S et al., in *33rd Intern. Symp. on Lattice Field Theory, Lattice 2015, 14 – 18 July 2015, Kobe, Japan*; arXiv:1510.03899

Hadron physics in magnetic fields

M.A. Andreichikov (*1), **B.O. Kerbikov** (†1, 2, 3), **Yu.A. Simonov** (‡1)

(1) *National Research Center "Kurchatov Institute", Alikhanov Institute of Theoretical and Experimental Physics, ul. B. Cheremushkinskaya 25, 117218 Moscow, Russian Federation*

(2) *Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation*

(3) *Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Institutskii per. 9, Dolgoprudnyi, 141700 Moscow region, Russian Federation*

E-mail: *andreichicov@mail.ru, † borisk@itep.ru, ‡ simonov@itep.ru

We propose a new approach to exploring relativistic compound systems in the external magnetic field. A relativistic Hamiltonian that includes confinement, one-gluon exchange, and spin–spin interaction has been obtained using path integral formalism. The masses of the quark–antiquark states that correspond at zero magnetic field to ρ- and π-meson and neutron mass have been calculated as a function of the magnetic field. The most interesting phenomena occur in super-strong magnetic fields of the order of $10^{18} - 10^{20}$ G that emerge for a short time in peripheral collisions of relativistic heavy ions.

Keywords: relativistic Hamiltonian, quark–antiquark system, magnetic field, pseudo-momentum, color Coulomb and spin–spin interactions, regularization, constituent separation method

PACS numbers: **12.39. – x**, **14.40. – n**, 11.15.Tk

Bibliography — 131 references *Received 14 December 2017, revised 30 January 2019*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **189** (4) 337 – 358 (2019) *Physics – Uspekhi* **62** (4) (2019)

DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2019.02.038526 DOI: https://doi.org/10.3367/UFNe.2019.02.038526