

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Кроссовер БКШ – БЭК, коллективные возбуждения и гидродинамика сверхтекучих квантовых жидкостей и газов

М.Ю. Каган, А.В. Турлапов

Ферми-газ, описываемый теорией Бардина–Купера–Шриффера (БКШ или BCS), может быть преобразован в бозе-эйнштейновский конденсат (БЭК или BEC) составных бозонов (димеров) путём адиабатической перестройки взаимодействия. Последовательность состояний, возникающая в результате этой перестройки, известна как кроссовер БКШ – БЭК. Данный обзор посвящён теоретическим и экспериментальным результатам по кроссоверу БКШ – БЭК в трёхмерных и квазидвумерных квантовых газах в ограниченной геометрии ловушек и на оптических решётках. Обсуждаются нетривиальные явления в гидродинамике сверхтекучих квантовых газов и жидкостей, включая спектр коллективных возбуждений в кроссовере БКШ – БЭК, гидродинамику вращающихся бозе-конденсатов с большим количеством квантованных вихрей, трудную нерешённую проблему киральной аномалии в гидродинамике сверхтекучих фермионных систем с анизотропным р-спариванием. Ещё одним предметом анализа являются разбалансированные по спину квантовые газы и возможность реализации в них триплетного р-спаривания по механизму Кона – Латтинжера, а также последние результаты по приготовлению двумерных ферми-газов и наблюдению флуктуационных явлений, связанных с переходом Березинского – Костерлица – Таулеса. Кроме того, кратко обсуждаются недавно открытые экспериментально кроссовер БКШ – БЭК и аномальная сверхпроводимость в бислое графена, а также роль графена, других дираковских полуметаллов (таких как, например, висмут) и двумерных оптических решёток как возможных эталонных систем, в которых проявляются все эффекты, описанные в данном обзоре.

Ключевые слова: кроссовер БКШ – БЭК, гидродинамика сверхтекучих квантовых жидкостей и газов, резонанс Фешбаха, составные фермионы и бозоны, вращающиеся бозе-конденсаты, киральная аномалия, фермионная голдстоуновская мода, спектр коллективных возбуждений, разбалансированный ферми-газ, аномальное спаривание, механизм Кона – Латтинжера, переход Березинского – Костерлица – Таулеса, бислойный графен

PACS numbers: 03.75.Hh, 67.10. – j, 74.20. – z, 74.25.Uv

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2018.10.038471>

Содержание

1. Введение (225).
2. Резонанс Фешбаха (226).
3. Кроссовер БКШ – БЭК в трёхмерных системах (227).
4. Кроссовер БКШ – БЭК в квазидвумерных системах (228).
5. Флуктуационные поправки и переход Березинского – Костерлица – Таулеса (231).
6. Сильновзаимодействующая смесь спинов и холонов в высокотемпературных сверхпроводниках (232).
7. Составные фермионы и бозоны, тройки и четвёрки в резонансных газах и смесях (233).

8. s- и p-спаривание в растворах He-3 в He-4. Механизм Кона – Латтинжера (234).
 9. Разбалансированный ферми-газ. Расслоение на фазы (237).
 10. Кроссовер БКШ – БЭК в 100%-поляризованной сверхтекучей A1-фазе (239).
 11. Критические скорости и спектр коллективных возбуждений в кроссовере БКШ – БЭК для s- и p-спаривания (242).
 12. Спектр орбитальных волн и парадокс орбитального момента в гидродинамике сверхтекучей A-фазы (246).
 13. Два подхода к сложной проблеме киральной аномалии в A-фазе сверхтекучего He-3 (249).
 14. Гидродинамика сверхтекучих квантовых жидкостей и газов. Коллективные моды во вращающемся He и бозе-эйнштейновских конденсатах квантовых газов (251).
 15. Заключение (255).
- Список литературы (257).

М.Ю. Каган. Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН, ул. Косыгина 2, 119334 Москва, Российская Федерация; Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", ул. Мясницкая 20, 101000 Москва, Российская Федерация
E-mail: kagan@kapitza.ras.ru

А.В. Турлапов. Институт прикладной физики РАН, ул. Ульянова 46, 603000 Нижний Новгород, Российская Федерация
E-mail: turlapov@appl.sci-nnov.ru

Статья поступила 18 января 2018 г.,
после доработки 3 октября 2018 г.

1. Введение

Физика бозе-конденсации в ультрахолодных квантовых газах бурно развивается в последние десятилетия как экспериментально [1], так и теоретически [2, 3], привлекающая повышенное внимание научного сообщества и в России, и за рубежом. В данном обзоре мы ставим

задачу познакомить наших читателей с некоторыми интересными явлениями в данной области, концентрируясь в первую очередь на проблеме кроссовера БКШ–БЭК между протяжёнными и локальными парами [4–12], а также на нетривиальных гидродинамических явлениях в сверхтекучих ферми–бозе-газах и смесях [13–18] (БКШ — Бардина–Купера–Шриффера, BCS; БЭК — бозе-эйнштейновский конденсат, BEC). Нами будут построены глобальные фазовые диаграммы трёхмерных и квазидвумерных ферми-газов [19–22] в режиме резонанса Фешбаха [23] и проанализирован спектр коллективных возбуждений [24–27] (звуковых и орбитальных волн, дыхательных мод в ловушках) и их вклад в термодинамику (в частности, в теплоёмкость и нормальную плотность) в фермионных и бозонных областях фазовой диаграммы для сверхтекучего *s*- и *p*-спаривания [18]. Мы также определим критические скорости разрушения сверхтекучести согласно критерию Ландау [28] для протяжённых (куперовских) и локальных пар. Перебрасывая мостик между проблемами высокотемпературной сверхпроводимости и сверхтекучести, мы решим задачу о составных фермионах и бозонах в резонансных квантовых газах и смесях и построим соответствующие фазовые диаграммы [29–32].

Мы рассмотрим также сценарий кроссовера БКШ–БЭК для спаривания двух композитных дырок (двух спиновых поляронов или двух струн) в *d*-канале для слабодопированных купратов [33]. Ещё одним мостиком между физикой ультрахолодных газов и физикой электронов в металлах может служить идея о пространственно разделённой ферми–бозе-смеси, предложенная одним из авторов обзора с соавторами для описания сверхпроводящих оксидов висмута в работах [34, 35]. Переходя от термодинамического описания к гидродинамическому, кратко напомним суть классического подхода Ландау к выводу уравнений гидродинамики, основанному на законах сохранения в дифференциальной форме. Развивая данный подход, мы построим квантовую гидродинамику быстровращающихся сверхтекучих конденсатов [36] с большим количеством квантовых вихрей [37–43] и проанализируем интересные явления (в частности, спектр второго звука [16, 44] и силу трения нормальных возбуждений о вихри [40, 42, 43]), возникающие в этой гидродинамической системе.

Мы кратко опишем и другие подходы к построению сложных гидродинамических систем, основанных, в частности, на применении обобщённых скобок Пуассона [45, 46]. Рассмотрим также спектр волн Ткаченко [47, 48] и изгибных колебаний лорда Кельвина [49], характерных для вихревых решёток во вращающемся сверхтекучем гелии, и проанализируем поведение коррелятора вихревых смещений и переход вихревая жидкость–вихревой кристалл во вращающихся бозе-конденсатах различных плотности и размерности [18]. В применении к анизотропному *p*-спариванию в *A*-фазе сверхтекучего He-3 [50, 51] и в 100%-поляризованных триплетных ферми-газах мы подробно обсудим трудную нерешённую проблему киральной аномалии [52–56] и невыполнения закона сохранения импульса для сверхтекучей компоненты в фермионных системах с нетривиальной симметрией и нулями сверхтекучей щели [52, 53] (см. также более поздние работы и монографии [18, 25, 50, 57–59]). В этом аспекте мы изложим два существующих подхода к решению задачи. Один из них основан на включении фермионной

голдстоуновской моды в схему уравнений квантовой гидродинамики, другой — на формальной аналогии между уравнениями Боголюбова–Де Жена [60, 61] для фермиевских квазичастиц в текстуре неоднородных распределений (жидкокристаллического типа [62]) вектора орбитального момента куперовской пары **I** и уравнением Дирака [63] в магнитном поле $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{I}$ для безмассовых частиц.

С экспериментальной точки зрения мы подробно остановимся на существенном прогрессе в конструировании ловушек для двумерных ферми-газов [21, 22], достигнутом в последние годы, дополнительных возможностях, которые представляет их создание, и обсудим класс экспериментально не решённых задач, которые планируется решить в будущем. В частности, мы рассчитываем получить экспериментальное подтверждение реализации аномальной сверхпроводимости Кона–Латтинжера [64] для триплетного *p*-спаривания [65, 66] в квазидвумерном ферми-газе с сильным разбалансом спинов "вверх" и "вниз" [67–69]. Мы также планируем экспериментально определить области реализации неоднородных сверхпроводящих состояний типа Ларкина–Овчинникова–Фулде–Феррелла [70, 71] и области кластеризации и расслоения на фазы [72, 73] в разбалансированных квазидвумерных ферми-газах [74, 75].

Наконец, нас будут интересовать те области фазовой диаграммы квазидвумерных резонансных газов, в которых наиболее сильно проявляются флуктуационные поправки Березинского–Костерлица–Таулеса [76–82] к среднеполювым результатам [79, 83–85] по кроссоверу БКШ–БЭК. Откликаясь на популярную в настоящее время проблему топологических изоляторов и дираковских полуметаллов (в частности графена), кратко обсудим проблему возникновения и исчезновения дираковских точек заданного положения для квазидвумерных гексагональных оптических решёток [86] и реализацию сверхпроводящего *p*-спаривания [87, 88], наведённого эффектом близости [89] в монослое графена в контакте с массивным сверхпроводником. В заключение данного обзора мы также кратко обсудим недавно экспериментально обнаруженную аномальную сверхпроводимость и кроссовер БКШ–БЭК в подкрученном бислое графена [90].

2. Резонанс Фешбаха

Одним из наиболее значительных событий в физике конденсированного состояния стало открытие в 1990-е годы явления бозе-эйнштейновской конденсации [7] в бозонных изотопах ^{87}Rb , ^{23}Na , ^7Li [1, 91, 92] в ограниченной геометрии магнитных ловушек [93]. В начале нашего столетия в режиме резонанса Фешбаха [23] в дипольных оптических ловушках в группах Джина (Jin) [94], Гримма (Grimm) [95], Кеттерле (Ketterle) [96], Саломона (Salomon) [97] была также экспериментально детектирована бозе-конденсация молекул (составных бозонов) $^{40}\text{K}_2$, $^6\text{Li}_2$, состоящих из двух фермиевских атомов (f_1f_1) со спинами, направленными "вверх" и "вниз". Кроме того, экспериментально получены составные фермионы-молекулы (fb), состоящие из атомов фермионного изотопа ^{40}K и бозонного изотопа ^{87}Rb [98].

Напомним, что в резонансе Фешбаха возникает резкое изменение величины и знака квантово-механической длины *s*-рассеяния при приближении внешнего магнит-

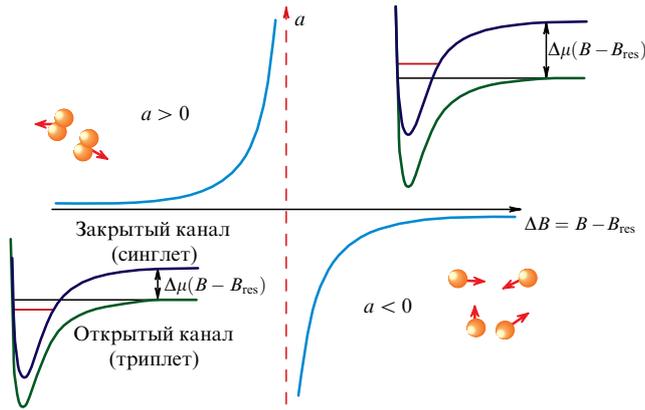


Рис. 1. Резонанс Фешбаха, описывающий зависимость длины s -рассеяния a от изменения магнитного поля $\Delta B = B - B_{\text{res}}$ [19, 21, 22, 33, 100]. При приложении магнитного поля происходит пересечение двух термов в открытом и закрытом каналах. В результате наличие связанного состояния в системе (в закрытом канале) при $a > 0$ сменяется наличием виртуального уровня при $a < 0$. B_{res} — резонансное поле, μ_0 — магнитный момент атома.

ного поля B к резонансному полю B_{res} (см., например, [18, 99, 100]). При этом для эффективной длины рассеяния a можно записать

$$a(B) = a_{\text{bg}} \left(1 + \frac{A_{\text{res}}}{B - B_{\text{res}}} \right), \quad (1)$$

где a_{bg} — затравочная длина рассеяния, A_{res} — эффективная ширина резонанса. Часто уже в отсутствие внешнего магнитного поля затравочная длина рассеяния по абсолютной величине (для квазирезонансных колебательных уровней в потенциале взаимодействия двух атомов) довольно велика и имеет характерные значения $|a_{\text{bg}}| \approx \approx 15 - 20 \text{ \AA}$. В то же время в магнитных полях B , близких к резонансному полю B_{res} , эффективная длина рассеяния может достигать очень больших характерных значений $2000 - 3000 \text{ \AA}$. В очень важном унитарном пределе при $B = B_{\text{res}}$ эффективная длина стремится к бесконечности, и соответственно $1/a \rightarrow 0$ [101]. Подчеркнём также, что для квазирезонансного уровня в отсутствие поля затравочная длина $a_{\text{bg}} < 0$, в то время как эффективная длина $a < 0$ при $\Delta B = B - B_{\text{res}} > 0$ и $a > 0$ при $\Delta B = B - B_{\text{res}} < 0$ (рис. 1).

По аналогии с теорией Гайтлера–Лондона для молекулы водорода [102] (описывающей двухчастичные синглетный и триплетный термы) на рис. 1 изображены закрытый (синглетный) канал (или терм) и открытый (триплетный) канал, причём связанное состояние двух частиц есть только в закрытом, синглетном канале, а в открытом канале его нет. Энергии этих двух термов поразному ведут себя в зависимости от приложенного магнитного поля B . При этом резонанс Фешбаха можно интерпретировать как пересечение синглетного и триплетного термов в резонансном поле B_{res} . Соответственно, если следить только за закрытым каналом, то в полях $B > B_{\text{res}}$ эффективная длина $a < 0$, и в синглетном терме есть только виртуальное связанное состояние. В то же время в полях $B < B_{\text{res}}$ эффективная длина $a > 0$ и в закрытом канале возникает реальное связанное состояние или молекула с энергией связи $|E_b| = \hbar^2/ma^2$ для двух частиц с одинаковой массой. Соответственно в веществе (в трёхмерном ферми-газе) в области $B < B_{\text{res}}$ вначале

при более высоких температурах $T_* \sim |E_b|$ возникают, а затем при более низких температурах T_c^{BEC} — бозе-конденсируются локальные пары или молекулы из двух элементарных фермионов с противоположными проекциями спина, в то время как в области $B > B_{\text{res}}$ при одной и той же температуре T_c^{BCS} возникают и бозе-конденсируются протяжённые куперовские пары.

При адиабатически медленном изменении магнитного поля мы имеем дело с плавным переходом, или кроссовером, между локальными парами (молекулами) и протяжёнными (куперовскими) парами. Это и есть сущность феномена кроссовера БКШ–БЭК в резонансном ферми-газе. Отметим, что такое упрощённое одноканальное рассмотрение применимо, если мы не подходим слишком близко к унитарному пределу, где важна двухканальность (связанная с распадами в открытом канале двухчастичных бозонных состояний на два одночастичных фермионных состояния и обратные процессы конверсии двух фермиевских частиц в составные бозоны или молекулы). При более детальном двухканальном описании резонанса Фешбаха [103] фактически возникает ситуация, описываемая теорией ферми–бозе-смеси Александра–Ранингера [104, 105]. В дальнейшем в настоящем обзоре ограничимся одноканальным рассмотрением, сближающим физику резонансных квантовых газов с физикой высокотемпературной сверхпроводимости (при описании в рамках моделей типа модели Хаббарда [106]). Подчеркнём также, что резонанс Фешбаха [99, 103, 107] (или, более точно, Фано–Фешбаха [108, 109]) очень активно исследуется в настоящее время в разных областях физики твёрдого тела и физики плазмы, включая физику электронных корреляций в туннельной плотности состояний в микроконтакте [110].

3. Кроссовер БКШ–БЭК в трёхмерных системах

Теория кроссовера БКШ–БЭК и экспериментальные результаты для трёхмерных и квазидвумерных резонансных ферми-систем подробно изложены в многочисленных публикациях, среди которых классические [8–11] и более поздние [78, 79, 83–85, 101, 103–105, 111–124] работы, в том числе наши статьи [19, 20], обзоры [21, 22, 31–33, 88] и монографии [18, 100]. В данном обзоре, чтобы избежать повторов, мы кратко остановимся лишь на наиболее существенных обстоятельствах.

Глобальная фазовая диаграмма кроссовера БКШ–БЭК для трёхмерного резонансного ферми-газа приведена на рис. 2. По вертикальной оси отложена безраз-

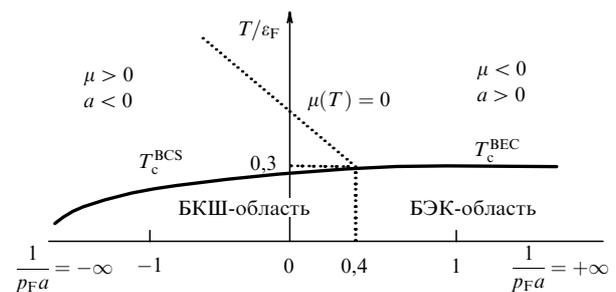


Рис. 2. Глобальная фазовая диаграмма резонансного трёхмерного ферми-газа. БКШ-область отвечает куперовскому спариванию, БЭК-область — бозе-конденсации локальных пар [19, 21, 88, 100].

мерная температура T/ε_F , а по горизонтальной оси — обратный газовый параметр $1/ap_F$. БКШ-область протяжённых куперовских пар отвечает отрицательным значениям длины рассеяния, $a < 0$, и положительному значению химического потенциала, $\mu > 0$. В то же время в БЭК-области (для локальных пар) длина рассеяния $a > 0$ и химический потенциал $\mu < 0$.

Куперовское спаривание в области слабых корреляций (в разреженном БКШ-пределе при $1/ap_F \rightarrow -\infty$) происходит вблизи поверхности Ферми, так что в этом случае $\mu \approx \varepsilon_F = p_F^2/2m$. Критическая температура в БКШ-области определяется по известной формуле Горькова–Мелик-Бархударова [12]:

$$T_c^{\text{BCS}} \approx 0,28\varepsilon_F \exp\left(-\frac{\pi}{2|a|p_F}\right). \quad (2)$$

При приближении к точке $1/ap_F \rightarrow 0$ подходим к так называемому унитарному пределу [101]. В этом пределе в системе нет малого параметра, и все величины, включая полную энергию системы, химический потенциал и критическую температуру, выражаются только через энергию Ферми [125]. Вычисления квантовым методом Монте-Карло дают для химического потенциала и критической температуры значения $\mu = 0,44\varepsilon_F > 0$, $T_c^{\text{BCS}} = 0,15\varepsilon_F$ [126–128], т.е. мы всё ещё находимся в области положительных значений μ , характерных для протяжённых куперовских пар. Химический потенциал μ при критической температуре T_c обращается в нуль (а затем меняет знак) только при значении газового параметра $ap_F \approx 2,5$ ($1/ap_F \approx 0,4$) [19], т.е. в области положительных длин рассеяния, $a > 0$. Интересно отметить, что при промежуточных значениях газового параметра $1 \leq ap_F \leq 3$ ($1/3 \leq 1/ap_F \leq 1$) для безразмерной фермионной плотности имеем $na^3 = p_F^3 a^3 / 3\pi^2 \leq 1$, т.е. в этой промежуточной области квазилокальные пары всё ещё не сильно перекрываются (в отличие от разреженного БКШ-предела), а лишь касаются друг друга. В некотором смысле можно сказать, что здесь мы имеем дело с ферми–бозе-смесью квазилокальных пар и неспаренных фермионов [18, 104, 105]. При $1/ap_F > 0,4$ мы переходим в БЭК-область. В этой области в пределе слабых корреляций (в разреженном БЭК-пределе при $1/ap_F \gg 1$) критическая температура бозе-эйнштейновской конденсации определяется по формуле Эйнштейна [7] с нетривиальными поправками, вычисленными Кашурниковым, Прокофьевым и Свистуновым [116]:

$$T_c^{\text{BEC}} = 0,2\varepsilon_F [1 + 1,3a_{2-2}n^{1/3}]. \quad (3)$$

Отметим, что в формулу (3) входит важная величина, а именно длина рассеяния локальной пары (молекулы или составного бозона) на молекуле (другом составном бозоне) a_{2-2} . В разделе 4 мы покажем, что $a_{2-2} = 0,6|a| > 0$, где a — длина рассеяния элементарного фермиона на фермионе [31, 32, 114]. Заметим также, что $0,2\varepsilon_F = 3,31(n/2)^{2/3}/2m$ в соответствии со стандартным выражением для температуры бозе-эйнштейновской конденсации в газе составных бозонов с плотностью $n/2 = p_F^3/6\pi^2$ и массой $2m$. Необходимо отметить, что для разреженной БЭК-области характерна ещё одна температура, определяемая по формуле Саха [129] и описывающая плавный кроссовер между локальными

парами и неспаренными фермионами:

$$T_* = \frac{|E_b|}{(3/2) \ln(|E_b|/2\varepsilon_F)} \gg T_c^{\text{BEC}}, \quad (4)$$

где $|E_b|$ — абсолютное значение энергии связи составного бозона (или молекулы). Эта температура определяется из условия термодинамического равновесия между неспаренными фермионами n_F и молекулами (составными бозонами) n_B :

$$n_F(T_*) = 2n_B(T_*). \quad (5)$$

В промежуточной области температур $T_c^{\text{BEC}} < T < T_*$ мы имеем дело с новым интересным состоянием вещества, а именно с нормальным (не сверхтекучим) бозе-газом из составных бозонов (молекул) с массой $2m$ и плотностью $n/2$ [18–20]. Для бозе-газа заряженных частиц (локальных электронных пар или биполяронов с зарядом $2e$ в нормальном, несверхпроводящем, состоянии) имеют место очень нетривиальные зависимости теплоёмкости и сопротивления от температуры, а также весьма нетривиальный по своим свойствам (в частности, по своей прозрачности) туннельный контакт между нормальным (несверхпроводящим) газом локальных электронных пар и обычным БКШ-сверхпроводником с протяжёнными куперовскими парами.

4. Кроссовер БКШ–БЭК в квазидвумерных системах

В экспериментах с ультрахолодными газами [130, 131] доступная кинематическая размерность для наблюдения кроссовера БКШ–БЭК, изучения спектра коллективных мод и других подобных явлений хронологически изменялась следующим образом: сначала появились газы с размерностью $D = 3$ в веретенообразных ловушках с гармоническим потенциалом вблизи дна, с частотами $\omega_x, \omega_y \gg \omega_z$; затем — с размерностью $D = 1$ в аналогичных ловушках при условии заселённости лишь нижнего уровня движения вдоль x и y ; и лишь в последние годы произошёл переход к размерности $D = 2$ (ловушки в форме дисков с частотами $\omega_x, \omega_y \ll \omega_z$) [22, 132–134]. В физике высокотемпературной сверхпроводимости и сильнокоррелированных ферми-систем экспериментальная реализация и подробное изучение термодинамических и транспортных свойств в квазидвумерных слоистых системах, тонких плёнках и чисто двумерных электронных монослоях доступна вот уже многие годы, по крайней мере, начиная со времён открытия квантового эффекта Холла в начале 1980-х годов [135, 136], а зачастую и существенно раньше при создании полупроводниковой индустрии для микроэлектроники и подробного изучения сверхрешёток, инверсных слоёв в гетероструктурах, интерфейсов, плоскостей двойникования и т.д.

В физике квантовых жидкостей и кристаллов также с начала 1990-х годов были экспериментально реализованы и подробно изучены (с точки зрения термодинамических свойств) как экспериментально, так и теоретически субмонослои He-3 на андреевских уровнях на свободной поверхности тонких плёнок сверхтекучего He-4 или на свободной поверхности графойла (отслаивающегося графита [18, 68, 137–143]). В последние годы

интерес к двумерным системам в физике твёрдого тела был в первую очередь связан с исследованием транспортных, упругих и термодинамических свойств и возможной аномальной сверхпроводимости монослоёв и бислоёв графена, а также графеновых (и родственных им) гетероструктур, таких как h-BN (нитрид бора, или "белый графит"), и интерфейсов, таких как, например, граница раздела гетероструктур SrTiO₃/LaAlO₃ [87–89, 144–149].

Возвращаясь к физике ультрахолодных газов с двумерной кинематикой, отметим, что для их получения и наблюдения пришлось решить ряд экспериментальных вопросов. Основным является вопрос об исключении движения вдоль направления z . Этого можно достичь, поместив газ в сильно анизотропный потенциал

$$V(\mathbf{x}) = \frac{m\omega_z^2 z^2}{2} + \frac{m\omega_\perp^2 (x^2 + y^2)}{2}, \quad \omega_z \gg \omega_\perp, \quad (6)$$

где m — масса атома-фермиона. Последовательность потенциалов вида (6) может быть получена при помощи стоячей электромагнитной волны, образованной двумя встречными лазерными лучами, которые отстроены по частоте далеко вниз от электродипольных переходов в атоме. В случае лучей с гауссовой модой стоячая волна создаёт потенциал

$$V(\mathbf{x}) = sE_{\text{rec}} \left[1 - \exp\left(-\frac{m\omega_\perp^2 (x^2 + y^2)}{2sE_{\text{rec}}}\right) \cos^2(kz) \right], \quad (7)$$

где k — волновой вектор электромагнитной волны, $E_{\text{rec}} = \hbar^2 k^2 / 2m$ — энергия фотонной отдачи, s — безразмерная глубина. Вблизи пучностей потенциал по виду близок к (6) с частотой вдоль направления плотного удержания $\omega_z = 2\sqrt{s}E_{\text{rec}}/\hbar$. Пленение газа атомов в узлах схематично показано на рис. 3а. В работах [132, 133] такие потенциалы созданы при помощи лазеров с длиной волны 10,6 мкм и 1,064 мкм соответственно. Облако газа в каждой из пучностей представляет собой изолированную двумерную систему.

Для ферми-газа N_1 не взаимодействующих одинаковых фермионов при $T = 0$ условие кинематической двумерности равносильно требованию для энергии Ферми $\varepsilon_F < \hbar\omega_z$ (рис. 3б). Поскольку $\varepsilon_F = \hbar\omega_\perp \sqrt{2N_1}$, макси-

мальное количество атомов, которое помещается в ловушку без нарушения двумерности, составляет $N_{1\text{max}} = \omega_z^2 / (2\omega_\perp^2)$. Таким образом, выгодно увеличивать отношение частот ω_z / ω_\perp . Если в работе [132] $\omega_z / \omega_\perp = 54,6$, что допускает $N_{1\text{max}} = 1490$, то в последующих работах [133, 151] достигнуто соотношение $\omega_z / \omega_\perp = 640$, позволяющее увеличить число частиц до $N_{1\text{max}} = 2 \times 10^5$.

Требование максимально большого отношения ω_z / ω_\perp может быть выполнено путём увеличения ω_z , что, однако, усиливает требование стабильности пленяющего излучения по интенсивности. Известно, что флуктуации интенсивности ведут к нагреву газа со скоростью $\sim \omega_z^2$ [152, 153]. Стоит отметить, что в упомянутом эксперименте [132] при относительно небольшой величине $\omega_z / (2\pi) = 5,57$ кГц достигнуто достаточно глубокое вырождение, газ охлаждён до температуры $T = 0,1\varepsilon_F$. В то же время при более высокой частоте $\omega_z / (2\pi) = 78,5$ кГц столь глубокого вырождения не зафиксировано, температура составила $T = 0,27\varepsilon_F$ [151]. Стабильность по направлению для лучей, создающих стоячую волну, также важна, поскольку угловая нестабильность легко приводит к раскачиванию колебаний центров масс облаков в плоскости xy .

Причиной нарушения двумерности кроме химического потенциала, превышающего $\hbar\omega_z$, также могут быть тепловые возбуждения, взаимодействия или неравновесное заполнение энергетических уровней в ходе приготовления. Так, например, в газе с малым числом столкновений при включении стоячей волны возникает заполнение возбуждённой зоны Блоха, если до включения химический потенциал превышает энергию отдачи E_{rec} .

Нарушение двумерности межчастичными взаимодействиями остаётся нетривиальным вопросом [21, 154–156]. Даже небольшое взаимодействие между двумя атомами перемешивает состояния движения атома вдоль z . В то же время движение пары атомов остаётся строго двумерным, поскольку в гармоническом потенциале задачи о движении центра масс и о парном взаимодействии разделены. Вклад трёх-, четырёх- и многочастичного взаимодействия в кинематическую размерность требует прояснения. Такие взаимодействия, безусловно, присутствуют в режиме сильного взаимодействия, т.е. при энергии межчастичного взаимодействия порядка кинетиче-

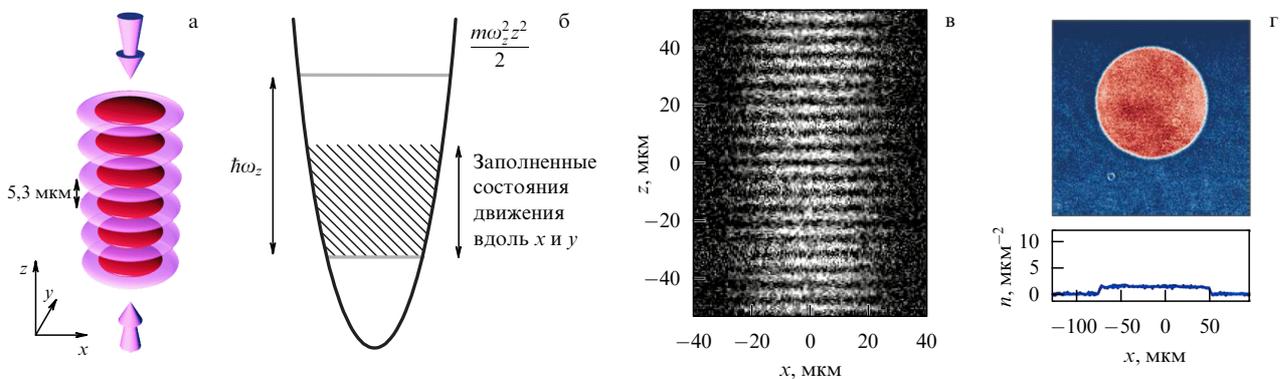


Рис. 3. (В цвете онлайн.) (а) Пленение облаков двумерного газа в пучностях стоячей электромагнитной волны. Газ показан тёмно-красным, а распределение интенсивности излучения с длиной волны 10,6 мкм, создающего решётку, — светло-сиреневым. (б) Двумерный идеальный ферми-газ при $T = 0$, движение которого вдоль z ограничено одним состоянием, а вдоль x и y — почти свободное. (в) Снимок облаков газа вдоль направления y . (Из работы [132].) (г) Однородный ферми-газ. Усреднённое по нескольким десяткам повторений эксперимента распределение концентрации газа в плоскости (сверху) и значения концентрации вдоль сечения по диаметру (снизу). (Из работы [150].)

ской. В работе [155] приводятся экспериментальные данные в пользу нарушения кинематической двумерности при сильном межатомном притяжении. В то же время эти данные можно объяснить и без нарушения кинематической двумерности [21]. Влияние кинематической размерности и взаимодействий на переворот спина атома в высокочастотном магнитном поле исследовалось в работе [157].

Другим важным вопросом постановки эксперимента стала съёмка газа непосредственно в ловушках, без отключения удерживающего потенциала и последующего разлёта. При продолжительном разлёте частицы из облаков с разной населённостью и в результате, возможно, в разных коллективных состояниях перемешиваются, что затрудняет интерпретацию данных. На рисунке 3в приведены результаты съёмки газа в серии ловушек [132] без отключения удерживающего потенциала. Съёмка выполнена вдоль плоскости двумерных систем.

Съёмка в направлении z даёт более полный доступ к свойствам системы, в частности к измерению корреляционных свойств и поиску вихрей, появление которых, например, должно происходить при разрушении сверхтекучести по механизму Березинского–Костерлица–Таулеса [76, 77]. Для такой съёмки необходимо создание одиночной системы. Одиночная ловушка, близкая к потенциалу (6), получена в сплюснутом фокусе лазерного луча с коротким рэлеевским расстоянием [134]. Другой способ получения одиночной системы — заполнение лишь одного минимума в стоячей волне [155, 158]. В работах [155, 158] съёмка выполнена вдоль направления z . Важно отметить, что в этих работах существенно увеличено число атомов в двумерном газе, что делает систему более макроскопической. Сообщается о приготовлении $N \sim 10^5$ атомов, в отличие от $N \sim 1000$ в более ранних экспериментах [122, 132–134, 151, 154, 159].

Недавним важным шагом стало приготовление одномерного двумерного ферми-газа [150], в котором слабое параболическое удержание в плоскости x заменено потенциалом прямоугольной формы. Снимок однородного ферми-газа приведён на рис. 3г. Избавление от неоднородного удержания интересно по нескольким причинам. Во-первых, неоднородность ограничивает корреляционные радиусы вблизи фазовых переходов. Во-вторых, для ферми-газов, которые частично поляризованы по спину, такая ловушка открывает возможность наблюдения сверхтекучести Фульде–Феррелла–Ларкина–Овчинникова [70, 71] и спаривания в p -канале по механизму Кона–Латтинжера [64–66], что обсуждается в разделе 9.

В теоретическом плане квазидвумерные ловушки интересны также проявлением флуктуационных поправок [18, 21, 78, 79, 88], связанных в первую очередь с природой фазового перехода Березинского–Костерлица–Таулеса в 2D-системах [76–82, 160–163] и нетривиальным степенным уменьшением коррелятора фаз в них [164–169]. Кратко резюмируем вначале основные результаты теории среднего поля для кроссовера БКШ–БЭК в двумерных системах, полученные в работах [83–85] в рамках самосогласованной теории Леггетта [9] и в работе [78] с использованием специального анзаца хартри-фоковского типа для химического потенциала слабонеидеального 2D-бозе-газа с отталкиванием. Здесь необходимо отметить, что для симметричных притягательных потенциалов в двумерных ферми-систе-

мах вне зависимости от силы потенциала $|U|$ (беспороговым образом) одновременно сосуществуют два явления — спаривание двух частиц в вакууме (в реальном пространстве) и куперовское спаривание двух частиц на фоне заполненной ферми-сферы в импульсном пространстве. В этом проявляется сильное различие между двумерным и трёхмерным миром (где связанное состояние двух частиц в вакууме возникает только для достаточно сильных потенциалов с амплитудой $|U| \geq W$, $W \sim \hbar^2/mr_0^2$ — характерная энергия нулевых колебаний, r_0 — радиус действия потенциала). В соответствии с результатами Мияке (Miyake) [83], среднеполевая критическая температура в БКШ-области (при $|E_b| \leq 2\varepsilon_F$) определяется формулой

$$T_c^{\text{BCS}} = \sqrt{2\varepsilon_F |E_b|}. \quad (8)$$

Соответственно, при низких температурах $T \ll |E_b| \leq 2\varepsilon_F$ химический потенциал приобретает вид

$$\mu \simeq \varepsilon_F - \frac{|E_b|}{2} \geq 0. \quad (9)$$

Среднеполевая температура в БЭК-области (при $|E_b| > 2\varepsilon_F$) в соответствии с результатами [78] имеет вид

$$T_c^{\text{BEC}} = \frac{\varepsilon_F}{4 \ln(1/f_{2-2})}, \quad (10)$$

где f_{2-2} вновь (как и для поправки к формуле Эйнштейна (3) в трёхмерной системе) отвечает амплитуде рассеяния димера (составного бозона или молекулы) на молекуле. В разделе 5 мы покажем, что согласно [113]

$$f_{2-2} \approx \frac{1}{\ln(1,6|E_b|/2\varepsilon_F)}. \quad (11)$$

Отметим, что в 2D-системах стандартный безразмерный газовый параметр Галицкого–Блюма [170, 171], связанный с амплитудой рассеяния элементарного фермиона на фермионе, имеет вид

$$f_0(p_F a_{2D}) = -\frac{1}{2 \ln(p_F a_{2D})} = \frac{1}{\ln(|E_b|/2\varepsilon_F)}, \quad (12)$$

где a_{2D} — двумерная длина рассеяния. Формула (12) правильно описывает как БЭК-область с сильным притяжением, когда $|E_b| > 2\varepsilon_F$, так и БКШ-область со слабым притяжением, когда $|E_b| \leq 2\varepsilon_F$. В результате для построения фазовой диаграммы кроссовера БКШ–БЭК в 2D-системах (по аналогии с обратным газовым параметром $1/(ap_F)$ в 3D-случае) оказывается удобным ввести ещё один безразмерный параметр согласно формуле

$$g = \frac{1}{2f_0(p_F a_{2D})} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|E_b|}{2\varepsilon_F} \right). \quad (13)$$

Тогда формулы (8) и (10) для критической температуры в БКШ- и БЭК-областях могут быть переписаны в виде $T_c^{\text{BCS}}/\varepsilon_F \sim 2 \exp g$, $T_c^{\text{BEC}}/\varepsilon_F \sim 1/[4 \ln(6,4g)]$ и мы можем качественно построить среднеполевую фазовую диаграмму кроссовера БКШ–БЭК в двумерных системах в удобных осях T/ε_F и g [21]. Глобальная фазовая диаграмма кроссовера БКШ–БЭК в 2D-системах приведена на рис. 4. Отметим, что в БЭК-области при низких температурах и для промежуточной ситуации $|E_b| \geq 2\varepsilon_F$

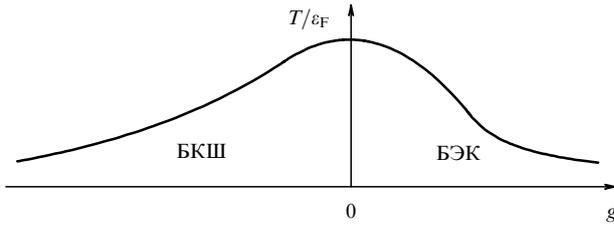


Рис. 4. Глобальная фазовая диаграмма кроссовера БКШ–БЭК для 2D-систем, построенная в рамках приближения среднего поля [21]. По вертикальной оси отложена безразмерная температура T/ε_F , по горизонтальной оси — удобный для описания двумерной ситуации безразмерный параметр $g = (1/2) \ln(|E_b|/2\varepsilon_F)$. В левой части фазовой диаграммы при $g < 0$ (и, соответственно, при $|E_b| < 2\varepsilon_F$) изображена БКШ-область протяжённых куперовских пар, в правой части фазовой диаграммы при $g > 0$ и $|E_b| > 2\varepsilon_F$ находится БЭК-область локальных пар. Промежуточная область сильных флуктуаций соответствует абсолютным значениям энергии связи $|E_b| \sim 2\varepsilon_F$.

химический потенциал с точностью до малых поправок по-прежнему определяется формулой (9). В этой области в полной аналогии с ситуацией в слабодопированных сверхпроводящих купратах при более высоких температурах $T \geq T_c$ реализуется очень необычная псевдощелевая фаза нормального (не сверхтекучего) газа составных бозонов [112]. Затем, однако, в разреженной БЭК-области при $|E_b| \gg \varepsilon_F$ химический потенциал принимает значение $\mu \approx -|E_b|/2$, или более точно при учёте рассеяния димера на димере в 2D-случае мы можем написать

$$\mu \approx -\frac{|E_b|}{2} + \frac{\pi n_{2D}}{2m} f_{2-2}, \quad (14)$$

где n_{2D} — двумерная концентрация. Соответственно, для бозонного химического потенциала имеем

$$\mu_{\text{Bose}} \approx 2\mu + |E_b| \approx \frac{\pi n_{2D}}{m} f_{2-2} > 0, \quad (15)$$

как и должно быть в слабонеидеальном газе составных бозонов с отталкиванием между ними. Отметим также, что в разреженной БЭК-области в полной аналогии с 3D-случаем также существует ещё одна характерная температура плавного кроссовера между спаренными и распаренными фермионами, определяемая формулой Саха. В 2D-системах эта температура имеет вид

$$T_* = \frac{|E_b|}{\ln(|E_b|/2\varepsilon_F)}. \quad (16)$$

При $T_c^{\text{BEC}} < T < T_*$ в 2D-системах вновь реализуется фаза нормального бозе-газа с необычным поведением теплоёмкости и других термодинамических и транспортных характеристик.

5. Флуктуационные поправки и переход Березинского – Костерлица – Таулеса

В работах [78, 79] были сделаны важные оценки для разности между точными критическими температурами T_c^{BKT} Березинского – Костерлица – Таулеса и среднеполевыми температурами в БКШ- и БЭК-областях для двумерного ферми-газа. В разреженной БЭК-области локальных пар (при $|E_b| \gg \varepsilon_F$) согласно результатам [78] разность между точной и среднеполевой критическими температурами в 2D-случае мала и определяется по

формуле

$$\frac{|T_c^{\text{BEC}} - T_c^{\text{BKT}}|}{T_c^{\text{BEC}}} \sim f_{2-2} \ll 1. \quad (17)$$

В разреженной БКШ-области протяжённых куперовских пар при $|E_b| \ll \varepsilon_F$ разность между точной и среднеполевой температурами вновь мала и согласно [79] равна

$$\frac{|T_c^{\text{BKT}} - T_c^{\text{BCS}}|}{T_c^{\text{BCS}}} \sim \frac{T_c^{\text{BCS}}}{\varepsilon_F} \sim \sqrt{\frac{|E_b|}{\varepsilon_F}} \ll 1. \quad (18)$$

В промежуточной области при $|E_b| \sim 2\varepsilon_F$ разность между точной и среднеполевой температурами (и тем самым эффективная ширина флуктуационной области) становится существенной [21]. Обратим внимание, что область сильных флуктуаций как раз совпадает с областью псевдощелевой фазы на глобальной фазовой диаграмме БКШ – БЭК $T \geq T_c$. Отметим, что в квазидвумерной ситуации, когда ловушка эффективно содержит два или более двумерных слоёв, дополнительное подавление флуктуаций может быть связано с джозефсоновским туннелированием между слоями [172, 173], которое может привести к модификации одночастичного спектра от прививочной 2D-квадратичной формы $\varepsilon(p_{\parallel}) = p_{\parallel}^2/2m$ до $\varepsilon(p_{\parallel}, p_z) = p_{\parallel}^2/2m + J[1 - \cos(p_z d)]$, где d — расстояние между слоями и J — амплитуда туннелирования между слоями. Появление дополнительного члена в спектре фермионов, пропорционального J , достаточно быстро делает спектр квазитрёхмерным и тем самым подавляет флуктуации [174]. Отметим также, что характерное для перехода Березинского – Костерлица – Таулеса возникновение и диссоциация пар вихрь – антивихрь, а также специфическое степенное убывание коррелятора фаз проявляется в основном вблизи точной критической температуры, в то время как при низких температурах эти черты выражены гораздо слабее, и в результате среднеполевое приближение работает гораздо лучше [18, 21, 88]. В этом контексте следует отметить интересную экспериментальную работу [148] по слоистой (бислоистой) системе $\text{LaAlO}_3 - \text{SrTiO}_3$.

Для слабонеидеальных бозе-газов атомов в эксперименте наблюдалось появление [165] и спаривание [167] вихрей. В то же время ни для ферми-атомов, ни даже для двухатомных молекул на бозонной асимптоте кроссовера БКШ – БЭК эти эффекты пока не обнаружены. Найден, однако, другой характерный признак перехода Березинского – Костерлица – Таулеса — смена закона убывания корреляций со степенного на экспоненциальный при повышении температуры [164]. В эксперименте [164] изучался газ $N = 10^5$ атомов ${}^6\text{Li}$, равно распределённый по двум спиновым состояниям. Управление s-взаимодействиями обеспечивалось при помощи внешнего магнитного поля, значения которого выбирались в окрестности резонанса Фешбаха при $B_{\text{res}} = 832$ Гс. Двумерная кинематика достигалась удержанием в дископодобной ловушке с отношением частот $\omega_z/\omega_{\perp} \simeq 310$. Корреляционная функция первого порядка $g_1(\mathbf{r})$ получена из измеренного распределения по импульсам $\tilde{n}_{2D}(\mathbf{k})$:

$$g_1(\mathbf{r}) = \int \tilde{n}_{2D}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^2k. \quad (19)$$

Измерение $\tilde{n}_{2D}(\mathbf{k})$ выполнено методом фокусировки, излагаемым далее. После приготовления газа при задан-

ном уровне s-притяжения магнитное поле быстро, за время $\ll 1/\omega_{\perp}$, уменьшается до $B = 692$ Гс, соответствующего бозевской стороне резонанса и $l_z/a = 7,11$, где $l_z = \sqrt{\hbar/(m\omega_z)}$ — характерная толщина двумерной системы. За время переключения поля радиальный размер газа не меняется, а атомы, по крайней мере исходно спаренные, образуют компактные молекулы-димеры. Сразу после перестройки взаимодействия почти мгновенно отключается оптическая ловушка. В результате удержание в продольном направлении исчезает, в радиальном — ослабляется, и облако начинает свободно разлетаться вдоль оси z . В радиальных направлениях частицы движутся в остаточном магнитном потенциале с частотой $\omega_{\text{exp}}/(2\pi) \simeq 10$ Гц. Облако фотографируется спустя четверть периода $\tau/4 \equiv \pi/(2\omega_{\text{exp}})$, благодаря чему метод наблюдения и называют фокусировкой. В случае если взаимодействием частиц можно пренебречь, остаточный потенциал в радиальном направлении играет роль линзы, под действием которой двумерное распределение концентрации после разлёта $n_{2D}(\mathbf{r}, t = \tau/4)$ совпадает с начальным распределением по импульсам $\tilde{n}_{2D}(\mathbf{k}, t = 0)$ с точностью до множителя. В работе [164] предполагается, что сфотографированное распределение плотности по своей форме соответствует распределению по импульсам непосредственно перед выпуском. Интерпретация снимков, таким образом, зависит от предположения о бесстолкновительном движении частиц после отключения оптического потенциала. В пользу этого предположения стоит отметить, что понижение взаимодействия из-за уменьшения B и разлёт вдоль z радикально снижают частоту столкновений.

Результат измерения корреляционной функции $g_1(\mathbf{r})$ [164] показан на рис. 5. Измерения выполнены при одном и том же параметре взаимодействия $\ln(k_F a_{2D}) \simeq -0,5$, соответствующем режиму сильных взаимодействий, и при различных значениях безразмерной температуры $t = T/T_{\text{BEC}}^0$, где $T_{\text{BEC}}^0 = \varepsilon_F \sqrt{3}/\pi$ — температура конденсации идеального бозе-газа. Можно видеть, что при достаточно низких температурах корреляционная функция убывает по закону $g_1(r) \propto r^{-\eta(T)}$ с показателем степени $\eta(T)$, в то время как при более высоких t — по экспоненциальному закону. Переход от экспоненциального убывания к степенному знаменует появление сверхтекучести. Интересно, что измеренные показатели сте-

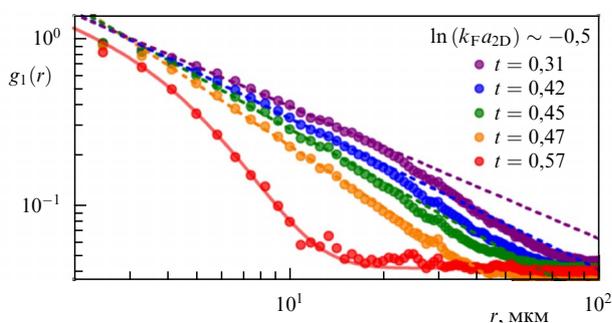


Рис. 5. (В цвете онлайн.) Корреляционная функция первого порядка $g_1(r)$ при различных температурах при $\ln(k_F a_{2D}) = -0,5$. Использована температурная шкала $t = T/T_{\text{BEC}}^0$. При температурах выше некоторой корреляционная функция убывает экспоненциально, как и ожидалось для нормального газа. При меньших температурах наблюдается алгебраическое убывание с показателем степени $\eta(T)$. (Из работы [164].)

пени $\eta = 0,6 - 1,4$ гораздо выше значения $\eta \leq 0,25$, ожидавшегося для однородного газа. Моделирование методом Монте-Карло подтверждает возможность увеличения η из-за неоднородности [164].

Изложенное измерение корреляционной функции $g_1(\mathbf{r})$ [164] исходит из предположения о бесстолкновительном разлёте облака после отключения удержания вдоль z . Для сверхтекучей фазы разлёт может пойти по другому сценарию, следуя уравнениям гидродинамики сверхтекучих газов [21]. Это усложнило бы и соотношение между $n_{2D}(\mathbf{k}, \tau/4)$ и искомым $\tilde{n}_{2D}(\mathbf{k}, 0)$, и расчёт $g_1(\mathbf{r})$ на основе измеренных $n_{2D}(\mathbf{r}, \tau/4)$. В нормальной фазе, однако, разлёт должен быть почти бесстолкновительным из-за малых сечений столкновения. Таким образом, измеренное степенное убывание $g_1(\mathbf{r})$ не может быть получено в нормальном газе и, следовательно, служит доказательством сверхтекучести. Недавно выполненные расчёты показателя η учитывают неоднородность пленённого газа [166, 168] и вклад нормальной компоненты [168]. Результаты расчётов близки к результатам измерений [168], что можно рассматривать как довод против модели гидродинамического разлёта.

6. Сильновзаимодействующая смесь спинов и холонов в высокотемпературных сверхпроводниках

Существует ещё одна красивая аналогия между физикой составных частиц в кроссовере БКШ–БЭК для квантовых газов и физикой композитных дырок (спиновых поляронов или магнитных струн) в купратных высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП) при малой концентрации дырок. Эта аналогия была предложена в обзоре [33] и связана с идеями Лафлина [175, 176] о конфайнменте спина и заряда в сильнокоррелированных 3D- и 2D-системах, а также с классическими результатами Булаевского–Нагаева–Хомского [177] и Бринкмана–Райса [178], предсказавшими по аналогии с физикой кварков образование линейной растущего следа из неправильно расположенных фрустрированных спинов (струнного потенциала конфайнмента) при движении дырки по антиферромагнитному фону. Фактически, следуя идеям Лафлина, мы можем представить себе дырку как композитный объект, напоминающий кварковый мешок и содержащий холон и спинон, соединённые струной или потенциалом конфайнмента. Напомним, что по мысли П.В. Андерсона [179] физическую дырку $h_{i\sigma}$ на узле i со спином σ в так называемом присоединённом представлении можно записать в виде

$$h_{i\sigma} = f_{i\sigma} b_i, \quad (20)$$

где $f_{i\sigma}$ — спиновая часть композитной дырки, или спинон, со спином σ на узле i , b_i — зарядовая часть композитной дырки, или холон. Обычно спинон — это фермиевское возбуждение (фермион) со спином $S = 1/2$ и зарядом $Q = 0$, а холон — это бозон со спином $S = 0$ и зарядом $Q = e$. Решение уравнения Шрёдингера в линейном потенциале конфайнмента позволяет определить энергию связи E_b для основного состояния струнного осциллятора (спиновой поляроны или композитной дырки), а учёт вероятности квантового туннелирования (фактически квантовых флуктуаций в обменном взаимодействии) определяет большую, но всё же конечную

массу $m_{\text{eff}} \sim 1/J$ спинового полярона. В результате спектр композитной дырки на характерной для ВТСП-купратов квадратной 2D-решётке имеет вид [180]

$$E_h = E_b + J(\cos p_x d + \cos p_y d)^2. \quad (21)$$

В то же время куперовская пара при малой плотности дырок представляет собой пару из двух композитных дырок $h_{i\sigma}h_{j-\sigma}$ с противоположными спинами на узлах i, j кристаллической решётки, или четвёрку $f_{i\sigma}b_i, f_{j-\sigma}b_j$, состоящую из двух холонов и двух спинов. Отметим, что возможность образования связанного состояния двух композитных дырок (двух струн) на квадратной 2D-решётке связана с остаточным диполь-дипольным взаимодействием между ними в канале $d_{x^2-y^2}$ [181, 182]. В рамках двумерной t - J -модели это взаимодействие имеет вид

$$V(r) \sim \frac{\lambda_d}{r^2}. \quad (22)$$

При малой концентрации дырок мы можем говорить об образовании локальных пар из композитных дырок при температуре плавного кроссовера $T_* \sim |E_b|$ и их последующей бозе-конденсации при (меньшей) критической температуре $T_c^{\text{BEC}} \sim Jx$, где x — концентрация дырок в 2D-системе [33, 100]. Отметим, что линейная зависимость критической температуры от концентрации дырок находится в согласии с результатами скейлинга Уемуры (Uemura) [183] по бозонному сценарию сверхпроводимости в слабодопированных ВТСП-системах. В то же время при большей плотности дырок (и соответственно, меньшей плотности электронов), как показано в работах [184, 185], в рамках t - J -модели возникает протяжённое куперовское спаривание двух композитных дырок (двух спиновых поляронов). Поэтому с некоторой долей осторожности можно говорить о кроссовере БКШ–БЭК для спаривания двух композитных дырок (двух спиновых поляронов или двух струн) в d -канале для слабодопированных ВТСП-систем. Однако этот кроссовер, по-видимому, негладкий и должен содержать квантовую критическую точку или даже промежуточные фазы на границе БКШ- и БЭК-областей [100, 186, 187].

7. Составные фермионы и бозоны, тройки и четвёрки в резонансных газах и смесях

Фактически можно сказать, что в ВТСП-системах мы имеем дело с сильновзаимодействующей ферми–бозе-смесью спинов и холонов, причём между фермионами и бозонами действует линейно растущий отталкивательный потенциал конфайнмента. Отметим, что в растворах He-3 в He-4 мы обычно имеем дело с короткодействующим отталкивательным (или ван-дер-ваальсовским) потенциалом между фермионными атомами He-3 и бозонными атомами He-4. В то же время в резонансных ферми–бозе-смесях мы можем иметь как короткодействующее отталкивание, так и короткодействующее притяжение между фермионами и бозонами. Рассмотрим более подробно образование связанных комплексов из трёх и четырёх элементарных частиц, а также амплитуды рассеяния димера на элементарной частице и димера на димере в резонансном приближении, когда двухчастичная длина рассеяния много больше радиуса

действия потенциала, $a \gg r_0$. Напомним, что амплитуда рассеяния димера ($f_\sigma f_{-\sigma}$) на димере a_{2-2} определяет нетривиальную поправку к формуле Эйнштейна (3) для критической температуры бозе-конденсации в БЭК-области для 3D-резонансных ферми-газов. Двумерная амплитуда рассеяния димера на димере f_{2-2} определяет среднеполевую критическую температуру (10) в БЭК-области для слабонеидеальных 2D-резонансных ферми-газов. Составные фермионы ($f_\sigma b$) и связанные комплексы из трёх ($f_\sigma b, b$) и четырёх ($f_\sigma b, f_{-\sigma} b; f_\sigma b, bb$) элементарных частиц естественным образом возникают в ферми–бозе-смесях с притяжением между фермионами и бозонами [29, 31–33]. В бозе–бозе-смесях при определённых условиях возможно возникновение и последующая бозе-конденсация двухбозонных состояний ($b_1 b_2$) из бозонов разных сортов, а также трёхчастичные ($b_1, b_1 b_2$), четырёхчастичные ($b_1 b_2, b_1 b_2$) и многочастичные бозонные капли [18, 30–33]. Наконец, длина рассеяния a_{2-1} элементарного фермиона f_σ на димере ($f_\sigma f_{-\sigma}$) играет важную роль для определения времени жизни метастабильных квазирезонансных состояний ферми-газа, пленённого в магнитной ловушке [188]. Здесь необходимо отметить существенное различие трёхмерных и двумерных систем. Для трёхмерных систем важную роль играет так называемый эффект Ефимова [189, 190], согласно которому в 3D-случае при $a \gg r_0$ возникает большое число

$$N \sim \frac{1}{\pi} \ln \frac{a}{r_0} \quad (23)$$

трёхчастичных уровней в интервале энергий

$$\frac{1}{ma^2} < |E_3| < \frac{1}{mr_0^2}. \quad (24)$$

Это явление имеет место в пространствах с размерностью $2,3 < D < 3,8$ и связано с наличием притягательной части

$$V_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{R^2} < 0 \quad (25)$$

в трёхчастичном уравнении Шрёдингера (рис. 6), причём коэффициент α в (25) зависит от размерности пространства D . В результате в 3D-системе из трёх бозонов возникает явление падения на центр, и становится возможным появление сколь угодно сильно связанных трёхчастичных комплексов. В то же время в 2D-системе эффект Ефимова отсутствует [191]. Дело в том, что в трёхчастичном уравнении Шрёдингера в этом случае возникает вместо притягательного отталкивательный член $V_{\text{eff}} \sim \beta/R^2 > 0$. В результате число трёхчастичных уровней с отрицательной энергией $E_3 < 0$ в 2D-случае

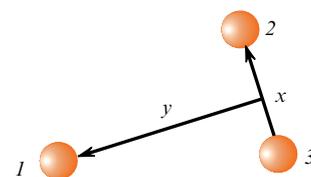


Рис. 6. Координата y (совпадающая с R в формуле (25)) описывает расстояние между элементарным бозоном 1 и центром тяжести молекулы из двух бозонов 2, 3 [33, 100].

становится конечным. При этом в 2D-системе также становится конечным ядро интегрального уравнения Скорнякова–Тер-Мартиросьяна [192] для трёхчастичной Т-матрицы. Точное решение этого уравнения в 2D-случае показывает, что для трёх резонансно-взаимодействующих бозонов имеется всего два уровня с трёхчастичными энергиями связи [193, 194]:

$$E_3^{(1)} = 16,4E_b, \quad E_3^{(2)} = 1,3E_b, \quad (26)$$

где $E_b < 0$ — вновь двухчастичная энергия связи (для двух элементарных бозонов). Аналогично, для рассеяния элементарного бозона b на составном фермионе $f_\sigma b$ или для рассеяния элементарного бозона одного сорта b_1 на молекуле $b_1 b_2$ (из двух элементарных бозонов разных сортов) имеется всего один связанный уровень [31] с энергией

$$E_3 = 2,4E_b \quad (27)$$

для двух одинаковых масс фермиона и бозона $m_b = m_f$. Ещё раз подчеркнём, что энергии связи трёхчастичных комплексов E_3 в (26), (27) являются функциями только двухчастичной энергии связи E_b .

В отличие от ситуации с бозонами, при анализе задачи с тремя фермионами решающую роль играет принцип Паули, приводящий к эффективному отталкиванию элементарного фермиона f_σ от молекулы $f_\sigma f_{-\sigma}$ вне зависимости от размерности пространства. В результате точное решение уравнения Скорнякова–Тер-Мартиросьяна (впервые полученное в работе [192] для рассеяния нейтрона на дейтроне) в 3D-случае приводит к классическому результату:

$$a_{2-1} = 1,18|a| > 0. \quad (28)$$

Перейдём теперь к задаче четырёх частиц и рассмотрим вначале рассеяние молекулы $f_\sigma f_{-\sigma}$ на другой молекуле. Благодаря принципу Паули мы вновь будем иметь в этом случае эффективное отталкивание как для 3D-, так и для 2D-систем. Точное выражение для амплитуды рассеяния в 3D-случае,

$$a_{2-2} = 0,6|a| > 0, \quad (29)$$

учитывающее динамику и возможность виртуальных промежуточных состояний не только с двумя молекулами (парами или димерами), но и с тремя и одной частицей, было получено Петровым и др. [114] на уровне правильно выбранного анзаца для решения четырёхчастичного уравнения Шрёдингера, а также Бродским и др. [31] на уровне точного диаграммного подхода для решения интегрального уравнения типа Скорнякова–Тер-Мартиросьяна для четырёхчастичной Т-матрицы. Отметим, что диаграммный подход в так называемом лестничном приближении (связанным с множественным перерассеянием пар без потери их идентичности и не учитывающим возможность образования троек и единиц в промежуточном состоянии) приводит в работе [195] к несколько большему (чем точное) значению $a_{2-2} = 0,75|a| > 0$. Аналогично в 2D-случае Барановым и др. [113] для амплитуды рассеяния f_{2-2} было получено выражение (11). Переходя к анализу четырёхчастичных бозонных комплексов, отметим, что в 3D-случае мы

вновь имеем аналог эффекта Ефимова с падением на центр и возникновением сильносвязанных четырёхчастичных комплексов. В то же время в 2D-случае он вновь отсутствует и мы опять имеем конечное число связанных состояний. Для четырёх резонансно-взаимодействующих элементарных бозонов $bbbb$ существует два связанных уровня с энергиями

$$E_4^{(1)} = 194E_b, \quad E_4^{(2)} = 24E_b. \quad (30)$$

Энергии этих уровней впервые были определены в работе [196]. Для комплексов $f_\sigma b, f_{-\sigma} b$ из двух элементарных бозонов и фермионов или для комплекса $b_1 b_2, b_1 b_2$ из бозонов разных сортов вновь имеется два связанных уровня с энергиями [31]

$$E_4^{(1)} = 10,7E_b, \quad E_4^{(2)} = 2,9E_b. \quad (31)$$

Наконец, для комплекса $f_\sigma b, bb$ при равных массах $m_b = m_f$ существует только один уровень [31]:

$$E_4 = 4,1E_b. \quad (32)$$

Подчеркнём, что в выражениях (30)–(32) энергии связанных состояний комплексов из четырёх частиц в 2D-случае вновь (как и для комплексов из трёх частиц) выражаются только через двухчастичную энергию связи. Полученные в предыдущем разделе результаты помогают нам завершить построение фазовых диаграмм 3D- и 2D-резонансных ферми–бозе-смесей с притяжением между фермионами и бозонами и смеси бозонов разных сортов [18, 29, 30, 68]. Подчеркнём, что в ферми–бозе-смеси с равными плотностями фермионов и бозонов, $n_f = n_b$, и сильным (резонансным) притяжением между фермионами и бозонами, когда энергия связи составного фермиона много больше температур вырождения фермионов и бозонов, $|E_b| \gg \{T_{0F}, T_{0B}\}$, все элементарные частицы могут попарно объединиться в составные фермионы $f_\sigma b$ или (при выполнении соотношений (27) и (31)) в четвёрки $f_\sigma b, f_{-\sigma} b$ с двумя фермионами и двумя бозонами или в большие капли с числом частиц $N > 4$ [18].

8. s- и p-спаривание в растворах He-3 в He-4. Механизм Кона–Латтинжера

Отметим, что одной из наиболее интересных и всё ещё экспериментально не разрешённой проблемой физики низких температур является проблема поиска сверхтекучести в трёхмерных и в особенности двумерных (тонкие плёнки, субмонослои) растворах He-3 в He-4. Как известно, раствор He-3 в He-4 представляет собой простейшую разреженную ферми-систему атомов He-3 (максимальная концентрация He-3 в неполяризованном растворе $x = 9,5\%$ при давлении $P = 10$ атм), находящаяся в инертном сверхтекучем конденсате He-4. Это делает растворы идеальным объектом для развития и апробации различных методов теории ферми-жидкости малой плотности, т.е. фактически теории ферми-газа Галицкого–Блома [170, 171]. Первые классические результаты с предсказанием куперовского спаривания в разреженной фермионной подсистеме атомов He-3 принадлежат Бардину, Бейму, Пайнсу [197]. Эти результаты были получены в конце 1960-х годов, вскоре после создания теории БКШ [4–6].

Дальнейшее развитие теории фермионной сверхтекучести для атомов He-3 в растворах принадлежит Башкину и Мейеровичу [198] и одному из авторов данного обзора [68]. Напомним, что критическая температура куперовского спаривания в плотном сверхтекучем He-3 (с концентрацией He-3 $x = 100\%$) составляет 2,5 мК (при давлении $P = 34$ атм) и соответствует переходу этой плотной ферми-жидкости в сверхтекучее состояние с триплетным р-спариванием (состояние с суммарным спином куперовской пары $S = 1$ и относительным орбитальным моментом пары $l = 1$) [50, 51]. При этом в трёхмерном He-3 из 18 возможных сверхтекучих фаз экспериментально реализуются только две — так называемая изотропная триплетная В-фаза и анизотропная триплетная А-фаза [199–203]. В магнитных полях $H \geq 1$ Тл изотропная В-фаза парамагнитно разрушается, и в результате фазовая диаграмма сверхтекучего He-3 тривиализуется. В сильных магнитных полях нормальная фаза He-3 переходит в сверхтекучую триплетную А1-фазу с проекцией спина куперовской пары $S_z = 1$, а затем, при меньших температурах, глобальный минимум функционала Гинзбурга–Ландау соответствует А2-фазе, в которой также представлены куперовские пары с проекцией $S_z = -1$ [50, 51]. В то же время в разреженных растворах He-3 в He-4 как в трёхмерной, так и в двумерной ситуации (для субмонослоёв) согласно предсказаниям [68, 198] при малых концентрациях He-3 ($x < x_0$) в фермионной подсистеме возникает синглетное s-спаривание ($S = l = 0$), а при больших концентрациях — триплетное р-спаривание. Более того, как показано в работах [67, 68, 204], критическая температура триплетного спаривания может быть резко увеличена в спин-поляризованном растворе или в сильных внешних магнитных полях.

Отметим, что в трёхмерных растворах критическая температура s-спаривания вновь определяется формулой Горькова–Мелик-Бархударова (2) для протяжённых куперовских пар. При этом эффективный газовый параметр Галицкого (стоящий в показателе экспоненты для T_c) определяется теперь по формуле

$$\lambda = \frac{2ap_{F0}x^{1/3}}{\pi}, \tag{33}$$

где p_{F0} — импульс ферми плотного He-3, x — концентрация He-3 в разреженном растворе. Длина рассеяния a в этом подходе зависит от концентрации. В точке $x = x_0$ длина рассеяния a меняет знак. Она соответствует притяжению ($a < 0$) при $x < x_0$ и меняет знак, становясь отталкивательной ($a > 0$) при $x > x_0$. В трёхмерном случае эксперименты по спиновой диффузии позволяют заключить, что $x_0 \sim 4\%$ [204]. Критическая температура s-спаривания согласно оценкам Башкина, Мейеровича [198] максимальна при концентрациях $x \sim 1\%$ и имеет порядок $T_{c0} \sim 10^{-4}$ К. В то же время согласно оценкам группы Фроссати [204] максимальная критическая температура соответствует концентрациям He-3 $x \sim 2\%$ и имеет несколько меньший порядок величины $T_{c0} \sim (5 \times 10^{-6} - 10^{-5})$ К. При концентрациях $x > 4\%$ длина рассеяния становится положительной и s-спаривание в растворе невозможно. Однако и в этой области концентраций возможно сверхтекучее р-спаривание в триплетном канале [68]. Это спаривание определяется обобщённым механизмом Кона–Латтинжера [64–66]. Исходно механизм Кона–Латтинжера в классической работе [64]

был предложен в трёхмерном случае для d-спаривания. Он был связан с наличием коновской особенности вида $(q - 2p_F) \ln |q - 2p_F|$ [205] (фриделевских осцилляций $\cos(2p_F r)/(2p_F r)^3$ [206] в эффективном взаимодействии двух фермионов через поляризацию ферми-фона. Позднее в работах [65, 66] дано обобщение на триплетное р-спаривание, где коновская особенность и фриделевские осцилляции играют лишь вспомогательную роль для определения величины критической температуры.

По мысли Нозьера [207] для реализации р-спаривания достаточно, чтобы эффективное взаимодействие в импульсном пространстве между двумя фермионами через поляризацию ферми-фона возрастало бы на существенном интервале от 0 до $2p_F$ (а затем в случае разреженного ферми-газа начинало убывать при больших значениях импульса $p \geq 1/r_0$, где r_0 — радиус действия потенциала и $p_F r_0 \ll 1$). В результате критическая температура р-спаривания имеет вид [65, 66]

$$T_{c1} \sim \epsilon_F \exp\left(-\frac{13}{\lambda^2}\right), \tag{34}$$

где эффективный газовый параметр λ даётся формулой (33), а энергия Ферми в 3D-растворе $\epsilon_F = \epsilon_{F0}x^{2/3}$ (ϵ_{F0} — энергия Ферми чистого He-3). Важно, что критическая температура р-спаривания определяется второй степенью эффективного газового параметра, в отличие от s-спаривания, где $T_{c0} \sim \epsilon_F \exp(-1/|\lambda|)$. Отметим, что предэкспоненциальный множитель в выражении (34) определяется диаграммами третьего и четвёртого порядка по газовому параметру, а также эффектами запаздывания. Он был точно вычислен в работе [208].

В работе [66] Каган, Чубуков также показали, что критическая температура р-спаривания может быть существенно увеличена в спин-поляризованном ферми-газе и в двухзонной ситуации [209]. Позднее в работе [69] эти результаты были обобщены на ферми-газ нейтральной частиц при сверхнизких температурах в ограниченной геометрии магнитных ловушек и в работе [174] — на повышение критической температуры в заряженном электронном слое в магнитном поле, параллельном слою. Основная идея связана здесь с разделением каналов — два фермиона со спинами "вверх" (одного сорта) формируют куперовскую пару, а эффективное взаимодействие для них готовят два фермиона со спином "вниз" (другого сорта) (рис. 7). При этом усиливается роль коновской особенности, которая теперь принимает вид $(q_{\uparrow} - 2p_{F\downarrow}) \ln |q_{\uparrow} - 2p_{F\downarrow}|$, и в результате возникает анизотропная триплетная А1-фаза. Для этой фазы критическая

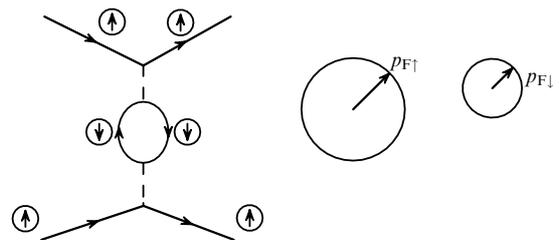


Рис. 7. Разделение каналов для куперовского спаривания и эффективного взаимодействия в спин-поляризованном ферми-газе. Эффективное взаимодействие связано с двумя спинами "вниз", в то время как куперовское спаривание в триплетном канале связано со спинами "вверх" [87, 88].

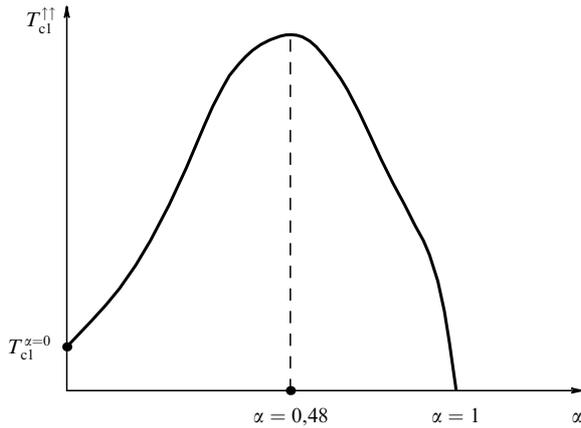


Рис. 8. Зависимость критической температуры $T_{cl}^{\uparrow\uparrow}$ триплетного р-спаривания в А1-фазе от степени поляризации α в трёхмерном случае [33, 67, 68].

температура р-спаривания является сильно немонотонной функцией степени спиновой поляризации

$$\alpha = \frac{n_{\uparrow} - n_{\downarrow}}{n_{\uparrow} + n_{\downarrow}} \quad (35)$$

с максимумом при степени поляризации $\alpha = 48\%$. Температура р-спаривания в максимуме может существенно превысить критическую температуру в отсутствие спиновой поляризации [66] (рис. 8)

$$\max T_{cl}^{\uparrow\uparrow} = T_{cl}^{\uparrow\uparrow}(\alpha = 0,48) \sim \varepsilon_{F\uparrow} \exp\left(-\frac{7}{\lambda^2}\right). \quad (36)$$

Для сверхтекучего He-3 температура в максимуме [18, 66]

$$T_{cl}^{\uparrow\uparrow}(\alpha = 48\%) = 6,41 T_{cl}. \quad (37)$$

Похожие оценки величины $T_{cl}^{\uparrow\uparrow}$ в максимуме были получены в работе [204] в рамках более феноменологического подхода, основанного на теории ферми-жидкости Ландау для А1-фазы сверхтекучего He-3. Подчеркнём, что для плотного He-3 $\lambda \sim 1,4$ и наша теория носит качественный характер. Однако она даёт разумные оценки как для чистого He-3 в отсутствие внешнего магнитного поля, так и для ширины А1-фазы в экспериментально доступных магнитных полях $H \leq 15$ Тл. Отметим, что в экспериментах Фроссати и др. [210, 211] в магнитных полях $H = 15$ Тл (при степени поляризации $\alpha = 7\%$) было получено увеличение критической температуры триплетного р-спаривания на 20% в А1-фазе сверхтекучего He-3. Для трёхмерных растворов согласно оценкам [68] максимальная температура триплетного р-спаривания может быть реализована при максимально допустимой концентрации атомов He-3 $x \sim 9,5\%$ и составить при оптимальной спиновой поляризации величину $T_{cl}^{\uparrow\uparrow} \sim (10^{-5} - 10^{-4})$ К.

Другой весьма важной идеей, ведущей к дальнейшему увеличению $T_{cl}^{\uparrow\uparrow}$, является идея, высказанная авторами работ [212, 213], о том, что максимальная растворимость в сильно поляризованных растворах может в 3–4 раза превышать максимальную концентрацию растворимости при $\alpha = 0$. Отметим, что экспериментальные надежды на создание сильно спин-поляризованных растворов He-3 в He-4, как и в случае чистого He-3, могут быть

связаны с элегантной идеей работы [214] о быстром плавлении спин-поляризованного квантового кристалла He-3.

Рассмотрим далее фазовую диаграмму сверхтекучих двумерных растворов. В них область s-спаривания делится на две подобласти. При самых малых концентрациях He-3 ($x \leq 1\%$ и $|E_b| > 2\varepsilon_F$) вначале при более высокой температуре плавного кроссовера $T_* \sim |E_b|$ возникают димеры из двух атомов He-3 [215], а затем они бозе-конденсируются при более низкой критической температуре, определяемой формулой (10), где теперь стоит энергия Ферми 2D-раствора $\varepsilon_F = \varepsilon_{F0}x$. При больших концентрациях ($1\% \leq x \leq 3\%$) возникает подобласть куперовского спаривания с критической температурой, определяемой по формуле Мияке (8). Наконец, при $x > 3\%$ в 2D-случае реализуется триплетное р-спаривание, критическую температуру которого можно вновь резко повысить во внешнем магнитном поле. Резкое повышение критической температуры связано с тем, что сильная 2D-коновская особенность имеет односторонний характер, $\text{Re} \sqrt{q - 2p_F}$, и неэффективна для задачи о куперовском спаривании (в которой существенны переданные импульсы $q \leq 2p_F$). Однако при приложении внешнего магнитного поля или возникновении спиновой поляризации характер коновской особенности меняется на $\text{Re} \sqrt{q_{\uparrow} - 2p_{F\uparrow}}$, и в результате (поскольку $p_{F\uparrow} > p_{F\downarrow}$) большая 2D-коновская особенность "включается" в задачу о куперовском спаривании, существенно повышая $T_{cl}^{\uparrow\uparrow}$ во втором порядке по газовому параметру f_0 . Максимальная критическая температура соответствует степени поляризации $\alpha = 60\%$, причём, в отличие от 3D-случая, в 2D-случае максимум очень широкий и эффективно простирается от 10 до 90% спиновой поляризации (рис. 9).

Критическая температура в максимуме определяется по формуле

$$\max T_{cl}^{\uparrow\uparrow} = T_{cl}^{\uparrow\uparrow}(\alpha = 0,6) \sim \varepsilon_F \exp\left(-\frac{1}{2f_0^2}\right), \quad (38)$$

где эффективный газовый параметр Блюма в 2D-случае $f_0 = 1/\ln(1/p_F^2 a^2)$ определяется формулой (12) и импульс Ферми $p_F = p_{F0}x^{1/2}$. Оценки [68] показывают, что в магнитных полях $H = 15$ Тл и для двумерной плотности атомов He-3 порядка $n_3 \sim 0,05$ монослоя (в этом случае степень спиновой поляризации $\alpha \sim 10\%$) мы можем ожидать вполне экспериментально измеримых критических температур $T_{cl}^{\uparrow\uparrow} \sim 1$ мК [68, 208].

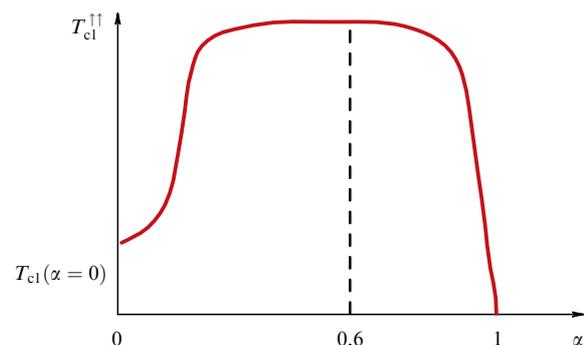


Рис. 9. Зависимость критической температуры $T_{cl}^{\uparrow\uparrow}$ от степени поляризации α в двумерном случае [33, 67, 68, 87, 88].

В заключение данного раздела вновь повторим, что экспериментальное обнаружение фермионной сверхтекучести атомов He-3 в трёхмерных и двумерных растворах He-3 в He-4 продолжает оставаться одним из серьёзных вызовов в физике низких и сверхнизких температур. С экспериментальной точки зрения в контексте исследования двумерных субмонослоёв He-3 в вырожденном (паулевском) режиме при малых двумерных плотностях и сверхнизких температурах, а также поиска сверхтекучести в них необходимо отметить прогресс, достигнутый в группе Сандерса [216, 217]. Отметим также, что в экспериментах и теоретических исследованиях по ультралоидным квантовым газам активно изучаются смесь ${}^7\text{Li}-{}^6\text{Li}$ бозевского и фермиевского изотопов лития [218], а также смесь ${}^{40}\text{K}-{}^{87}\text{Rb}$ бозевского изотопа Rb и фермиевского изотопа K [29, 33, 219, 220]. Подчеркнём, что в этих смесях мы имеем дело как с разреженной фермионной подсистемой (ферми-газом), так и с разреженным бозе-газом. В случае короткодействующего отталкивательного взаимодействия между всеми компонентами в смеси (при $\{U_{FF}, U_{BB}, U_{FB}\} > 0$), согласно теоретическим результатам [218], в фермионной подсистеме возможно куперовское спаривание в триплетном r-канале по механизму Кона–Латтинжера, усиленное за счёт флуктуаций плотности в бозонной компоненте. В смеси изотопов калия и рубидия возможна реализация резонансных притягательных взаимодействий между фермионом и бозоном и между двумя бозонами. В этом случае при $n_B \gg n_F$ согласно экспериментальным [220] и теоретическим [33] результатам возможно образование больших капель и коллапс бозонной компоненты.

9. Разбалансированный ферми-газ. Расслоение на фазы

В работе [69] идеология куперовского спаривания на основе усиленного механизма Кона–Латтинжера была обобщена на разбалансированный ультрахолодный ферми-газ нейтральных частиц в ограниченной геометрии оптических дипольных ловушек. Подчеркнём, что в ферми-газе атомов ${}^6\text{Li}$ с равными плотностями захваченных в ловушку сверхтонких компонент Стуф (Stoof) и др. [221] для притягательной длины рассеяния $a < 0$ предсказали синглетное куперовское s-спаривание в соответствии с формулой Горькова–Мелика–Бархударова (2). Критическая температура для максимально возможных плотностей ферми-газа в ловушке и резонансных длин рассеяния $|a| \sim (2-3) \times 10^3 \text{ \AA}$ (при которых $\lambda \leq 1$) достигает значений 10^{-6} K . Отметим, что при $\lambda > 1$ сжимаемость системы $\kappa^{-1} \sim C_s^2 < 0$ становится отрицательной (отрицательным становится квадрат скорости звука) и система становится неустойчивой относительно кластеризации или расслоения на фазы.

Авторы работы [69] обратили внимание на важное обстоятельство, а именно, что уже при небольшом разбалансе между плотностями сверхтонких компонент (если, например, для двух компонент $p_{F1} - p_{F2} \geq T_{c0}/v_F$, где $v_F = p_F/m$ — скорость Ферми и T_{c0} — критическая температура в отсутствие разбаланса) благодаря критерию сверхтекучести Ландау куперовские пары приобретают конечный импульс центра масс и распариваются при больших разбалансах. Строго говоря, при небольшом разбалансе вначале на фазовой диаграмме возникает узкая полоска неоднородной сверхтекучей фазы

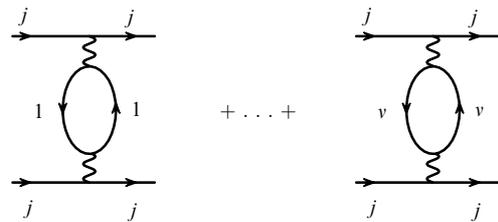


Рис. 10. Петлевые диаграммы, определяющие во втором порядке теории возмущений по газовому параметру эффективное взаимодействие между атомами одной компоненты через возбуждение виртуальных пар типа частица–дырка других компонент [69]. Член с $i = j$ пропущен в этой сумме.

Ларкина–Овчинникова–Фулде–Феррелла [70, 71], а затем s-спаривание оказывается полностью подавленным. Однако и в этом случае ферми-газ в ловушке может стать сверхтекучим благодаря возможности триплетного r-спаривания с симметрией A1-фазы. В этом случае, как показано в разделе 8, наиболее выгодно спаривание ферми-частиц с большей величиной p_{F1} (или плотности $n_1 = p_{F1}^3/6\pi^2$) через поляризацию компонент с меньшими плотностями. Поляризационные диаграммы, дающие вклад в эффективное взаимодействие V_{eff} во втором порядке по газовому параметру, изображены на рис. 10. В результате их суммирования в случае v сверхтонких компонент, захваченных в ловушку, температура триплетного r-спаривания в отсутствие разбаланса определяется формулой [69]

$$T_{c1} \sim \varepsilon_F \exp\left(-\frac{13}{(v-1)\lambda^2}\right), \tag{39}$$

где газовый параметр λ зависит от плотности индивидуальной компоненты. Естественно, при $v = 2$ мы восстанавливаем результат (34) для He-3. При этом оптимальный разбаланс, требуемый для получения максимальной критической температуры, соответствует значениям отношения плотностей $n_j/n_i \approx 3$ (или импульсов Ферми $p_{Fj}/p_{Fi} \sim 1,4$). Отметим, что в оптимальной ситуации критическая температура равна

$$T_{c1} \sim \varepsilon_{Fj} \exp\left(-\frac{7}{(v-1)\lambda_{\text{eff}}^2}\right), \tag{40}$$

где $\lambda_{\text{eff}}^2 = (2a/\pi)^2 p_{Fj} p_{Fi}$. В результате для трёхмерного разбалансированного газа ${}^6\text{Li}$ (для него число компонент $v = 2I + 1 = 3$, где $I = 1$ — ядерный спин) и плотностей, при которых $\lambda_{\text{eff}} \leq 1$, оптимальная критическая температура r-спаривания порядка $T_{c1} \sim 10^{-8} \text{ K}$. Для оптимального отношения плотностей сверхтонких компонент в квазидвумерном разбалансированном газе максимальная величина T_{c1} в согласии с формулой (38) должна быть существенно выше. Это даёт надежды на экспериментальное наблюдение куперовского спаривания по усиленному механизму Кона–Латтинжера в квазидвумерных разбалансированных газах. Если $\lambda_{\text{eff}} > 1$, то парциальные сжимаемости и скорости звука в каждой (или одной) из подсистем $C_{si}^2 \sim \partial^2 E/\partial n_i^2 \sim \partial \mu_i/\partial n_i < 0$ и система вновь неустойчива относительно расслоения на фазы. Важно отметить также, что для пересчёта выражений для критических температур s- и r-спаривания на ловушку мы должны согласно Мигдалу

[222] выполнить критерий квазиклассичности (согласно которому длина когерентности куперовской пары должна быть меньше характерного радиуса ловушки при энергии, равной энергии Ферми)

$$\xi_0 \sim \frac{v_F}{T_c} < R(\varepsilon_F), \quad (41)$$

где в приближении Томаса – Ферми $R \sim v_F/\omega$.

Условие квазиклассичности можно также переписать в виде

$$\varepsilon_F \gg T_c \gg \hbar\omega, \quad (42)$$

где характерная частота гармонического потенциала 3D сферически-симметричной ловушки может быть оценена как

$$\omega \sim \frac{\varepsilon_F}{N^{1/3}}. \quad (43)$$

Отметим, что в (43) N — характерное число частиц в ловушке,

$$N \sim \left(\frac{\varepsilon_F}{\hbar\omega}\right)^3 \sim 10^6. \quad (44)$$

Аналогично в квазидвумерных газах максимальная критическая температура будет достигаться при оптимальном отношении двумерных плотностей сверхтонких компонент $n_j/n_i = 4$ или при отношении их импульсов Ферми $p_{Fj}/p_{Fi} = 2$ (рис. 11). Отметим, что все приведённые результаты относятся к случаю равных масс различных компонент: $m_i = m_j$. Если мы рассмотрим смесь фермионов двух сортов с разными массами $m_1 > m_2$, то увидим, что в системе возникают дополнительные интересные явления, связанные с поляронными эффектами [223, 224]. В частности, бóльшая масса m_1 может быть дополнительно существенно увеличена благодаря "одеванию" тяжёлой частицы в шубу из мягких (низкоэнергетических) виртуальных пар частица – античастица лёгких частиц [223]. Эффективным параметром, определяющим дополнительное увеличение "тяжёлой" массы, является величина $\lambda_{\text{eff}}^2 \ln(m_1/m_2) \gg 1$, связанная с потенциалом взаимодействия тяжёлой и лёгкой частиц U_{hL} .

В электронных системах в металле аналогичное явление носит название электронного поляронного эффекта и наблюдается в режиме смешанной валентности в многозонных системах с одной узкой зоной, таких, например, как урановые тяжёлофермионные соединения. В них в так называемом унитарном пределе сильного

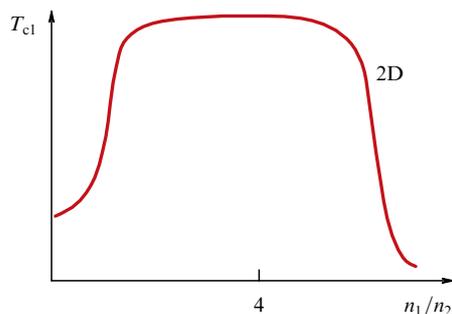


Рис. 11. Зависимость температуры триплетного спаривания от относительной плотности n_1/n_2 в двумерной ферми-ферми-смеси с двумя сортами частиц [209].

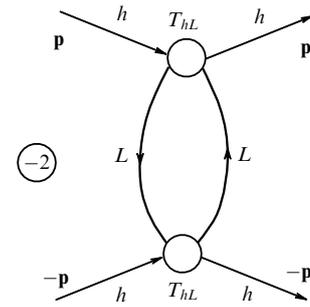


Рис. 12. Основной вклад в эффективное взаимодействие для куперовского спаривания тяжёлых частиц через поляризацию лёгких частиц. Светлые кружки обозначают вакуумную T-матрицу T_{hL} [223 – 226].

хаббардовского взаимодействия между тяжёлой и лёгкой частицами, стартуя с затравочного отношения масс $m_1/m_2 \sim 10$ в одночастичных расчётах по методу LDA локальной плотности, мы легко можем получить для эффективной массы тяжёлой частицы $m_1^*/m_2 \sim 100$ при учёте коллективных эффектов поляронного типа. При этом, как показано в [223 – 226], максимальная температура сверхтекучего перехода соответствует куперовскому спариванию тяжёлых частиц через поляризацию лёгких частиц (рис. 12). Отметим, что именно такие большие эффективные массы тяжёлых частиц характерны для многих тяжёлофермионных соединений. Заметим, что при большом затравочном разбалансе исходных плотностей и масс (при $\lambda_{\text{eff}}^2 m_1 p_{F1}/m_2 p_{F2} \geq 1$) в этой смеси также возможно расслоение на фазы [223, 224]. Экспериментально расслоение на фазы в разбалансированных ультрахолодных ферми-газах впервые наблюдалось в работах группы Кеттерле [73].

В трёхмерных ловушках в центре ловушки Кеттерле с соавторами детектировал парное состояние (бозе-конденсат составных бозонов с равными плотностями компонент $n_\uparrow = n_\downarrow$), в то время как на периферии ловушки в основном сосредоточены избыточные спины "вверх". В кинематически одномерных газах ситуация обратная. Сбалансированные спаренные фермионы находятся на периферии, а избыточные спины "вверх" находятся в центре ловушки [227].

Первые экспериментальные результаты по разделению на фазы в квазидвумерных газах принадлежат группе Томаса [74]. Из эксперимента видно, что качественно ситуация в квазидвумерной геометрии напоминает трёхмерную — со сбалансированными спаренными фермионами в центре ловушки. Профили концентрации атомов в двух спиновых состояниях показаны на рис. 13. Снимки сделаны вдоль плоскости движения, поэтому профили представляют собой интеграл вдоль одного направления от распределения концентрации. Плоские центральные части графиков разности распределений (синий пунктир) указывают на равенство спиновых концентраций в центре.

Дальнейшие исследования разделения фаз [75] указали на отсутствие разрывов в спиновой поляризации или профилях концентрации вблизи линии фазового перехода, что качественно отличается от разделения фаз в трёхмерной системе [228], где наблюдается фазовый переход первого рода. Предполагается [75], что отсутствие разрывов связано с флуктуациями, роль которых возрастает с уменьшением размерности.

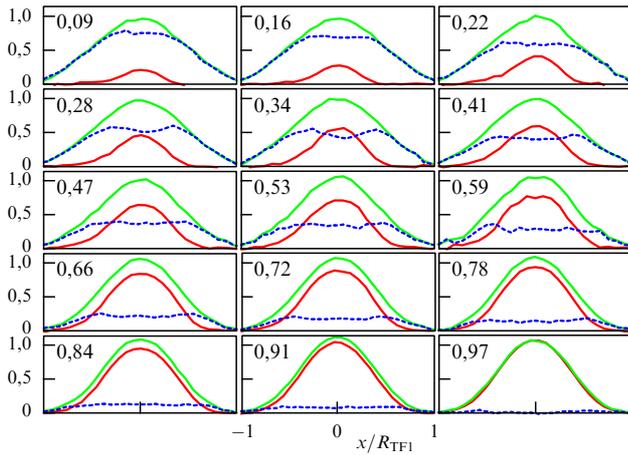


Рис. 13. (В цвете онлайн.) Измеренные профили линейной концентрации в единицах N_1/R_{TF1} в поле 775 Гс, при $\epsilon_{F1}/E_b = 0,75$ ($R_{TF1} \equiv \sqrt{2\epsilon_{F1}/(m\omega_z^2)}$ — радиус Томаса–Ферми для спинового большинства, E_b — энергия связи двух атомов в ловушке). Зелёные кривые — графики для большинства («1»), красные — для меньшинства («2»), синие пунктирные — разность профилей. Каждый график помечен соответствующим значением разбаланса N_2/N_1 . Для графиков разности наличие плоского центра и двух пиков по бокам согласуется с полным спариванием в сердцевине. (Из работы [74].)

Движение вдоль z может оказаться важным для несбалансированных квазидвумерных газов. Атом из спинового меньшинства, движущийся в поле большинства, может находиться в суперпозиции состояний, включающих в себя возбуждённые состояния осциллятора вдоль z .

Снимки разбалансированного по спину газа после отключения ловушки и разлёта в свободном пространстве [75] показаны на рис. 14. На снимках видно, что распределение концентрации имеет бимодальную структуру. Газ изначально приготовлен на бозевской стороне трёхмерного резонанса Фешбаха, благодаря чему выключение плотного удержания не ведёт к разрыву молекул-димеров. Профиль концентрации димеров может быть тесно связан с распределением по скоростям перед разлётом, а бимодальная структура трактуется как признак бозе-конденсации молекул-димеров [75]. Интересно, что на снимках после разлёта бимодальное распределение видно как при разделении фаз, так и без него. В двумерном бозе-газе со слабым расталкиванием бимо-

дальная структура наблюдалась без бозе-конденсации [229].

Во внешнем гармоническом потенциале в плоскости x склонность газа к образованию сбалансированной по спину сердцевинки не позволяет увидеть другие интересные эффекты — сверхтекучесть Фульде–Феррелла–Ларкина–Овчинникова [70, 71] и спаривание в r -канале по механизму Кона–Латтинжера [64–66], которые требуют разбаланса концентраций. Для наблюдения этих эффектов нужна ловушка с жёсткими стенками и плоским потенциалом внутри. О пленении двумерного ферми-газа в такой ловушке недавно сообщено в работе [150].

10. Кроссовер БКШ–БЭК в 100%-поляризованной сверхтекучей A1-фазе

Отметим, что дополнительные возможности по изучению триплетного r -спаривания в 100%-поляризованном сверхтекучем ферми-газе предоставляют недавние эксперименты по резонансу Фешбаха в ультрахолодных газах ^6Li и ^{40}K в r -канале [230–232]. Эти эксперименты сближают области исследований резонансных квантовых газов с физикой сверхтекучего He-3 и физикой аномальных, сложных сверхпроводников, таких как, например, Sr_2RuO_4 , $\text{U}_{1-x}\text{Th}_x\text{Be}_{13}$, UNi_2Al_3 и др. [233]. Отметим, что в резонансе Фешбаха для r -канала мы имеем дело с кроссовером БКШ–БЭК между локальными и протяжёнными парами для триплетной A1-фазы, в которой спариваются частицы с проекцией суммарного спина $S_z = 1$. Подробному описанию резонанса Фешбаха в r -канале посвящена первая часть работы [25]. Здесь мы отметим только, что в 100%-поляризованном газе r -спаривание возникает в третьем порядке по газовому параметру (по импульсу Ферми) для эффективного взаимодействия в согласии с принципом Паули (отсутствием спинов "вниз") и общими квантово-механическими утверждениями об амплитуде рассеяния медленных частиц в канале с орбитальным моментом l [25, 102]. В результате критическая температура T_{cr} в разреженной БКШ-области согласно результатам [18, 25, 66] равна

$$T_{cr} \simeq 0,1\epsilon_F \exp\left(-\frac{\pi}{2|\lambda_p|}\right), \tag{45}$$

где константа связи (эффективный газовый параметр)

$$\lambda_p \sim a_p r_0^2 p_F^3 < 0, \tag{46}$$

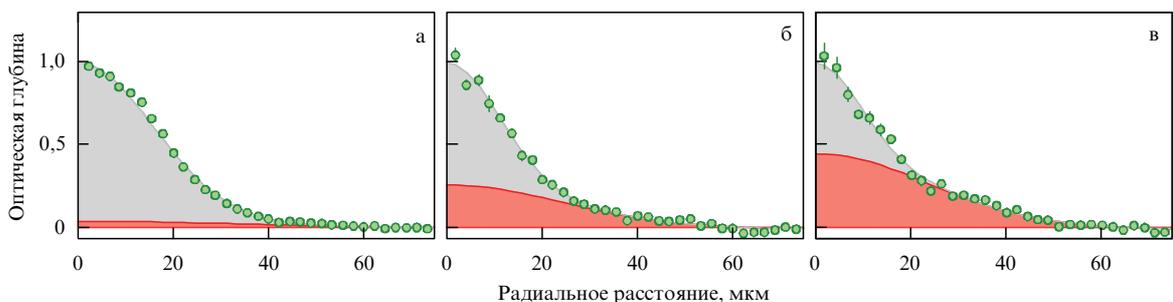


Рис. 14. (В цвете онлайн.) Профили оптической глубины облака атомов спинового большинства после 3 мс разлёта, нормированные на максимальное значение, вместе с подгонкой двумя гауссовыми функциями, для значений поляризации $(N_1 - N_2)/(N_1 + N_2) = 0,25$ (а), 0,55 (б), 0,75 (в) в поле 780 Гс. Тепловая часть отмечена красным, конденсированная — серым. Интервалы ошибок отражают стандартное отклонение среднего при усреднении по азимуту. Каждый снимок соответствует усреднению по 30 повторениям эксперимента. (Из работы [75].)

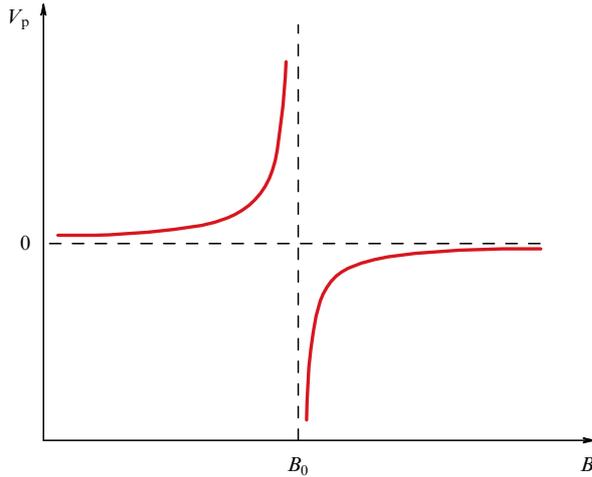


Рис. 15. Качественная схема резонанса Фешбаха в р-канале. Объём рассеяния V_p расходится при $B = B_0$ [25].

r_0 — радиус действия потенциала, a_p — отрицательная длина р-рассеяния. Подчеркнём, что в резонансе Фешбаха в р-канале именно длина рассеяния a_p (или, точнее, объём рассеяния $V_p = r_0^2 a_p$) меняет знак при переходе через резонансное поле B_0 . Качественная схема резонанса Фешбаха в р-канале представлена на рис. 15 [18, 25]. В разреженной БЭК-области вновь применима формула Эйнштейна для газа составных бозонов со спином $S = S_z = 1$, согласно которой

$$T_{\text{ср}} \simeq \frac{3,31(n_{\uparrow}/2)^{2/3}}{2m}, \quad (47)$$

где $n_{\uparrow} = p_{\text{F}\uparrow}^3/6\pi^2$ — плотность частиц со спином "вверх". Отметим, что энергия связи составных бозонов (биполаронов со спином $S = S_z = 1$) для резонанса Фешбаха в р-канале определяется выражением

$$|E_b| = \frac{\pi}{2mr_0 a_p}. \quad (48)$$

В унитарном пределе $1/\lambda_p = 0$ и $T_{\text{ср}} \simeq 0,1\varepsilon_{\text{F}}$, которая всё ещё соответствует БКШ-области. На рисунке 16 штриховой линией изображена эффективная граница БКШ- и БЭК-областей, которая определяется линией нулевого химического потенциала $\mu(T) = 0$. Также обозначена важная точка квантового фазового перехода [234, 235], в которой $\mu(T = 0) = 0$. В соответствии с общими теоретическими представлениями [18, 25, 50, 234, 235], при вычислении квазичастичных вкладов в теплоёмкость и нормальную плотность вблизи квантовой критической точки результаты зависят от того, как мы к этой точке подходим при $\mu \rightarrow 0$ и $T \rightarrow 0$, т.е. возникает неэквивалентность пределов $|\mu|/T \rightarrow 0$ и $T/|\mu| \rightarrow 0$ [25]. Рассмотрим этот интересный аспект подробнее. Мы знаем, что для аномальных сверхпроводников с р- и d-спариванием возникают точки или линии в импульсном пространстве, где величина сверхпроводящей щели обращается в нуль. Так, например, в 3D-A1-фазе сверхтекучего He-3 квадрат щели $\Delta^2 = \Delta_0^2 \sin^2 \theta$ как функция полярного угла (с осью z квантования орбитального момента) θ обращается в нуль в двух точках: при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ на северном и южном полюсах поверхности Ферми. В результате энергетический спектр квазичастиц в сверхтекучей

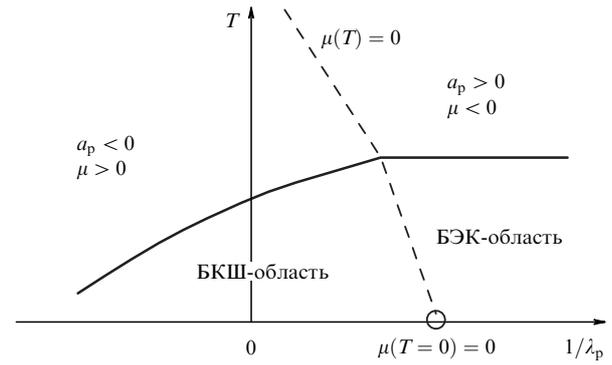


Рис. 16. Качественная диаграмма кроссовера БКШ–БЭК в р-канале для 100%-поляризованной сверхтекучей A1-фазы в виде зависимости температуры T от $1/\lambda_p$, где $\lambda_p = V_p p_{\text{F}}^3 = r_0^2 a_p p_{\text{F}}^3$ — эффективный газовый параметр. На фазовой диаграмме показана линия (штриховая), на которой химический потенциал $\mu(T) = 0$, и важная точка квантового фазового перехода, в которой $\mu(T = 0) = 0$ [234, 235].

A1-фазе при низких температурах $T \ll T_c$ имеет вид [50, 51]

$$E_p = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)^2 + \frac{|\Delta \mathbf{p}|^2}{p_{\text{F}}^2}}, \quad (49)$$

где

$$\Delta = \Delta_0(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \quad (50)$$

представляет собой комплексный параметр порядка в A1-фазе, а Δ_0 — амплитуда сверхтекучей щели. Легко увидеть, что

$$|\Delta \mathbf{p}|^2 = \Delta_0^2 p^2 \sin^2 \theta = \Delta_0^2 [\mathbf{p} \times \mathbf{l}]^2, \quad (51)$$

где $\mathbf{l} = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$ — единичный вектор орбитального момента пары (рис. 17). Напомним, что для обычного сверхпроводника с s-спариванием спектр квазичастиц при низких температурах имеет вид

$$E_s = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)^2 + \Delta_0^2}. \quad (52)$$

Обратим внимание, что в (бозонной) БЭК-области при отрицательных значениях химического потенциала $\mu = -|\mu| < 0$ энергия квазичастиц как для s-спаривания, так и для р-спаривания нигде не обращается в нуль,

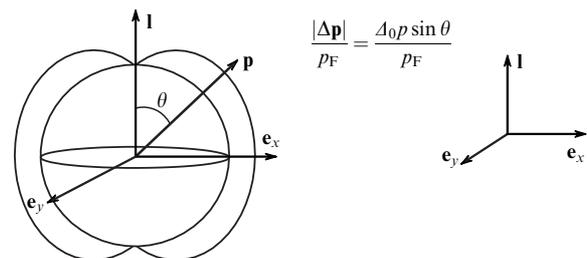


Рис. 17. Топология сверхтекучей щели в A1-фазе. Выделены две точки, соответствующие северному и южному полюсам на ферми-поверхности, где энергия квазичастиц и величина сверхтекучей щели обращаются в нуль [25].

поскольку $p^2/2m - \mu = p^2/2m + |\mu| > 0$. В то же время в разреженной БКШ-области для р-спаривания энергия квазичастиц обращается в нуль в двух точках: $p^2/2m = \mu$ и $\theta = 0; \pi$. В частности, квазичастичный спектр принимает нулевое значение и в квантовой критической точке при $p = \mu = 0$ и $\theta = 0; \pi$. В результате при малых $|\mu|$ и низких температурах T в классическом пределе $|\mu|/T \rightarrow 0$ (точнее, при $|\mu| \ll T \ll A_0^2/\varepsilon_F$) возникает нетривиальный степенной квазичастичный вклад в теплоёмкость:

$$C_V \sim \frac{(2mT)^{3/2}}{2\pi^2} \frac{\varepsilon_F T}{A_0^2} \propto T^{5/2}. \quad (53)$$

В то же время в квантовом пределе $T/|\mu| \rightarrow 0$ (при $T \ll |\mu| \ll A_0^2/\varepsilon_F$) вклад квазичастиц в теплоёмкость ведёт себя по-разному в БКШ-области (при $\mu > 0$) и в БЭК-области (при $\mu < 0$). В БКШ-области квазичастичный вклад по-прежнему степенной, но определяется другой степенью температуры:

$$C_V \sim \frac{1}{2\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\mu^{1/2}} \frac{\varepsilon_F T}{A_0^2} T^2 \propto T^3. \quad (54)$$

А в БЭК-области этот вклад экспоненциально мал:

$$C_V \sim \frac{(2mT)^{3/2}}{2\pi^2} \left(\frac{|\mu|}{T}\right)^3 \frac{\varepsilon_F T}{A_0^2} \exp\left(-\frac{|\mu|}{T}\right) \propto \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(-\frac{|\mu|}{T}\right). \quad (55)$$

Отметим, что все три выражения (52)–(54) становятся одинаковыми по порядку величины при $|\mu| \sim T$. Аналогичным образом ведёт себя в классическом и квантовом пределах нормальная плотность ρ_n . Для малых значений $|\mu|$ и промежуточных температур $|\mu| \ll A_0^2/\varepsilon_F \ll T \ll A_0$ получаем более ожидаемый результат для квазичастичного вклада в теплоёмкость:

$$C_V \sim \frac{(2mT)^{3/2}}{2\pi^2} \propto T^{3/2}. \quad (56)$$

Интересно, что фермионный (квазичастичный) вклад в теплоёмкость хорошо отделяется по степени температуры от бозонного вклада, связанного со звуковыми колебаниями. Фононный вклад в теплоёмкость А1-фазы даётся выражением

$$C_V^B \sim \frac{1}{2\pi^2} \frac{T^3}{C_s^3} \propto T^3, \quad (57)$$

где C_s — скорость звука в кроссовере БКШ–БЭК для А1-фазы. В БКШ-области скорость звука

$$C_{BS} \approx \frac{v_F}{\sqrt{3}} \quad (58)$$

в согласии с термодинамическим тождеством $C_s^2 = \partial P/\partial \rho$ для производной давления P по массовой плотности $\rho = mn$ в нормальном (несверхтекучем) ферми-газе при низких температурах $T \ll \varepsilon_F$ [28]. В разреженной БЭК-области скорость звука определяется термодинамическим тождеством:

$$C_{BEC} = \left(\frac{n_B}{m_B} \frac{d\mu_{Bose}}{dn_B}\right)^{1/2}, \quad (59)$$

где $n_B = n_\uparrow/2$, $m_B = 2m$, $\mu_{Bose} = 2\mu + |E_b|$. Решение само-согласованной системы уравнений Леггетта показывает, что в разреженной БЭК-области $C_{BEC} \propto v_F(p_F r_0) \ll v_F$. В работе [25] показано, что вблизи квантовой критической точки фононный вклад в теплоёмкость (57) и аналогичный вклад в нормальную плотность,

$$\rho_n^B \sim \frac{T^4}{C_s^5}, \quad (60)$$

превосходят фермионные вклады вблизи квантовой критической точки и являются определяющими.

Интересно также кратко остановиться на специфических чертах кроссовера БКШ–БЭК в 100%-поляризованной двумерной А1-фазе. Эту фазу в терминологии, принятой для тонких плёнок сверхтекучего He-3, обычно называют аксиальной фазой [18, 50, 236]. Параметр порядка в этой фазе вновь имеет вид (50). Однако в силу двумерности спектр квазичастиц в ней имеет вид

$$E_p = \left[\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)^2 + \frac{A_0^2 p^2}{p_F^2} \right]^{1/2}, \quad (61)$$

где $p^2 = p_x^2 + p_y^2$. Для спектра (61) энергия квазичастиц обращается в нуль в одной точке $p = \mu = 0$. Эта точка согласно результатам работы [237] является точкой топологического фазового перехода, отделяющего щелевую область квазичастичного спектра от бесщелевой области, а сама аксиальная фаза характеризуется наличием ненулевого топологического инварианта (топологического заряда) Q [50, 103]:

$$Q = \frac{\pi}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \mathbf{n} [\partial_\alpha \mathbf{n}, \partial_\beta \mathbf{n}], \quad (62)$$

где компоненты единичного вектора \mathbf{n} определяются выражением

$$\mathbf{n} = \frac{1}{E_p} (-A_0 p_x, A_0 p_y, \xi_p) \quad (63)$$

и $\xi_p = p^2/2m - \mu$. Этот инвариант пришёл в физику квантовых газов и сверхтекучего He-3 из физики квантового эффекта Холла, где он определяет квантование холловской проводимости. Качественно, согласно Покровскому, нетривиальная топология в пространствах с пониженной размерностью определяется узлами при пересечении близких траекторий в подходе фейнмановского функционального интеграла по траекториям. В то же время в трёхмерном пространстве близкие траектории могут "обойти" друг друга без зацепления и нетривиальная топология не столь очевидна в 3D-случае. Выражение (62) с учётом условий (63) можно преобразовать для 100%-поляризованной аксиальной фазы к наглядному виду:

$$Q = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu}{|\mu|}\right). \quad (64)$$

Из выражения (64) очевидно, что $Q = 0$ в БЭК-области (для отрицательных значений химического потенциала) и $Q = 1$ в БКШ-области (для положительных значений химического потенциала). Таким образом, мы можем сказать, что БКШ-область для 2D-аксиальной фазы является топологически нетривиальной. Кванто-

вая критическая точка $p = \mu = 0$ фактически является границей топологически тривиальной и нетривиальной фаз. Отметим, что вблизи квантовой критической точки в 2D-случае существует такое же различие между результатами для теплоёмкости и нормальной плотности в классическом и квантовом пределах, как и в трёхмерной A1-фазе. Отметим также, что как в трёхмерном, так и в двумерном случае мы эффективно всегда находимся в классическом пределе $|\mu|/T \rightarrow 0$, поскольку химический потенциал всегда непрерывен вблизи $\mu = 0$. Поэтому настоящий (квантовый) фазовый переход имеет место только при $T = 0$ [234, 235]. Наконец, обратим внимание на излом в сжимаемости в 100%-поляризованной аксиальной фазе в точке $\mu = 0$. Этот излом может быть получен как аналитически [25, 57], так и численными методами [238, 239], и определяется выражением

$$\frac{\partial n_{\uparrow}}{\partial \mu} \propto 1 + \frac{\mu \varepsilon_F}{4_0^2} [1 - \text{sign } \mu], \quad (65)$$

где $\text{sign } \mu = 1$ при $\mu \geq 0$ и $\text{sign } \mu = -1$ при $\mu < 0$. Соответственно, сжимаемость $\partial n_{\uparrow}/\partial \mu \simeq 1$ для $\mu \rightarrow +0$ и $\partial n_{\uparrow}/\partial \mu \simeq 1 + 2\mu \varepsilon_F/4_0^2$ для $\mu \rightarrow -0$.

В заключение данного раздела заметим, что согласно Воловику и др. [240] наличие ненулевого топологического инварианта $Q \neq 0$ определяет существование аномальных спиновых токов в тонких плёнках сверхтекучей А-фазы He-3 (в БКШ-области) в присутствии неоднородного магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$:

$$j_{zi}^{\text{spin}} \sim \varepsilon_{izk} l_z \partial_k H_x^{\perp}. \quad (66)$$

Здесь $l = l_z$ — единичный вектор квантования орбитального момента пары, а $\mathbf{H}_{\perp} \mathbf{d} = 0$, где \mathbf{d} — спиновый вектор в двумерной (тонкой) плёнке сверхтекучей А-фазы He-3. Ещё одно возможное проявление нетривиальной топологии в 2D-случае может быть связано с попытками экспериментального обнаружения так называемых майорановских фермионов [241], например, в краевых состояниях на границе сверхтекучего He-3B с шероховатой стенкой или на поверхности колеблющейся проволоки в сверхтекучем He-3 в ланкастеровских экспериментах [242].

11. Критические скорости и спектр коллективных возбуждений в кроссовере БКШ – БЭК для s- и p-спаривания

В настоящем разделе мы кратко остановимся на спектре коллективных возбуждений в кроссовере БКШ – БЭК для s- и p-спаривания. Отметим, что в случае резонансного s-спаривания в ферми-газе нейтральных (незаряженных) частиц основной коллективной модой в БКШ-области являются звуковые колебания Боголюбова – Андерсона [243–246], а в БЭК-области имеют место результаты Боголюбова по слабонеидеальному бозе-газу с отталкиванием (в данном случае по газу составных бозонов с массой $2m$ и плотностью $n/2$). В то же время в случае триплетного p-спаривания возможно также возбуждение спиновых и орбитальных волн [25, 50–53, 57].

Теоретическому изучению спектра коллективных возбуждений для s-спаривания в газах и высокотемпературных сверхпроводниках было посвящено много работ [24, 247–251]. В данном разделе мы кратко остановимся вначале на результатах работы [24]. В этой работе

скорость звука, а также критическая скорость разрушения сверхтекучести была вычислена не только в разреженных БКШ- и БЭК-областях, но и в сложном переходном режиме. Для отрицательной длины рассеяния $a < 0$ и положительного химического потенциала $\mu \approx \varepsilon_F$ (глубоко в БКШ-области) спектр коллективных (звуковых) возбуждений линеен в согласии с теорией Андерсона – Боголюбова:

$$\Omega^2 = C_{\text{BCS}}^2 q^2, \quad (67)$$

где скорость звука вновь $C_{\text{BCS}} \approx v_F/\sqrt{3}$. В то же время для положительной длины рассеяния $a > 0$ и отрицательного химического потенциала $\mu < 0$ (глубоко в БЭК-области) спектр коллективных возбуждений — боголюбовский:

$$\Omega^2 = C_{\text{BEC}}^2 q^2 + \left(\frac{q^2}{4m}\right)^2, \quad (68)$$

где

$$C_{\text{BEC}} = \sqrt{\frac{\mu_{\text{Bose}}}{m_{\text{B}}}} \quad (69)$$

— боголюбовская скорость звука, а бозонный химический потенциал в трёхмерном случае выражается как

$$\mu_{\text{Bose}} = \frac{4\pi a_{2-2} n_{\text{B}}}{m_{\text{B}}}. \quad (70)$$

В формуле (70) $a_{2-2} = 0,6|a| > 0$ — отталкивательная длина рассеяния димера на димере, $n_{\text{B}} = n/2$ — бозонная плотность, $m_{\text{B}} = 2m$ — масса составных бозонов. При малых значениях абсолютной величины газового параметра $|a|p_F \ll 1$ легко показать, что $C_{\text{BEC}} \ll C_{\text{BCS}}$. Скорости звука начинают сравниваться только в промежуточной области, где $|a|p_F \geq 1$. Отметим, что в унитарном пределе при $1/a \rightarrow 0$, как показано в работе [24] на основе решения самосогласованной системы уравнений Леггетта для сверхтекучей щели и для сверхтекучей плотности, скорость звука $C_s \approx 0,4v_F$. На рисунке 18 показано поведение безразмерной скорости звука C_s/v_F и безразмерной критической скорости, при которой сверхтекучий

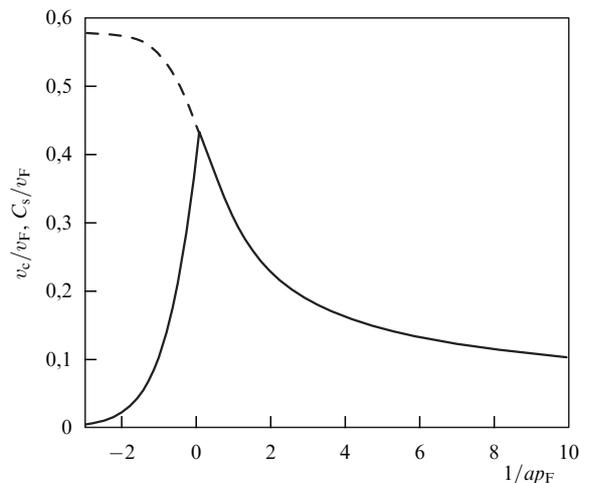


Рис. 18. Безразмерная скорость звука C_s/v_F и безразмерная критическая скорость v_c/v_F (в единицах скорости Ферми v_F) в трёхмерном кроссовере БКШ – БЭК для традиционного s-спаривания в зависимости от обратного газового параметра $1/ap_F$ [24].

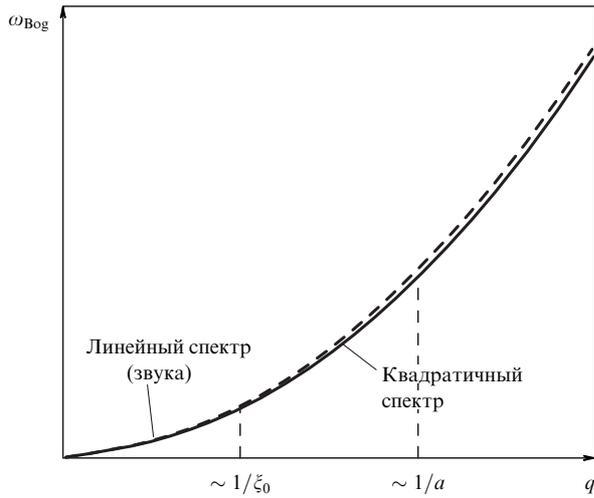


Рис. 19. Спектр коллективных возбуждений в разреженной БЭК-области. Сплошной линией обозначен боголюбовский спектр для точечных бозонов. Штриховая линия обозначает поправки к боголюбовскому спектру при больших волновых векторах $q \gg 1/a \gg 1/\xi_0$ [24].

поток разрушается спонтанной генерацией нормальных возбуждений согласно критерию Ландау [13, 28]. Отметим, что в сверхтекучей ферми-жидкости или ферми-газе критическая скорость находится из соотношения [24]

$$v_c = \min \left\{ C_s, \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \mu^2} - \mu}{m} \right)^{1/2} \right\}, \quad (71)$$

где Δ_0 — амплитуда сверхтекучей щели (для куперовского спаривания). Глубоко в разреженной БКШ-области при малых значениях газового параметра $|a|p_F \ll 1$ скорость звука $C_s = v_F/\sqrt{3}$, в то время как $v_c = \Delta/p_F \ll C_s$ благодаря распариванию куперовских пар. Естественно, что в разреженной БЭК-области критическая скорость совпадает со скоростью звука, $v_c = C_s$. Интересно, что благодаря составному характеру бозонов в резонансном ферми-газе в БЭК-области существуют нетривиальные поправки к боголюбовскому спектру (68), (69). Эти поправки представлены на рис. 19 [24]. Они наиболее существенны при больших волновых векторах $q \gg 1/a \gg 1/\xi_0$, где

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{n}v_a a_{2-2}} \quad (72)$$

— длина когерентности боголюбовского газа [28, 252, 253], и соответственно

$$\frac{\xi_0}{a} \sim (na^3)^{-1/2} \gg 1. \quad (73)$$

Измерения скорости звука в ультрахолодном ферми-газе приведены в работе [27]. Звук возбуждается в веретенообразном облаке газа атомов лития-6, пленённом в оптической дипольной ловушке. Атомы равно распределены по двум внутренним состояниям с наименьшей энергией. Параметр взаимодействия $1/k_F a$ варьируется путём перестройки длины s-рассеяния a и волнового вектора $k_F \equiv \sqrt{2m\varepsilon_F}/\hbar$, где $\varepsilon_F \equiv \hbar(3N\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$ — энергия Ферми невзаимодействующего ферми-газа в такой же ловушке. В свою очередь, a контролируется при помощи магнитного поля B , выбираемого в пределах от

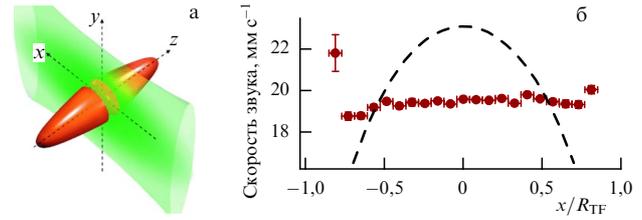


Рис. 20. (В цвете онлайн.) (а) Зелёный луч, краткое включение которого возбуждает звуковую волну в облаке атомов (показано красным). (б) Зависимость скорости звука от поперечной координаты x (кружки), показывающая, что волновой фронт плоский. Для сравнения штриховой линией нанесены значения, полученные в рамках изотропной модели (74) усреднением вдоль y . Координата x нормирована на радиус Томаса – Ферми. (Из работы [27].)

700 до 1100 Гс, по обе стороны от резонанса Фешбаха при $B_{\text{res}} = 832$ Гс [107] (на момент измерения считалось, что резонанс имеет место при $B_{\text{res}} = 834$ Гс [254], но это мало влияет на интерпретацию результатов). Волновой вектор Ферми k_F зависит от изменяемых частот ловушки и полного числа атомов N , которое варьируется от 6×10^4 для молекулярного БЭК до 5×10^5 вблизи и выше резонанса Фешбаха. Значения температуры лежат вблизи наименьших достижимых в подобных экспериментах и оцениваются как $\approx 0,1\varepsilon_F$. Звуковые волны возбуждаются лучом зелёного света (рис. 20а), который включается на короткое время. Зелёный луч создаёт отталкивающий потенциал, поскольку его длина волны 532 нм меньше, чем длина волны 671 нм наиболее сильного электродипольного перехода в литии. Подобный метод возбуждения ранее использовался для БЭК атомов [255]. Звуковые волны распространяются из плоскости возбуждения к краям вдоль длинного направления z . Волны наблюдаются по изменению плотности.

Фронт звуковой волны является плоским, несмотря на неоднородность облака в радиальных направлениях, что можно видеть на рис. 20б, где показано распределение скорости звука по поперечной координате. Для сравнения на этом рисунке приведена также расчётная зависимость, полученная в рамках модели изотропного распространения,

$$c_{\text{local}}(n(x, y, z)) = \sqrt{\frac{n}{m} \frac{d\mu}{dn}}, \quad (74)$$

которая предсказывает искривлённый волновой фронт. Видно, что изотропное приближение очевидным образом противоречит данным. Распространение звука, таким образом, близко к приближению узкого цилиндрического канала, что позволяет связать измеренную скорость звука с уравнением состояния для химического потенциала атома при нулевой температуре $\mu = \mu(n)$ [256]:

$$c(z) = \sqrt{\frac{\int n(x, y, z) dx dy}{m \int (d\mu/dn)^{-1} dx dy}}. \quad (75)$$

В эксперименте скорость звука измерена в большей части кроссовера БКШ–БЭК. На рисунке 21 показаны результаты измерений — зависимость нормированной скорости звука c_0/v_F ($v_F \equiv \hbar k_F/m$) от параметра взаимодействия $1/k_F a$. Приведена скорость звука в центральном сечении облака $z = 0$.

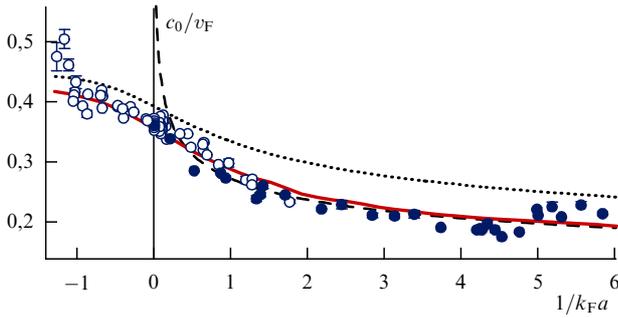


Рис. 21. (В цвете онлайн.) Нормированная скорость звука c_0/v_F в зависимости от параметра взаимодействия $1/k_F a$. Тёмные и светлые кружки отвечают измерениям в ловушке глубиной 140–500 нК и 0,6–80 мК соответственно. Сплошная красная линия — расчёты методом Монте-Карло. Пунктирная кривая — расчёт в модели среднего поля. Штриховая линия — формула (76) для БЭК-молекул при $a_{2-2} = 0,6a$. (Из работы [27].)

В приближении $T = 0$ единственным параметром системы является параметр взаимодействия $1/k_F a$. При $|1/k_F a| \ll 1$ газ находится в сильно взаимодействующем режиме, при $1/k_F a < -1$ газ представляет собой слабо взаимодействующую ферми-систему, а при $1/k_F a > 1$ — бозе-эйнштейновский конденсат молекул. Приближение среднего поля [10] и квантовый метод Монте-Карло [127] позволяют найти уравнение состояния во всех режимах взаимодействия. Среднеполевое приближение даёт скорость звука (пунктирная кривая на рис. 21), которая систематически выше измеренной почти при всех значениях $1/k_F a$. Результаты расчётов на основе квантового алгоритма Монте-Карло [127, 257], показанные красной сплошной линией, находятся в гораздо лучшем согласии с данными измерений.

В режиме БЭК, при $1/k_F a > 1$, состояние системы может рассматриваться как БЭК точечных молекул, взаимодействующих с длиной s -рассеяния a_{2-2} . Используя в выражении (75) для c_0 уравнение состояния (70), найдём

$$\frac{c_0}{v_F} = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{2} k_F a_{2-2} \right)^{1/5}. \quad (76)$$

Модель, точно учитывающая рассеяние четырёх фермионов, предсказывает $a_{2-2} = 0,6a$ [114]. С такой длиной рассеяния выражение (76) даёт скорость звука, совпадающую с измерениями и показанную на рис. 21 штриховой линией. Напротив, теория среднего поля [10], использующая основное состояние в форме прямого произведения куперовских пар, предсказывает, что $a_{2-2} = 2a$, и даёт скорость звука, которая на 27 % выше наблюдаемой в режиме БЭК. Результаты, полученные квантовым методом Монте-Карло [127, 257], хоть и ближе к измеренным данным, но в большей части области БЭК всё равно выше измеренных скоростей.

Меньшая скорость в большей части режима БЭК, при $1 < 1/k_F a < 5$, может быть следствием перемешивания первого и второго звуков [258]. Второй звук имеет меньшую скорость, что может приводить к замедлению скорости распространения возбуждения. Отличие температуры от нуля вряд ли стало причиной замедления звука: во-первых, в БЭК молекул не зарегистрирована тепловая компонента; во-вторых, на резонансе Фешбаха наблюда-

ется противоположный эффект — увеличение температуры приводит к увеличению c_0 .

Измерения на бозевской асимптоте кроссовера были проведены настолько далеко по параметру $1/k_F a$, насколько это оказалось возможно. Для достижения значений $1/k_F a > 5$ и магнитное поле, и глубина ловушки настраивались так, чтобы одновременно минимизировать k_F и a . При $1/k_F a > 5$ измерения показывают рост величины c_0/v_F . В этом режиме, однако, съёмка осложнена из-за недостаточного разлёта облака после выпуска из оптической ловушки: химический потенциал не настолько велик в сравнении с потенциалом магнитного поля, чтобы облако разлетелось достаточно для точного замера положения фронта звуковой волны.

В дальней фермиевской части резонанса, при $1/k_F a < -1,3$, распространение звука не наблюдается. В этом случае провал плотности просто заполняется, как в идеальном ферми-газе. При наименьших достигнутых температурах в области слабых взаимодействий газ не обязательно находится в сверхтекучей фазе. Гидродинамическое распространение звука в этом случае обеспечивается благодаря столкновениям, а не сверхтекучей компоненте.

Колебательные моды ультрахолодного газа, пленёного в веретенообразном потенциале, могут служить источником информации о свойствах газа [259–270]. В экспериментах подробно исследовалась дышащая мода в радиальном направлении [26, 111, 271–273]. Поведение частоты и декремента моды стали свидетельством сверхтекучести в газе ферми-атомов в режиме сильных s -взаимодействий [111, 272] и разрушения сверхтекучего состояния при уменьшении взаимодействия [26, 271]. Зависимость частоты от параметра взаимодействия использовалась для проверки уравнения состояния газа [26, 273], в том числе обнаружено отклонение от среднеполевой модели [273].

Дышащая мода возбуждается отключением веретенообразного потенциала ловушки на короткое время $\ll 1/\omega_{\perp}$. После восстановления потенциала газ колеблется в ловушке в течение времени t_{hold} . Затем, для того чтобы увидеть колебания малой амплитуды, ловушка выключается насовсем и облако разлетается в свободном пространстве в течение фиксированного времени $\gg 1/\omega_{\perp}$. Снимки газа после разлёта, соответствующие различным фазам колебаний, показаны на рис. 22. Для отыскания частоты колебаний ω и декремента $1/\tau$ зависимость размера облака от продолжительности колебаний подгоняется затухающей синусоидой

$$A \exp\left(-\frac{t_{\text{hold}}}{\tau}\right) \cos(\omega t_{\text{hold}} + \varphi), \quad (77)$$

как показано на рис. 23.

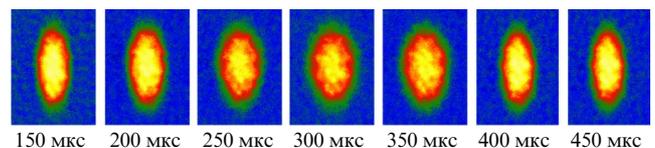


Рис. 22. (В цвете онлайн.) Поперечная дышащая мода. Облако атомов после колебаний в ловушке в течение переменного времени t_{hold} (указано под снимками) и последующего разлёта в течение 1 мс. Параметры эксперимента [272]: $N = 2 \times 10^5$, $\omega_{\perp}/(2\pi) = 1700$ Гц, $\omega_z/(2\pi) = 70$ Гц.

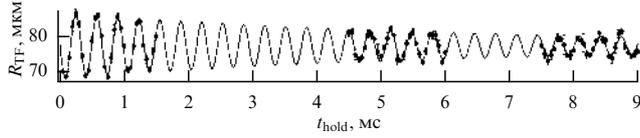


Рис. 23. Поперечная дышащая мода [272]. Радиус Томаса–Ферми разлетевшегося облака в зависимости от продолжительности колебаний t_{hold} . Данные показаны точками, подгоночная синусоида (77) — линией. (Из диссертации [274].)

Частоту радиальной дышащей моды ω можно рассчитать, предположив, что система является сверхтекучей жидкостью. В этом случае движение частиц подчиняется безвращательному уравнению Эйлера и уравнению непрерывности:

$$m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla V - \frac{\nabla P}{n} - \nabla \frac{m\mathbf{u}^2}{2}, \quad (78)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } \mathbf{u}n = 0, \quad (79)$$

где $n(\mathbf{x}, t)$ — полная концентрация атомов, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — поле скоростей пар атомов, P — полное давление, $V(\mathbf{x})$ — удерживающий потенциал. Сделав приближение для уравнения состояния

$$P = \text{const } n^{\gamma+1}, \quad (80)$$

можно найти, что в вытянутом цилиндрически-симметричном облаке частота дышащей моды зависит лишь от показателя γ и поперечной частоты [264, 266]:

$$\omega = \sqrt{2(\gamma+1)} \omega_{\perp}. \quad (81)$$

Для показателя γ , вычисленного в приближении среднего поля куперовских пар [264, 267], частота дышащей моды представлена на рис. 24. Приближение (80) естественным образом возникает как минимум в трёх случаях:

— на фермионной асимптоте кроссовера БКШ–БЭК при малом межатомном притяжении P равно давлению невзаимодействующего ферми-газа, что даёт $\gamma = 2/3$ и $\omega = \sqrt{10/3} \omega_{\perp}$;

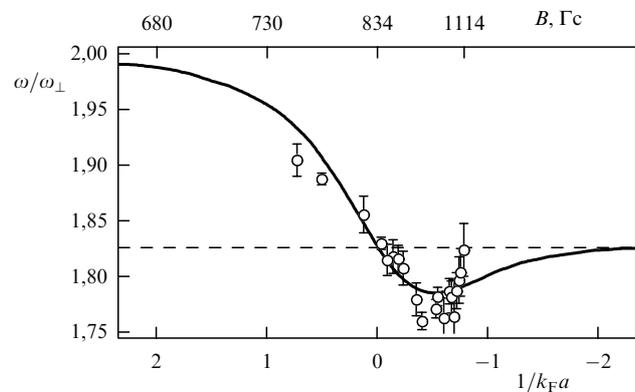


Рис. 24. Нормированная частота поперечной дышащей моды при разных отстройках от резонанса Фешбаха. Данные показаны точками, результаты моделирования в приближении среднего поля [264, 267] — сплошной линией. Штриховая линия — гидродинамическая частота на резонансе $\omega = \sqrt{10/3} \omega_{\perp}$. Отстройка отложена на нижней горизонтальной оси в единицах $1/k_F a$, а соответствующее магнитное поле — на верхней оси с нелинейной шкалой. (Из работы [26].)

— на бозонной асимптоте основной вклад в давление вносит среднее поле молекул (70) и, следовательно, среднеполевое приближение даёт $\gamma = 1$ и $\omega = 2\omega_{\perp}$;

— в унитарном пределе $\gamma = 2/3$, как и при слабом притяжении, поскольку давление имеет вид [275, 276]

$$P(n) = (1 + \beta) \frac{2}{5} n \varepsilon_F = (1 + \beta) \frac{2}{5} \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} n^{5/3}, \quad (82)$$

где $\beta = -0,63$ [107, 277].

Для газа невзаимодействующих частиц $\omega = 2\omega_{\perp}$, что совпадает с бозонным пределом в случае гидродинамических колебаний.

Результат измерения [26] частоты радиальной дышащей моды также приведён на рис. 24. Условия эксперимента подобны условиям представленного выше в этом разделе эксперимента по измерению скорости звука [27]. Взаимодействия между ферми-атомами в двух спиновых состояниях варьируются путём перестройки магнитного поля в диапазоне от 700 до 1100 Гс. Температуру можно оценить как $\simeq 0,1\varepsilon_F$. Измеренные частоты в целом согласуются со среднеполевым расчётом, в том числе видно согласие в унитарном пределе $1/k_F a = 0$.

Отклонения частоты дышащей моды от частоты в среднеполевой теории также представляют интерес. На рисунке 25 увеличена центральная часть графика 24 и добавлены замеры декремента. При уходе от резонанса в фермиевскую сторону, $B > 832$ Гс, видно, что значения частоты систематически отходят от предсказаний простой гидродинамической модели. Сначала в области $0 > 1/k_F a > -0,7$ частота систематически лежит ниже теоретической кривой, а в области $1/k_F a < -0,7$ ($B > 1050$ Гс) происходит резкий рост частоты. Рост частоты сопровождается пиком декремента затухания при $1/k_F a = -0,74$ ($B = 1080$ Гс). Ширина пика декремента по магнитному полю значительно уже, чем ширина резонанса Фешбаха, поэтому источником пиковых значений декремента не может быть процесс, связанный со средним полем или частотой межчастичных столкновений. Единственный процесс, который резко зависит от изменения B , — это резонанс между колебаниями дышащей моды и энергией связи куперовских пар.

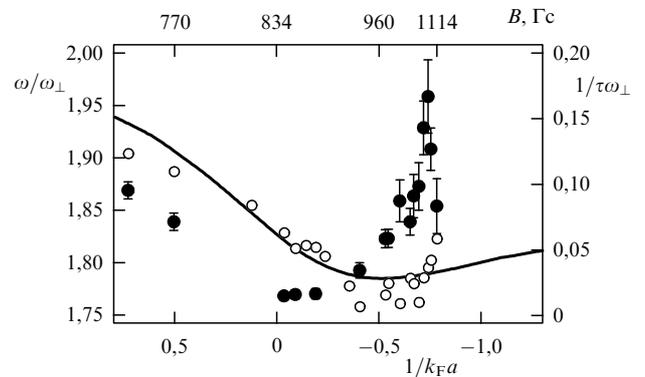


Рис. 25. Нормированный декремент и частота поперечной дышащей моды при разных отстройках от резонанса Фешбаха. Данные о декрементах показаны чёрными кружками. Для частоты приведены данные (светлые кружки) и результаты расчётов в приближении среднего поля [264, 267] (сплошная кривая). Отстройка отложена на нижней горизонтальной оси в единицах $1/k_F a$, а соответствующее магнитное поле — на верхней оси с нелинейной шкалой. (Из работы [26].)

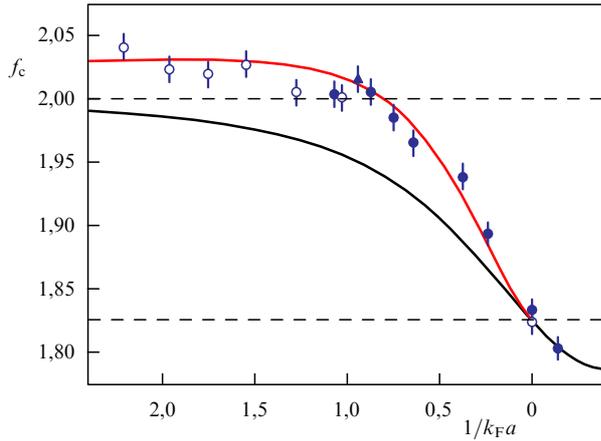


Рис. 26. Нормированная частота дышащей моды $f_c \equiv \omega/\omega_\perp$ в зависимости от параметра взаимодействия $1/k_F a$. Светлыми и тёмными кружками показаны данные. Расчётные кривые относятся к среднеполевой теории БКШ (нижняя кривая) и вычислениям квантовым методом Монте-Карло (верхняя кривая) и основаны на результатах работы [268]. Горизонтальные линии указывают значения в пределе БЭК ($f_c = 2$) и унитарном пределе ($f_c = \sqrt{10/3}$). (Из работы [273].)

Следовательно, пик затухания вблизи $B = 1080$ Гс, скорее всего, связан с разрушением куперовских пар фононами. В ранее выполненном похожем эксперименте [271] пик декремента также сопровождался резким ростом частоты дышащей моды. В работе [271] не было возможности связать пик декремента с отходом от частоты, предсказанной в рамках гидродинамики сверхтекучего газа, из-за неучтённого систематического сдвига в измерении одной из частот ловушки. Резкий рост затухания коллективных мод вблизи фазового перехода от сверхтекучего состояния к нормальному предсказан в работе [260].

При отходе в бозевскую сторону от резонанса Фешбаха ($1/k_F a > 0$) на рис. 24 и 25 видно, что частота дышащей моды уходит вниз относительно предсказания среднеполевой модели при $T = 0$. Показано [273], что конечная температура ведёт к понижению частоты дышащей моды. Авторы эксперимента [273], дополнительно снизив температуру в сравнении с экспериментом [26], показали, что в бозевской области частота дышащей моды лежит выше предсказаний среднеполевой модели, что можно видеть на рис. 26. Отклонение частоты вверх от среднеполевой модели вызвано флуктуационными поправками Ли–Хуанга–Янга [278, 279]. На рисунке 26 для сравнения приведены результаты расчётов квантовым методом Монте-Карло [268], которые включают в себя флуктуационные поправки.

12. Спектр орбитальных волн и парадокс орбитального момента в гидродинамике сверхтекучей А-фазы

В сверхтекучей А-фазе He-3 и в резонансном ферми-газе при реализации анизотропной А-фазы (точнее, для А1- и А2-фаз в сильных магнитных полях или при сильных разбалансах) возможно существование ещё одной интересной ветки в спектре коллективных возбуждений, а именно, так называемых орбитальных волн, связанных с вращением вектора квантования орбитального момента куперовской пары \mathbf{l} относительно перпендикуляр-

ной этому вектору оси. При малых волновых векторах спектр этой моды квадратичен (А-фазу сверхтекучего He-3 часто называют орбитальным ферромагнетиком, А1-фаза — также спиновый ферромагнетик) и в бозонном (БЭК) пределе [25, 36] $\Omega \sim q_z^2/m$, где ось z — ось квантования орбитального момента \mathbf{l} . Ситуация становится гораздо менее тривиальной в БКШ-области, где спектр орбитальных волн при малых волновых векторах имеет вид [36, 50, 53]

$$(\rho - C_0)\Omega \simeq \rho \frac{q_z^2}{m} \ln \frac{A_0}{v|q_z|}. \quad (83)$$

В литературе существуют большие расхождения по поводу величины коэффициента C_0 при низких частотах и малых волновых векторах. В одночастичном приближении в разреженной БКШ-области $C_0 \approx \rho$ и, более того, в теории слабой связи (при $T_{c1} \ll \varepsilon_F$) относительная разность плотности и этого коэффициента

$$\frac{\rho - C_0}{\rho} \sim \frac{A_0^2}{\varepsilon_F^2} \ll 1. \quad (84)$$

В А-фазе He-3 в приближении слабой связи $A_0 \sim T_{c1} \sim 1$ мК, в то время как $\varepsilon_F \sim 1$ К, и, таким образом, $A_0^2/\varepsilon_F^2 \sim 10^{-6}$. Дискуссионный вопрос состоит, однако, в том, сохраняется ли это утверждение в гидродинамическом пределе при учёте многочастичных взаимодействий. Отметим, что все исследователи сходятся на том, что в БЭК-области коэффициент

$$C_0 \simeq \frac{N(0)}{2} \int d\xi_p \left(1 - \frac{\xi_p}{|\xi_p|} \right), \quad (85)$$

где $N(0)$ обозначает плотность энергетических состояний на поверхности Ферми, обращается в нуль: $C_0 = 0$ при $\xi_p = p^2/2m + |\mu| > 0$. В то же время в БКШ-области при отрицательных значениях $\xi_p < 0$ выражение (85) определяет полную плотность, и в результате $C_0 \approx \rho$. Следовательно, спектр орбитальных волн в БЭК-области имеет вид

$$\Omega \simeq \frac{q_z^2}{m} \ln \left(\frac{A_0}{v_F|q_z|} \right). \quad (86)$$

Исходя из спектра (83) мы можем сделать похожую оценку и для плотности внутреннего орбитального момента в БКШ-области:

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{2m} (\rho - C_0) \mathbf{l}, \quad (87)$$

в то время как в БЭК-области мы имеем более естественное выражение:

$$\mathbf{L} = \frac{\hbar}{2m} \rho \mathbf{l}. \quad (88)$$

Важно, что в БКШ-области, как мы увидим ниже, значение коэффициента C_0 также определяет выражение для аномального члена в массовом токе, что приводит при $C_0 \neq 0$ к невыполнению закона сохранения полного импульса при нулевой температуре и тем самым к разрушению гидродинамического описания системы. При этом природу аномального члена в токе часто связывают с киральной аномалией, обуславливающей несохранение аксиального тока в квантовой электродинамике [54–56], а коэффициент C_0 (по аналогии с топологическим за-

рядом в 2D-системах) часто называют топологическим коэффициентом.

Отметим, что в известных экспериментальных работах Бевана и др. [50, 280] значение коэффициента C_0 определялось из измерений недиссипативного коэффициента трения d_{\perp} при рассеянии квазичастиц на вихрях. Измерения проводились в баллистическом бесстолкновительном режиме при низких температурах в He-3В и в гидродинамическом режиме при высоких температурах $T > 0,82T_c$ в He-3А (мы более подробно обсудим эти результаты в разделе 14). При этом осталась неизмеренной столкновительная область очень низких температур в анизотропной А-фазе. Именно эта область и является дискуссионной на предмет величины C_0 . Подчеркнём, что при конечных температурах проблем появления киральной аномалии и возможности гидродинамического описания фактически не существует, поскольку в этом случае нормальная (температурная) компонента является независимой гидродинамической переменной в схеме построения уравнений квантовой гидродинамики по Л.Д. Ландау. Наличие этой независимой переменной автоматически восстанавливает закон сохранения полного импульса системы при конечных температурах.

Подчеркнём, что в отсутствие внешнего магнитного поля анизотропная А-фаза реализуется (является глобальным экстремумом) на фазовой диаграмме сверхтекучего He-3 только при температурах, близких к критической температуре T_c . В отсутствие магнитного поля при нулевой температуре реализуется только изотропная В-фаза. Чтобы А-фаза "проросла" в нулевые температуры на фазовой диаграмме сверхтекучего He-3 (в виде так называемой А2-фазы), необходимы достаточно большие внешние магнитные поля $H \geq 1$ Тл, парамагнитно подавляющие В-фазу.

Кроме того, для перехода к гидродинамической области больших длин волн необходимы большие экспериментальные ячейки размером порядка 0,5–1 см, чтобы во всяком случае длина волны была меньше размера образца при измерении спектра и затухания коллективных возбуждений.

Было бы очень интересно существенно распространить результаты измерений [280] на очень низкие температуры $T \ll T_c$ и столкновительный режим для А2-фазы сверхтекучего He-3 в сильных магнитных полях, а также посмотреть, не возникнет ли существенное изменение топологического коэффициента C_0 в этой ситуации при переходе к гидродинамическому пределу очень больших длин волн при температурах, стремящихся к нулю.

Ещё одним очень важным обстоятельством для понимания экспериментальных данных является так называемое тождество Мермина–Хо в гидродинамике сверхтекучего He-3А,

$$\nabla_i v_{sj} - \nabla_j v_{si} = \frac{\hbar}{2m} \mathbf{l} (\partial_i \mathbf{l} \times \partial_j \mathbf{l}), \quad (89)$$

связывающее локальную завихренность сверхтекучей компоненты с несингулярными текстурами (градиентами) вектора орбитального момента \mathbf{l} .

Отметим, что тождество Мермина–Хо позволяет использовать установку для быстрых вращений ячейки со сверхтекучим He-3А (установку ROTA в низкотемпературной лаборатории в Хельсинки) для создания неод-

нородных в пространстве и времени орбитальных текстур для дальнейшего измерения в этих текстурах недиссипативного коэффициента трения d_{\perp} и топологического коэффициента C_0 в экспериментах Бевана и др. [50, 280].

Наконец, дополнительным и также весьма интересным экспериментальным предложением авторов данного обзора могло бы стать измерение коэффициента C_0 при аномальном члене в токе в умеренно чистом сверхтекучем He-3А. Напомним, что в сверхтекучем He-3 роль примесей играет аэрогель, представляющий собой совокупность переплетённых квазиодномерных нитей.

В этом контексте было бы весьма интересно проверить предсказания работ Андреева, Кагана [52] и Кагана, Ефремова [25, 57] о подавлении киральной аномалии и восстановлении гидродинамики на малых частотах, а также измерить спектр и затухание орбитальных волн в аэрогеле. При этом становится возможным напрямую получить из этих измерений частотную дисперсию и величину коэффициента C_0 при аномальном члене в токе в "грязном" (гидродинамическом) пределе малых частот $\Omega\tau \ll 1$ (при большой концентрации аэрогеля), а затем постепенно уменьшать его концентрацию, делая систему всё более и более чистой и переходя к баллистической области больших частот $\Omega\tau \gg 1$, т.е. к сверхчистому пределу по концентрации примесей.

При этом, конечно, необходимо учитывать изменение глобальной фазовой диаграммы сверхтекучего He-3 в присутствии большого количества аэрогеля [281]. Отметим, что в данном случае Воловик и Стоун придерживаются противоположных позиций, считая, что чем больше концентрация примесей, тем легче (в режиме $\Omega\tau \ll 1$) восстанавливается киральная аномалия в соответствии с концепцией спектрального потока (см. раздел 13).

Отметим, что даже в БКШ-области вычисления различных групп дают разные результаты для плотности орбитального момента. При $\mathbf{l} = \text{const}$ вычисления [282, 283] приводят к выражению (88) без топологического коэффициента C_0 даже в БКШ-пределе. В то же время включение в рассмотрение неоднородных текстур вектора \mathbf{l} восстанавливает выражение (87). Результаты [282, 283] позволяют нам говорить о парадоксе внутреннего орбитального момента в А-фазе сверхтекучего He-3. Отметим, что согласно Леггетту [284] N -частичный гамильтониан \hat{H} точно коммутирует с z -проекцией орбитального момента $\hat{L}_z = \hbar \hat{N}/2$. Это обстоятельство играет в пользу выражения (88). Отметим, что аналогичные вычисления внутреннего орбитального момента в сверхтекучем He-3А, БКШ-фазе для двумерных сверхтекучих ферми-газов и топологических сверхпроводниках с аномальным p - и f -спариванием проводились как в более ранней работе Воловика [285], так и в более поздней работе Воловика [286], работах японских теоретиков [287, 288], а также в работе Саулса [289].

В работах Воловика [285, 286] рассмотрение для БКШ-фазы сверхтекучей жидкости или газа с орбитальным моментом \mathbf{v} куперовской пары было проведено на уровне анализа собственных значений оператора комбинированной орбитально-калибровочной симметрии $\hat{Q} = \hat{L}_z - \mathbf{v}\hat{N}/2$, где \hat{L}_z — оператор z -проекции орбитального момента, отвечающий SO(2)-вращению, \hat{N} — оператор калибровочной симметрии, связанный с гло-

бальной симметрией $U(1)$, отвечающей за сохранение полного числа частиц.

Отметим, что в базовой работе Воловика [285] был рассмотрен так называемый адиабатический переход из БЭК- в БКШ-фазу, т.е. фактически переход от отрицательных значений химического потенциала μ к положительным значениям. Мы вернёмся к анализу этого перехода в следующих разделах.

Важно подчеркнуть, что в вычислениях Саулса [289], Тады [287] и комментариях Воловика [286] на эти вычисления вновь возникла очень интересная дискуссия по вопросу о значении плотности внутреннего орбитального момента в БКШ-фазе для р-спаривания в ограниченной геометрии типа двумерного диска.

Отметим, что все результаты вычислений [286–288] для 2D-диска показывают существенное (по параметру Δ/ε_F) уменьшение полного момента относительно значений $\hbar N/2$ за счёт частично-дырочной асимметрии крайних состояний при больших орбитальных моментах $\nu = 3$ (для f-спаривания). Однако в соответствии с вычислениями Тады [287] для более актуального случая $\nu = 1$ (р-спаривание) в БКШ-фазе вновь восстанавливается интуитивно ожидаемый результат Леггетта $\hbar N/2$.

Подчеркнём, что в работах Саулса [289] плотность орбитального момента определялась типом граничных условий. Результат Леггетта в [289] сохраняется для случая зеркального рассеяния на границе и нарушается для диффузного рассеяния.

В работе Воловика 2015 г. [286] было высказано несогласие с результатом Тады [287] для р-спаривания. В согласии с Саулсом отмечалось, что результат зависит от граничных условий. При этом в работе Воловика [286] для геометрии диска были выбраны граничные условия, не нарушающие аксиальную симметрию, но нарушающие чётность. Нарушение чётности в граничных условиях регулирует фаза α . Интересно, что при $\alpha = 0$ восстанавливается результат Леггетта, а при $\alpha = \pi/2$ для $l = 1$ получается результат, аналогичный результату Тады при $l = 3$ с существенным уменьшением полного момента. В общем случае уменьшение орбитального момента определяется в работе [286] параметром $\sin^2 \alpha$.

Подчеркнём, что все вычисления в работах [285–288] проводились на уровне решения одночастичных уравнений Боголюбова–Де Жена без учёта сильных многочастичных корреляций (остаточных взаимодействий) и затухания квазичастиц.

Мы вернёмся к обсуждению этих результатов в следующих разделах при рассмотрении концепции спектрального потока.

Как кратко упоминалось выше, с парадоксом внутреннего орбитального момента в А-фазе тесно связана ещё одна трудная проблема несохранения аномального тока (киральной аномалии) в квантовой гидродинамике сверхтекучей А-фазы при низких температурах $T \rightarrow 0$. Напомним, что гидродинамика предполагает выполнение условий локального термодинамического равновесия и описывает все низкочастотные (голдстоуновские) коллективные моды, для которых частота $\omega \rightarrow 0$ при $q \rightarrow 0$. Фактически, область применения уравнений гидродинамики ограничивается условиями $\omega\tau \ll 1$ и $q l_{MF} \ll 1$, где $l_{MF} \sim v_F \tau$ — длина свободного пробега, τ — время свободного пробега. Напомним также, что гидродинамическое описание проводится в терминах ограниченного набора гидродинамических переменных, причём

согласно подходу Ландау в левой части гидродинамических уравнений обычно стоит частная производная по времени от плотности сохраняющейся гидродинамической переменной, а в правой части — обобщённая дивергенция от соответствующего потока (массы, импульса, энергии и т.д.). Подчеркнём, что согласно общим симметричным соображениям полная плотность массового тока при $T \rightarrow 0$ в БКШ-области определяется выражением

$$\mathbf{j}_{\text{tot}} = \mathbf{j}_B + \mathbf{j}_{\text{an}}, \quad (90)$$

где аномальный ток

$$\mathbf{j}_{\text{an}} = -\frac{\hbar}{4m} C_0 (\mathbf{l} \text{rot} \mathbf{l}). \quad (91)$$

В БЭК-области для составных бозонов с $S = l = 1$ коэффициент $C_0 = 0$ и аномальный ток отсутствует. Полный массовый ток равен бозонному току

$$\mathbf{j}_B = \rho \mathbf{v}_s + \frac{\hbar}{2m} \text{rot} \frac{\rho \mathbf{l}}{2}, \quad (92)$$

где $\rho = mn$ — полная плотность, $\mathbf{L} = (\hbar/2m)\rho \mathbf{l}$ — плотность орбитального момента, \mathbf{v}_s — сверхтекучая скорость. В то же время в БКШ-области в одночастичном приближении $C_0 \approx \rho$, и в результате наличие аномального тока (91) в выражении (90) приводит к несохранению полного тока массы (или полного импульса) \mathbf{j}_{tot} при $T = 0$. Это значит, что мы не можем представить частную производную по времени от полного тока в виде обобщённой дивергенции тензора потока импульса,

$$\frac{\partial j_{\text{tot}}^i}{\partial t} \neq -\frac{\partial}{\partial x_k} (\Pi_{ik}). \quad (93)$$

Таким образом, не выполняется закон сохранения импульса. Это значит, что присутствие аномального члена разрушает гидродинамику сверхтекучей жидкости в А-фазе при $T \rightarrow 0$. Вклад производной по времени от аномального тока в уравнение (93) может быть компенсирован только с помощью добавления члена с нормальной плотностью и относительной нормальной скоростью $\rho_n(T=0)(v_n - v_s)$ в полный ток уже при $T = 0$ [53, 58, 59, 290]. Добавление этого члена противоречит нашим интуитивным представлениям о том, что гидродинамика квантовой сверхтекучей жидкости при нулевой температуре может быть описана только в терминах сверхтекучей компоненты (без привлечения нормальной компоненты). Конечно, если было бы возможно показать, что коэффициент $C_0 \approx \rho$ в высокочастотной (бесстолкновительной) области, а при переходе к низким частотам (в столкновительной области частот) этот коэффициент испытывает сильную дисперсию и становится очень малым, $C_0(\omega\tau \ll 1) \rightarrow 0$, то мы восстановили бы гидродинамику при $T = 0$ только в терминах сверхтекучей компоненты.

Эта идеология была сформулирована Андреевым и одним из авторов обзора в работе [52] и в более поздних работах и монографии [18, 25, 57]. В работе [52] также был развит подход, связанный с включением фермионной голдстоуновской моды (обусловленной наличием нулей в сверхтекучей щели для А-фазы) в общую схему уравнений гидродинамики. В результате в [52] была построена супергидродинамика сверхтекучего He-3A. В то же время в работе [53] Воловиком с соавторами было высказано

утверждение, что коэффициент C_0 при аномальном члене в токе всегда порядка полной плотности ρ в силу существенных топологических соображений, связанных с существованием нулевой моды в решении уравнений Боголюбова – Де Жена для спектра квазичастиц в неоднородной текстуре вектора \mathbf{l} . Эти уравнения при $\mathbf{l} \parallel \text{rot} \mathbf{l}$ оказываются эквивалентными уравнению Дирака в магнитном поле $\mathbf{V} = \text{rot} \mathbf{l}$ для безмассовых частиц. Соответственно, авторы [53] связывают природу аномального тока в (91) с киральной аномалией в квантовой электродинамике [291].

13. Два подхода к сложной проблеме киральной аномалии в А-фазе сверхтекучего He-3

Рассмотрим более подробно два элегантных подхода к трудной проблеме киральной аномалии в сверхтекучей А-фазе He-3. В первом подходе авторы [25, 52, 57] описывают полное гидродинамическое действие S_{tot} при малых частотах и волновых векторах как сумму бозонной и фермионной частей:

$$S_{\text{tot}} = S_B + S_F, \tag{94}$$

где $S_B(\rho, \mathbf{v}_s, \mathbf{l})$ — бозонная часть действия, а S_F — фермионная часть действия, связанная с нулями сверхтекучей щели (рис. 27). Основная идея в работах [25, 52, 57] состояла в том, чтобы проверить, связана ли киральная аномалия (или, точнее, член $\mathbf{j}_{\text{ан}} \mathbf{v}_s$ в выражении для полной энергии) напрямую с нулями сверхтекучей щели. Авторы [25, 52, 57] полагали, что в конденсированной системе при низких частотах единственная причина для аномалии может быть связана с наличием инфракрасных сингулярностей. Отметим, что ультрафиолетовые особенности отсутствуют в физике конденсированного состояния, в отличие от квантовой электродинамики. Сильные (критические) флуктуации также подавлены в трёхмерной системе. Таким образом, основная идея авторов [25, 52, 57] заключалась в том, чтобы проверить опасные инфракрасные области, где сверхтекучая щель практически обращается в нуль.

В более общем плане можно сказать, что основная идея [25, 52, 57] состояла в построении суперсимметричной гидродинамики, описывающей все бесщелевые голдстоуновские моды, включая фермионную голдстоуновскую

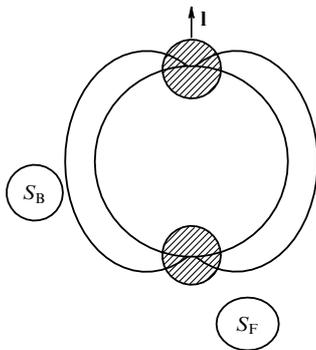


Рис. 27. Качественная иллюстрация двух вкладов в фермионную (S_F) и бозонную (S_B) части полного гидродинамического действия S_{tot} для А-фазы при $T \rightarrow 0$ [25, 52, 57].

моду, связанную с нулями щели. Авторы [52] были мотивированы красивой работой Волкова и Акулова [292], в которой безмассовое нейтрино было впервые включено в эффективный инфракрасный лагранжиан электрослабого взаимодействия. После интегрирования по фермионным переменным авторы [25, 52, 57] вывели эффективное бозонное действие и проверили, какие инфракрасные расходимости присутствуют в нём. В результате они получили

$$S_B^{\text{eff}} = S_B + \Delta S_B, \tag{95}$$

где связанный с градиентной орбитальной энергией вклад от опасных участков вблизи нулей щели в "жидкокристаллическую" часть эффективного действия [293] имеет вид, характерный для ситуации нуль-заряда в квантовой электродинамике:

$$\Delta S_B = -\frac{\rho_F^2 v_l}{32\pi^2} \int d^4x \left\{ [\mathbf{l} \times \text{rot} \mathbf{l}]^2 + \frac{v_l^2}{v_1^2} (\mathbf{l} \text{rot} \mathbf{l})^2 \right\} \left(\ln \frac{l_{\text{MF}}^2}{r^2} \right). \tag{96}$$

В (96) $x = (\mathbf{r}, t)$, радиус-вектор r меняется в пределах $\xi_0 < r < l_{\text{MF}}$, где $\xi_0 \sim v_F / \Delta_0$ — длина когерентности, l_{MF} — длина свободного пробега. Выражение (96) имеет общий характер и справедливо как в режиме слабой связи, так и в режиме сильной связи. Отметим, что в (96) поперечная скорость $v_t \sim v_F \Delta_0 / \varepsilon_F \ll v_F$, в то время как продольная скорость $v_l \sim v_F$ в режиме слабой связи. Мы видим, что только слабые логарифмические расходимости присутствуют в выражении для ΔS_B . В то же время мы не видим в (96) никаких следов сильных расходимостей, которые должны иметь вид δ -функции, поскольку фермионная плотность ρ_F , входящая в выражение для S_F (95) и связанная с участками вблизи нулей щели, мала по сравнению с полной плотностью: $\rho_F \ll \rho$. Говоря другими словами, мы не видим никаких следов аномального вклада

$$\mathbf{j}_{\text{ан}} \mathbf{v}_s = -\frac{\hbar}{4m} C_0 (\mathbf{l} \text{rot} \mathbf{l}) (\mathbf{l} \mathbf{v}_s) \tag{97}$$

в ΔS_B . Таким образом, даже если киральная аномалия существует в БКШ-области для сверхтекучей А-фазы, она не связана напрямую с опасными участками импульсного пространства вблизи нулей щели. Следовательно, киральная аномалия не носит инфракрасного характера.

Подчеркнём, что авторы [53, 58, 59, 290] предложили другой очень красивый подход, основанный на формальном сходстве между проблемой аномального тока в А-фазе He-3 и проблемой киральной аномалии в квантовой электродинамике. Они полагают, что аномальный ток с большим значением коэффициента $C_0 \sim \rho$ в БКШ-области для сверхтекучей А-фазы не связан напрямую с нулями щели и, таким образом, отсутствует даже в супергидродинамике [25, 52, 57]. Они считают, что аномальный ток связан с глобальными топологическими соображениями, и поэтому топологический член должен быть добавлен вручную в схему суперсимметричной гидродинамики. Чтобы проиллюстрировать эту точку зрения, авторы [53, 290] решают микроскопические уравнения Боголюбова – Де Жена для фермионных квазичастиц в неоднородной орбитальной текстуре вектора \mathbf{l} , в

которой $\mathbf{I} \parallel \text{rot} \mathbf{l}$. Более конкретно, они рассматривают случай, когда

$$\mathbf{I} = \mathbf{l}_0 + \delta \mathbf{l}, \quad (98)$$

причём

$$l_z = l_{0z} = e_z, \quad l_y = \delta l_y = Bx, \quad l_x = 0, \quad (99)$$

где \mathbf{e}_z — направление невозмущённого вектора \mathbf{l} . В этом случае

$$\mathbf{l} \text{rot} \mathbf{l} = l_z \frac{\partial l_y}{\partial x} = B = \text{const}, \quad (100)$$

и соответственно

$$\mathbf{j}_{\text{ан}} = -\frac{\hbar}{4m} C_0 B \mathbf{e}_z. \quad (101)$$

После линеаризации уравнения Боголюбова–Де Жена становятся эквивалентными уравнению Дирака в однородном магнитном поле $B = \mathbf{l} \text{rot} \mathbf{l}$. Решение уравнения Дирака определяет структуру уровней энергии для фермионных квазичастиц:

$$E_n(p_z) = \pm \sqrt{\xi^2(p_z) + \tilde{\Delta}_n^2}, \quad (102)$$

где $\xi(p_z) = p_z^2/2m - \mu$, $e = p_z/p_F = \pm 1$ — электрический заряд, а величина

$$\tilde{\Delta}_n^2 = 2nv_{\text{f}}^2 p_F |e| B \quad (103)$$

отвечает квадрату щели, причём поперечная скорость $v_{\text{f}} \sim v_F \Delta_0/\varepsilon_F$. Для значений главного квантового числа $n \neq 0$ (рис. 28) все уровни энергии в (102) обладают щелью $\tilde{\Delta}_n \neq 0$ и двукратно вырождены относительно замены $p_z \rightarrow -p_z$. Таким образом, их вклад в полный ток равен нулю при $T \rightarrow 0$. Однако для $n = 0$ щель становится равной нулю ($\tilde{\Delta}_0 = 0$) и мы имеем асимметричную киральную ветвь, которая существует только при $p_z < 0$, или, более точно, только для одного знака eB (см. [53]). Энергетический спектр для $n = 0$ имеет вид

$$E_0 = \xi(p_z). \quad (104)$$

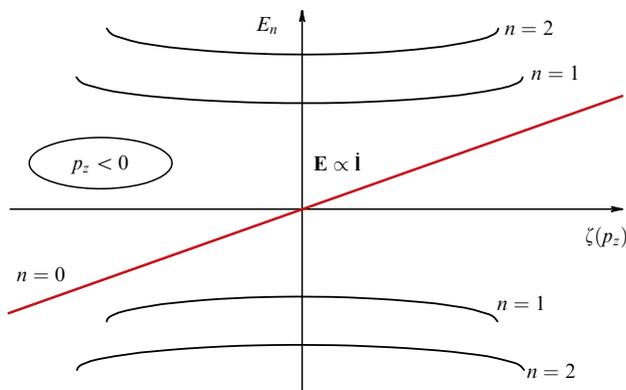


Рис. 28. Структура уровней энергии для уравнения Дирака в магнитном поле $B = \mathbf{l} \text{rot} \mathbf{l}$. Все уровни энергии с квантовыми числами $n \neq 0$ дважды вырождены. Нулевой уровень киральный. Он пересекает начало координат при $|p_z| = p_F$ в БКШ-области. На рисунке мы иллюстрируем также концепцию спектрального потока, которую кратко обсудим в конце этого раздела [53].

Мы можем сказать, что для нулевого уровня Ландау отсутствует щель в спектре и, более того, в БКШ-области $E_0 = 0$ при $|p_z| = p_F$. Это значит, что киральная ветвь пересекает начало координат (см. рис. 28) и мы имеем нулевую моду.

Отметим, что в БЭК-области $E_0 \geq |\mu|$ и нулевой уровень Ландау не пересекает начало координат. Отсутствие нулевой моды в БЭК-области является физической причиной, объясняющей, почему в ней $C_0 = 0$. Нулевой уровень Ландау даёт аномальный вклад в полный массовый ток в БКШ-области:

$$\mathbf{j}_{\text{ан}}(\mathbf{r} = 0) = -\mathbf{e}_z (\mathbf{l} \text{rot} \mathbf{l}) \int_{p_z < 0} \frac{p_z}{2\pi^2} d\xi(p_z) = -\frac{\hbar C_0}{4m} (\mathbf{l} \text{rot} \mathbf{l}) \mathbf{e}_z, \quad (105)$$

где

$$\frac{(\mathbf{l} \text{rot} \mathbf{l}) p_z}{2\pi^2 p_F} = \frac{eB}{2\pi^2} = \int |f_0|^2 \frac{dp_y}{2\pi}, \quad (106)$$

и соответственно $C_0 \approx \rho$ в БКШ-области. Отметим, что в (106) f_0 является волновой функцией нулевого уровня Ландау. Легко видеть, что интеграл в (105), (106) в основном набирается от узкой цилиндрической трубки внутри ферми-сферы длиной p_F в направлении, параллельном оси z , и квадратом радиуса цилиндра, равным (рис. 29)

$$\langle p_y^2 \rangle \sim p_F |eB|. \quad (107)$$

В соответствии с идеями авторов [53, 58, 59, 285, 290] эта трубка играет роль эффективного вихря в шестимерном $\mathbf{k} - \mathbf{r}$ -пространстве, обеспечивая таким образом возникновение нормального тока, соединяющего при $T = 0$ точки северного и южного полюсов ферми-сферы (см. рис. 29), в которых обращается в нуль сверхтекучая щель в He-3A.

Почеркнём, что согласно работам Воловика, Стоуна и Комбеско [53, 58, 59, 283, 290] именно вдоль нормального тока осуществляется перенос спектрального веса от нормальной к сверхтекучей компоненте (от отрицательных к положительным значениям энергии) в эффективном электрическом поле $\mathbf{E} \propto \dot{\mathbf{l}}$, направленном вдоль оси вихря. Эта перекачка импульса необходима для сокращения киральной аномалии посредством добавления швингеровского члена, пропорционального $\mathbf{E} \mathbf{B} \propto \dot{\mathbf{l}} \text{rot} \mathbf{l}$, и восстановления закона сохранения полного импульса.

В некотором смысле подход Андреева, Кагана более прагматичный. С гидродинамическим описанием He-3A

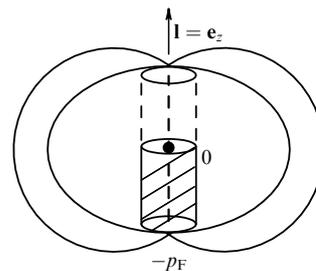


Рис. 29. Основной вклад в аномальный коэффициент C_0 обусловлен узкой цилиндрической трубкой длиной p_F и шириной $\langle p_y^2 \rangle \sim p_F |eB|$ внутри ферми-сферы [25, 52, 57].

при $T = 0$ нет проблем на уровне двух первых членов в полном импульсе. Поэтому практичнее и проще по стараться положить равным нулю коэффициент при третьем аномальном члене в токе на низких частотах, чем спасать ситуацию искусственным добавлением четвёртого члена, при этом с определённым насилием над схемой гидродинамики сверхтекучей жидкости по Ландау.

Важно отметить, что согласно Кагану, Ефремову [25, 57] точное сокращение аномалий между несохраняющимися членами в уравнениях для временных производных от аномального тока и тока нормальной компоненты при $T = 0$ должно быть в явном виде продемонстрировано в сверхтекучем He-3A на основе аккуратного вывода и решения нелинейных кинетических уравнений для динамики бесщелевых фермиевских квазичастиц в неравновесной текстуре вектора орбитального момента \mathbf{l} .

С таким подходом соглашался и пытался его реализовать Н.Б. Копнин [294, 295], анализируя другую важную задачу о нулевой киральной моде для энергетических уровней квазичастиц, локализованных в корах вихрей, и дополнительной недиссипативной силе трения (так называемой спектральной силе трения Копнина [58]). К этой задаче мы ещё более подробно вернёмся в разделе 14 обзора.

Отметим, что, как уже кратко обсуждалось выше, попытка явно продемонстрировать сокращение аномалий за счёт спектрального потока была предпринята в работе Воловика [285] при рассмотрении адиабатического перехода от состояния с отсутствием нулей щели и отрицательными значениями химического потенциала ($\mu < 0$) в БЭК-фазе к состоянию с положительным значением ($\mu > 0$) в БКШ-фазе. В этом подходе, однако, Г.Е. Воловик предполагал изменение во времени только химического потенциала, рассматривая при этом неоднородные, но стационарные текстуры вектора \mathbf{l} , что нарушает, с нашей точки зрения, полную самосогласованность вывода уравнений гидродинамики, когда должны зацепляться друг за друга временные производные различных гидродинамических переменных, включая временную производную такой критически важной для проблемы киральной аномалии переменной, как вектор орбитального момента \mathbf{l} .

Отметим, что основной результат работ [53, 290], связанный с отсутствием щели у нулевого уровня энергии Ландау, очень устойчив по отношению к малым изменениям текстуры вектора \mathbf{l} в уравнении (99). Проведённый нами анализ показывает, что учёт малых изгибных поправок, приводящих к появлению поперечной проекции магнитного поля $[\mathbf{l} \times \text{rot} \mathbf{l}] \neq 0$, а также малых неоднородностей магнитного поля (приводящих к появлению двухъямного потенциала) не подавляет нулевую моду в уравнении Боголюбова–Де Жена, т.е. не приводит к возникновению щели для нулевого уровня энергии Ландау. Несмотря на устойчивость нулевой моды, авторы [25, 52, 57] выразили сомнения относительно вычисления аномального коэффициента C_0 , основанного на решении уравнения Дирака в однородном магнитном поле $B = \text{rot} \mathbf{l}$. С их точки зрения, вычисление C_0 исходя из (105), (106) является слишком сильным упрощением сложной многочастичной задачи. Особенно они подчёркивают роль конечного затухания $\gamma = 1/\tau$ и других остаточных взаимодействий в разрушении киральной аномалии (связанной с состояниями внутри

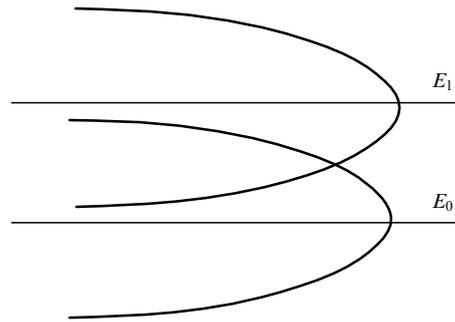


Рис. 30. Возможная роль затухания (или других остаточных взаимодействий) в размытии нулевого уровня Ландау и восстановлении гидродинамики сверхтекучей жидкости при низких частотах [25, 52, 57].

ферми-сферы на рис. 29) и в восстановлении гидродинамики сверхтекучей жидкости без дополнительных вкладов (содержащих нормальную скорость v_n и нормальную плотность ρ_n). Действительно, если, например, затухание γ (или другое остаточное взаимодействие) будет существенно больше, чем расстояние между уровнями Ландау $\omega_0 = v_t p_F (\text{rot} \mathbf{l} / p_F)^{1/2}$ в случае, когда $\xi(p_z) = 0$, то нулевой уровень Ландау будет размыт затуханием и гидродинамический режим на низких частотах будет восстановлен (рис. 30). Более подробно эти соображения изложены в [25, 52, 57]. В данном обзоре мы приглашаем экспериментаторов активно включиться в разрешение этой трудной проблемы. С экспериментальной точки зрения было бы очень интересно измерить спектр и затухание орбитальных волн при низких температурах $T \ll T_c$ как в чистом сверхтекучем He-3A, так и в присутствии примесей (роль примесей в сверхтекучем He-3 играет аэрогель).

Ещё раз подчеркнём, что если авторы работ [25, 52, 57] используют затухание как аргумент для возможного подавления киральной аномалии на низких частотах, то в подходе Воловика [53, 58, 59], Комбеско [290] и Стоуна [283] затухание играет прямо противоположную роль, обеспечивая спектральный поток вдоль кора вихря (см. рис. 28). Аналогичным образом противоположные надежды возлагаются различными группами теоретиков и на тождества Уорда в инфракрасной области в связи с возможным подавлением или стабилизацией киральной аномалии при выходе за одночастичную задачу и при учёте сильных многочастичных корреляций и затухания квазичастиц в сверхтекучем He-3 и других рассматриваемых в данном обзоре системах (см. [25, 57, 296]).

14. Гидродинамика сверхтекучих квантовых жидкостей и газов. Коллективные моды во вращающемся He и бозе-эйнштейновских конденсатах квантовых газов

Если в предыдущем разделе речь в основном шла об особенностях орбитальной гидродинамики в сверхтекучих ферми-системах с куперовским спариванием, то в этом разделе мы, наоборот, больше сосредоточимся на коллективных модах (связанных с наличием вихревых решёток) и на силе трения нормальных возмущений о вихри в сверхтекучей бозе-жидкости He-4 [15–18, 36–48] (см. также классический результат [49] про изгибные колебания вихревой нити в нормальной жидкости) и

бозе-эйнштейновских конденсатах квантовых газов [297–301]. Отметим, что вихревые решётки в сверхтекучих ферми-жидкостях He-3A и He-3B [50, 51, 280, 294, 302], а также в резонансных ферми-газах в режиме кроссовера БКШ–БЭК [303, 304] также подробно изучались как экспериментально (в случае He-3), так и теоретически благодаря нетривиальной топологии и богатству вихревых фаз и топологических возбуждений в этих системах, особенно в случае анизотропного р-спаривания.

Большой вклад в понимание физики различных топологически нетривиальных вихревых состояний и структуры вихревых решёток, а также структуры протяжённых коров вихрей (с большим по сравнению с межатомным расстоянием радиусом кора $\xi_0 \gg d$) с возможностью различных трансформаций параметра порядка внутри кора в А- и В-фазах сверхтекучего He-3 внёс Г.Е. Воловик (см., в частности, изложение этого круга вопросов в монографиях [50, 302]).

Отметим, что одной из интересных задач для сверхтекучих систем со сложным параметром порядка в фермионной БКШ-фазе, таких как сверхтекучий He-3, является задача об энергетическом спектре квазичастиц, локализованных в корах вихря.

Согласно результатам Воловика и Копнина для вихря с цилиндрической геометрией в He-3A структура энергетических уровней очень напоминает структуру уровней для квазичастиц в поле неоднородных текстур вектора орбитального момента \mathbf{l} (см. раздел 13). В коре вихря имеется только один асимметричный (киральный) уровень, пересекающий линию нулевой энергии. При нулевой температуре, являясь функцией обобщённого углового момента Q , этот уровень энергии пересекает горизонтальную ось при $Q = 0$ и отвечает дискретному набору точек с целыми значениями момента $Q = 1, 2, \dots$, отделённых друг от друга мини-щелью $\Omega_0 = \Delta^2/\varepsilon_F$ (рис. 31).

Этот результат очень важен в связи со следующими обстоятельствами. Дело в том, что, как мы уже кратко упоминали в предыдущих разделах, в середине 1990-х годов Копнин, Таулес и Стоун расширили дискуссию о существовании киральной аномалии в физике конденсированного состояния, перенеся её на проблему возмож-

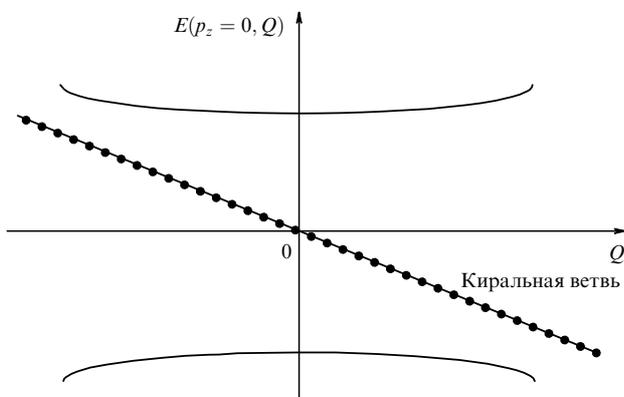


Рис. 31. Структура уровней в сердцевине вихря He-3A [25, 57]. Все ветви чётные по обобщённому моменту импульса Q , кроме ветви $E(p_z = 0, Q) = -\omega_0 Q$, пересекающей 0 при $Q = 0$, которая киральна (нечётна по Q). Эта ветвь согласно [50, 302] участвует в обмене импульсом между фермионами сердцевины вихря и теплового резервуара.

ного вклада нулевой киральной моды в корах вихрей в так называемую спектральную (недиссипативную) силу трения Копнина, которая вместе со стандартными для вращающихся бозе-систем силами Иорданского и Магнуса может возникать в вихревой динамике фермионного He-3A при рассеянии квазичастиц на вихрях. При этом Стоун отстаивал в этой дискуссии позиции Воловика, Таулес и Ао не верили в возникновение спектральной силы, а Копнин занимал промежуточную позицию, полагаясь на конкретные результаты своих вычислений.

Отметим, что сила трения Копнина вновь полностью определяется переносом спектрального веса от нулевой моды ($Q = 0$) к состояниям с $Q > 0$ вдоль кора вихря. Таким образом, здесь возникает определённая трудность в обосновании результатов строго при нулевой температуре $T = 0$ и при отсутствии примесей, когда рассеяние квазичастиц полностью отсутствует. Следовательно, в этом случае мы находимся в баллистической области по параметру $\Omega_0\tau(T = 0) \gg 1$, где имеем дискретный набор точек по квантовому числу $Q = 0, 1, 2, \dots$, и, в соответствии с идеологией Воловика и Стоуна, спектральный поток в этом случае полностью подавлен. В итоге восстанавливается результат Таулеса и Ао [305] с подавлением спектральной силы трения (Таулес и Ао называют эту ситуацию фазой Берри).

При этом спектральный поток восстанавливается только при конечных температурах, $\Omega_0\tau(T) \ll 1$, когда переменная Q становится квазинепрерывной.

Подчёркнём, что в вычислениях Копнина и Стоуна наличие спектральной силы трения было теоретически продемонстрировано при $\Omega_0\tau \ll 1$ для высоких температур, близких к критической температуре T_c в А-фазе He-3. Этот результат, как мы указывали в разделе 12, был подтверждён измерениями недиссипативного коэффициента трения d_{\perp} в He-3A в экспериментах Бевана и др. (см. [280] и рис. 18.5 в монографии [50], где для He-3A $d_{\perp} \rightarrow 1$ при $T \rightarrow T_c$ в режиме $\Omega_0\tau \ll 1$).

Подчёркнём, что в своих вычислениях Н.Б. Копнин, наряду с He-3A, рассматривал также вопрос о передаче спектрального веса, связанного с нулевыми модами в корах вихрей, и в сверхтекучем изотропном He-3B, и в обычных сверхпроводниках второго рода. В этих системах сверхпроводящая щель не имеет нулей, но роль топологических точек (нулей щели) в спектре фермиевских квазичастиц в данном случае играет наличие квантованных по циркуляции вихрей, создающих потенциал типа Ааронова–Бома.

Для этих систем (в частности, для сингулярных вихрей в He-3B) Н.Б. Копнин предложил интерполяционную формулу по параметрам $\Omega_0\tau(T)$ и $\Delta(T)/T$ и установил изменение знака недиссипативного коэффициента трения $d_{\perp}(T)$ при переходе от бесстолкновительного режима, $\Omega_0\tau(T) \gg 1$, к столкновительному режиму, $\Omega_0\tau(T) \ll 1$ (см. уравнение (25.17) в [50]).

В бесстолкновительной области очень низких температур результаты Копнина вновь совпадают с экспериментальными результатами Бевана и др. [280] по измерению d_{\perp} для сверхтекучего He-3B ($d_{\perp} \rightarrow 0$ при $\Omega_0\tau \gg 1$ и $T \rightarrow 0$, см. рис. 25.1 в [50]).

Ещё один интерполяционный результат Копнина связан с рассмотрением затухания $\gamma = 1/\tau$, обусловленного наличием примесей в сверхпроводнике второго рода. Величина γ конечна даже при $T = 0$ в "умеренно чистом" пределе.

Нам представляется очень интересным вывести ин-терполяционную формулу для C_0 по параметру $\Omega\tau$ (где теперь Ω — не постоянная мини-щель, а бегущая частота орбитальной волны $\Omega(q) \rightarrow 0$ при $q \rightarrow 0$) из построения правильных инфракрасных тождеств Уорда для вершины $\Gamma(\Omega, q)$ и собственно-энергетической части $\Sigma(\Omega, q) = \text{Re } \Sigma(\Omega, q) + i \text{Im } \Sigma(\Omega, q)$. Построение тождеств Уорда следует осуществить с учётом сильных много-частичных корреляций (остаточных взаимодействий) и затухания квазичастиц при переходе к гидродинамиче-скому пределу малых частот $\Omega(q)\tau \ll 1$ и волновых век-торов $ql_{\text{MF}} \ll 1$ (l_{MF} — длина свободного пробега) для спектра орбитальных волн в сверхтекучем He-3A при очень низких температурах.

Здесь, согласно идеологии Андреева, Кагана, при учёте сильных многочастичных корреляций (остаточных взаимодействий) и различных механизмов затухания квазичастиц и коллективных возбуждений возможна промежуточная область частот $\Omega\tau \sim 1$, где спектр орби-тальных волн может быть перезатухшим или где в более общем случае начинается сильное переразложение дей-ствительной или мнимой части спектра. Отметим, что перезатухшие ветви спектра в сверхтекучем He-3A возни-кают в вычислениях Брусова и др. [306] в технике фейн-мановских функциональных интегралов.

Подобный сценарий с переходом от пропагацион-ного, линейного спектра антиферромагнитных спино-вых волн на больших частотах к перезатухшему, диффу-зионному типу спектра на малых частотах (фактически сценарий мощного переразложения в уравнении для спектра по параметру $\Omega\tau$) также был реализован при $T = 0$ в диаграммных вычислениях Чубукова [307] при рассмотрении в примесной диаграммной технике спектра и затухания спиновых волн в слабодопированных ВТСП-купратах.

Отметим, что совсем недавно (в 2014–2016 годах) Халдейн, Спивак и др. [296, 308–310] открыли дискуссию о возможном вкладе киральной аномалии в продольное магнитосопротивление в популярных в настоящее время дираковских полуметаллах на основе висмута, включая топологические изоляторы $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ (вблизи критиче-ской точки по концентрации x Sb [311, 312]) и нематиче-ские сверхпроводники Bi_2Se_3 , допированные Cu, Sr или Nb [313].

В данном классе материалов теоретические исследо-вания сопровождаются очень интересными эксперимен-тальными работами Кима и др. [311, 312] (по измерению продольной магнитопроводимости и аномального вкла-да в неё при гелиевых температурах 2–4 К), не только весьма важными для развития фундаментальной физики конденсированного состояния, но и очень перспектив-ными для приложений в нанoeлектронике и спинтронике. Мы обсудим этот класс материалов более подробно в заключительном разделе нашего обзора.

Подчеркнём, что вихревые решётки в сверхтекучем He-4 и в бозе-эйнштейновских конденсатах (для состав-ных бозонов со спином $S = 0$) существенно проще с топологической точки зрения. Это обусловлено скаляр-ностью параметра порядка для данного класса систем (в отличие от тензорного параметра порядка для сверхте-кучего He-3 со спином пары $S = 1$). Основы теории вих-ревых решёток во вращающемся сверхтекучем He-4 и базовые экспериментальные результаты в этой области изложены в классической монографии Халатникова [16],

известной статье Бекаревича и Халатникова [40], а также в обзорах Андроникашвили и Мамаладзе [41] и Сонина [42]. Напомним, что в сверхтекучем He-4 при угловых частотах вращения цилиндрического сосуда с гелием $\Omega \geq \Omega_{c1}$ в центре сосуда (на оси цилиндра) возникает первый вихрь, а при частотах

$$\Omega_{c1} \ll \Omega \ll \Omega_{c2}, \tag{108}$$

где Ω_{c1} , Ω_{c2} — первая и вторая критические частоты вращений, в системе возникает треугольная решётка квантовых вихрей. Квантованные вихри были предска-заны Фейнманом и Онзагером в сверхтекучем He-4 [37–39]. Теория вихревого состояния в сверхпроводниках второго рода была построена Абрикосовым [314]. Отмет-им, что в плотной бозе-жидкости (для He-4) первая критическая частота $\Omega_{c1} \sim 0,1 \text{ c}^{-1}$, в то время как вторая критическая частота (связанная с перекрытием коров вихрей) $\Omega_{c2} \sim 10^{11} \text{ c}^{-1}$ очень велика и экспериментально недостижима. В разреженных бозе-газах размер кора вихря существенно больше (см. формулу (72)), и в результате частота Ω_{c2} не столь велика. Важно отметить также, что при выводе уравнений гидродинамики вра-щающегося гелия с большим числом вихрей в работах [40–42] используется так называемое супермакроскопи-ческое усреднение [16, 36, 43] по масштабам, много бóльшим среднего расстояния между вихрями. В резуль-тате не только диссипативная скорость нормальной компоненты, но и бездиссипативная скорость сверхтеку-чей компоненты имитируют твердотельное движение: $\mathbf{v}_s \approx [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]$ плюс малые поправки, связанные с упру-гостью вихревой решётки и силой трения нормальных возбуждений (фононов и ротоннов в сверхтекучем гелии) о вихри [40, 41, 315–317]. Таким образом, средняя завих-ренность становится порядка

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}_s \approx 2\boldsymbol{\Omega}, \tag{109}$$

где направление вектора $\boldsymbol{\Omega}$ совпадает с осью z в цилин-дрической геометрии. Соответственно, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|$ обо-значает единичный вектор вдоль локального направле-ния (в общем случае деформированной) вихревой решётки. Со средней завихренностью связана плотность числа вихрей на 1 cm^2 :

$$\frac{\hbar}{m_B} n_v = 2\Omega, \tag{110}$$

где $\hbar/m_B = \Gamma$ — квант циркуляции. Для бозе-жидкости He-4 m_B — масса атома He-4, для сверхтекучей ферми-жидкости или газа $m_B = 2m$. При построении нелинейной теории упругости вихревой решётки в общем виде удобно использовать переменные теории поля для искривлённого пространства (такие как метрический тен-зор) и число узлов решётки; последняя переменная фактически является топологическим инвариантом при отсутствии разрывов решётки (дислокаций) [36, 45, 46]. В результате из уравнения Эйлера для сверхтекучей скоро-сти можно вывести в общем виде закон сохранения числа вихрей:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{v}_L, \boldsymbol{\omega}], \tag{111}$$

где \mathbf{v}_L — скорость вихревой решётки. В разность этой скорости и сверхтекучей скорости в перпендикулярном

направлении к осям вихрей, $\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_{s\perp}$, кроме членов, связанных с упругостью вихревой решётки [18, 36], вносят вклад силы трения нормальных возбуждений о вихри, пропорциональные относительной скорости $\mathbf{w}_\perp = \mathbf{v}_{n\perp} - \mathbf{v}_{s\perp}$ нормальной и сверхтекучей компонент в перпендикулярном к вихрям направлении и определяемые коэффициентами Холла – Вайнена B, B' [16, 316, 317]. Отметим, что один из этих коэффициентов B имеет диссипативный характер, тогда как другой коэффициент B' холловского типа и бездиссипативен. В работе [36] Андреевым и одним из авторов данного обзора была высказана идея о том, что в пределе большого количества вихрей (и большой интенсивности процессов переброса при рассеянии нормальных возбуждений на вихрях, приводящих к релаксации импульса квазичастиц) мы можем перейти к пределу гидродинамики быстрых вращений. В этом пределе мы будем иметь одну общую скорость нормальной и сверхтекучей компонент в перпендикулярном к осям вихрей направлении, $\mathbf{v}_{n\perp} = \mathbf{v}_{s\perp}$, и две разные скорости, $\mathbf{v}_{n\parallel} \neq \mathbf{v}_{s\parallel}$, в направлении вдоль осей вихрей. Можно сказать, что в этом пределе мы имеем кристалл в поперечном к осям вихрей направлении и свободную сверхтекучую жидкость в продольном направлении. Отметим, что этот предел достигается при низких частотах, когда выполняется не только стандартное для гидродинамики соотношение $\omega\tau_N \ll 1$ (где τ_N — нормальное время релаксации возбуждений, связанное с их рассеянием друг на друге), но и дополнительно

$$\omega\tau_U \ll 1, \quad (112)$$

где обратное время рассеяния нормальных возбуждений на вихрях с процессами переброса

$$\frac{1}{\tau_U} \sim B\Omega. \quad (113)$$

При температурах $T \sim 1$ К в сверхтекучем He-4 безразмерный коэффициент Холла – Вайнена $B \sim 1$, и для реализации гидродинамики быстрых вращений достаточно выполнения условия $\omega \ll (1/\tau_U \sim \Omega)$ вне зависимости от соотношения между временами τ_N, τ_U рассеяния возбуждений друг на друге и на вихревой решётке с процессами переброса. Отметим, что в гидродинамике быстрых вращений второй звук (связанный с относительной скоростью нормальной и сверхтекучей компонент $\mathbf{w} \neq 0$) распространяется только вдоль осей вихрей, в то время как в перпендикулярном направлении мы имеем диссипативную теплопроводностную моду. Спектр этой моды вместо стандартного выражения для второго звука $\omega = u_{II}q$ приобретает в пределе быстрых вращений вид

$$\omega = i \frac{\kappa_\perp q_\perp^2}{2C_p\rho} \pm \sqrt{u_{II}^2 q_z^2 - \left(\frac{\kappa_\perp q_\perp^2}{2C_p\rho}\right)^2}, \quad (114)$$

где C_p — теплоёмкость при постоянном давлении, κ_\perp — коэффициент теплопроводности вихрей в перпендикулярном к осям вихрей направлении, u_{II} — скорость второго звука. Интересно также отметить, что при низких температурах $T \rightarrow 0$ члены с нормальной компонентой полностью исчезают в гидродинамике сверхтекучего He-4 и тем самым стирается различие между гидродинамикой медленных и быстрых вращений. При этом скорость вихревой решётки \mathbf{v}_L отличается от

сверхтекучей скорости в перпендикулярном к вихрям направлении $\mathbf{v}_{s\perp}$ на члены, связанные с упругостью вихревой решётки. Линеаризация нелинейной теории упругости, развитой в работе [36], определяет в этом случае спектр колебаний вихревой решётки. Согласно результатам Ткаченко [47, 48] коллективные колебания вихревой решётки соответствуют моде сжатия и сдвиговой моде, причём сдвиговая мода обладает нетривиальной дисперсией

$$\omega_t^2 = c_t^2 \frac{C_s^2 q_\perp^4}{4\Omega^2 + C_s^2 q_\perp^2}, \quad (115)$$

где

$$c_t^2 = \frac{\hbar\Omega}{8m} \quad (116)$$

— квадрат скорости поперечного звука в вихревой решётке, а C_s^2 — квадрат скорости первого звука. При самых малых волновых векторах $q_\perp \ll 2\Omega/c_t$ спектр сдвиговых волн Ткаченко квадратичен:

$$\omega_t = \frac{c_t C_s q_\perp^2}{2\Omega}. \quad (117)$$

При больших волновых векторах $q_\perp > 2\Omega/c_t$ спектр волн Ткаченко становится линейным: $\omega_t = c_t q_\perp$. Подчёркнём, что согласно Бейму [297] квадратичный характер спектра ткаченковской моды на малых волновых векторах в сверхтекучем газе и бозе-эйнштейновских конденсатах может иметь драматические последствия для чисто двумерных течений с $q_z = 0$. Он приводит к логарифмической расходимости среднего квадрата смещения единичной вихревой линии от положения равновесия благодаря возбуждению длинноволновых ткаченковских мод:

$$\frac{\langle \mathbf{u}^2 \rangle}{b^2} \sim \frac{T}{\Omega} \frac{n_v}{nL} \ln \frac{q_{\max}}{q_{\min}}, \quad (118)$$

где $b = (\hbar/2\pi m\Omega)^{1/2}$ — среднее расстояние между вихрями, L — высота сосуда с гелием (или размер эффективного третьего измерения в квазидвумерных магнитных ловушках), n_v и n — плотности вихрей и частиц, причём отношение $p = nL/n_v$ безразмерно, $q_{\max} = 2\Omega/c_t$, $q_{\min} = 2\pi/R$, R — радиус цилиндра с гелием. При $\langle \mathbf{u}^2 \rangle/b^2 \sim 1$ в системе происходит плавление вихревой решётки и фазовый переход вихревой кристалл – вихревая жидкость [300, 318, 319]. Отметим, что режима расплавленной вихревой решётки практически невозможно достичь в плотном сверхтекучем He-4, где всегда фактор заполнения $p \gg 1$ и в результате $\langle \mathbf{u}^2 \rangle/b^2 \ll 1$. Кроме того, в сверхтекучем He-4 очень трудно создать чисто двумерные течения. Тем не менее, и в этом случае Гиффорд и Бейм [320] предсказывают логарифмическую расходимость коррелятора,

$$\frac{\langle |\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|^2 \rangle}{b^2} \propto T \ln R_\perp, \quad (119)$$

при низких температурах и очень больших расстояниях $R_\perp^2 \gg Lb$, где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \{\mathbf{R}_\perp, R_z\}$. В то же время в разреженных бозе-газах этот критерий выполнить существенно легче. Фазовый переход вихревой кристалл – вихревая жидкость возможен и при температурах $T = 0$

за счёт квантового плавления вихревого кристалла. Согласно Бейму [297] при $T = 0$ вместо выражения (118) для разреженного бозе-газа имеем

$$\frac{\langle \mathbf{u}^2 \rangle}{b^2} \propto \frac{1}{p} \frac{b}{\xi_0}, \quad (120)$$

где ξ_0 — вновь длина когерентности или радиус кора вихря (72). Таким образом, для квазидвумерных ловушек с очень малым третьим измерением L мы можем достичь предела $p \geq 1$ и выполнить критерий плавления Линдемана [321]. Необходимо подчеркнуть, что, кроме моды сжатия и сдвиговой моды, в вихревой решётке и даже для изолированной вихревой нити имеется ещё одна ветка возбуждений, а именно, изгибные колебания вихревой нити. Их спектр был определён ещё в работе Томсона (лорда Кельвина) в 1880 г. Оказывается, что он имеет квадратичный характер $\omega_b \propto q_z^2 \ln(1/q_z)$. На первый взгляд кажется, что такой квазидномерный квадратичный спектр должен приводить при малых q_z и низких температурах к сильно расходящимся инфракрасным смещениям вихревой нити $\langle \mathbf{u}^2 \rangle \propto T \int dq_z / q_z^2$ и (по аналогии с полимерами) даже к сворачиванию вихревой нити в клубок (глобулу). Однако, как было показано в работе [36], на самом деле эта ветвь колебаний не соответствует изгибу, а связана с вращением деформированной нити вокруг её оси так, что векторное произведение смещения вихря и скорости смещения $[\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}] \neq 0$. В результате кванты изгибных колебаний вихревой нити приобретают собственный квант момента \hbar (диамагнитная ситуация), а спектр изгибных колебаний приобретает цель $\hbar\Omega$ и становится равным [36]

$$\hbar\omega_b = \hbar\Omega + \frac{q_z^2}{2m} \ln \frac{1}{q_z d}, \quad (121)$$

где d — межатомное расстояние в сверхтекучем He-4. Наличие щели в спектре (121) стабилизирует изгибные колебания изолированной вихревой нити в сосуде с гелием и приводит при низких температурах к конечному квадрату её смещения

$$\frac{\langle \mathbf{u}^2 \rangle}{R^2} \propto \frac{Tmd^2}{\hbar^2} \frac{d}{R} \frac{1}{\ln(R^2/d^2)}. \quad (122)$$

Именно благодаря этому обстоятельству Паккард и др. [322–324] могли наблюдать (реально они сфотографировали — рис. 32) вихревую решётку в сверхтекучем He-4. Позднее вихревая решётка наблюдалась в разреженных бозе-газах щелочных элементов (^{23}Na и ^{87}Rb [325–329] — рис. 33) и в режиме кроссовера БКШ–БЭК для составных бозонов (молекул $^6\text{Li}_2$) в резонансе Фешбаха [330].

15. Заключение

Несмотря на бурный рост числа публикаций за последние 10–15 лет и очевидный прогресс как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения, проблемы кроссовера БКШ–БЭК и гидродинамики сверхтекучих резонансных ферми–бозе-газов и смесей всё ещё далеки от полного понимания. В данном обзоре мы уже сформулировали ряд интересных нерешённых (как экспериментально, так и теоретически) задач. В этом контек-

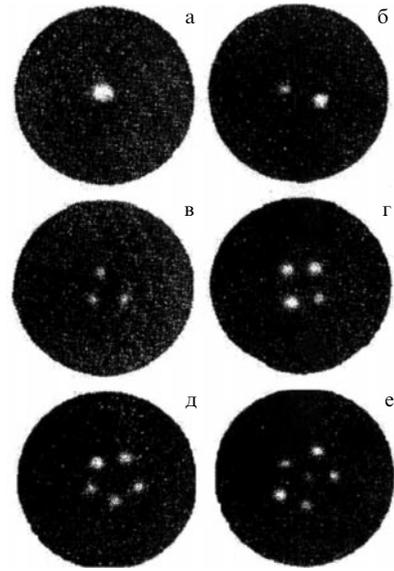


Рис. 32. Образование вихревой решётки в сверхтекучем He-4 по экспериментальным результатам Холла и Вайнена [316, 317], Ярмчука, Паккарда, Гордона [322–324]. На рисунках а–е показано изменение числа вихрей от 1 до 6.

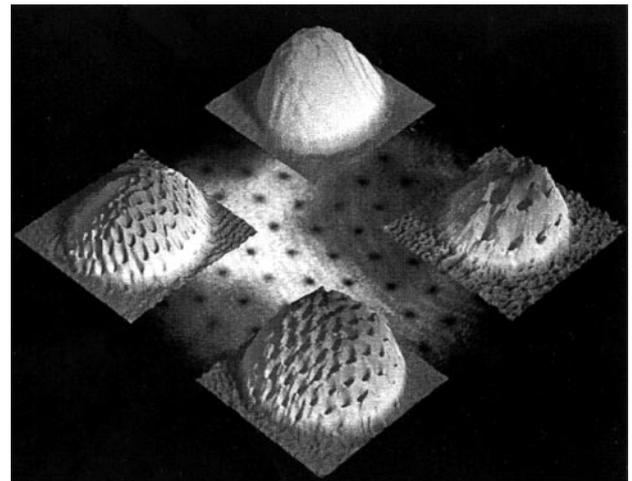


Рис. 33. Вихревая решётка во вращающемся разреженном бозе-газе ^{23}Na [329].

сте мы также можем отметить интересную проблему предела квантовой вязкости [122, 331, 332], актуальную не только для ультрахолодных квантовых газов, но и для космологии и физики элементарных частиц. Есть и другие аспекты, связанные, например, с вращением вихревых решёток в нейтронных звёздах, с разнообразными вариантами расслоения на фазы (типа "лазанья" или "паста-спагетти") и формированием фермионных и бозонных (пионных) конденсатов в ядерной физике, многочастичных фермионных и бозонных комплексов в физике нерелятивистских кварков и нуклонов [333–337], с термодинамикой и поведением квазичастиц в унитарном пределе, представляющих интерес для исследователей в самых различных областях физики. Эти задачи ждут своего решения, представляя собой вызов как для опытных исследователей, так и для молодых людей, только начинающих свою карьеру в науке.

Наконец, отметим недавнее экспериментальное открытие [90] аномальной сверхпроводимости (по-видимому, кирального $d + id$ -типа) с критической температурой $T_c \simeq 1,7$ К и сильной связью (большим отношением T_c/ϵ_F) в пределе очень малой двумерной плотности $n_{2D} \sim 10^{12}$ см⁻² в бислоях графена, которые формируются в результате подкрутки на малый ("магический") угол твиста $\theta \simeq 1,2^\circ$ слоистой графеновой сверхструктуры. Возникающее при этом фазовое расслоение [72], по-видимому, приводит к фрагментации многослойного графена с образованием своеобразной сверхрешётки типа АВ–АА–...–АВ из бислоев графена со структурой АА и АВ.

Отметим, что большое отношение критической температуры T_c к энергии Ферми ϵ_F позволяет нам говорить о близости бислою графена к ситуации кроссовера БКШ–БЭК между локальными и протяжёнными парами в d -канале (см. раздел 6 настоящего обзора). Тем самым перебрасывается мостик между рассматриваемой нами физикой и фазовыми диаграммами кроссовера БКШ–БЭК в сверхтекучих квантовых газах (разделы 3–5) и аналогичными явлениями и сверхпроводящими фазовыми диаграммами в физике высокотемпературных сверхпроводников и дираковских полуметаллов.

Отметим, что совсем недавно Спивак и др. [308–310] и Халдейн [296] распространили дискуссию о возможном вкладе киральной аномалии, пропорционального скалярному произведению $\mathbf{E}\mathbf{V}$ в присутствии (часто параллельных) магнитных (\mathbf{V}) и электрических (\mathbf{E}) полей, в междолинных переходах носителей тока и продольное магнитосопротивление в 3D-дираковских полуметаллах и топологических изоляторах (с топологически защищёнными дираковскими точками) типа $\text{V}_{1-x}\text{Sb}_x$ в окрестности квантовой критической точки по концентрации (x) Sb (см. также экспериментальную статью Кима и др. [311] по дираковским и вейлевским полуметаллам, а также статью про киральную аномалию в графене [312]).

Отметим, что роль коллективной моды в 3D-дираковских полуметаллах и топологических изоляторах в присутствии магнитного поля могут играть магнитоплазмоны. В сильных квантующих магнитных полях, в так называемом суперквантовом пределе, при частичном заполнении лишь одного (нижнего) уровня Ландау спектр электронов становится квазиодномерным. Соответственно, появляется возможность понизить эффективную размерность коллективной моды и получить бесщелевой характер спектра магнитоплазмонов даже в 3D-полуметаллах.

Напомним, что в 3D-металлических системах спектр плазмонов в отсутствие магнитного поля обычно имеет плазменную щель благодаря наличию ионной кристаллической решётки и условию локальной электронейтральности. В то же время в 2D-системах (в частности, в таких как монослой и бислой графена) спектр плазмонов имеет характерную корневую зависимость от волнового вектора [338] и является бесщелевым (голдстоуновским) в конечном окне (интервале) частот.

Соответственно, основной задачей эксперимента в 3D-дираковских полуметаллах являются, с одной стороны, измерения на нулевой частоте и на низких частотах (ДС транспортные измерения) магнитопроводимости $\sigma_{zz}(B)$, а с другой стороны, микроволновое и терагерцовое измерения спектра магнитоплазмонов $\omega(q, B)$ для разных частотных интервалов по параметру $\omega\tau$ как в

квазиклассическом режиме слабых магнитных полей, так и в сильных квантующих магнитных полях в интервале 1–10 Тл. Такие измерения возможны как в нашей стране, так и в нескольких ведущих лабораториях Нидерландов, Франции и США. В то же время основными задачами теории являются определение аналога важного топологического коэффициента C_0 (см. разделы 12, 13 обзора) в дираковских полуметаллах и выявление его поведения при больших и малых частотах по параметру $\omega\tau$.

Отметим, что в некотором смысле, в соответствии с идеологией Лафлина [339], центры ларморовских орбит для сильнокоррелированных электронов в дираковских полуметаллах в больших квантующих магнитных полях могут образовать своего рода вигнеровский кристалл в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

В этом кристалле продольные магнитоплазменные колебания решётки могут оставаться щелевыми в силу условия электронейтральности и иметь конечную плазменную щель при малых частотах и волновых векторах (именно поэтому в режиме дробного квантового эффекта Холла электронная подсистема рассматривается как несжимаемая [339, 340]). В то же время поперечные (сдвиговые) магнитоплазменные колебания в электронной подсистеме могут соответствовать бесщелевым голдстоуновским модам или иметь очень малую щель.

Эти моды могут иметь линейный (магнитоакустический) спектр, подобно альвеновским волнам в магнитогидродинамике плазмы [13], или даже квадратичный спектр, подобно геликоидальным волнам Константинова, Переля [341], возникающим уже в квазиклассическом описании для нескомпенсированных металлов в магнитном поле.

Такие волны, как мы уже отмечали, могут быть истинно бесщелевыми или иметь небольшую щель релятивистской природы, подобно магнонам в ферромагнетике [28]. В любом случае физика этих волн очень близка к физике орбитальных волн в He-3A, поскольку они всегда соответствуют малой вращающейся поперечной компоненте магнитного поля на фоне большой постоянной продольной компоненты. Это делает спектральное уравнение для такого типа волн очень похожим на уравнение Ландау–Лифшица для магнонов в ферромагнетике, и тем самым (как проиллюстрировано, например, в [18]) на спектральное уравнение для орбитальных волн в сверхтекучем He-3A.

Отметим, что уже в квазиклассическом пределе малых магнитных полей из измерения продольных щелевых магнитоплазменных мод в параллельных электрическом и магнитном полях мы, тем не менее, можем извлечь важную необходимую информацию относительно величины топологического коэффициента C_0 исходя из правила сумм [309] между квадратом щели и продольной магнитопроводимостью $\sigma_{zz} \propto \omega_{pl}^2 \tau$.

Подчеркнём, что как продольная магнитопроводимость (в параллельных электрическом и магнитном полях) σ_{zz} , так и квадрат магнитоплазменной щели ω_{pl}^2 линейно пропорциональны коэффициенту C_0 . При этом сам коэффициент C_0 в одночастичном приближении определяется и прямо пропорционален произведению универсальных постоянных, таких как число долин N_v в дираковском полуметалле, дираковская скорость v , заряд электрона e и постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$.

Интересной задачей на ближайшие годы как для теоретиков, так и для экспериментаторов будет обобщить результаты по вычислению и измерению плазменной щели и продольной магнитопроводимости на квантовый случай очень больших магнитных полей, очень низких температур и очень малых плотностей носителей (суперквантовый предел).

Этот предел, согласно Спиваку, описывается следующей цепочкой неравенств:

$$\gamma = \frac{1}{\tau} < vL_B < \{\Omega_c, \mu, T\}, \quad (123)$$

где $L_B = \sqrt{\hbar c/eB}$ — магнитная длина, и неравенство $\Omega_c \tau \gg 1$ отвечает слабо уширенным уровням Ландау в сильном квантующем магнитном поле. Такие оценки отвечают сильным магнитным полям напряжённостью больше или порядка 10 Тл и температурам, существенно более низким, чем в экспериментах Кима (лежащим в милликельвиновой области).

В этом пределе как в столкновительном случае $\mu \gg T$, так и в бесстолкновительном случае $\mu \ll T$, по мысли Спивака, также могут проявляться очень интересные инфракрасные расходимости в выражениях для плотности состояний, проводимости и в других важных характеристиках системы (таких как изменение числа частиц в долине при междолиновых переходах).

Отметим также, что ведущиеся в настоящее время интенсивные экспериментальные и теоретические исследования квантовой гидродинамики в сверхчистом графене [342], киральной аномалии в топологическом изоляторе $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ [311, 312], нематической анизотропной сверхпроводимости в Bi_2Se_3 , допированном Cu , Nb или Sr [313] и в других дираковских полуметаллах важны для развития фундаментальной физики конденсированного состояния и весьма перспективны для возможных приложений в наноэлектронике и спинтронике.

Возвращаясь к аномальной сверхпроводимости и кроссоверу БКШ–БЭК в бислое графена, ещё раз подчеркнём, что фазовая диаграмма сверхпроводящего и нормального состояний этой системы очень напоминает фазовую диаграмму слабодопированных ВТСП-купратов (рассмотренных в разделе 6 данного обзора). При этом в пределе малых плотностей носителей (при малом отклонении от соответствующего моттовского изолятора [90] половинному заполнению) в бислое графена должна реализовываться БЭК-фаза локальных пар с d-спариванием, а при больших плотностях носителей — БКШ-фаза протяжённых куперовских пар в киральном d-канале.

Доминирующим механизмом сверхпроводимости в БКШ-фазе, по-видимому, вновь может являться усиленный близостью к половинному заполнению механизм Кона–Латтинжера, рассмотренный в разделах 8, 9 настоящего обзора. Отметим, что одним из авторов обзора (с соавторами) теоретически предсказано киральное d-спаривание в идеализированном сверхчистом (по отношению к примесям и структурным дефектам) АВ-бислое графена с критической температурой $T_c \sim 20\text{--}40$ К при безразмерной двумерной плотности $n_{2D} \sim 0,1$ монослоя [149, 343]. При этом, как показано в работах [87, 88, 149, 343], уже немагнитные примеси и структурные дефекты уменьшают критическую температуру d-спаривания в реальном бислое графена.

Другим важным фактором, уменьшающим T_c , как следует из работы Лозовика и др. [344], является кризис поверхности монослоёв реального графена, играющая согласно идеологии Лозовика роль эффективного магнитного поля при анализе возможного ("диамагнитного") подавления сверхпроводимости в реальном графене. Отметим, что в работах [149, 343] для бислоя графена рассматривалась расширенная модель Хаббарда в борновском приближении слабой связи. Вопрос о силе кулоновских корреляций в графене является дискуссионным.

Резюмируя, мы можем сказать, что в некотором смысле графен и другие дираковские полуметаллические системы могут служить в качестве эталонной системы, хорошо объединяющей все явления, рассмотренные в данном обзоре, как в плане возможности реализации сценария кроссовера БКШ–БЭК, флуктуационных поправок Березинского–Костерлица–Таулеса и спектра коллективных возбуждений, с одной стороны, так и в плане аномальной сверхпроводимости Кона–Латтинжера, роли нулевых дираковских мод в квазичастичном спектре фермионов — с другой, при этом в 2D- и слоистых системах роль топологического коэффициента C_0 будет играть топологический заряд Q [296], определяющий квантование поперечной холловской проводимости в квантовом эффекте Холла и аномальный спиновый ток в тонких плёнках аксиальной фазы сверхтекучего He-3 [50].

Подчеркнём, что в физике ультрахолодных квантовых газов мы можем экспериментально моделировать графен и другие дираковские системы с помощью оптических решёток, в частности, с помощью двумерных гексагональных оптических решёток с дираковскими точками заданного положения (см. [86]).

Авторы благодарны А.Ф. Андрееву, Г.Е. Воловику, Ю.Е. Лозовику, Н.Б. Копнину, Г.В. Шляпникову, Д.В. Ефремову, А.В. Чубукову, М.А. Баранову, А.А. Голубову, В.В. Валькову, А. Бринкману, А. Кимелю, Х.В. Капеллу, П. Бруссарду, М.С. Марьенко, И.В. Бродскому, А.В. Клапцову, К. Ван Веерту, А. Пруискину, Д. Вольхардту, П. Вёльфле, Б. Спиваку, А.Г. Аронову, А.И. Ларкину, Д.М. Ли, Г. Фроссати, И.А. Фомину, Р. Комбеско, А.С. Александрову, Д.Е. Хмельницкому, А.В. Балацкому, В.В. Дмитриеву, Д. Иванову, Л.П. Пятаевскому, М. Стоуну, П.Н. Брусову за многочисленные полезные дискуссии. М.Ю.К. выражает благодарность РФФИ (проект № 17-02-00135) и благодарит за поддержку Программу фундаментальных исследований Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики". А.В.Т. благодарит Российский научный фонд за поддержку в рамках проекта № 18-12-00002.

Список литературы

1. Anderson M H et al. *Science* **269** 198 (1995)
2. Giorgini S, Pitaevskii L P, Stringari S *Rev. Mod. Phys.* **80** 1215 (2008)
3. Bloch I, Dalibard J, Zwerger W *Rev. Mod. Phys.* **80** 885 (2008)
4. Bardeen J, Cooper L N, Schrieffer J R *Phys. Rev.* **108** 1175 (1957)
5. Schrieffer J R *Theory of Superconductivity* (New York: W.A. Benjamin, 1964); Пер. на русск. яз.: Шриффер Дж *Теория сверхпроводимости* (М.: Наука, 1970)
6. Cooper L N *Phys. Rev.* **104** 1189 (1956)
7. Einstein A *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.* **3** (1925)

8. Eagles D M *Phys. Rev.* **186** 456 (1969)
9. Leggett A J, in *Modern Trends in the Theory of Condensed Matter. Proc. of the XVI Karpacz Winter School of Theoretical Physics, February 19–March 3, 1979 Karpacz, Poland* (Lecture Notes in Physics, Vol. 115, Eds A Pekalski, J A Przystawa) (Berlin: Springer-Verlag, 1980) p. 13
10. Nozières P, Schmitt-Rink S *J. Low Temp. Phys.* **59** 195 (1985)
11. Келдыш Л В, Козлов А Н *ЖЭТФ* **54** 978 (1968); Keldysh L V, Kozlov A N *Sov. Phys. JETP* **27** 521 (1968)
12. Горьков Л П, Мелик-Бархударов Т К *ЖЭТФ* **40** 1452 (1961); Gor'kov L P, Melik-Barkhudarov T K *Sov. Phys. JETP* **13** 1018 (1961)
13. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* 4-е изд. (М.: Наука, 1988); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)
14. Ландау Л Д *ЖЭТФ* **11** 592 (1941); Landau L J. *Phys. USSR* **5** 71 (1941)
15. Putterman S J *Superfluid Hydrodynamics* (Amsterdam: North-Holland, 1974); Пер. на русск. яз.: Паттерман С *Гидродинамика сверхтекучей жидкости* (М.: Мир, 1978)
16. Халатников И М *Теория сверхтекучести* (М.: Наука, 1971)
17. Tilley D R, Tilley J *Superfluidity and Superconductivity* (New York: Wiley, 1974); Пер. на русск. яз.: Тилли Д Р, Тилли Дж *Сверхтекучесть и сверхпроводимость* (М.: Мир, 1977)
18. Kagan M Yu *Modern Trends in Superconductivity and Superfluidity* (Lecture Notes in Physics, Vol. 874) (Dordrecht: Springer, 2013)
19. Combescot R, Leyronas X, Kagan M Yu *Phys. Rev. A* **73** 023618 (2006)
20. Kagan M Yu, Frésard R, Capezzali M, Beck H *Phys. Rev. B* **57** 5995 (1998)
21. Turlapov A V, Kagan M Yu *J. Phys. Condens. Matter* **29** 383004 (2017)
22. Бармашова Т В, Мартьянов К А, Махалов В Б, Турлапов А В *УФН* **186** 183 (2016); Barmashova T V, Martiyanov K A, Makhalov V B, Turlapov A V *Phys. Usp.* **59** 174 (2016)
23. Feshbach H *Ann. Physics* **19** 287 (1962)
24. Combescot R, Kagan M Yu, Stringari S *Phys. Rev. A* **74** 042717 (2006)
25. Kagan M Yu, Efremov D V *ЖЭТФ* **137** 483 (2010); *JETP* **110** 426 (2010)
26. Kinast J, Turlapov A, Thomas J E *Phys. Rev. A* **70** 051401(R) (2004)
27. Joseph J et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 170401 (2007)
28. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Статистическая физика Ч. 2 Теория конденсированного состояния* 3-е изд. (М.: Физматлит, 2004); Пер. на англ. яз.: Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Statistical Physics Vol. 2 Theory of the Condensed State* (Oxford: Pergamon Press, 1980)
29. Kagan M Yu et al. *Phys. Rev. A* **70** 023607 (2004)
30. Kagan M Yu, Efremov D V *Phys. Rev. B* **65** 195103 (2002)
31. Brodsky I V et al. *Письма в ЖЭТФ* **82** 306 (2005); *JETP Lett.* **82** 273 (2005)
32. Brodsky I V et al. *Phys. Rev. A* **73** 032724 (2006)
33. Каган М Ю и др. *УФН* **176** 1105 (2006); Kagan M Yu et al. *Phys. Usp.* **49** 1079 (2006)
34. Менушенков А П, Клементьев К В, Кузнецов А В, Каган М Ю *ЖЭТФ* **120** 700 (2001); Menushenkov A P, Klementev K V, Kuznetsov A V, Kagan M Yu *JETP* **93** 615 (2001)
35. Menushenkov A P, Kuznetsov A V, Klementiev K V, Kagan M Yu *J. Supercond. Nov. Magn.* **29** 701 (2016)
36. Андреев А Ф, Каган М Ю *ЖЭТФ* **86** 546 (1984); Andreev A F, Kagan M Yu *Sov. Phys. JETP* **59** 318 (1984)
37. Feynman R P *Prog. Low Temp. Phys.* **1** 17 (1955)
38. Feynman R P *Statistical Mechanics: a Set of Lectures* (Boulder: Westview Press, 1998); Пер. на русск. яз.: Фейнман Р *Статистическая механика. Курс лекций* (М.: Платон, 2000)
39. Onsager L *Nuovo Cimento* **6** (Suppl. 2) 249 (1949)
40. Бекаревич И Л, Халатников И М *ЖЭТФ* **40** 920 (1961); Bekarevich I L, Khalatnikov I M *Sov. Phys. JETP* **13** 643 (1962)
41. Andromikashvili E L, Mamaladze Yu G *Rev. Mod. Phys.* **38** 567 (1966)
42. Sonin E B *Rev. Mod. Phys.* **59** 87 (1987)
43. Baym G, Chandler E J. *Low Temp. Phys.* **50** 57 (1983)
44. Андроникашвили Э Л *ЖЭТФ* **18** 424 (1948)
45. Воловик Г Е, Доценко В С (мл.). *ЖЭТФ* **78** 132 (1980); Volovik G E, Dotsenko V S (Jr.) *Sov. Phys. JETP* **51** 65 (1980)
46. Dzyaloshinskii I E, Volovick G E *Ann. Physics* **125** 67 (1980)
47. Ткаченко В К *ЖЭТФ* **49** 1875 (1966); Tkachenko V K *Sov. Phys. JETP* **22** 1282 (1966)
48. Ткаченко В К *ЖЭТФ* **50** 1573 (1966); Tkachenko V K *Sov. Phys. JETP* **23** 1049 (1966)
49. Thomson W (Lord Kelvin) *Phil. Mag.* **10** 155 (1880)
50. Volovik G E *The Universe in Helium Droplet* (Oxford: Oxford Univ. Press, 2002)
51. Vollhardt D, Woelfle P *The Superfluid Phases of Helium 3* (London: Taylor and Francis, 1990)
52. Андреев А Ф, Каган М Ю *ЖЭТФ* **93** 895 (1987); Andreev A F, Kagan M Yu *Sov. Phys. JETP* **66** 504 (1987)
53. Балацкий А В, Воловик Г Е, Конышев Г А *ЖЭТФ* **90** 2038 (1986); Balatskii A V, Volovik G E, Konyshev G A *Sov. Phys. JETP* **63** 1194 (1986)
54. Adler S L *Phys. Rev.* **177** 2426 (1969)
55. Bell J S, Jackiw R *Nuovo Cimento A* **60** 47 (1969)
56. Jackiw P *Lectures on Current Algebra and Its Applications* (Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1972)
57. Kagan M Yu, Efremov D V *J. Low Temp. Phys.* **158** 749 (2010)
58. Volovik G E *Письма в ЖЭТФ* **98** 848 (2013); Volovik G E *JETP Lett.* **98** 753 (2013)
59. Volovik G E *Письма в ЖЭТФ* **103** 147 (2016); *JETP Lett.* **103** 140 (2016)
60. de Gennes P G *Superconductivity of Metals and Alloys* (New York: W.A. Benjamin, 1966); Пер. на русск. яз.: Де Жен П *Сверхпроводимость металлов и сплавов* (М.: Мир, 1968)
61. Боголюбов Н Н, Толмачев В В, Ширков Д В *Новый метод в теории сверхпроводимости* (М.: Изд-во АН СССР, 1958); Пер. на англ. яз.: Bogoliubov N N, Tolmachev V V, Shirkov D V *A New Method in the Theory of Superconductivity* (New York: Consultants Bureau, 1959)
62. de Gennes P G *The Physics of Liquid Crystals* (Oxford: Clarendon Press, 1974); Пер. на русск. яз.: Де Жен П *Физика жидких кристаллов* (М.: Мир, 1977)
63. Берестецкий В Б, Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1980); Пер. на англ. яз.: Berestetskii V B, Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Quantum Electrodynamics* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 1999)
64. Kohn W, Luttinger J M *Phys. Rev. Lett.* **15** 524 (1965)
65. Fay D, Layzer A *Phys. Rev. Lett.* **20** 187 (1968)
66. Каган М Ю, Чубуков А В *Письма в ЖЭТФ* **47** 525 (1988); Kagan M Yu, Chubukov A V *JETP Lett.* **47** 614 (1988)
67. Каган М Ю, Чубуков А В *Письма в ЖЭТФ* **50** 483 (1989); Kagan M Yu, Chubukov A V *JETP Lett.* **50** 517 (1989)
68. Каган М Ю *УФН* **164** 77 (1994); Kagan M Yu *Phys. Usp.* **37** 69 (1994)
69. Баранов М А, Каган М Ю, Каган Ю *Письма в ЖЭТФ* **64** 273 (1996); Baranov M A, Kagan Yu, Kagan M Yu *JETP Lett.* **64** 301 (1996)
70. Ларкин А И, Овчинников Ю Н *ЖЭТФ* **47** 1136 (1964); Larkin A I, Ovchinnikov Yu N *Sov. Phys. JETP* **20** 762 (1965)
71. Fulde P, Ferrell R A *Phys. Rev.* **135** A550 (1964)
72. Каган М Ю, Кугель К И *УФН* **171** 577 (2001); Kagan M Yu, Kugel' K I *Phys. Usp.* **44** 553 (2001)
73. Shin Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 030401 (2006)
74. Ong W et al. *Phys. Rev. Lett.* **114** 110403 (2015)
75. Mitra D et al. *Phys. Rev. Lett.* **117** 093601 (2016)
76. Березинский В Л *ЖЭТФ* **61** 1144 (1971); Berezinskii V L *Sov. Phys. JETP* **34** 610 (1972)
77. Kosterlitz J M, Thouless D J *J. Phys. C* **6** 1181 (1973)
78. Fisher D S, Hohenberg P C *Phys. Rev. B* **37** 4936 (1988)
79. Beasley M R, Mooij J E, Orlando T P *Phys. Rev. Lett.* **42** 1165 (1979)
80. José J V (Ed.) *40 Years of Berezinskii–Kosterlitz–Thouless Theory* (Singapore: World Scientific, 2013)
81. Рыжов В Н *УФН* **187** 125 (2017); Ryzhov V N *Phys. Usp.* **60** 114 (2017)
82. Рыжов В Н и др. *УФН* **187** 921 (2017); Ryzhov V N et al. *Phys. Usp.* **60** 857 (2017)
83. Miyake K *Prog. Theor. Phys.* **69** 1794 (1983)
84. Randeria M, Duan J-M, Shieh L-Y *Phys. Rev. Lett.* **62** 981 (1989)

85. Schmitt-Rink S, Varma C M, Ruckenstein A E *Phys. Rev. Lett.* **63** 445 (1989)

86. Tarruell L et al. *Nature* **483** 302 (2012)

87. Каган М Ю, Мицкан В А, Коровушкин М М *УФН* **185** 785 (2015); Kagan M Yu, Mitskan V A, Korovushkin M M *Phys. Usp.* **58** 733 (2015)

88. Kagan M Yu *Письма в ЖЭТФ* **103** 822 (2016); *JETP Lett.* **103** 728 (2016)

89. Di Bernardo A et al. *Nature Commun.* **8** 14024 (2017)

90. Cao Y et al. *Nature* **556** 43 (2018)

91. Bradley C C et al. *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687 (1995)

92. Davis K B et al. *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969 (1995)

93. Ketterle W, Durfee D S, Stamper-Kurn D M, in *Bose–Einstein Condensation in Atomic Gases* (Proc. of the Intern. School of Physics "Enrico Fermi", Course 140, Eds M Inguscio, S Stringari, C E Wieman) (Amsterdam: IOS Press, 1999) pp. 67–176

94. Greiner M, Regal C A, Jin D S *Nature* **426** 537 (2003)

95. Jochim S et al. *Science* **302** 2101 (2003)

96. Zwierlein M W et al. *Phys. Rev. Lett.* **91** 250401 (2003)

97. Bourdel T et al. *Phys. Rev. Lett.* **93** 050401 (2004)

98. Ni K-K et al. *Science* **322** 231 (2008)

99. Chin C et al. *Rev. Mod. Phys.* **82** 1225 (2010)

100. Каган М Ю *Физика макроскопических квантовых систем. Курс лекций. Семинары* (М.: Изд. дом МЭИ, 2014)

101. Питаевский Л П *УФН* **178** 633 (2008); Pitaevskii L P *Phys. Usp.* **51** 603 (2008)

102. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* 5-е изд. (М.: Физматлит, 2002); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1977)

103. Gurarie V, Radzihovsky L *Ann. Physics* **322** 2 (2007)

104. Alexandrov A, Ranninger J *Phys. Rev. B* **23** 1796 (1981)

105. Ranninger J, Micnas R, Robaszkiewicz S *Ann. Phys. Fr.* **13** 455 (1988)

106. Hubbard J *Proc. R. Soc. A* **276** 238 (1963)

107. Zürn G et al. *Phys. Rev. Lett.* **110** 135301 (2013)

108. Fano U *Nuovo Cimento* **12** 154 (1935)

109. Fano U *Phys. Rev.* **124** 1866 (1961)

110. Kagan M Yu, Val'kov V V, Aksenov S V *Phys. Rev. B* **95** 035411 (2017)

111. Kinast J et al. *Phys. Rev. Lett.* **92** 150402 (2004)

112. Marsiglio F et al. *Phys. Rev. B* **91** 054509 (2015)

113. Petrov D S, Baranov M A, Shlyapnikov G V *Phys. Rev. A* **67** 031601(R) (2003)

114. Petrov D S, Salomon C, Shlyapnikov G V *Phys. Rev. Lett.* **93** 090404 (2004)

115. Prokof'ev N, Ruebenacker O, Svistunov B *Phys. Rev. Lett.* **87** 270402 (2001)

116. Kashurnikov V A, Prokof'ev N V, Svistunov B V *Phys. Rev. Lett.* **87** 120402 (2001)

117. Ngampruetikorn V, Levinsen J, Parish M M *Phys. Rev. Lett.* **111** 265301 (2013)

118. Liu X-J, Hu H, Drummond P D *Phys. Rev. B* **82** 054524 (2010)

119. Barth M, Hofmann J *Phys. Rev. A* **89** 013614 (2014)

120. Boettcher I et al. *Phys. Rev. Lett.* **116** 045303 (2016)

121. Fenech K et al. *Phys. Rev. Lett.* **116** 045302 (2016)

122. Vogt E et al. *Phys. Rev. Lett.* **108** 070404 (2012)

123. Chien C-C, Levin K *Phys. Rev. A* **82** 013603 (2010)

124. Bartenstein M et al. *Phys. Rev. Lett.* **92** 120401 (2004)

125. Heiselberg H *Phys. Rev. A* **63** 043606 (2001)

126. Pieri P, Pisani L, Strinati G C *Phys. Rev. B* **72** 012506 (2005)

127. Astrakharchik G E et al. *Phys. Rev. Lett.* **93** 200404 (2004)

128. Burovski E et al. *Phys. Rev. Lett.* **96** 160402 (2006)

129. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Статистическая физика* Ч. 1, 5-е изд. (М.: Физматлит, 2001); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Statistical Physics* Vol. 1 (Oxford: Pergamon Press, 1980)

130. Онофррио Р *УФН* **186** 1229 (2016); Onofrio R *Phys. Usp.* **59** 1129 (2016)

131. Колачевский Н Н, Тайченачев А В *Квантовая электроника* **47** 393 (2017); Kolachevsky N N, Taichenachev A V *Quantum Electron.* **47** 393 (2017)

132. Martiyanov K, Makhlov V, Turlapov A *Phys. Rev. Lett.* **105** 030404 (2010)

133. Fröhlich B et al. *Phys. Rev. Lett.* **106** 105301 (2011)

134. Dyke P et al. *Phys. Rev. Lett.* **106** 105304 (2011)

135. Ando T, Fowler A B, Stern F *Rev. Mod. Phys.* **54** 437 (1982)

136. Долгополов В Т *УФН* **184** 113 (2014); Dolgoplov V T *Phys. Usp.* **57** 105 (2014)

137. Alikacem N, Sprague D T, Hallock R B *Phys. Rev. Lett.* **67** 2501 (1991)

138. Saunders J, Lusher C P, Cowan B P *Phys. Rev. Lett.* **64** 2523 (1990)

139. Østgaard E, Bashkin E P *Physica B* **178** 134 (1992)

140. Андреев А Ф *ЖЭТФ* **50** 1415 (1966); Andreev A F *Sov. Phys. JETP* **23** 939 (1966)

141. Pavloff N, Treiner J J. *Low Temp. Phys.* **83** 331 (1991)

142. Dalfovo F, Stringari S *Phys. Scripta* **38** 204 (1988)

143. Kurihara S J. *Phys. Soc. Jpn.* **52** 1311 (1983)

144. Novoselov K S et al. *Science* **306** 666 (2004)

145. Kotov V N et al. *Rev. Mod. Phys.* **84** 1067 (2012)

146. Castro Neto A H et al. *Rev. Mod. Phys.* **81** 109 (2009)

147. van der Marel D, van Mechelen J L M, Mazin I I *Phys. Rev. B* **84** 205111 (2011)

148. Smink A E M et al. *Phys. Rev. Lett.* **118** 106401 (2017)

149. Kagan M Yu et al. *Solid State Commun.* **188** 61 (2014)

150. Hueck K et al. *Phys. Rev. Lett.* **120** 060402 (2018)

151. Feld M et al. *Nature* **480** 75 (2011)

152. Savard T A, O'Hara K M, Thomas J E *Phys. Rev. A* **56** R1095 (1997)

153. Gehm M E et al. *Phys. Rev. A* **58** 3914 (1998)

154. Makhlov V, Martiyanov K, Turlapov A *Phys. Rev. Lett.* **112** 045301 (2014)

155. Dyke P et al. *Phys. Rev. A* **93** 011603(R) (2016)

156. Martiyanov K, Barmashova T, Makhlov V, Turlapov A *Phys. Rev. A* **93** 063622 (2016)

157. Cheng C et al. *Phys. Rev. A* **94** 031606(R) (2016)

158. Murthy P A et al. *Phys. Rev. A* **90** 043611 (2014)

159. Orel A A et al. *New J. Phys.* **13** 113032 (2011)

160. Mulkerin B C et al. *Phys. Rev. A* **96** 053608 (2017)

161. Salasnich L, Toigo F *Phys. Rev. A* **91** 011604(R) (2015)

162. He L et al. *Phys. Rev. A* **92** 023620 (2015)

163. Salasnich L, Bighin G J. *Supercond. Nov. Magn.* **29** 3103 (2016)

164. Murthy P A et al. *Phys. Rev. Lett.* **115** 010401 (2015)

165. Hadzibabic Z et al. *Nature* **441** 1118 (2006)

166. Wu C-T et al. *Phys. Rev. Lett.* **115** 240401 (2015)

167. Choi J, Seo S W, Shin Y *Phys. Rev. Lett.* **110** 175302 (2013)

168. Boettcher I, Holzmann M *Phys. Rev. A* **94** 011602(R) (2016)

169. Loktev V M, Quick R M, Sharapov S G *Phys. Rep.* **349** 1 (2001)

170. Галицкий В М *ЖЭТФ* **34** 151 (1958); Galitskii V M *Sov. Phys. JETP* **7** 104 (1958)

171. Bloom P *Phys. Rev. B* **12** 125 (1975)

172. Josephson B D *Phys. Lett.* **1** 251 (1962)

173. Josephson B D *Adv. Phys.* **14** 419 (1965)

174. Baranov M A, Efremov D V, Kagan M Yu *Physica C* **218** 75 (1993)

175. Laughlin R B *Phys. Rev. Lett.* **60** 2677 (1988)

176. Fetter A L, Hanna C B, Laughlin R B *Phys. Rev. B* **39** 9679(R) (1989)

177. Булаевский Л Н, Нагаев Е Л, Хомский Д И *ЖЭТФ* **54** 1562 (1968); Bulaevskii L N, Nagaev E L, Khomskii D I *Sov. Phys. JETP* **27** 836 (1968)

178. Brinkman W F, Rice T M *Phys. Rev. B* **2** 1324 (1970)

179. Anderson P W *Science* **235** 1196 (1987)

180. Fulde P *Electron Correlations in Molecules and Solids* (Springer Series in Solid-State Sciences, Vol. 100) (Berlin: Springer, 1993)

181. Belinicher V I, Chernyshev A L, Shubin V A *Phys. Rev. B* **56** 3381 (1997)

182. Shraiman B I, Siggia E D *Phys. Rev. B* **42** 2485 (1990)

183. Uemura Y J et al. *Phys. Rev. Lett.* **66** 2665 (1991)

184. Kagan M Yu, Rice T M J. *Phys. Condens. Matter* **6** 3771 (1994)

185. Плакида Н М и др. *ЖЭТФ* **124** 367 (2003); Plakida N M et al. *JETP* **97** 331 (2003)

186. Castellani C, Di Castro C, Grilli M *Phys. Rev. Lett.* **75** 4650 (1995)

187. Sachdev S *Phys. Status Solidi B* **247** 537 (2010)

188. Petrov D S, Salomon C, Shlyapnikov G V *Phys. Rev. A* **71** 012708 (2005)

189. Ефимов В И *ЯФ* **12** 1080 (1970); Efimov V I *Sov. J. Nucl. Phys.* **12** 589 (1971)
190. Efimov V *Phys. Rev. C* **44** 2303 (1991)
191. Jensen A S et al. *Rev. Mod. Phys.* **76** 215 (2004)
192. Скормяков Г В, Тер-Мартirosян К А *ЖЭТФ* **31** 775 (1957); Skorniakov G V, Ter-Martirosian K A *Sov. Phys. JETP* **4** 648 (1957)
193. Nielsen E et al. *Phys. Rep.* **347** 373 (2001)
194. Nielsen E, Fedorov D V, Jensen A S *Few-Body Syst.* **27** 15 (1999)
195. Pieri P, Strinati G C *Phys. Rev. B* **61** 15370 (2000)
196. Bruch L W, Tjon J A *Phys. Rev. A* **19** 425 (1979)
197. Bardeen J, Baym G, Pines D *Phys. Rev.* **156** 207 (1967)
198. Bashkin E P, Meyerovich A E *Adv. Phys.* **30** 1 (1981)
199. Leggett A J *Rev. Mod. Phys.* **47** 331 (1975)
200. Anderson P W, Morel P *Phys. Rev.* **123** 1911 (1961)
201. Brinkman W F, Anderson P W *Phys. Rev. A* **8** 2732 (1973)
202. Brinkman W F, Serene J W, Anderson P W *Phys. Rev. A* **10** 2386 (1974)
203. Rainer D, Serene J W *Phys. Rev. B* **13** 4745 (1976)
204. van de Haar P G, Frossati G, Bedell K S J. *Low Temp. Phys.* **77** (1) 35 (1989)
205. Kohn W *Phys. Rev. Lett.* **2** 393 (1959)
206. Friedel J *Adv. Phys.* **3** 446 (1954)
207. Нозьер Ф, частное сообщение
208. Ефремов Д В, Марьенко М С, Баранов М А, Каган М Ю *ЖЭТФ* **117** 990 (2000); Efremov D V, Mar'enko M S, Baranov M A, Kagan M Yu *JETP* **90** 861 (2000)
209. Kagan M Yu *Phys. Lett. A* **152** 303 (1991)
210. Frossati G et al. *Czech. J. Phys.* **40** 909 (1990)
211. Wiegiers S A J et al. *Physica B* **165–166** 733 (1990)
212. Мейерович А Э *Письма в ЖЭТФ* **37** 28 (1983); Meyerovich A E *JETP Lett.* **37** 32 (1983)
213. Roobol L P et al. *Europhys. Lett.* **17** 219 (1992)
214. Castaing B, Nozières P J. *Phys. France* **40** 257 (1979)
215. Башкин Е П *ЖЭТФ* **78** 360 (1980); Bashkin E P *Sov. Phys. JETP* **51** 181 (1980)
216. Saunders J et al. *Physica B* **280** 100 (2000)
217. Morley G W et al. *J. Low Temp. Phys.* **126** 557 (2002)
218. Efremov D V, Viverit L *Phys. Rev. B* **65** 134519 (2002)
219. Roati G et al. *Phys. Rev. Lett.* **89** 150403 (2002)
220. Modugno G et al. *Science* **297** 2240 (2002)
221. Stoof H T C et al. *Phys. Rev. Lett.* **76** 10 (1996)
222. Мигдал А Б *Качественные методы в квантовой теории* (М.: Наука, 1975); Migdal A B *Qualitative Methods in Quantum Theory* (Cambridge, Mass.: Advanced Book Program, 2000)
223. Kagan M Yu, Val'kov V V *ЖЭТФ* **140** 179 (2011); *JETP* **113** 156 (2011)
224. Kagan M Y, Val'kov V V *J. Supercond. Nov. Magn.* **25** 1379 (2012)
225. Baranov M A, Chubukov A V, Kagan M Yu *Int. J. Mod. Phys. B* **06** 2471 (1992)
226. Баранов М А, Каган М Ю *ЖЭТФ* **102** 313 (1992); Baranov M A, Kagan M Y *JETP* **75** 165 (1992)
227. Liao Y et al. *Nature* **467** 567 (2010)
228. Shin Y et al. *Nature* **451** 689 (2008)
229. Cladé P et al. *Phys. Rev. Lett.* **102** 170401 (2009)
230. Inada Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **101** 100401 (2008)
231. Fuchs J et al. *Phys. Rev. A* **77** 053616 (2008)
232. Gaebler J P et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 200403 (2007)
233. Littlewood P B, Varelogiannes G (Eds) *Proc. of the First EuroConf. on Anomalous Complex Superconductors, Crete, Greece, September 1998* (Amsterdam: North-Holland, 1999)
234. Hertz J A *Phys. Rev. B* **14** 1165 (1976)
235. Millis A J *Phys. Rev. B* **48** 7183 (1993)
236. Kagan M Yu, Ogarkov S L *Laser Phys.* **18** 509 (2008)
237. Read N, Green D *Phys. Rev. B* **61** 10267 (2000)
238. Iskin M, Sá de Melo C A R *Phys. Rev. Lett.* **96** 040402 (2006)
239. Botelho S, Sá de Melo C A R J. *Low Temp. Phys.* **140** 409 (2005)
240. Воловик Г Е, Соловьев А, Яковенко В М *Письма в ЖЭТФ* **49** 55 (1989); Volovik G E, Solov'ev A, Yakovenko V M *JETP Lett.* **49** 65 (1989)
241. Majorana E *Nuovo Cimento* **14** 171 (1937)
242. Volovik G E *Письма в ЖЭТФ* **90** 440 (2009); *JETP Lett.* **90** 398 (2009)
243. Боголюбов Н Н *ЖЭТФ* **34** 58 (1958); Bogoliubov N N *JETP* **7** 41 (1958)
244. Толмачев В В, Тябликов С В *ЖЭТФ* **34** 66 (1958); Tolmachev V V, Tiablikov S V *Sov. Phys. JETP* **7** 46 (1958)
245. Боголюбов Н Н *ЖЭФТ* **34** 73 (1958); Bogoliubov N N *Sov. Phys. JETP* **7** 51 (1958)
246. Anderson P W *Phys. Rev.* **112** 1900 (1958)
247. Minguzzi A, Ferrari G, Castin Y *Eur. Phys. J. D* **17** 49 (2001)
248. Büchler H P, Zoller P, Zwerger W *Phys. Rev. Lett.* **93** 080401 (2004)
249. Pieri P, Pisani L, Strinati G C *Phys. Rev. B* **70** 094508 (2004)
250. Andrenacci N, Pieri P, Strinati G C *Phys. Rev. B* **68** 144507 (2003)
251. Kosztin I et al. *Phys. Rev. B* **61** 11662 (2000)
252. Абрикосов А А, Горьков Л П, Дзялошинский И Е *Методы квантовой теории поля в статистической физике* (М.: Добросвет, 1998); Пер. на англ. яз.: Abrikosov A A, Gorkov L P, Dzyaloshinski I E *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (New York: Dover Publ., 1975)
253. Pistolesi F, Strinati G C *Phys. Rev. B* **53** 15168 (1996)
254. Bartenstein M et al. *Phys. Rev. Lett.* **94** 103201 (2005)
255. Andrews M R et al. *Phys. Rev. Lett.* **79** 553 (1997)
256. Capuzzi P et al. *Phys. Rev. A* **73** 021603(R) (2006)
257. Астрахарчик Г Е, частная переписка (2006)
258. Heiselberg H *Phys. Rev. A* **73** 013607 (2006)
259. Guéry-Odelin D et al. *Phys. Rev. A* **60** 4851 (1999)
260. Baranov M A, Petrov D S *Phys. Rev. A* **62** 041601(R) (2000)
261. Vichi L J. *Low Temp. Phys.* **121** 177 (2000)
262. Pedri P, Guéry-Odelin D, Stringari S *Phys. Rev. A* **68** 043608 (2003)
263. Kim Y E, Zubarev A L *Phys. Lett. A* **327** 397 (2004)
264. Heiselberg H *Phys. Rev. Lett.* **93** 040402 (2004)
265. Kim Y E, Zubarev A L *Phys. Rev. A* **70** 033612 (2004)
266. Heiselberg H *New J. Phys.* **6** 137 (2004)
267. Hu H et al. *Phys. Rev. Lett.* **93** 190403 (2004)
268. Astrakharchik G E et al. *Phys. Rev. Lett.* **95** 030404 (2005)
269. Bruun G M, Smith H *Phys. Rev. A* **72** 043605 (2005)
270. Bruun G M, Smith H *Phys. Rev. A* **75** 043612 (2007)
271. Bartenstein M et al. *Phys. Rev. Lett.* **92** 203201 (2004)
272. Kinast J, Turlapov A, Thomas J E *Phys. Rev. Lett.* **94** 170404 (2005)
273. Altmeyer A et al. *Phys. Rev. Lett.* **98** 040401 (2007)
274. Kinast J M, PhD Thesis (Durham, NC: Duke Univ., 2006)
275. O'Hara K M et al. *Science* **298** 2179 (2002)
276. Thomas J E, Kinast J, Turlapov A *Phys. Rev. Lett.* **95** 120402 (2005)
277. Ku M J H et al. *Science* **335** 563 (2012)
278. Lee T D, Yang C N *Phys. Rev.* **105** 1119 (1957)
279. Lee T D, Huang K, Yang C N *Phys. Rev.* **106** 1135 (1957)
280. Bevan T D C et al. *Nature* **386** 689 (1997)
281. Dmitriev V V et al. *Письма в ЖЭТФ* **86** 681 (2007); *JETP Lett.* **86** 594 (2007)
282. Mermin N D, Muzikar P *Phys. Rev. B* **21** 980 (1980)
283. Stone M, Anduaga I *Ann. Physics* **323** 2 (2008)
284. Vakaryuk V, Leggett A J *Phys. Rev. Lett.* **103** 057003 (2009)
285. Volovik G E *Письма в ЖЭТФ* **61** 935 (1995); *JETP Lett.* **61** 958 (1995)
286. Volovik G E *Письма в ЖЭТФ* **100** 843 (2015); *JETP Lett.* **100** 742 (2015)
287. Tada Y, Nie W, Oshikawa M *Phys. Rev. Lett.* **114** 195301 (2015)
288. Shitade A, Nagai Y *Phys. Rev. B* **93** 174517 (2016)
289. Sauls J A *Phys. Rev. B* **84** 214509 (2011)
290. Combescot R, Dombre T *Phys. Rev. B* **33** 79 (1986)
291. Itzykson C, Zuber J-B *Quantum Field Theory* (New York: McGraw-Hill, 1980); Пер. на русск. яз.: Итцксон К, Зюбер Ж-Б *Квантовая теория поля* Т. 2 (Новокузнецк: Новокузнецкий физ.-мат. институт, 2000)
292. Акулов В П, Волков Д В *Письма в ЖЭТФ* **17** 367 (1973); Akulov V P, Volkov D V *JETP Lett.* **17** 261 (1973)
293. Cross M C J. *Low Temp. Phys.* **26** 165 (1977)
294. Kornin N B, Soininen P I, Salomaa M M *Phys. Rev. B* **45** 5491 (1992)
295. Kornin N B, Volovik G E, Parts Ü *Europhys. Lett.* **32** 651 (1995)
296. Haldane F D M *Phys. Rev. Lett.* **93** 206602 (2004)
297. Baym G *Phys. Rev. A* **69** 043618 (2004)
298. Fetter A L *Rev. Mod. Phys.* **81** 647 (2009)
299. Matveenko S I, Shlyapnikov G V *Phys. Rev. A* **83** 033604 (2011)
300. Cooper N R *Adv. Phys.* **57** 539 (2008)

301. Aftalion A, Blanc X, Dalibard J *Phys. Rev. A* **71** 023611 (2005)
302. Volovik G E *Exotic Properties of Superfluid He-3* (Singapore: World Scientific, 1992)
303. Simonucci S, Pieri P, Strinati G C *Nature Phys.* **11** 941 (2015)
304. Mizushima T, Machida K *Phys. Rev. A* **81** 053605 (2010)
305. Thouless D J, Ao P, Niu Q *Phys. Rev. Lett.* **76** 3758 (1996)
306. Brusov P N, Brusov P P *Collective Excitations in Unconventional Superconductors and Superfluids* (New Jersey: World Scientific, 2010)
307. Chubukov A V *Phys. Rev. B* **52** R3840 (1995)
308. Son D T, Spivak B Z *Phys. Rev. B* **88** 104412 (2013)
309. Spivak B Z, Andreev A V *Phys. Rev. B* **93** 085107 (2016)
310. Andreev A V, Spivak B Z *Phys. Rev. Lett.* **120** 026601 (2018)
311. Kim H-J et al. *Phys. Rev. Lett.* **111** 246603 (2013)
312. Shen S-Q, Li C-A, Niu Q *2D Mater.* **4** 035014 (2017)
313. Kuntsevich A Yu et al. *New J. Phys.* **20** 103022 (2018)
314. Абрикосов А А *ЖЭТФ* **32** 1442 (1957); Abrikosov A A *Sov. Phys. JETP* **5** 1174 (1957)
315. Иорданский С В *ЖЭТФ* **49** 225 (1966); Iordanskii S V *Sov. Phys. JETP* **22** 160 (1966)
316. Hall H E *Adv. Phys.* **9** (33) 89 (1960)
317. Hall H E, Vinen W F *Proc. R. Soc. A* **238** 215 (1956)
318. Cooper N R, Wilkin N K, Gunn J M F *Phys. Rev. Lett.* **87** 120405 (2001)
319. Cooper N R, Komineas S, Read N *Phys. Rev. A* **70** 033604 (2004)
320. Gifford S A, Baym G *Phys. Rev. A* **70** 033602 (2004)
321. Kittel Ch *Quantum Theory of Solids* (New York: Wiley, 1963); Пер. на русск. яз.: КИТТЕЛЬ Ч *Квантовая теория твердых тел* (М.: Наука, 1967)
322. Packard R E *Physica B + C* **109–110** 1474 (1982)
323. Yarmchuk E J, Gordon M J V, Packard R E *Phys. Rev. Lett.* **43** 214 (1979)
324. Yarmchuk E J, Packard R E *J. Low Temp. Phys.* **46** 479 (1982)
325. Bretin V et al. *Phys. Rev. Lett.* **92** 050403 (2004)
326. Madison K W et al. *Phys. Rev. Lett.* **84** 806 (2000)
327. Chevy F, Madison K W, Dalibard J *Phys. Rev. Lett.* **85** 2223 (2000)
328. Madison K W et al. *Phys. Rev. Lett.* **86** 4443 (2001)
329. Abo-Shaeer J R et al. *Science* **292** 476 (2001)
330. Zwierlein M W et al. *Nature* **435** 1047 (2005)
331. Kovtun P K, Son D T, Starinets A O *Phys. Rev. Lett.* **94** 111601 (2005)
332. Turlapov A et al. *J. Low Temp. Phys.* **150** 567 (2008)
333. Ravenhall D G, Pethick C J, Wilson J R *Phys. Rev. Lett.* **50** 2066 (1983)
334. Maruyama T et al. *Phys. Rev. C* **72** 015802 (2005)
335. Maruyama T et al. *Phys. Rev. C* **73** 035802 (2006)
336. Pons J A, Viganò D, Rea N *Nature Phys.* **9** 431 (2013)
337. Kerbikov B *Surv. High Energy Phys.* **20** 47 (2006)
338. Hwang E H, Das Sarma S *Phys. Rev. B* **75** 205418 (2007)
339. Laughlin R B *Rev. Mod. Phys.* **71** 863 (1999)
340. Rezayi E H, Haldane F D M *Phys. Rev. B* **50** 17199 (1994)
341. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика 2-е изд.* (М.: Физматлит, 2001); Пер. на англ. яз.: Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Physical Kinetics* (Oxford: Pergamon Press, 1981)
342. Bandurin D A et al. *Science* **351** 1055 (2016)
343. Каган М Ю, Мицкан В А, Коровушкин М М *ЖЭТФ* **146** 1301 (2014); Kagan M Yu, Mitskan V A, Korovushkin M M *JETP* **119** 1140 (2014)
344. Лозовик Ю Е, Меркулова С П, Соколик А А *УФН* **178** 757 (2008); Lozovik Yu E, Merkulova S P, Sokolik A A *Phys. Usp.* **51** 727 (2008)

BCS–BEC crossover, collective excitations, and hydrodynamics of superfluid quantum fluids and gases

M.Yu. Kagan^(1,2), A.V. Turlapov⁽³⁾

⁽¹⁾ Kapitza Institute for Physical Problems, Russian Academy of Sciences, ul. Kosygina 2, 119334 Moscow, Russian Federation

⁽²⁾ National Research University "Higher School of Economics", ul. Myasnitskaya 20, 101000 Moscow, Russian Federation

⁽³⁾ Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Ul'yanova 46, 603950 Nizhny Novgorod, Russian Federation
E-mail: ^(1,2) kagan@kapitza.ras.ru, ⁽³⁾ turlapov@appl.sci-nnov.ru

A Fermi gas described within the Bardeen–Cooper–Schrieffer theory (BCS) may be converted into a Bose–Einstein condensate (BEC) of composite molecules (dimers) by adiabatically tuning interaction. The sequence of the states that emerges in the process of such a conversion is referred to as the BCS–BEC crossover. We review here the theoretical and experimental results obtained for the BCS–BEC crossover in three- and quasi-two-dimensional quantum gases in the limiting geometry of traps and on optical lattices. We discuss nontrivial phenomena in the hydrodynamics of the superfluid quantum gases and fluids including the collective excitation spectrum in the BCS–BEC crossover, hydrodynamics of the rotating Bose condensates containing a large number of quantized vortices, and the involved and yet unresolved problem of the chiral anomaly in the hydrodynamics of superfluid Fermi systems with an anisotropic p-wave pairing. We also analyze spin-imbalanced quantum gases and the possibilities to realize the triplet p-wave pairing via the Kohn–Luttinger mechanism in those gases. Recent results on two-dimensional Fermi-gas preparation and observation of the fluctuational phenomena related to the Berezinskii–Kosterlitz–Thouless transition in those gases are also reviewed. We briefly discuss the recent experimental discovery of the BCS–BEC crossover and anomalous superconductivity in bilayer graphene and the role of graphene, other Dirac semimetals (such as, for example, bismuth), and 2D optical lattices as potential reference systems that exhibit all of the effects reviewed here.

Keywords: BCS–BEC crossover, hydrodynamics of superfluid quantum fluids and gases, Feshbach resonance, composite fermions and bosons, rotating Bose condensates, chiral anomaly, fermion Goldstone mode, collective excitation spectrum, imbalanced Fermi gas, anomalous pairing, Kohn–Luttinger mechanism, Berezinskii–Kosterlitz–Thouless transition, bilayer graphene

PACS numbers: 03.75.Hh, **67.10.–j**, **74.20.–z**, 74.25.Uv

Bibliography — 344 references

Received 18 January 2018, revised 3 October 2018

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **189** (3) 225–261 (2019)

Physics–Uspekhi **62** (3) (2019)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2018.10.038471>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2018.10.038471>