Сентябрь 2018 г. **Том 188, № 9**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Вывод квазиклассической функции Грина с помощью операторного метода

П.А. Крачков, А.И. Мильштейн

Приводится последовательный вывод квазиклассической функции Грина уравнения Дирака в произвольном локализованном потенциале, основанный на использовании метода собственного времени Фока – Швингера. Суть метода состоит в экспоненциальной параметризации пропагатора и распутывании операторных выражений. Метод позволяет вычислить не только главный квазиклассический вклад в функцию Грина, но и первую квазиклассическую поправку к ней.

Ключевые слова: метод собственного времени, операторный подход, функция Грина, квазиклассическое приближение

PACS numbers: **12.20.–m**, 12.20.Ds DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.09.038208

Содержание

1. Введение

Для описания процессов квантовой электродинамики (КЭД) во внешних полях удобно использовать представление Фарри [1]. Это представление позволяет учесть влияние внешнего поля, используя функции Грина и волновые функции во внешних полях. Поэтому получение удобных представлений функций Грина волновых уравнений во внешнем поле является важной задачей. Простота представлений позволяет значительно продвинуться в аналитических и численных расчётах сечений различных процессов во внешних полях.

Характерным свойством точных функций Грина релятивистских уравнений в поле сферически-симметричного потенциала является наличие сумм по угловым моментам, которые, в отличие от таковых в нерелятивистском случае, не удаётся выразить в замкнутом виде. Наличие этих сумм приводит к большим трудностям при вычислении сечений при высоких энергиях, так как основной вклад дают большие угловые моменты, с характерной величиной $l_{\text{char}} \sim \varepsilon/m \gg 1$. Медленная сходимость сумм по угловым моментам приводит к большим трудностям при использовании точных решений. Ярким примером является процесс фоторождения e^+e^--пар в кулоновском поле, точное сечение которого в виде суммы по угловым моментам найдено в [2]. Вычислительные сложности при табулировании этого выражения столь велики, что численные результаты получены только для энергии фотона $\omega \leqslant 12{,}5$ МэВ.

К счастью, при высоких энергиях справедливо квазиклассическое приближение, которое позволяет точно учесть влияние внешнего поля. Основная идея этого подхода состоит в следующем. При высоких по сравнению с их массой энергиях частиц главный вклад в сечение дают малые углы θ между импульсами начальных и конечных частиц. Тогда характерные угловые моменты, дающие основной вклад в сечение, велики, $l_{\text{char}} \sim 1/\theta \gg 1$ $(\hbar = c = 1)$. В квазиклассической функции Грина учитывается вклад больших угловых моментов, $l \gg 1$, и пренебрегается вкладом угловых моментов порядка единицы, $l \sim 1$. Замечательной особенностью квазиклассического подхода является возможность получения не только лидирующего члена, но и первой квазиклассической поправки (поправки по θ). Развитие метода квазиклассических функций Грина уравнения Дирака во внешних атомных полях позволило совершить прорыв в теоретическом описании фундаментальных процессов КЭД в атомных полях. Обзор результатов, полученных с помощью квазиклассического подхода, можно найти в недавней работе [3].

Впервые квазиклассическая функция Грина в кулоновском поле была получена в [4, 5] прямым суммированием парциальных вкладов больших орбитальных моментов, а в случае сферически-симметричного экранированного кулоновского потенциала — в [6, 7]. В работе [8] функция Грина получена для произвольного локализованного потенциала (не обязательно сферически-симметричного) путём решения в определённом приближении

П.А. Крачков, А.И. Мильштейн. Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, просп. Академика Лаврентьева 11, 630090 Новосибирск, Российская Федерация
E-mail: P.A.Krachkov@inp.nsk.su, A.I.Milstein@inp.nsk.su

Статья поступила 4 июля 2017 г.

дифференциальных уравнений. Первая квазиклассическая поправка к функции Грина в кулоновском потенциале найдена в [9] из точной функции Грина посредством суммирования парциальных вкладов. Квазиклассические поправки к функции Грина в произвольном локализованном потенциале получены эвристическим методом в работах [8, 10].

В работе [11] получена функция Грина в главном квазиклассическом приближении в суперпозиции атомного и лазерного поля. В [11] использовался метод собственного времени Фока – Швингера с дальнейшим распутыванием операторов. Операторный подход оказался удобным и довольно простым в использовании. Настоящая статья посвящена применению этого метода для вывода квазиклассической функции Грина уравнения Дирака в произвольном атомном потенциале с учётом первой квазиклассической поправки.

2. Вывод функции Грина

Функцией Грина уравнения Дирака $G(\mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{r}', t')$ во внешнем статическом потенциале $V(\mathbf{r})$ называется решение уравнения

$$(\hat{\mathcal{P}} - m)\, G(\mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{r}', t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t')\,, \tag{1}$$

где $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_\mu \gamma^\mu$, γ^μ — гамма-матрицы Дирака, $\mathcal{P}_\mu = (\mathrm{i}\partial_t - V(\mathbf{r}), \mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})$. Функцию Грина можно представить в следующем виде:

$$G(\mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{r}', t') = \left\langle \mathbf{r}, t \left| \frac{1}{\hat{\mathcal{P}} - m + \mathrm{i}0} \right| \mathbf{r}', t' \right\rangle . \tag{2}$$

Как показано в работах [12, 13], для вычисления амплитуд различных процессов КЭД удобнее использовать функцию Грина квадрированного уравнения Дирака $D(\mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{r}', t')$, которая связана с обычной функцией Грина $G(\mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{r}', t')$ следующим образом:

$$\begin{gathered} G(\mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{r}', t') = (\hat{\mathcal{P}} + m)\, D(\mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{r}', t')\,, \\ D(\mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{r}', t') = \frac{1}{\hat{\mathcal{P}}^2 - m^2 + \mathrm{i}0}\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t')\,. \end{gathered} \tag{3}$$

Для того чтобы воспользоваться методом собственного времени Фока – Швингера, представим пропагатор в следующем виде:

$$\frac{1}{\hat{\mathcal{P}}^2 - m^2 + \mathrm{i}0} = -\mathrm{i}\int_0^\infty \mathrm{d}s\, \exp\left[\mathrm{i}s(\hat{\mathcal{P}}^2 - m^2 + \mathrm{i}0)\right]. \tag{4}$$

Из соображений удобства выразим оператор $\exp(-\mathrm{i}s\,\hat{\mathcal{P}}^2)$ в виде двух множителей,

$$\begin{gathered} \exp(\mathrm{i}s\,\hat{\mathcal{P}}^2) = L(s)\exp(\mathrm{i}s\,\hat{\mathcal{P}}_0^2)\,, \\ L(s) = \exp(\mathrm{i}s\,\hat{\mathcal{P}}^2)\exp(-\mathrm{i}s\,\hat{\mathcal{P}}_0^2)\,, \\ \hat{\mathcal{P}}^2 = \big(p_0 - V(\mathbf{r})\big)^2 - \mathbf{p}^2 + \mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla}V(\mathbf{r}) = \hat{\mathcal{P}}_0^2 - \tilde{V}(\mathbf{r})\,, \\ \tilde{V}(\mathbf{r}) = 2p_0 V(\mathbf{r}) - \mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla}V(\mathbf{r}) - V^2(\mathbf{r})\,, \quad \hat{\mathcal{P}}_0^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2\,, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \gamma_0\boldsymbol{\gamma}$. Оператор $L(s)$ связан со взаимодействием, он обращается в единицу при $V(\mathbf{r}) = 0$. Заметим, что, в отличие от $\mathbf{p}$ и p_0, оператор $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla}$ в (5) действует только на потенциал $V(\mathbf{r})$.

Оператор $L(s)$ может быть найден с помощью дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L(s) &= L(s)\exp(\mathrm{i}s\,\hat{\mathcal{P}}_0^2)\left[-\mathrm{i}\tilde{V}(\mathbf{r})\right]\exp(-\mathrm{i}s\,\hat{\mathcal{P}}_0^2) = \\ &= -\mathrm{i}L(s)\tilde{V}(\mathbf{r} - 2s\mathbf{p})\,, \end{aligned} \tag{6}$$

здесь мы использовали следующее соотношение

$$\exp(-\mathrm{i}\,\beta\,\mathbf{p}^2)\, g(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r} - 2\,\beta\,\mathbf{p})\exp(-\mathrm{i}\,\beta\,\mathbf{p}^2)\,. \tag{7}$$

Решение уравнения (6) можно представить в виде хронологически упорядоченной экспоненты:

$$L(s) = \mathrm{P}\exp\left(-\mathrm{i}s\int_0^1 \tilde{V}_x\,\mathrm{d}x\right), \tag{8}$$

где для любого оператора A используется обозначение $A_x = A(\mathbf{r} - 2sx\,\mathbf{p})$.

При $x \neq y$ операторы $\tilde{V}_x$ и $\tilde{V}_y$ не коммутируют, поэтому при преобразовании хронологически упорядоченной экспоненты в обычную экспоненту возникает бесконечный ряд коммутаторов:

$$L(s) = \exp\left(-\mathrm{i}s\int_0^1 \tilde{V}_x\,\mathrm{d}x + \frac{s^2}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\,[\tilde{V}_x, \tilde{V}_y] + \ldots\right).$$

Каждый дополнительный коммутатор подавлен фактором m/ε. Качественно это можно объяснить следующим образом. Каждый дополнительный коммутатор пропорционален постоянной Планка $\hbar$, которая возникает из-за коммутатора импульса с соответствующей координатой. Так как в экспоненте должна стоять безразмерная величина, возникает обезразмеривающий множитель $1/(\hbar l)$, где l — безразмерный угловой момент электрона. Для ультрарелятивистских частиц с энергией ε характерный момент импульса $l_{\mathrm{char}} \sim \varepsilon/m$, поэтому $1/l \sim m/\varepsilon$.

Для того чтобы вычислить первую квазиклассическую поправку, необходимо учесть только один коммутатор:

$$\begin{gathered} L(s) = \exp\left(-\mathrm{i}s\int_0^1 \tilde{V}_x\,\mathrm{d}x + \frac{s^2}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\,[\tilde{V}_x, \tilde{V}_y]\right), \\ [\tilde{V}_x, \tilde{V}_y] = 2\,\mathrm{i}s(x - y)\boldsymbol{\nabla}\tilde{V}_x\boldsymbol{\nabla}\tilde{V}_y - 2\mathrm{i}\,[\boldsymbol{\nabla}V_x \times \boldsymbol{\nabla}V_y]\,\boldsymbol{\Sigma}\,, \end{gathered} \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\Sigma} = -\gamma^5\boldsymbol{\alpha}$, $\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Основной вклад в сечения процессов при высоких энергиях даёт следующая область аргументов функций Грина:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{\mathrm{char}} = (t - t')m^2 \gg m\,, \qquad z, z' \sim \frac{\varepsilon_{\mathrm{char}}}{m^2}\,, \\ \rho, \rho' \sim \frac{1}{m}\,, \qquad t - z, t' - z' \sim \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{char}}}\,, \end{gathered}$$

где $\varepsilon_{\mathrm{char}}$ можно интерпретировать как характерную энергию частицы, ось z направлена вдоль $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho}'$ — компоненты векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, перпендикулярные оси z.

Удобно перейти от переменных t и z к светоконусным переменным $\phi = t - z$ и $T = (t + z)/2$. Таким образом,

$$\begin{gathered} p^0 = \mathrm{i}\partial_t = -p_\phi - \frac{p_T}{2}\,, \qquad p^z = -\mathrm{i}\partial_z = -p_\phi + \frac{p_T}{2}\,, \\ p_\phi = -\mathrm{i}\partial_\phi\,, \quad p_T = -\mathrm{i}\partial_T\,, \quad \mathbf{p}_\perp = -\mathrm{i}\partial_{\boldsymbol{\rho}}\,, \quad \hat{\mathcal{P}}_0^2 = 2p_\phi p_T - \mathbf{p}_\perp^2\,. \end{gathered} \tag{10}$$

Так как

$$T = z + O\left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{char}}}\right) = z\left(1 + O\left(\frac{m^2}{\varepsilon_{\text{char}}^2}\right)\right),$$

$$T' = z' + O\left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{char}}}\right) = z'\left(1 + O\left(\frac{m^2}{\varepsilon_{\text{char}}^2}\right)\right),$$

мы можем сделать замену $z \to T$ в потенциале V и замену $\nabla \to \nabla_{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{e}_z \partial_T$. Вся зависимость от ϕ и ϕ' находится в $\delta(\phi - \phi')$. Поэтому, используя интегральное представление δ-функции Дирака, функцию Грина $D(\phi, T, \boldsymbol{\rho} \,|\, \phi', T', \boldsymbol{\rho}')$ можно представить в следующем виде:

$$D(\phi, T, \boldsymbol{\rho} \,|\, \phi', T', \boldsymbol{\rho}') = \\ = \int \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{2\pi} \exp\left[-\mathrm{i}\varepsilon(\phi - \phi')\right] D(T, \boldsymbol{\rho} \,|\, T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon), \quad (11)$$

где функция

$$D(T, \boldsymbol{\rho} \,|\, T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon) = \\ = -\frac{\mathrm{i}}{2\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}s\, L(s) \exp\left[-\mathrm{i}s(2\varepsilon p_T + \mathbf{p}_\perp^2 + m^2)\right] \times \\ \times \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')\, \delta(T - T') \quad (12)$$

связана с функцией Грина $D(\mathbf{r} \,|\, \mathbf{r}'; \varepsilon)$ с фиксированной энергией ε следующим образом:

$$D(\mathbf{r} \,|\, \mathbf{r}'; \varepsilon) = \int \mathrm{d}(t - t') \exp\left[\mathrm{i}\varepsilon(t - t')\right] D(\mathbf{r}, t \,|\, \mathbf{r}', t') = \\ = \int \mathrm{d}(t - t') \exp\left[\mathrm{i}\varepsilon(t - t')\right] \int \frac{\mathrm{d}\varepsilon'}{2\pi} \exp\left[-\mathrm{i}\varepsilon'(\phi - \phi')\right] \times \\ \times D(T, \boldsymbol{\rho} \,|\, T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon') = \exp\left[\mathrm{i}\varepsilon(z - z')\right] D(T, \boldsymbol{\rho} \,|\, T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon). \quad (13)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $D(\mathbf{r}, t \,|\, \mathbf{r}', t')$ зависит от t и t' только через $t - t'$, так как потенциал $V(\mathbf{r})$ не зависит от t. Для практических применений нужна функция Грина $D(\mathbf{r}|\mathbf{r}'; \varepsilon)$, поэтому сначала вычислим функцию $D(T, \boldsymbol{\rho} \,|\, T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon)$ и затем воспользуемся соотношением (13).

Подействуем оператором $\exp\left[-\mathrm{i}s(2\varepsilon p_T + \mathbf{p}_\perp^2)\right]$ в (12) на δ-функцию:

$$\exp\left[-\mathrm{i}s(2\varepsilon p_T + \mathbf{p}_\perp^2)\right] \delta(T - T')\, \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') = \\ = -\frac{\mathrm{i}}{4\pi s}\, \delta(T - T' - 2\varepsilon s) \exp\left[\mathrm{i}\frac{(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^2}{4s}\right]. \quad (14)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями

$$\exp(-\mathrm{i}\tau p_T) f(T) = f(T - \tau) \exp(-\mathrm{i}\tau p_T), \quad (15)$$

$$\exp(-\mathrm{i}\beta\, \mathbf{p}_\perp^2)\, g(\boldsymbol{\rho}) = \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{i}\pi} \exp(\mathrm{i}q^2)\, g\big(\boldsymbol{\rho} + 2\sqrt{\beta}\,\mathbf{q}\big), \quad (16)$$

которые справедливы для $\beta > 0$ и для любых функций $f(T)$ и $g(\boldsymbol{\rho})$, где $\mathbf{q}$ — двумерный вектор, перпендикулярный оси z. Для доказательства менее тривиального второго соотношения воспользуемся преобразованием Фурье функции $g(\boldsymbol{\rho})$:

$$\exp(-\mathrm{i}\beta\, \mathbf{p}_\perp^2)\, g(\boldsymbol{\rho}) = \exp(-\mathrm{i}\beta\, \mathbf{p}_\perp^2) \int \mathrm{d}\mathbf{q} \exp(\mathrm{i}\mathbf{q}\boldsymbol{\rho})\, \tilde{g}(\mathbf{q}) = \\ = \int \mathrm{d}\mathbf{q} \exp(-\mathrm{i}\beta q^2 + \mathrm{i}\mathbf{q}\boldsymbol{\rho})\, \tilde{g}(\mathbf{q}) = \\ = \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varrho}}{(2\pi)^2}\, g(\boldsymbol{\varrho}) \int \mathrm{d}\mathbf{q} \exp\left[-\mathrm{i}\beta q^2 + \mathrm{i}\mathbf{q}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\varrho})\right] = \\ = -\frac{\mathrm{i}}{\beta} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varrho}}{4\pi}\, g(\boldsymbol{\varrho}) \exp\left[\frac{\mathrm{i}(\boldsymbol{\varrho} - \boldsymbol{\rho})^2}{4\beta}\right]. \quad (17)$$

Переходя от переменной $\boldsymbol{\varrho}$ к переменной $\mathbf{q} = (\boldsymbol{\varrho} - \boldsymbol{\rho})/(2\sqrt{\beta})$, получаем тождество (16).

Из соображений компактности мы будем в дальнейшем обсуждать вместо $L(s)$ оператор

$$L_0(s) = \exp\left(-2\mathrm{i}s\varepsilon \int_0^1 V_x\, \mathrm{d}x\right), \quad (18)$$

который соответствует главному квазиклассическому приближению функции Грина уравнения Клейна – Фока – Гордона. Все манипуляции будут верны также для $L(s)$, но приводят к более громоздким промежуточным результатам.

Подставляя $L_0(s)$ (18) и (14) в уравнение (12), получим функцию Грина уравнения Клейна – Фока – Гордона

$$D_0(T, \boldsymbol{\rho} \,|\, T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon) = \\ = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{4\pi s}\, \delta(T - T' - 2\varepsilon s) \exp\left[\mathrm{i}\frac{(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^2}{4s} - \mathrm{i}sm^2\right] \times \\ \times \exp\left[-2\mathrm{i}s\varepsilon \int_0^1 V\big(\boldsymbol{\rho} - x(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') - 2sx\mathbf{p}_\perp, T - x(T - T')\big)\, \mathrm{d}x\right]. \quad (19)$$

Далее, воспользовавшись соотношением (7), получим

$$\int_0^1 V\Big(\boldsymbol{\rho} - x(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') - 2sx\mathbf{p}_\perp,\, T - x(T - T')\Big)\, \mathrm{d}x = \\ = \int_0^1 \exp\left(-\frac{\mathrm{i}sx\mathbf{p}_\perp^2}{1 - x}\right) V\Big(\boldsymbol{\rho} - x(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'),\, T - x(T - T')\Big) \times \\ \times \exp\left(\frac{\mathrm{i}sx\mathbf{p}_\perp^2}{1 - x}\right) \mathrm{d}x. \quad (20)$$

Аргументы ультрарелятивистской функции Грина $D_0(T, \boldsymbol{\rho} \,|\, T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon)$ с энергией ε имеют следующие характерные значения: $|T|, |T'| \sim (\varepsilon/m^2) \gg |\rho|, |\rho'| \sim 1/m$. Так как в (20) оператор $\mathbf{p}_\perp$ действует только на атомный потенциал, оператор $\exp\left[\pm\mathrm{i}sx\mathbf{p}_\perp^2/(1 - x)\right]$ даёт существенный вклад только вблизи начала координат. Если величины T и T' имеют одинаковый знак, то частица не пролетает вблизи центра потенциала и операторы $\exp\left[\pm\mathrm{i}sx\mathbf{p}_\perp^2/(1 - x)\right]$ можно заменить единицей, что соответствует приближению эйконала. При $T > 0$, $T' < 0$, принимая во внимание приведённые выше аргументы, в операторе $\exp\left[\pm\mathrm{i}sx\mathbf{p}_\perp^2/(1 - x)\right]$ заменим x величиной $x_0 = T/(T - T')$.

Тогда $D_0(T, \boldsymbol{\rho} \,|\, T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon)$ приобретает следующий вид:

$$D_0(T, \boldsymbol{\rho} \,|\, T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon) = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{4\pi s}\, \delta(T - T' - 2\varepsilon s) \times \\ \times \exp\left[\mathrm{i}\frac{(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^2}{4s} - \mathrm{i}sm^2\right] \exp\left(-\mathrm{i}s\frac{x_0}{1 - x_0}\mathbf{p}_\perp^2\right) \times \\ \times \exp\left[-2\mathrm{i}s\varepsilon \int_0^1 V\Big(\boldsymbol{\rho} - x(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'),\, T - x(T - T')\Big)\, \mathrm{d}x\right]. \quad (21)$$

Используя соотношение (16), получаем следующее выражение для $D_0(T, \boldsymbol{\rho}\,|\,T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon)$:

$$D_0(T, \boldsymbol{\rho}\,|\,T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon) = \mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{4\pi^2 s}\,\delta(T - T' - 2\varepsilon s)\times$$
$$\times \exp\left[\mathrm{i}\frac{(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')^2}{4s} - \mathrm{i}sm^2\right]\int \mathrm{d}\mathbf{q}\,\exp\left(\mathrm{i}q^2 - 2\mathrm{i}s\varepsilon\int_0^1 V_x\,\mathrm{d}x\right),$$
$$V_x = V\Big(\boldsymbol{\rho} - x(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}') + 2\sqrt{x_0(1-x_0)s}\,\mathbf{q}\,,\ T - x(T-T')\Big)\,. \tag{22}$$

Заметим, что в этом выражении уже нет операторов импульса. Взяв интеграл по переменной s, находим функцию Грина $D_0(T, \boldsymbol{\rho}\,|\,T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon)$ уравнения Клейна–Фока–Гордона в главном квазиклассическом приближении:

$$D_0(T, \boldsymbol{\rho}\,|\,T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon) = \frac{\mathrm{i}\theta(s_0)}{4\pi^2|T-T'|}\exp\left[\mathrm{i}\frac{(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')^2}{4s_0} - \mathrm{i}m^2 s_0\right]\times$$
$$\times\int \mathrm{d}\mathbf{q}\,\exp\left(\mathrm{i}q^2 - 2\mathrm{i}s_0\varepsilon\int_0^1 V_x\,\mathrm{d}x\right), \tag{23}$$

где $s_0 = (T-T')/(2\varepsilon)$.

Таким образом, видно, что член, пропорциональный $\mathbf{q}$, в атомном потенциале возникает вследствие некоммутативности операторов $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{p}_\perp$. Поэтому интегрирование по двумерному вектору $\mathbf{q}$ можно интерпретировать как учёт квантовых флуктуаций вблизи прямолинейной классической траектории движения ультрарелятивистского электрона. Напомним, что член, пропорциональный $\mathbf{q}$, в атомном потенциале должен быть опущен при $x_0 < 0$ и $x_0 > 1$, в этом случае квазиклассическая функция Грина переходит в эйкональную.

Аналогичным образом находится функция Грина квадрированного уравнения Дирака с учётом первой квазиклассической поправки:

$$D(T, \boldsymbol{\rho}\,|\,T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon) = d_0(T, \boldsymbol{\rho}\,|\,T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon) +$$
$$+\boldsymbol{\alpha}\mathbf{d}_1(T, \boldsymbol{\rho}\,|\,T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon) + \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{d}_2(T, \boldsymbol{\rho}\,|\,T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon)\,,$$
$$d_0(T, \boldsymbol{\rho}\,|\,T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon) = D_0(T, \boldsymbol{\rho}\,|\,T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon)\times$$
$$\times\left[1 + \mathrm{i}4\varepsilon^2 s^3\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\,(x-y)\boldsymbol{\nabla}_\perp V_x\,\boldsymbol{\nabla}_\perp V_y\right],$$
$$\mathbf{d}_1(T, \boldsymbol{\rho}\,|\,T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon) = -\frac{\mathrm{i}}{2\varepsilon}\boldsymbol{\nabla} d_0(T, \boldsymbol{\rho}\,|\,T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon) -$$
$$-\frac{s}{2\varepsilon}D_0(T, \boldsymbol{\rho}\,|\,T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon)\int_0^1 \mathrm{d}x\,\boldsymbol{\nabla} V_x^2\,, \tag{24}$$
$$\mathbf{d}_2(T, \boldsymbol{\rho}\,|\,T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon) = -\mathrm{i}s^2 D_0(T, \boldsymbol{\rho}\,|\,T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon)\times$$
$$\times\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\,[\boldsymbol{\nabla} V_x\times\boldsymbol{\nabla} V_y]\,,$$
$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\rho}'} + \mathbf{e}_z(\partial_T + \partial_{T'})\,,$$
$$V_x = V\big(\boldsymbol{\rho} - x(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}') + 2\sqrt{x_0(1-x)s}\,\mathbf{q}\,,\ \ T - x(T-T')\big)\,,$$

V_y получается из V_x заменой $x \to y$, функция $D_0(T, \boldsymbol{\rho}|\,T', \boldsymbol{\rho}'; \varepsilon)$ определена в (23). Заметим, что первая квазиклассическая поправка к d_0 не содержит, в отличие от (9), продольных градиентов, так как член $\partial_T V_x \partial_T V_y$ после интегрирования по частям сокращается с членом V_x^2, содержащимся в $\tilde{V}_x$ (см. формулу (5)).

Для практических вычислений удобнее перейти к пространственно-временны́м координатам, в которых функция Грина квадрированного уравнения Дирака принимает вид

$$d_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) = \frac{\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\kappa r)}{4\pi^2 r}\times$$
$$\times\int \mathrm{d}\mathbf{Q}\left\{1 + \frac{\mathrm{i}r^3}{2\kappa}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\,(x-y)\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\mathbf{R}_x)\boldsymbol{\nabla}_\perp V(\mathbf{R}_y)\right\}\mathcal{T},$$
$$\mathbf{d}_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) = -\frac{\mathrm{i}}{2\varepsilon}\boldsymbol{\nabla} d_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) - \frac{\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\kappa r)}{16\pi^2\varepsilon^2}\times$$
$$\times\int \mathrm{d}\mathbf{Q}\int_0^1 \mathrm{d}x\,\boldsymbol{\nabla} V^2(\mathbf{R}_x)\,\mathcal{T}\,,$$
$$\mathbf{d}_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) = -\frac{r\exp(\mathrm{i}\kappa r)}{16\pi^2\varepsilon^2}\times \tag{25}$$
$$\times\int \mathrm{d}\mathbf{Q}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\,\big[\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{R}_x)\times\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{R}_y)\big]\,\mathcal{T}\,,$$
$$\mathcal{T} = \exp\left[\mathrm{i}Q^2 - \mathrm{i}r\int_0^1 \mathrm{d}x\,V(\mathbf{R}_x)\right],\quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\,,$$
$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_1} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_2}\,,\quad \mathbf{R}_x = \mathbf{r}_1 + x\mathbf{r} + \mathbf{Q}\sqrt{\frac{2r_1r_2}{\kappa r}},\quad \kappa = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}\,.$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным в [10]. Найденная квазиклассическая функция Грина (25) имеет следующую точность: функции $d_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon)$ и $d_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon)$ найдены с учётом первой поправки по m/ε и $\rho_{1,2}/r_{1,2}$, а функция $d_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon)$ получена в главном приближении, так как это слагаемое само по себе подавлено. Этой точности достаточно для вычислений сечений различных процессов КЭД с учётом первой поправки по m/ε_i и θ_i, где ε_i — энергии частиц, θ_i — углы между импульсами начальных и конечных частиц.

3. Заключение

С помощью метода собственного времени Фока–Швингера получена квазиклассическая функция Грина уравнения Дирака в произвольном атомном потенциале с учётом первой квазиклассической поправки. Этот метод, который является довольно простым и удобным в применении, позволит получить функции Грина при высоких энергиях и в других конфигурациях внешних полей.

Работа выполнена при поддержке Российским научным фондом (грант 14-50-00080).

Список литературы

1. Furry W H *Phys. Rev.* **81** 115 (1951)
2. Overbo I, Mork K J, Olsen H A *Phys. Rev.* **175** 1978 (1968)
3. Крачков П А, Ли Р Н, Мильштейн А И *УФН* **186** 689 (2016); Krachkov P A, Lee R N, Milstein A I *Phys. Usp.* **59** 619 (2016)
4. Mil'shtein A I, Strakhovenko V M *Phys. Lett. A* **95** 135 (1983)
5. Мильштейн А И, Страховенко В М *ЖЭТФ* **85** 14 (1983); Mil'shtein A I, Strakhovenko V M *JETP* **58** 8 (1983)
6. Lee R N, Milstein A I *Phys. Lett. A* **198** 217 (1995)
7. Ли Р Н, Мильштейн А И *ЖЭТФ* **107** 1393 (1995); Lee R N, Milstein A I *JETP* **80** 777 (1995)
8. Ли Р Н, Мильштейн А И, Страховенко В М *ЖЭТФ* **117** 75 (2000); Lee R N, Milstein A I, Strakhovenko V M *JETP* **90** 66 (2000)
9. Lee R N, Milstein A I, Strakhovenko V M *Phys. Rev. A* **85** 042104 (2012)
10. Krachkov P A, Milstein A I *Phys. Rev. A* **91** 032106 (2015)

11. Di Piazza A, Milstein A I *Phys. Lett. B* **717** 224 (2012)
12. Ли Р Н, Мильштейн А И, Страховенко В М, Шварц О Я *ЖЭТФ* **127** 5 (2005); Lee R N, Milstein A I, Strakhovenko V M, Schwarz O Ya *JETP* **100** 1 (2005)
13. Lee R N, Milstein A I, Strakhovenko V M *Phys. Rev. A* **69** 022708 (2004)

An operator derivation of the quasiclassical Green's function

P.A. Krachkov, A.I. Milstein
Budker Institute of Nuclear Physics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, prosp. Akademika Lavrent'eva 11, 630090 Novosibirsk, Russian Federation
E-mail: *P.A.Krachkov@inp.nsk.su, A.I.Milstein@inp.nsk.su*

The quasiclassical Green's function for the Dirac equation for an arbitrary localized potential is consistently derived using the Fock–Schwinger proper time method. The method essentially consists of exponentially parametrizing the propagator and disentangling the operator expressions. It allows calculating both the main quasiclassical contribution to and the first quasiclassical correction for the Green's function.

Keywords: proper time method, operator technique, Green's function, quasiclassical approximation

PACS numbers: **12.20.–m**, 12.20.Ds

Bibliography — 13 references *Received 4 July 2017*

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **188** (9) 992–996 (2018) *Physics – Uspekhi* **61** (9) (2018)

DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.09.038208 DOI: https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.09.038208