Январь 2019 г. **Том 189, № 1**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Квантовые флуктуации в магнитных наноструктурах

Ю.Н. Барабаненков, С.А. Никитов, М.Ю. Барабаненков

Проблема квантовых флуктуаций в магнитных наноструктурах рассматривается на модели в виде линейной цепочки из конечного числа атомов с обменным взаимодействием между спинами электронов соседних атомов согласно теории ферромагнетизма Гейзенберга. Рассчитывается электромагнитное магнитное дипольное излучение из волны опрокидывания спинов. Показано, что поток энергии излучения с учётом квантовых флуктуаций поля значительно больше потока энергии в усреднённом электромагнитном поле. Оценено затухание излучения вследствие взаимодействия спинов с квантованным электромагнитным полем.

Ключевые слова: магнитная наноструктура, спин электрона, обменное взаимодействие, спиновая волна, квантовые флуктуации, электромагнитное поле, метод Гайтлера

PACS numbers: 75.30.Ds, **75.76.+j**, **75.78.–n** DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2018.07.038405

Содержание

1. Введение

В последние годы исследованиям различных магнитных микро- и наноструктур как возможных кандидатов для спинтроники и магнитных логических устройств уделяется повышенное внимание [1 – 7]. Эти исследования связаны с изучением характерных физических явлений динамики спинов в магнитных материалах, особенно в микро- и наноструктурированных магнитных плёнках. Спиновая динамика определяет свойства распространения спиновых волн в полуограниченных магнитных структурах, в системах магнитных точек, полосок и т.д. [8 – 11]. Существует несколько типов магнитных периодических структур, называемых магнонными кристаллами (МК) [12, 13], удобных для изучения распространения в них спиновых волн. Такой МК может быть изготовлен, например, в виде ферромагнитной плёнки (матрицы), содержащей массив из бесконечного [14] или конечного [15] числа ферромагнитных цилиндрических включений.

Общее проявление распространения спиновых волн в неограниченных и полуограниченных МК состоит в зонной структуре их спектра. Кроме того, при определённых условиях вокруг ферромагнитных включений возбуждаются спиновые краевые волны. Их возбуждение связано с нарушением свойства взаимности тензора магнитной проницаемости ферромагнетика, что приводит к появлению своеобразной вихревой компоненты в поле рассеянной на неоднородности спиновой волны. Как показано в [15], в кольцевой периодической системе магнитных включений существуют собственные моды спиновых волн высокой добротности, т.е. микрорезонаторы, которые могут рассматриваться как элементы магнонной цепи. Другого рода элемент магнонной цепи, играющий роль микроволновода спиновых волн, может быть реализован конечной линейной цепочкой магнитных включений в ферромагнитной матрице [16]. Спиновая динамика не только определяет свойства спиновых волн, но и рассматривается как способ возбуждения терагерцового излучения вследствие эффекта опрокидывания спинов [17].

Анализируя методы и результаты перечисленных работ в целом, следует отметить, что они относятся к магнитным структурам размером не менее 100 нм. Для

Ю.Н. Барабаненков, С.А. Никитов. Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая 11-7, 125009 Москва, Российская Федерация
E-mail:barab624@mail.ru, nikitov@cplire.ru
М.Ю. Барабаненков. Институт проблем технологии микроэлектроники и особочистых материалов РАН,
ул. Институтская 6, 142432 Черноголовка, Московская обл., Российская Федерация
E-mail: barab@iptm.ru

Статья поступила 17 октября 2017 г., после доработки 20 июня 2018 г.

магнитных структур размером менее 100 нм и порядка 10 нм, особенно 1 нм, использованные в указанных работах методы и полученные результаты могут быть некорректными. Дело в том, что подавляющее большинство этих методов основывается на решении уравнения Ландау – Лифшица [18] в теории магнетизма. Это хорошо известное уравнение вместо анализа индивидуальных магнитных моментов использует непрерывную функцию намагничивания, которая представляет собой локально усреднённую плотность магнитных моментов по физически бесконечно малому объёму [19] и не учитывает возможных флуктуаций, обсуждаемых, например, в [20].

В нашей заметке проблема квантовых флуктуаций в магнитных наноструктурах изучается в рамках физической модели. Мы рассматриваем конечную линейную цепочку атомов с обменным взаимодействием между спинами соседних атомов согласно теории ферромагнетизма Гейзенберга [21]. Предполагается, что в начальном состоянии все атомы цепочки, кроме двух первых, имеют спины, ориентированные вдоль одного направления, а спины двух первых атомов опрокинуты. Это начальное состояние порождает волны опрокидывания спинов вдоль цепочки вследствие обменного взаимодействия.

Найденные выражения для нестационарных квантовых амплитуд волн вероятности опрокидывания позволяют представить решение уравнения Шрёдингера с гамильтонианом Гейзенберга в наглядном виде суммы по собственным функциям и собственным энергиям мод опрокидывающихся спинов. Данное решение применяется к вычислению электромагнитного излучения, порождённого волнами опрокидывания спинов. Исходным для такого вычисления являются уравнения Максвелла – Лоренца для квантовых операторов электромагнитного поля. Такие уравнения записываются, согласно [22], в представлении Шрёдингера с расширенным гамильтонианом, включающим в себя кроме гамильтониана Гейзенберга гамильтониан квантованного электромагнитного поля и гамильтониан взаимодействия рассматриваемой цепочки спинов с электромагнитным полем. Усреднение операторных уравнений Максвелла – Лоренца по квантовому состоянию нашей расширенной системы приводит к макроскопическим уравнениям Максвелла [23], которые используются для вычисления электромагнитного излучения из цепочки опрокидывающихся спинов. По аналогии с электрическим дипольным и квадрупольным излучением [24] мы рассматриваем магнитное монопольное и магнитное дипольное излучение. Так как полный спин цепочки коммутирует с гамильтонианом Гейзенберга [25], вклад в излучение из цепочки опрокидывающихся спинов даёт только магнитное дипольное излучение. Следует отметить, что излучение из цепочки опрокидывающихся спинов можно вычислять и без использования макроскопических уравнений Максвелла. Мы можем вычислить операторный вектор Пойнтинга для операторных уравнений Максвелла – Лоренца, а уже затем усреднить его по квантовому состоянию расширенной системы. Этот второй путь учитывает квантовые флуктуации электромагнитного поля и, оказывается, даёт значительно большее значение потока энергии излучения.

Цепочка спинов с учётом только обменного взаимодействия излучает бесконечно долго. Однако учёт взаимодействия спинов с квантованным электромагнитным полем приводит к затуханию излучения, которое оценивается нами методом Гайтлера [26].

2. Дифференциальные по времени уравнения для амплитуд волновых вероятностей опрокидывания спинов

Мы исходим из нестационарного уравнения Шрёдингера

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \tag{1}$$

для ансамбля N атомов, расположенных в виде линейной цепочки вдоль оси x прямоугольной системы координат x, y, z, с обменным взаимодействием между спинами электронов соседних атомов, согласно теории ферромагнетизма Гейзенберга [21]. Для простоты учитывается только один электрон в каждом атоме, участвующий в обменном взаимодействии. Гамильтониан H заменяется гамильтонианом Гейзенберга обменного взаимодействия

$$H_W = -I \sum_{i=1}^{N} \sum_{\delta_i} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+\delta_i} \,. \tag{2}$$

Здесь I — интеграл обменного взаимодействия, $\mathbf{S}_i$ — оператор вектора спина электрона i-го атома в единицах постоянной Планка – Дирака $\hbar$. Первая сумма в правой части (2) берётся по всем атомам цепочки, вторая — по ближайшим соседям с индексами $\delta_1 = 1$, $\delta_N = -1$ и $\delta_i = \pm 1$ для $1 < i < N$. Решение $\Psi_W(t)$ уравнения (1) с гамильтонианом (2) ищется в виде разложения

$$\Psi_W(t) = \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell(t)\, \Psi_\ell \,. \tag{3}$$

Здесь Ψ_ℓ — стационарная волновая функция ансамбля атомов, в котором все атомы цепочки, кроме ℓ-го, имеют спины, ориентированные вдоль положительного направления оси z, а спин ℓ-го атома опрокинут. Нестационарные амплитуды вероятностей $a_\ell(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}a_1(t)}{\mathrm{d}t} = E_0 a_1(t) + I\big[a_1(t) - a_2(t)\big] \,, \tag{4а}$$

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}a_\ell(t)}{\mathrm{d}t} = E_0 a_\ell(t) + I\big[2a_\ell(t) - a_{\ell-1}(t) - a_{\ell+1}(t)\big] \,, \quad 1 < \ell < N \,, \tag{4б}$$

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}a_N(t)}{\mathrm{d}t} = E_0 a_N(t) + I\big[a_N(t) - a_{N-1}(t)\big] \,, \tag{4в}$$

где $E_0 = -(1/2)\, I(N-1)$ является собственной энергией основного состояния системы с гамильтонианом (2), когда все спины ориентированы вдоль положительного направления оси z.

В основе вывода системы уравнений (4) лежит проверяемое методом [27] равенство

$$H_W \Psi_\ell = -\frac{1}{4}\, I b_\ell \Psi_\ell + I\Big(b_\ell^+ \Psi_\ell - \sum_{\delta_\ell} \Psi_{\ell+\delta_\ell}\Big) \tag{5}$$

с коэффициентами

$$b_\ell = 2(N-1) \,, \quad \ell = 1, N \,, \quad b_\ell = 2(N-1) + 1 \,, \; 1 < \ell < N \,, \tag{6а}$$

$$b_\ell^+ = 1 \,, \quad \ell = 1, N \,, \quad b_\ell^+ = 2 \,, \; 1 < \ell < N \,. \tag{6б}$$

Подстановка искомого решения (3) в уравнение Шрёдингера (1) и приближённая замена в получаемом на этом пути уравнении (4б) величины $E_0 - (1/4)\, I$ величиной E_0 дают систему (4).

Решение системы уравнений (4) ищется в виде монохроматических волн $a_\ell(t) = \exp(-\mathrm{i}\omega t)\, a_\ell$ с амплитудами a_ℓ, равными суммам волн прямого и обратного направлений согласно

$$(-1)^{\ell-1} a_\ell = A \exp(\mathrm{i}\ell\theta) + B \exp(-\mathrm{i}\ell\theta)\,, \tag{7}$$

где $1 \leqslant \ell \leqslant N$, A и B — некоторые неопределённые коэффициенты, не зависящие от номера ℓ; θ — безразмерное волновое число. Подстановка решения в виде искомых монохроматических волн в уравнение (4б) даёт дисперсионное уравнение волн

$$\omega = \omega_0 + \omega_W \cos\theta\,, \quad \omega_0 = \frac{E_0 + 2I}{\hbar}\,, \quad \omega_W = \frac{2I}{\hbar}\,. \tag{8}$$

Характерная частота ω_W имеет величину порядка частоты, с которой два электрона в молекуле обмениваются своими местами [28]. Подстановка искомого решения в уравнения (4а) и (4в) приводит соответственно к двум соотношениям для коэффициентов A и B вида

$$\frac{A}{B} = -\frac{1 + \exp(-\mathrm{i}\theta)}{1 + \exp(\mathrm{i}\theta)}\,, \tag{9а}$$

$$\frac{A}{B} = -\frac{1 + \exp(\mathrm{i}\theta)}{1 + \exp(-\mathrm{i}\theta)} \exp\left[-2\mathrm{i}(N+1)\,\theta\right]. \tag{9б}$$

Сравнение соотношений (9а), (9б) даёт дискретный спектр волновых чисел и собственных частот:

$$\omega_\nu = \omega_0 + \omega_W \cos\theta_\nu\,, \quad \theta_\nu = \frac{2\pi\nu}{N}\,,$$
$$\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\left(\frac{N}{2} - 1\right), \ \frac{N}{2}\,, \tag{10}$$

и упрощённое соотношение между коэффициентами:

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = -\exp(-\mathrm{i}\theta_\nu)\,. \tag{10а}$$

Заметим, что до сих пор мы не использовали периодических граничных условий. Тем не менее полученный дискретный спектр (10) волновых чисел такой же, как и при периодических граничных условиях. Фактически это означает представление решения системы уравнений (4) в виде разложения по используемой в квантовой теории твёрдых тел [29] системе собственных функций $\exp(\mathrm{i}\ell\theta_\nu)$, где $\ell = 1, 2, \ldots, N$, при предположении, что число атомов N цепочки — чётное. Данная система функций удовлетворяет условию ортогональности

$$\sum_\nu \exp\left[\mathrm{i}(\ell - \ell')\,\theta_\nu\right] = N\delta_{\ell\ell'}\,. \tag{11}$$

Подстановка соотношений (10) и (10а) в уравнение (7) показывает, что амплитуды вероятностей опрокидывания спинов могут быть представлены в виде разложений

$$(-1)^{\ell-1} a_\ell(t) = \sum_\nu C_\nu \exp(\mathrm{i}\ell\theta_\nu)\, \exp(-\mathrm{i}\omega_\nu t) \tag{12}$$

с коэффициентами

$$C_\nu = -B_\nu \exp(-\mathrm{i}\theta_\nu) + B_{-\nu}\,. \tag{13}$$

Поскольку коэффициент $C_0 = 0$, однородная мода $\nu = 0$ не даёт фактического вклада в разложение (12). Обращение разложения (12) при $t = 0$ позволяет выразить коэффициенты C_ν через начальные значения амплитуд вероятностей соотношениями

$$C_\nu = \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^{N} (-1)^{\ell-1} a_\ell(0) \exp(-\mathrm{i}\ell\theta_\nu)\,. \tag{14}$$

При этом условию обращения в нуль коэффициента C_0 можно удовлетворить предположением, что в начальный момент все атомы цепочки, кроме двух первых, имеют спины, ориентированные вдоль одного направления, а спины двух первых атомов опрокинуты,

$$a_1(0) = a_2(0)\,, \quad a_3(0) = a_4(0) = \ldots = a_N(0) = 0\,. \tag{15}$$

При начальном условии (15) коэффициенты (14) принимают вид

$$C_\nu = \frac{a_1(0)}{N} \exp(-\mathrm{i}\theta_\nu)\left[1 - \exp(-\mathrm{i}\theta_\nu)\right], \ C_{N/2} = -\frac{2a_1(0)}{N}\,. \tag{16}$$

Собственные моды и энергии опрокидывающихся спинов. В разложениях (12) суммирование проводится по модам с положительными и отрицательными номерами ν. Однако в дальнейшем удобнее использовать разложение только по положительным номерам этого индекса. Переход к такому разложению производится с помощью новых амплитуд:

$$f_{\nu\ell} = (-1)^{\ell-1}\left[\tilde{C}_\nu \exp(\mathrm{i}\ell\theta_\nu) + \tilde{C}_{-\nu} \exp(-\mathrm{i}\ell\theta_\nu)\right], \tag{17}$$

$$\tilde{C}_{\pm\nu} = C_{\pm\nu}\,, \quad \nu = 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1\,, \quad \tilde{C}_{\pm N/2} = \frac{1}{2}\, C_{N/2}\,. \tag{17а}$$

В новых амплитудах разложения (12) принимают вид

$$a_\ell(t) = \sum_{\nu=1}^{N/2} f_{\nu\ell} \exp(-\mathrm{i}\omega_\nu t)\,. \tag{18}$$

Новые амплитуды (17) удовлетворяют условию ортогональности

$$\sum_{\ell=1}^{N} f_{\nu\ell} f^*_{\nu'\ell} = g_\nu \delta_{\nu\nu'}\,, \tag{19}$$

$$g_\nu = 4\left|a_1(0)\right|^2 \frac{1 - \cos\theta_\nu}{N}\,, \quad \nu = 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1\,,$$
$$g_{N/2} = \frac{4\left|a_1(0)\right|^2}{N}\,. \tag{20}$$

Индекс * в (19) означает комплексно сопряжённую величину. Подстановка амплитуд вероятностей опрокидывания спинов (18) в исходное разложение (3) решения уравнения Шрёдингера (1) с гамильтонианом Гейзенберга (2) даёт

$$\Psi_W(t) = \sum_{\nu=1}^{N/2} F_\nu \exp\left(\frac{E_\nu t}{\mathrm{i}\hbar}\right),$$

$$F_\nu = \sum_{\ell=1}^{N} f_{\nu\ell} \Psi_\ell\,, \quad E_\nu = \hbar\omega_\nu\,, \quad H_W F_\nu = E_\nu F_\nu\,. \tag{21а}$$

Согласно последнему равенству функции F_ν являются собственными функциями гамильтониана Гейзенберга с собственными энергиями E_ν. Отметим, что стационарные волновые функции Ψ_ℓ состояния цепочки спинов с одним опрокинутым спином удовлетворяют условию ортогональности

$$(\Psi_\ell, \Psi_{\ell'}) = \delta_{\ell\ell'}\,, \tag{22}$$

где $(\ldots,\ldots)$ означает скалярное произведение в функциональном пространстве Гильберта. Из двух условий ортогональности, (19) и (22), следует условие ортогональности для собственных функций гамильтониана Гейзенберга

$$(F_\nu, F'_\nu) = g_\nu \delta_{\nu\nu'}\,. \tag{23}$$

Это условие ортогональности позволяет вычислить норму нестационарной волновой функции (21) из волн опрокидывающихся спинов с физически очевидным результатом

$$\big(\Psi_W(t), \Psi_W(t)\big) = \big(\Psi_W(0), \Psi_W(0)\big) = 2\big|a_1(0)\big|^2\,. \tag{24}$$

Собственные функции (21а) и соответствующие собственные энергии гамильтониана Гейзенберга используются нами при вычислении электромагнитного излучения из цепочки опрокидывающихся спинов. При этом интенсивность излучения выражается через матричные элементы спинов цепочки относительно данных собственных функций и разности собственных энергий.

3. Уравнения Максвелла – Лоренца для квантовых операторов электромагнитного поля

Рассматривая электромагнитное излучение из нестационарного ансамбля опрокидывающихся спинов, мы исходим, согласно [22], из уравнений квантовой электродинамики, которые определяют микроскопические электромагнитные поля в случае нерелятивистских частиц. Квантово-электродинамическая система в нашем рассмотрении состоит из ансамбля спинов с обменным взаимодействием между ними и фотонов. Расширенный гамильтониан H такой системы в представлении Шрёдингера имеет вид

$$H = H_W + H_F + H_{WF}\,. \tag{25}$$

Здесь H_W — гамильтониан Гейзенберга (2). Гамильтониан свободного электромагнитного поля H_F записывается обычно как

$$H_F = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_k c^+_{\mathbf{k}\lambda} c_{\mathbf{k}\lambda}\,, \tag{26}$$

где операторы уничтожения $c_{\mathbf{k}\lambda}$ и рождения $c^+_{\mathbf{k}\lambda}$ фотона с волновым вектором $\mathbf{k}$ и поляризацией $\lambda = 1, 2$ удовлетворяют перестановочным соотношениям $[c_{\mathbf{k}\lambda}, c^+_{\mathbf{k}'\lambda'}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}$ Отметим, что коммутатор каких-либо двух операторов a и b определяется как $[a, b] = ab - ba$. Гамильтониан H_{WF} взаимодействия цепочки спинов с электромагнитным полем имеет вид

$$H_{WF} = -\int \mathrm{d}\mathbf{r}\, \mathbf{m}(\mathbf{r})\, \mathbf{h}(\mathbf{r}),\ \ \mathbf{h}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\mathbf{a}(\mathbf{r})\,. \tag{27}$$

Через $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ в (27) обозначен квантовый вектор намагничивания, который мы выбираем в виде

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = -\frac{e\hbar}{m_\mathrm{e}c} \sum_{\ell=1}^{N} \mathbf{S}_\ell \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\ell)\,, \tag{28}$$

где $-e$ и m_e — заряд и масса электрона. Квантовый оператор магнитного поля $\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\mathbf{a}(\mathbf{r})$ равен ротору квантового оператора векторного потенциала, соответствующего квантованному электромагнитному полю и представляемого как

$$\begin{gathered}\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}\ell} \mathbf{G}_{\mathbf{k}\ell}\big[c_{\mathbf{k}\ell}\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}) + c^+_{\mathbf{k}\ell}\exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r})\big]\,,\\ \mathbf{G}_{\mathbf{k}\ell} = \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k \Omega}\right)^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\ell}\,, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{k}\ell}\,\mathbf{k} = 0\,.\end{gathered} \tag{29}$$

Квантование электромагнитного поля производится внутри объёма Ω, вектор поляризации фотона обозначен как $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\ell}$.

После сделанных приготовлений можно сформулировать уравнения Максвелла – Лоренца для вышеопределённого оператора магнитного поля $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ и оператора электрического поля $\mathbf{e}(\mathbf{r}) = -(1/c)\,\dot{\mathbf{a}}(\mathbf{r})$, где производная по времени от оператора в представлении Шрёдингера определяется через коммутатор с гамильтонианом (25) следующим образом:

$$\dot{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) = (\mathrm{i}\hbar)^{-1}\big[\mathbf{a}(\mathbf{r}), H\big]\,. \tag{30}$$

Операторные уравнения Максвелла–Лоренца в представлении Шрёдингера имеют вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{e}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{h}(\mathbf{r})\,,\ \ \operatorname{rot}\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{e}(\mathbf{r}) + 4\pi\operatorname{rot}\mathbf{m}(\mathbf{r})\,, \tag{31а}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{e}(\mathbf{r}) = 0\,,\quad \operatorname{div}\mathbf{h}(\mathbf{r}) = 0\,. \tag{31б}$$

Посредством усреднения уравнений (31) по квантовому состоянию нашей расширенной системы выводятся макроскопические уравнения Максвелла.

3.1. Макроскопические уравнения Максвелла для усреднённого электромагнитного поля

Обозначим как $\rho(t)$ статистический оператор нашей системы, состоящей из линейной цепочки спинов с обменным взаимодействием между ними и фотонов. Этот статистический оператор удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\rho(t) = H\rho(t) - \rho(t)\,H\,. \tag{32}$$

В случае чистого квантового состояния нашей системы статистический оператор $\rho(t) = \Psi(t)\otimes\Psi^*(t)$, где $\Psi(t)$ представляет собой решение начальной задачи для уравнения Шрёдингера (1) с гамильтонианом (25), $\otimes$ — оператор тензорного произведения функций. Среднее значение $\langle L\rangle$ некоторого оператора L со статистическим оператором $\rho(t)$ вычисляется как

$$\big\langle L(t)\big\rangle = \mathrm{Sp}\,\big(L\rho(t)\big) = \big(L\Psi(t), \Psi(t)\big)\,. \tag{33}$$

Усредняя операторные уравнения Максвелла – Лоренца (31), вводим макроскопические электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, магнитную индукцию $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ и вектор намагничивания $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$, полагая

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\langle\mathbf{e}(\mathbf{r})\rangle\,,\quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\langle\mathbf{h}(\mathbf{r})\rangle\,,\quad \mathbf{M}(\mathbf{r},t)=\langle\mathbf{m}(\mathbf{r})\rangle\,. \tag{34}$$

Макроскопические уравнения Максвелла имеют обычный вид [23]:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,,\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\,,\quad \mathbf{B}=\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M}\,,$$
$$\operatorname{div}\mathbf{E}=0\,,\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0\,. \tag{35}$$

Решая уравнения Максвелла, можно получить следующее замкнутое уравнение для макроскопического магнитного поля:

$$\left(\Delta-\nabla\operatorname{div}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{M}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}\,. \tag{36}$$

Решение этого уравнения выражается в диадном виде,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\int d\mathbf{r}'\int dt'\,\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\,\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{M}(\mathbf{r},t')}{\partial t'^2}\,, \tag{37}$$

с помощью диадной функции Грина $\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},t)$, которая удовлетворяет уравнению (36) при замене его правой части выражением $\bar{\bar{U}}\delta(\mathbf{r})\,\delta(t)$ с единичным диадным сомножителем $\bar{\bar{U}}$.

3.2. Магнитное монопольное и магнитное дипольное излучения

Выражение (37) для макроскопического магнитного поля упрощается в дальней волновой зоне нестационарной цепочки опрокидывающихся спинов, где диадная функция Грина имеет асимптотику

$$\bar{\bar{G}}(\mathbf{r},t)\approx\left(\bar{\bar{U}}-\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\right)\frac{\delta\big(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c\big)}{4\pi r}\,. \tag{38}$$

Предполагается, что $r\gg r'$; $\mathbf{n}=\mathbf{r}/r$. В магнитном монопольном и магнитном дипольном приближениях, которые соответствуют электрическому дипольному и электрическому квадрупольному приближениям [24], мы полагаем $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\approx r-\mathbf{n}\mathbf{r}'$ и далее

$$\delta\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\approx\left(1+\frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\delta\left(t-\frac{r}{c}\right). \tag{39}$$

Введём вектор магнитного монополя $\mathbf{M}^{(0)}(t)$ и тензор магнитного диполя $M_{\alpha\beta}(t)$, полагая

$$\mathbf{M}^{(0)}(t)=\int d\mathbf{r}\,\mathbf{M}(\mathbf{r},t)\,,\quad M_{\alpha\beta}(t)=\int d\mathbf{r}\,x_\alpha M_\beta(\mathbf{r},t)\,, \tag{40}$$

и обозначение $M^{(1)}_\alpha(t)=n_\beta M_{\beta\alpha}(t)$. Теперь выражение для магнитного поля (37) в волновой зоне нестационарной цепочки опрокидывающихся спинов и магнитном монопольном и магнитном дипольном приближениях приобретает вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=-\frac{1}{c^2 r}\,\mathbf{n}\times\left(\ddot{\mathbf{M}}^{(0)}(t')+\frac{1}{c}\,\dddot{\mathbf{M}}^{(1)}(t')\right)\times\mathbf{n}\,, \tag{41}$$

где временны́е производные второго и третьего порядка берутся в запаздывающий момент $t'=t-r/c$. Макроскопическое электрическое поле в волновой зоне выражается через магнитное поле соотношением $\mathbf{E}=\mathbf{H}\times\mathbf{n}$, и вектор Пойнтинга принимает вид

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)\equiv\frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\frac{c}{4\pi}\,\mathbf{n}H^2(\mathbf{r},t)\,. \tag{42}$$

Нас интересует полная интенсивность $I(t)$ энергии макроскопического поля, излучаемая нестационарной цепочкой опрокидывающихся спинов по всем направлениям, определяемая как

$$I(t)=r^2\int_{4\pi}d\mathbf{n}\,\mathbf{n}\mathbf{P}(\mathbf{r},t)\,. \tag{43}$$

Мы представляем интенсивность излучения (43) в виде суммы $I(t)=I^{(0)}(t)+I^{(1)}(t)$ вкладов магнитного монопольного $I^{(0)}(t)$ и магнитного дипольного $I^{(1)}(t)$ излучений. Вычисления по формулам (41) и (43) приводят к результату:

$$I^{(0)}(t)=\frac{2}{3c^3}\left[\ddot{\mathbf{M}}^{(0)}(t')\right]^2, \tag{44}$$

$$I^{(1)}(t)=\frac{1}{15c^5}\big[4\,\dddot{M}_{\alpha\beta}(t')\,\dddot{M}_{\alpha\beta}(t')-$$
$$-\,\dddot{M}_{\alpha\alpha}(t')\,\dddot{M}_{\beta\beta}(t')-\dddot{M}_{\alpha\beta}(t')\,\dddot{M}_{\beta\alpha}(t')\big]\,. \tag{45}$$

Отметим, что уравнение (42) для вектора Пойнтинга может быть представлено в области, где оператор намагничивания (28) равен нулю, в виде

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\frac{c}{4\pi}\left[\langle\mathbf{h}(\mathbf{r})\rangle\right]^2. \tag{46}$$

Как видно, вектор Пойнтинга макроскопического электромагнитного поля в волновой зоне нестационарной цепочки опрокидывающихся спинов пропорционален квадрату усреднённого оператора магнитного поля. Конкретизируем выражения для вектора магнитного монополя и тензора магнитного диполя в уравнениях (40), учитывая выражение (28) квантового вектора намагничивания:

$$\mathbf{M}^{(0)}(t)=-\frac{e\hbar}{m_e c}\,\langle\mathbf{S}\rangle\,,\quad \mathbf{S}=\sum_{\ell=1}^{N}\mathbf{S}_\ell \tag{47}$$

и

$$M_{\alpha\beta}(t)=-\frac{e\hbar}{m_e c}\left\langle\sum_{\ell=1}^{N}x_{\ell\alpha}S_{\ell\beta}\right\rangle. \tag{48}$$

Поскольку полный спин $\mathbf{S}$ цепочки коммутирует [25] с гамильтонианом Гейзенберга (2), все временны́е производные от полного спина обращаются в нуль и вклад магнитного монополя в поток энергии излучения (44) равен нулю при замене расширенного гамильтониана (25) гамильтонианом Гейзенберга (2). Предположим, что начало прямоугольной системы координат совмещено с первым спином цепочки. Тогда формулу (48) для магнитного дипольного тензора можно представить в виде

$$M_{\alpha\beta}(t)=\delta_{\alpha x}M_\beta(t)\,,\ \mathbf{M}(t)=-\frac{e\hbar}{m_e c}\,a\left\langle\sum_{\ell=1}^{N}(\ell-1)\,\mathbf{S}_\ell\right\rangle, \tag{49}$$

где a — расстояние между спинами. В формуле (49) появляется взвешенный спин $\hat{\mathbf{S}}$ цепочки, определяемый как

$$\hat{\mathbf{S}}=\sum_{\ell=1}^{N}(\ell-1)\,\mathbf{S}_\ell\,, \tag{50}$$

не коммутирующий с гамильтонианом Гейзенберга. Вклад (45) магнитного дипольного тензора в электромагнитное излучение отличен от нуля. С учётом (49) формула (45) для интенсивности магнитного дипольного излучения упрощается:

$$I^{(1)}(t) = \frac{1}{15c^5}\left[2\big(\dddot{M}_x(t')\big)^2 + 4\big(\dddot{M}_y(t')\big)^2 + 4\big(\dddot{M}_z(t')\big)^2\right]. \tag{51}$$

Производные третьего порядка по времени в правой части (51) вычисляются с помощью коммутатора третьего порядка взвешенного спина цепочки (50) с расширенным гамильтонианом (25),

$$\dddot{\mathbf{M}}(t) = -\frac{e\hbar}{m_e c}\, a(\mathrm{i}\hbar)^{-3}\big\langle[[[\hat{\mathbf{S}}H]\,H]\,H]\big\rangle = -\frac{e\hbar}{m_e c}\, a\left\langle \frac{\partial^3}{\partial t^3}\,\hat{\mathbf{S}}\right\rangle. \tag{52}$$

В разделе 3.4 излагается эффективный метод вычисления подобного рода выражений.

3.3. Квантовые флуктуации электромагнитного поля

Выражение для оператора магнитного поля в волновой зоне нестационарной цепочки опрокидывающихся спинов выводится аналогично выражению в случае (41) макроскопического магнитного поля и имеет вид

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c^2 r}\,\mathbf{n}\times\left(\ddot{\mathbf{m}}^{(0)}(t') + \frac{1}{c}\,\dddot{\mathbf{m}}^{(1)}(t')\right)\times\mathbf{n}. \tag{53}$$

Здесь в правой части вектор $\mathbf{m}^{(0)}$ — оператор магнитного монополя и тензор $m_{\alpha\beta}$ — оператор магнитного диполя определяются, аналогично таковым в случае (40) макроскопического электромагнитного поля, равенствами

$$\mathbf{m}^{(0)}(t) = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{m}(\mathbf{r}), \quad m_{\alpha\beta}(t) = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\, x_\alpha m_\beta(\mathbf{r}), \tag{54}$$

при этом вектор $m_\alpha^{(1)}(t) = n_\beta m_{\beta\alpha}(t)$. Операторный вектор Пойнтинга $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})$ в волновой зоне определяется как

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) \equiv \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{e}(\mathbf{r})\times\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{n}h^2(\mathbf{r}) \tag{55}$$

и после усреднения принимает вид

$$\big\langle\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})\big\rangle = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{n}\,\langle h^2(\mathbf{r})\rangle. \tag{55a}$$

Следующее простое соотношение имеет важное физическое значение:

$$\big\langle\mathbf{n\Pi}(\mathbf{r})\big\rangle - \mathbf{nP}(\mathbf{r}) = \frac{c}{4\pi}\left(\big\langle h^2(\mathbf{r})\big\rangle - \big\langle\mathbf{h}(\mathbf{r})\big\rangle^2\right) = \\ = \frac{c}{4\pi}\left\langle\big(\mathbf{h}(\mathbf{r}) - \langle\mathbf{h}(\mathbf{r})\rangle\big)^2\right\rangle. \tag{56}$$

Соотношение (56) показывает, что поток энергии из нестационарной цепочки опрокидывающихся спинов с учётом квантовых флуктуаций электромагнитного поля всегда больше потока энергии в усреднённом электромагнитном поле. По аналогии с (43) определяем оператор полной интенсивности J излучения по всем направлениям,

$$J = r^2\int_{4\pi}\mathrm{d}\mathbf{n}\,\mathbf{n\Pi}(\mathbf{r}). \tag{57}$$

Так же как и в уравнениях (44) и (45), получаем $J(t) = J^{(0)}(t) + J^{(1)}(t)$, где

$$J^{(0)}(t) = \frac{2}{3c^3}\left[\ddot{\mathbf{m}}^{(0)}(t')\right]^2, \tag{58}$$

$$J^{(1)}(t) = \frac{1}{15c^5}\left[4\,\dddot{m}_{\alpha\beta}(t')\,\dddot{m}_{\alpha\beta}(t') - \\ - \dddot{m}_{\alpha\alpha}(t')\,\dddot{m}_{\beta\beta}(t') - \dddot{m}_{\alpha\beta}(t')\,\dddot{m}_{\beta\alpha}(t')\right]. \tag{59}$$

Усреднение этих выражений даёт величины $\big\langle J^{(0)}(t)\big\rangle$ и $\big\langle J^{(1)}(t)\big\rangle$. Сравнение их с (44) и (45) позволяет связать вклад квантовых флуктуаций поля в интенсивность излучения с квантовыми флуктуациями намагниченности цепочки спинов. Например, вычитание уравнения (44) из усреднённого уравнения (58) даёт

$$\big\langle J^{(0)}(t)\big\rangle - I^{(0)}(t) = \frac{2}{3c^3}\left[\big\langle(\ddot{\mathbf{m}}^{(0)}(t'))^2\big\rangle - \big\langle\ddot{\mathbf{m}}^{(0)}(t')\big\rangle^2\right] \geqslant 0. \tag{60}$$

Далее мы интересуемся составляющей (59) оператора интенсивности излучения. Для её рассмотрения следует конкретизировать тензор-оператор магнитного диполя (54). По аналогии с уравнением (49) находим

$$m_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha x} m_\beta, \quad \mathbf{m} = -\frac{e\hbar}{m_e c}\, a\hat{\mathbf{S}}. \tag{61}$$

Составляющая (59) принимает вид

$$J^{(1)}(t) = \frac{1}{15c^5}\left[2(\dddot{m}_x(t'))^2 + 4(\dddot{m}_y(t'))^2 + 4(\dddot{m}_z(t'))^2\right]. \tag{62}$$

Здесь по аналогии с уравнением (52) мы имеем

$$\dddot{\mathbf{m}}(t) = -\frac{e\hbar}{m_e c}\, a(\mathrm{i}\hbar)^{-3}\big[[[\hat{\mathbf{S}}H]\,H]\,H\big] = -\frac{e\hbar}{m_e c}\, a\,\frac{\partial^3}{\partial t^3}\,\hat{\mathbf{S}}. \tag{63}$$

В разделе 3.4 излагается метод вычисления среднего значения выражений (52) и (62).

3.4. Метод вычисления средних временных производных операторов

Заметим, что выражение (52) предполагает умение вычислить среднее значение производной третьего порядка по времени от оператора. Выражение (62) требует вычисления среднего значения от произведения таких производных. Сформулируем метод собственных функций и собственных энергий гамильтониана для вычисления интересующих нас величин, заменяя для простоты расширенный гамильтониан (25) гамильтонианом Гейзенберга (2).

Для вычисления среднего значения производной третьего порядка по времени от некоторого оператора L, используя определение типа (30) производной оператора, можно проверить физически очевидное равенство

$$\langle\dddot{L}\rangle = \frac{\partial^3}{\partial t^3}\,\langle L\rangle. \tag{64}$$

Для вычисления среднего $\langle L\rangle$ воспользуемся разложением (21) волновой функции $\Psi_W(t)$, после чего получаем среднее вида

$$\left\langle\frac{\partial^3}{\partial t^3}\,\hat{\mathbf{S}}\right\rangle = (\mathrm{i}\hbar)^{-3}\sum_{\nu,\nu'=1}^{N/2}(E_\nu - E_{\nu'})^3\times \\ \times\exp\left[\frac{(E_\nu - E_{\nu'})\,t}{\mathrm{i}\hbar}\right](\hat{\mathbf{S}}F_\nu, F_{\nu'}). \tag{65}$$

Для вычисления среднего от произведения производных третьего порядка сначала воспользуемся вспомогательным равенством

$$\langle \dddot{L}\dddot{L} \rangle = \left(\dddot{L}\Psi_W(t) \,, \dddot{L}\Psi_W(t) \right) . \tag{66}$$

Далее находим

$$\left\langle \frac{\partial^3}{\partial t^3}\, \hat{\mathbf{S}}\, \frac{\partial^3}{\partial t^3}\, \hat{\mathbf{S}} \right\rangle = \hbar^{-6} \sum_{v=1}^{N/2} \frac{1}{g_v} \sum_{v',\, v''=1}^{N/2} (E_{v'} - E_v)^3 (E_{v''} - E_v)^3 \times$$
$$\times\, (\hat{\mathbf{S}}F_{v'}, F_v)(F_v, \hat{\mathbf{S}}F_{v''}) \exp\left[\frac{(E_{v'} - E_{v''})\, t}{\mathrm{i}\hbar} \right] . \tag{67}$$

Вычисление матричных элементов $(\hat{\mathbf{S}}F_v, F_{v'})$ в правых частях полученных средних (65) и (67) представляет собой самостоятельную задачу, решение которой даётся равенством

$$(\hat{S}_\alpha F_v, F_{v'})_{v \neq v'} = 16\delta_{\alpha z}\, \frac{|a_1(0)|^2}{N}\, f_v f_{v''} \sin^2 \frac{\theta_{v'}}{2} \,, \tag{68}$$

$$f_v = 1 \,, \quad v = 1 \,, \ldots , \frac{N}{2} - 1 \,, \quad f_{N/2} = \frac{1}{2} \,. \tag{68a}$$

Подстановка формул (65) и (67) в уравнения (51) и (59) приводит к окончательным выражениям для вклада магнитного дипольного излучения из нестационарной цепочки опрокидывающихся спинов в среднем электромагнитном поле $I^{(1)}(t)$ с учётом квантовых флуктуаций поля $\langle J^{(1)}(t) \rangle$. Эти окончательные выражения имеют вид

$$I^{(1)}(t) = \frac{4}{15c^5} \left(\frac{e\hbar}{m_{\mathrm{e}}c} \right)^2 a^2 \left\langle \frac{\partial^3}{\partial t'^3}\, \hat{S}_z \right\rangle^2 , \tag{69}$$

$$\left\langle J^{(1)}(t) \right\rangle = \frac{4}{15c^5} \left(\frac{e\hbar}{m_{\mathrm{e}}c} \right)^2 a^2 \left\langle \frac{\partial^3}{\partial t'^3}\, \hat{S}_z\, \frac{\partial^3}{\partial t'^3}\, \hat{S}_z \right\rangle . \tag{70}$$

Квантовые флуктуации электромагнитного поля в излучении из цепочки опрокидывающихся спинов характеризуются разностью

$$\left\langle J^{(1)}(t) \right\rangle - I^{(1)}(t) = \left(\frac{e\hbar}{m_{\mathrm{e}}c} \right)^2 \times$$
$$\times \left[\left\langle \frac{\partial^3}{\partial t'^3}\, \hat{S}_z\, \frac{\partial^3}{\partial t'^3}\, \hat{S}_z \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^3}{\partial t'^3}\, \hat{S}_z \right\rangle^2 \right] \geqslant 0 \,. \tag{71}$$

Запишем выражения (69) и (70) в детальном виде. С этой целью обозначим w_v — величину, имеющую смысл эффективной вероятности на числах $v = 1, \ldots, N/2$ и определяемую как

$$w_v = \left(\frac{2}{N} \right) f_v (1 - \cos\theta_v) \,, \quad \sum_{v=1}^{N/2} w_v = 1 \,, \tag{72}$$

и введём функцию

$$f(E_v, t) = \sum_{v'=1}^{N/2} w_{v'} (E_{v'} - E_v)^3 \exp\left[\frac{(E_{v'} - E_v)\, t}{\mathrm{i}\hbar} \right] . \tag{73}$$

Определим нормированные интенсивности $\hat{I}^{(1)}(t)$ и $\langle \hat{J}^{(1)}(t) \rangle$ магнитного дипольного излучения в усреднённом электромагнитном поле с учётом квантовых флуктуаций поля, полагая

$$\hat{I}^{(1)}(t) = \frac{I^{(1)}(t)}{4|a_1(0)|^4} \,, \quad \langle \hat{J}^{(1)}(t) \rangle = \frac{\langle J^{(1)}(t) \rangle}{2|a_1(0)|^2} \,. \tag{74}$$

Нормировка (74) выбрана с учётом значения квадрата нормы (24) волновой функции. Теперь мы можем записать

$$\hat{I}^{(1)}(t) = \frac{1}{15c^5} \left(\frac{e\hbar}{m_{\mathrm{e}}c} \right)^2 \frac{a^2}{\hbar^6}\, N^2 \left| \sum_{v=1}^{N/2} w_v f(E_v, t) \right|^2 , \tag{75}$$

$$\left\langle \hat{J}^{(1)}(t) \right\rangle = \frac{1}{15c^5} \left(\frac{e\hbar}{m_{\mathrm{e}}c} \right)^2 \frac{a^2}{\hbar^6}\, N^2 \sum_{v=1}^{N/2} w_v \big| f(E_v, t) \big|^2 . \tag{76}$$

Флуктуационное равенство (71) проверяется для данных выражений непосредственно на основании вероятностного смысла величин (72).

3.5. Вероятности переходов

Обратимся к общему выражению (76) для нормированной интенсивности магнитного дипольного излучения с учётом квантовых флуктуаций поля и усредним это выражение по времени в смысле определения

$$f(t)_T = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t f(t) \,. \tag{77}$$

Такое усреднение даёт

$$\left\langle \hat{J}^{(1)}(t) \right\rangle_T = \sum_{N/2 \geqslant v' > v \geqslant 1} W(v' \leftarrow v)(E_v - E_{v'}) \,. \tag{78}$$

Здесь $W(v' \leftarrow v)$ — вероятность перехода за единицу времени системы спинов из состояния с энергией E_v в состояние с энергией $E_{v'}$ с излучением кванта электромагнитного поля с энергией $E_v - E_{v'}$. Вероятность перехода выражается как

$$W(v' \leftarrow v) = \frac{N^2}{15c^5} \left(\frac{e\hbar}{m_{\mathrm{e}}c} \right)^2 \frac{a^2}{\hbar}\, w_v w_{v'} (w_v + w_{v'}) \times$$
$$\times \left(\frac{E_v - E_{v'}}{\hbar} \right)^5 . \tag{79}$$

Представление интенсивности излучения (78) через вероятности переходов и кванты излучения при этих переходах соответствует представлениям квантовой теории излучения [26].

Обратим внимание на то, что в правых частях вероятностей переходов (79) число спинов N цепочки входит конкурирующим образом как в множитель N^2, так и в знаменатели w выражений согласно определению (72).

Результат этой конкуренции особенно ясно проявляется в пределе больших значений числа спинов N, когда уровни энергии E_v переворачивающихся спинов сближаются между собой и в сумме правой части (78) можно перейти от суммирования к интегрированию с заменой $\Delta v \to (N/2\pi)\, \Delta\theta$ согласно определению θ_v в (10). Отсюда из (78) получаем

$$\left\langle \hat{J}^{(1)}(t) \right\rangle_T \Big|_{N \to \infty} \to \frac{1}{15c^5} \left(\frac{e\hbar}{m_{\mathrm{e}}c} \right)^2 a^2 \omega_w^6\, \frac{N}{4}\, C_1 \,. \tag{80}$$

Численный множитель C_1 в правой части асимптотики (80) определяется двукратным интегралом

$$C_1 = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^\theta \mathrm{d}\theta' \, \sin^2\theta \sin^2\theta' \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta'}{2} \right) \times$$
$$\times\, (\cos\theta - \cos\theta')^6 \,. \tag{81}$$

Как видно, нормированная интенсивность магнитного дипольного излучения с учётом квантовых флуктуаций поля, усреднённая по времени и в пределе больших значений N числа спинов цепочки, пропорциональна этому числу спинов, что говорит о некогерентном законе излучения.

Усредним теперь по времени нормированную интенсивность (75) магнитного дипольного излучения в усреднённом электромагнитном поле. Получаем

$$\left\langle \hat{I}^{(1)}(t)\right\rangle_T = \frac{1}{15c^5}\left(\frac{e\hbar}{m_e c}\right)^2 a^2 N^2 2 \sum_{N/2 \geqslant v' > v \geqslant 1} w_v^2 w_{v'}^2 \times \times \left(\frac{E_v - E_{v'}}{\hbar}\right)^6 . \tag{82}$$

В правой части (82) имеется ещё более сильная конкуренция, чем в случае (79), между множителем N^2 и числом спинов в знаменателях w-выражений. Эта сильная конкуренция приводит к тому, что в пределе больших значений N числа спинов цепочки правая часть (82) перестаёт зависеть от N, что видно из асимптотики

$$\left\langle \hat{I}^{(1)}(t)\right\rangle_T\Big|_{N\to\infty} \to \frac{1}{15c^5}\left(\frac{e\hbar}{m_e c}\right)^2 a^2 \omega_w^6 C_2 , \tag{83}$$

где численный множитель C_2 опять определяется двукратным интегралом,

$$C_2 = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\theta} d\theta' \sin^4\frac{\theta}{2}\sin^4\frac{\theta'}{2}\,(\cos\theta - \cos\theta')^6 , \tag{84}$$

с неравенством $C_1 \geqslant C_2$. Сравнение асимптотик (80) и (83) даёт отношение

$$\frac{\left[\left\langle \hat{J}^{(1)}(t)\right\rangle_T - \left\langle \hat{I}^{(1)}(t)\right\rangle_T\right]_{N\to\infty}}{\left\langle \hat{J}^{(1)}(t)\right\rangle_T\Big|_{N\to\infty}} = 1 - \frac{4}{N}\frac{C_2}{C_1} . \tag{85}$$

Согласно (85), относительный вклад усреднённого электромагнитного поля в магнитное дипольное излучение цепочки переворачивающихся спинов становится с возрастанием числа спинов цепочки пренебрежимо малым по сравнению с вкладом с учётом квантовых флуктуаций поля.

4. Применение теории затухания Гайтлера к проблеме затухания в излучении опрокидывающихся спинов

Согласно формулам (75) и (76) магнитное дипольное излучение из нестационарной цепочки опрокидывающихся спинов происходит не затухая. Для исследования возможного затухания этого излучения обратимся к решению уравнения Шрёдингера (1) с расширенным гамильтонианом (25). При этом возьмём гамильтониан взаимодействия (27) цепочки спинов с электромагнитным полем в магнитном дипольном приближении, полагая

$$H_{WF} \approx -\frac{e\hbar}{m_e c}\, a \sum_{\mathbf{k}\lambda} k_x(\mathbf{k}\times\mathbf{G}_{\mathbf{k}\lambda})\,\hat{\mathbf{S}}(c_{\mathbf{k}\lambda} + c_{\mathbf{k}\lambda}^{+}) . \tag{86}$$

Решение уравнения Шрёдингера ищем в представлении взаимодействия цепочки спинов с электромагнитным полем, предполагая, что

$$\Psi(t) = \exp\left[\frac{(H_W + H_F)\,t}{i\hbar}\right]\Psi_{\rm int}(t) . \tag{87}$$

Постановка в (1) даёт

$$i\hbar\,\frac{\partial \Psi_{\rm int}}{\partial t} = H_{\rm int}(t)\,\Psi_{\rm int} , \tag{88}$$

где гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия

$$H_{\rm int}(t) = \exp\left[-\frac{(H_W + H_F)\,t}{i\hbar}\right] H_{WF} \exp\left[\frac{(H_W + H_F)\,t}{i\hbar}\right] . \tag{89}$$

Волновая функция в представлении взаимодействия раскладывается в ряд вида

$$\Psi_{\rm int}(t) = \sum_{v\lambda} d_{v\lambda}(t)\, F_v \Psi_{n_\lambda} . \tag{90}$$

Здесь F_v — собственные функции (21a) гамильтониана Гейзенберга (2), Ψ_{n_λ} являются ортонормированными собственными функциями гамильтониана (26) свободного электромагнитного поля с n_λ фотонами, все эти фотоны имеют волновой вектор $\mathbf{k}$, поляризацию $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$ и суммарную энергию $E_\lambda = n_\lambda \hbar\omega_k$. Подстановка разложения (90) в уравнение (88) приводит к системе уравнений для коэффициентов разложения вида

$$i\hbar\, g_v \dot{d}_{v\lambda}(t) = \sum_{v'\lambda'} \left\langle v\lambda | H_{\rm int}(t) | v'\lambda' \right\rangle d_{v'\lambda'} \tag{91}$$

с матричными элементами гамильтониана взаимодействия

$$\left\langle v\lambda | H_{\rm int}(t) | v'\lambda' \right\rangle = \exp\left[\frac{(E_v - E_{v'})\,t}{i\hbar}\right] \exp\left[\frac{(E_\lambda - E_{\lambda'})\,t}{i\hbar}\right] \times \times (H_{WF} F_v \Psi_{n_\lambda}, F_{v'}\Psi_{n_{\lambda'}}) . \tag{92}$$

Новый матричный элемент в правой части этого равенства вычисляется как

$$(H_{WF} F_v \Psi_{n_\lambda}, F_{v'}\Psi_{n_{\lambda'}}) = -\frac{e\hbar}{m_e c}\, a(\hat{\mathbf{S}}F_v, F_{v'}) \times \times \sum_{\mathbf{k}\lambda} k_x(\mathbf{k}\times\mathbf{G}_\lambda)\left[(n_\lambda)^{1/2}\delta_{n_\lambda - 1, n_{\lambda''}} + (n_\lambda + 1)^{1/2}\delta_{n_\lambda + 1, n_{\lambda'}}\right] . \tag{93}$$

С учётом выражений (92) и (93) система уравнений (91) приводится к виду

$$i\hbar g_v \dot{d}_{v\lambda}(t) = -\frac{e\hbar}{m_e c}\, a \sum_{v'} (\hat{\mathbf{S}}F_v, F_{v'}) \sum_{\mathbf{k}\lambda} k_x(\mathbf{k}\times\mathbf{G}_\lambda) \times \times \left\{ n_\lambda^{1/2} \exp\left[\frac{(E_v - E_{v'} + \hbar\omega_k)\,t}{i\hbar}\right] d_{v', n_\lambda - 1} + + (n_\lambda + 1)^{1/2} \exp\left[\frac{(E_v - E_{v'} + \hbar\omega_k)\,t}{i\hbar}\right] d_{v', n_\lambda + 1} \right\} . \tag{94}$$

Рассмотрим случай цепочки из четырёх опрокидывающихся спинов, которая ведёт себя как двухуровневая система. Предполагая, что в начальный момент система находится на верхнем уровне, конкретизируем уравнения (94) по Гайтлеру [26] следующим образом:

$$i\hbar g_1 \dot{d}_{10_\lambda}(t) = -\frac{e\hbar}{m_e c}\, a(\hat{\mathbf{S}}F_1, F_2) \sum_{\mathbf{k}\lambda} k_x(\mathbf{k}\times\mathbf{G}_\lambda) \times \times \exp\left[\frac{(E_1 - E_2 - \hbar\omega_k)\,t}{i\hbar}\right] d_{21_\lambda}(t) , \quad d_{10_\lambda}(0) = 1 , \tag{95}$$

$$i\hbar g_2 \dot{d}_{21_\lambda}(t) = -\frac{e\hbar}{m_e c}\, a(\hat{\mathbf{S}}F_2, F_1)\, k_x(\mathbf{k}\times\mathbf{G}_\lambda) \times \times \exp\left[\frac{(E_2 - E_1 + \hbar\omega_k)\,t}{i\hbar}\right] d_{10_\lambda}(t) , \quad d_{21_\lambda}(0) = 0 . \tag{96}$$

В этих уравнениях $d_{10_\lambda}(t)$ — амплитуда вероятности нахождения системы на верхнем уровне с единичным значением в начальный момент при отсутствии фотонов. Через $d_{21_\lambda}(t)$ обозначена амплитуда вероятности нахождения системы на нижнем уровне с нулевым значением в начальный момент при наличии одного фотона. Решение системы уравнений (95) и (96) ищется в таком виде, в котором амплитуда вероятности нахождения системы на верхнем уровне экспоненциально убывает со временем,

$$d_{10_\lambda}(t) = \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right). \tag{97}$$

Подстановка искомого решения (97) в уравнение (96) и его интегрирование дают

$$d_{21_\lambda}(t) = \frac{e\hbar}{m_{\mathrm{e}}c}\,\frac{1}{g_2}\,a(\hat{\mathbf{S}}F_2, F_1)\,k_x(\mathbf{k}\times\mathbf{G}_\lambda)\times \\ \times\frac{\exp\left[\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2-\omega_k)\,t-\gamma t/2\right]-1}{\hbar(\omega_1-\omega_2-\omega_k+\mathrm{i}\gamma/2)}\,. \tag{98}$$

Подставляем далее выражения (97) и (98) в уравнение (95), что после интегрирования по направлениям волнового вектора фотона приводит к равенству

$$\frac{\mathrm{i}\hbar\gamma}{2} = \left(\frac{e\hbar}{m_{\mathrm{e}}c}\right)^2\frac{1}{g_1g_2}\left|(\hat{\mathbf{S}}F_1, F_2)\right|^2 2\pi\hbar c\,\frac{1}{(2\pi)^3}\times \\ \times\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \mathrm{d}k\,k^5\,\frac{1-\exp\left[-\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2-\omega_k)\,t+\gamma t\right]}{\hbar(\omega_1-\omega_2-\omega_k+\mathrm{i}\gamma/2)}\,. \tag{99}$$

При условиях $(\omega_1-\omega_2)\,t \gg 1$ и $\gamma t \ll 1$, следуя Гайтлеру [26], используем асимптотическое представление

$$\frac{1-\exp\left[-\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2-\omega_k)\,t+\gamma t\right]}{\omega_1-\omega_2-\omega_k+\mathrm{i}\gamma/2}\to \\ \to\frac{P}{\omega_1-\omega_2-\omega_k}-\mathrm{i}\pi\delta(\omega_1-\omega_2-\omega_k)\,. \tag{100}$$

Первый член в правой части асимптотики (100) в результате интегрирования в смысле главного значения приводит к незначительному сдвигу уровней энергии рассматриваемой системы вследствие излучения и в дальнейших вычислениях нами не учитывается. Тогда подстановка асимптотики (100) в (99) даёт

$$\gamma = \frac{2}{3}\left(\frac{e\hbar}{m_{\mathrm{e}}c}\right)^2\frac{a^2}{\hbar c^5}\left(\frac{E_1-E_2}{\hbar}\right)^5\frac{1}{g_1g_2}\left|(\hat{\mathbf{S}}F_1, F_2)\right|^2. \tag{101}$$

Матричный элемент в правой части этого равенства вычислен в (68). Подставляя его, приходим к простому результату:

$$\gamma = \frac{2}{3}\left(\frac{e\hbar}{m_{\mathrm{e}}c}\right)^2\frac{a^2}{c^5}\,\frac{(E_1-E_2)^5}{\hbar^6}\,. \tag{102}$$

Сравнение данного результата с определением (79) вероятности перехода $W(2\leftarrow 1)$ в случае $N=4$ приводит к соотношению

$$\gamma = 20W(2\leftarrow 1)\,. \tag{103}$$

Последнее соотношение показывает, что коэффициент затухания γ совпадает с точностью до численного множителя с вероятностью перехода за единицу времени системы из четырёх спинов из состояния с энергией E_1 в состояние с энергией E_2 в соответствии с квантовой теорией излучения [26]. Принимая во внимание разложение волновой функции в представлении взаимодействия в ряд (90), можно считать, что в случае цепочки из четырёх спинов волновая функция F_1 заменяется функцией $F_1\exp(-\gamma t/2)$. Такая замена волновой функции F_1 приводит к умножению матричного элемента (67) на $\exp(-\gamma t)$. В результате, согласно (70), интенсивность магнитного дипольного излучения с учётом квантовых флуктуаций поля $\langle J^{(1)}(t)\rangle$ заменяется в случае цепочки из четырёх спинов выражением $\langle J^{(1)}(t)\rangle\exp(-\gamma t)$, т.е. становится экспоненциально убывающей.

Заметим, что между коэффициентом затухания γ возбуждённого состояния спиновой системы из четырёх спинов и полушириной ΔE_1 возбуждённого уровня E_1 существует в силу соотношения неопределённостей для энергии и времени простая связь [26]: $\Delta E_1/\hbar \approx \gamma$. Эта связь обобщается для случая произвольного (у нас чётного) числа спинов с уровнями $E_1 > E_2 > E_3 > \ldots > E_{N/2}$ соотношениями

$$\frac{\Delta E_i}{\hbar} \approx \gamma_i = \sum_{j<i} W(j\leftarrow i)\,. \tag{104}$$

При этом ширина некоторого перехода $E_i \to E_k$ выражается [26] как сумма ширин двух уровней E_i и E_k

$$\gamma_{ki} = \gamma_i + \gamma_k\,. \tag{105}$$

В терминах величин (105) строятся убывающие экспоненты $\exp(-\gamma_{ki}t)$, которые входят в качестве множителей в члены правой части матричного элемента (67) и приводят к экспоненциальному убыванию интенсивности $\langle J^{(1)}(t)\rangle$ магнитного дипольного излучения с учётом квантовых флуктуаций поля.

5. Заключение

Мы рассмотрели, насколько нам известно впервые, сравнительный вклад среднего поля и его квантовых флуктуаций в электромагнитное излучение магнитной наноструктуры на примере конечной линейной цепочки из N атомов с обменным взаимодействием между электронами соседних атомов согласно теории ферромагнетизма Гейзенберга. Для простоты учитывался только один электрон в каждом атоме, участвующий в обменном взаимодействии. Предполагалось, что в начальном состоянии спины всех атомов цепочки, кроме двух первых, ориентированы вдоль одного и того же направления. Спины двух первых атомов опрокинуты. Это начальное состояние порождает вследствие обменного взаимодействия волны опрокидывания спинов вдоль цепочки.

Волны опрокидывания спинов рассчитаны с учётом естественных граничных условий, согласно которым крайние спины взаимодействуют только с одним ближайшим соседом. В силу этих граничных условий однородная мода не даёт вклада в решение начальной задачи для волн опрокидывания спинов, что накладывает некоторые ограничения на выбор начальных условий.

Найденные выражения для нестационарных квантовых амплитуд волн опрокидывания чётного числа спинов записаны в терминах собственных функций и энергий гамильтониана Гейзенберга и применены к вычислению электромагнитного излучения, порождённого такими волнами. Исходя из уравнений квантовой электродинамики построена общая теория электромагнитного излучения из нестационарного ансамбля спинов с учётом квантовых флуктуаций электромагнитного поля и его источника в виде ансамбля спинов. По аналогии с электрическим дипольным и квадрупольным излучением введены соответственно магнитное монопольное и магнитное дипольное излучение. В силу коммутативности гамильтониана Гейзенберга с полным спином цепочки её монопольный магнитный момент не даёт вклада в электромагнитное излучение. Однако такое излучение даёт дипольный магнитный момент цепочки, потому что в дипольном магнитном моменте роль полного спина цепочки играет сумма взвешенных отдельных спинов и эта сумма уже не коммутирует с гамильтонианом Гейзенберга.

Интенсивность дипольного магнитного излучения из нестационарной цепочки рассчитана как по среднему макроскопическому электромагнитному полю, так и с учётом квантовых флуктуаций поля. При этом показано, что квантовые флуктуации поля увеличивают интенсивность излучения. Более того, при увеличении числа спинов цепочки интенсивность дипольного магнитного излучения из нестационарной цепочки по среднему макроскопическому электромагнитному полю становится пренебрежимо малой по сравнению с рассчитанной с учётом квантовых флуктуаций поля.

Приведены наглядные общие формулы для интенсивности магнитного дипольного излучения в случае произвольного чётного числа спинов, записанные в терминах матричных элементов взвешенного спина цепочки для переходов между собственными функциями гамильтониана Гейзенберга и разностей соответствующих собственных энергий. Эти общие формулы представлены также в терминах вероятностей переходов цепочки опрокидывающихся спинов между её уровнями энергии возбуждения. Проведена оценка затухания магнитного дипольного излучения из нестационарной цепочки опрокидывающихся спинов, обусловленного взаимодействием цепочки с квантованным электромагнитным полем. Оценки проделаны методом теории затухания Гайтлера. Рассмотрена связь коэффициента затухания излучения с вероятностью перехода цепочки спинов между уровнями возбуждения цепочки.

Работа поддержана в рамках Российского научного фонда (грант 4-19-00760) (С.А.Н.), грантом 18-07-00509 Российского фонда фундаментальных исследований (Ю.Н.Б.) и государственным заданием № 007-00220-18-00 (М.Ю.Б.).

Список литературы

1. Stamps R L et al. *J. Phys. D* **47** 333001 (2014)
2. Blügel S, in *Spintronics. From GMR to Quantum Information. Lecture Notes of the 40th Spring School* (Eds S Blügel et al.) (Jülich: Verlag, 2009)
3. Žutić I, Fuhrer M *Nature Phys.* **1** 85 (2005)
4. Morris D H et al. *Int. J. High Speed Electron. Syst.* **21** 1250005 (2012)
5. Pulizzi F *Nature Mater.* **11** 367 (2012)
6. Kruglyak V V et al. *Phys. Rev. Lett.* **104** 027201 (2010)
7. Ding J, Adeyeye A O *Appl. Phys. Lett.* **101** 103117 (2012)
8. Jorzick J et al. *Phys. Rev. Lett.* **88** 047204 (2002)
9. Gubbiotti G et al. *J. Phys. Condens. Matter* **16** 7709 (2004)
10. Kruglyak V V, Demokritov S O, Grundler D *J. Phys. D* **43** 264001 (2010)
11. Ciubotaru F et al. *Phys. Rev. B* **88** 134406 (2013)
12. Krawczyk M, Puszkarski H *Acta Phys. Polon. A* **93** 805 (1998)
13. Nikitov S A, Tailhades Ph, Tsai C S *J. Magn. Magn. Mater.* **236** 320 (2001)
14. Lisenkov I, Kalyabin D, Nikitov S *Appl. Phys. Lett.* **103** 202402 (2013)
15. Barabanenkov Yu et al. *Phys. Rev. B* **91** 214419 (2015)
16. Barabanenkov Yu et al. *Phys. Rev. B* **94** 184409 (2016)
17. Вилков Е А и др. *Радиотехника и электроника* **61** 844 (2016); Vilkov E A et al. *J. Commun. Technol. Electron.* **61** 995 (2016)
18. Landau L, Lifshitz E *Phys. Z. Sowjetunion* **8** 153 (1935); Пер. на русск. яз.: Ландау Л Д, Лифшиц Е М, в кн. Ландау Л Д *Собрание трудов* Т. 1 (М.: Наука, 1969) с. 128
19. Aharoni A *Introduction to the Theory of Ferromagnetism* (Oxford: Oxford Univ. Press, 2000)
20. Sun J et al. *Nature Mater.* **13** 1007 (2014)
21. Heisenberg W *Z. Phys.* **49** 619 (1928)
22. Ахиезер А И, Пелетминский С В *Методы статистической физики* (М.: Наука, 1977); Пер. на англ. яз.: Akhiezer A I, Peletminskii S V *Methods of Statistical Physics* (Oxford: Pergamon Press, 1981)
23. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford: Pergamon Press, 1960)
24. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Физматгиз, 1960); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1962)
25. Gaudin M *La fonction d'onde de Bethe* (Paris: Masson, 1983); Пер. на англ. яз.: *The Bethe Wavefunction* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014); Пер. на русск. яз.: Годен М *Волновая функция Бете* (М.: Мир, 1987)
26. Heitler W *The Quantum Theory of Radiation* (Oxford: Clarendon Press, 1954)
27. Madelung O *Festkörpertheorie* Vol. 1, 2 (Berlin: Springer-Verlag, 1972); Пер. на англ. яз.: *Introduction to Solid-State Theory* (Berlin: Springer, 1996); Пер. на русск. яз.: Маделунг О *Теория твердого тела* (М.: Наука, 1980)
28. Bethe H, in *Quantenmechanik der Ein- und Zwei- Electronenprobleme* Vol. 24 (Handbuch der Physik) (Berlin: J. Springer, 1933) Zweite Auflage, Erster Teil
29. Kittel C *Introduction to Solid State Physics* (New York: Wiley, 1953)

Quantum fluctuations in magnetic nanostructures

Yu.N. Barabanenkov [(1)], **S.A. Nikitov** [(1)], **M.Yu. Barabanenkov** [(2)]
[(1)] *Kotelnikov Institute of Radio-engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences,*
ul. Mokhovaya 11-7,125009 Moscow, Russian Federation
[(2)] *Institute of Microelectronics Technology and High Purity Materials, Russian Academy of Sciences,*
ul. Institutskaya 6, 142432 Chernogolovka, Moscow region, Russian Federation
E-mail: [(1)]*barab624@mail.ru*, [(1)]*nikitov@cplire.ru*, [(2)]*barab@iptm.ru*

The problem of quantum fluctuations in magnetic nanostructures is discussed by considering a linear chain of a finite number of atoms with the electron spins of neighboring atoms interacting via exchange as in Heisenberg's theory of ferromagnetism. Electromagnetic magnetic dipole radiation from a spin flip wave is calculated. It is shown that radiation energy flux calculations including electromagnetic field quantum fluctuations give much larger values than for the averaged field. The radiation decay due to spin interaction to the quantized electromagnetic field is estimated.

Keywords: magnetic nanostructure, electron spin, exchange interaction, spin wave, quantum fluctuations, electromagnetic field, Heitler approach

PACS numbers: 75.30.Ds, **75.76.+j**, **75.78.–n**
Bibliography — 29 references
Received 17 October 2017, revised 20 June 2018