

**МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ**

**Волны в неоднородной плазме  
и в неоднородных потоках жидкости и газа.  
Аналогии между электродинамическими  
и газодинамическими явлениями**

М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе

*Рассмотрены плазменные и гидродинамические явления, между которыми прослеживается достаточно глубокая аналогия. Исследованы поверхностные волны неоднородного слоя плазмы и неоднородного потока несжимаемой жидкости; неустойчивости тангенциального разрыва неоднородного газового потока и неустойчивости отрицательной массы плазмы с пучком электронов; излучательные черенковские неустойчивости электронного пучка в плазме и газового потока в газе; неустойчивости потоков плазмы и потоков несжимаемой жидкости с неоднородными профилями скорости. Особое внимание уделено бесстолкновительному затуханию поверхностных волн в плазме. Показано, что аналогичное затухание поверхностных волн в газовых потоках отсутствует.*

**Ключевые слова:** плазменные и гидродинамические аналогии, неустойчивость тангенциального разрыва, неустойчивость отрицательной массы, аналог бесстолкновительного затухания плазмы

PACS numbers: 41.60.Bq, 52.25.Os

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.10.038214>

**Содержание**

1. Введение (831).
2. Основные уравнения для равновесной плазмы и несжимаемой жидкости (832).
3. Простейшие решения для слоя плазмы и их анализ (832).
4. Поведение решений вблизи особой точки (834).
5. Плазменные волны в длинноволновом приближении (835).
6. Волны потока жидкости в длинноволновом приближении (836).
7. Точное решение задачи об устойчивости потока несжимаемой жидкости (837).
8. Теорема Рэлея и некоторые другие утверждения (838).
9. Основные уравнения для неравновесной плазмы и сжимаемой жидкости (839).
10. Пучковые неустойчивости в плазме (841).
11. Неустойчивости неоднородного газового потока (842).
12. Неустойчивость потока плазмы с неоднородной скоростью (844).

13. Заключение (845).

14. Приложение. Вычисление комплексных интегралов (846).

Список литературы (847).

**1. Введение**

Между электромагнитными явлениями в плазме и механическими явлениями в жидкостях и газах иногда прослеживается достаточно глубокая аналогия. Этот факт на первый взгляд не представляется неожиданным, поскольку и плазма, и жидкость являются сплошными средами, для описания которых могут быть использованы сходные математические модели. Так, холодная плазма успешно описывается уравнениями многожидкостной квазигидродинамики, когда гидродинамические уравнения (непрерывности и Эйлера) записываются для каждого сорта заряженных частиц, из которых состоит плазма [1, 2]. Что касается жидкостей и газов, то именно на уравнениях гидродинамики основан фактически единственный метод их теоретического описания [3, 4].

Однако при более внимательном рассмотрении сходство между плазменными и гидродинамическими явлениями представляется искусственным. Действительно, основным при взаимодействии заряженных частиц плазмы является самосогласованное электромагнитное поле, создаваемое индуцированными в плазме зарядами и токами. Всё остальное — столкновения, газокинетическое давление — является второстепенным и не составляет сути плазмы как специфической материальной среды. В

М.В. Кузелев. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы 1, стр. 2, 119992 Москва, Российская Федерация  
E-mail: kuzlev@mail.ru

А.А. Рухадзе. Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, ул. Вавилова 38, 119942 Москва, Российская Федерация; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы 1, стр. 2, 119992 Москва, Российская Федерация

Статья поступила 3 апреля 2017 г.,  
после доработки 27 августа 2017 г.

случае жидкостей и газов основными, безусловно, являются механические силы давления. Кроме того, в жидкостях и газах вообще не фигурируют сорта составляющих их частиц, поскольку применительно к жидкостям и газам понятие об отдельной частице просто бессмысленно. Мы здесь имеем в виду не искусственное или формальное сходство между плазменными и гидродинамическими явлениями (типа похожих уравнений или сходных частотных спектров волн), а достаточно глубокие физические аналогии. Например, одним из важных в плазме является эффект вынужденного черенковского излучения плазменных волн, классифицируемый как взаимодействие типа волна – частица [5–7]. Оказывается, в газовой динамике возможно также вынужденное черенковское излучение звуковых волн газовым потоком, хотя говорить о взаимодействии волн и частиц в жидкостях и газах, как отмечалось выше, бессмысленно. Конечно, имеется множество плазменных явлений, для которых в газодинамике не существует никаких аналогий. Например, имеющее прямое отношение к черенковскому излучению и поглощению затухание Ландау является специфически плазменным явлением [1, 8].

В настоящей статье мы хотим обсудить некоторые вопросы из теории плазмы и газовой динамики, между которыми имеются как глубокие физические аналогии, так и принципиальные различия. Надеемся, что это будет интересно физикам самого широкого профиля, особенно тем, кто работает в области физики сплошных сред. Поскольку статья имеет методическую направленность, она должна представлять интерес также и для тех, кто заинтересован в глубоком изучении основ теоретической физики. Заметим, что до настоящего времени некоторыми исследователями делаются попытки построить теорию электромагнитного поля исходя из гидродинамики гипотетического эфира. Мы, не являясь сторонниками такого подхода, считаем необходимым сразу подчеркнуть, что настоящая статья посвящена абсолютно другим вопросам.

## 2. Основные уравнения для равновесной плазмы и несжимаемой жидкости

Потенциальные волны в плоском слое холодной электронной бесстолкновительной плазмы описываются следующим уравнением [9, 10]:

$$\frac{d}{dx} \left[ (\omega_p^2(x) - \omega^2) \frac{d\varphi}{dx} \right] - k_z^2 (\omega_p^2(x) - \omega^2) \varphi = 0, \quad (2.1)$$

где  $\omega_p(x) \sim \sqrt{n_0(x)}$  — электронная ленгмюровская частота,  $n_0(x)$  — распределение концентрации электронов в плоском плазменном слое, бесконечно протяжённом в направлениях  $y$  и  $z$ . Предполагается, что волна  $\varphi(x) \exp(-i\omega t + ik_z z)$  распространяется вдоль слоя плазмы в направлении оси  $z$ , а уравнение (2.1) определяет комплексную амплитуду  $\varphi(x)$  скалярного потенциала этой волны ( $\omega$  — частота волны,  $k_z$  — волновое число). Если плазменный слой помещён между заземлёнными обкладками плоского конденсатора, то уравнение (2.1) дополняется граничными условиями

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0. \quad (2.2)$$

Результатом решения краевой задачи (2.1), (2.2) являются собственные частоты  $\omega(k_z)$  и соответствующие

собственные функции волн плазменного слоя в конденсаторе (плоском волноводе). Для дальнейшего будет полезна ещё одна форма записи уравнения (2.1):

$$(\omega_p^2(x) - \omega^2) \left( \frac{d^2\varphi}{dx^2} - k_z^2 \varphi \right) + \frac{d\omega_p^2}{dx} \frac{d\varphi}{dx} = 0. \quad (2.3)$$

Аналогичные (2.1) уравнения известны и в гидродинамике. Так, свойства плоскопараллельных течений несжимаемой жидкости в линейном приближении описываются уравнением Орра–Зоммерфельда [11, 12]. В случае невязкой жидкости это уравнение сводится к известному уравнению Рэлея:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \left( U_0(x) - \frac{\omega}{k_z} \right) \frac{dW}{dx} - \frac{dU_0}{dx} W \right] - \\ - k_z^2 \left( U_0(x) - \frac{\omega}{k_z} \right) W = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) описывает малые возмущения в потоке жидкости, движущемся в направлении оси  $z$  с невозмущённой скоростью  $U_0(x)$ . Возмущение ищется в виде плоской волны  $W(x) \exp(-i\omega t + ik_z z)$ , распространяющейся вдоль потока, где  $W(x)$  — неоднородная амплитуда возмущения  $x$ -компоненты скорости. Если жидкость протекает между абсолютно твёрдыми плоскопараллельными стенками, то уравнение (2.4) дополняется следующими граничными условиями:

$$W(0) = W(L) = 0. \quad (2.5)$$

Понадобится еще одна форма записи уравнения (2.4):

$$\left( U_0(x) - \frac{\omega}{k_z} \right) \left( \frac{d^2W}{dx^2} - k_z^2 W \right) - \frac{d^2U_0}{dx^2} W = 0. \quad (2.6)$$

Краевая задача (2.4), (2.5) определяет собственные частоты  $\omega(k_z)$  собственных волн плоского потока несжимаемой жидкости. При всём сходстве между краевыми задачами (2.1), (2.2) и (2.4), (2.5) между ними имеются и существенные различия.

## 3. Простейшие решения для слоя плазмы и их анализ

Как сразу видно из уравнения (2.1), записанного в форме (2.3), при  $\omega_p^2(x) = \omega_{p0}^2 = \text{const}$  его общее решение имеет вид

$$\varphi(x) = A \exp(k_z x) + B \exp(-k_z x), \quad (3.1)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные. Функция (3.1) в принципе может описывать некоторую поверхность волну плазменного слоя<sup>1</sup>. Ещё одно решение уравнения (2.1) при постоянной плазменной частоте определяется формулами

$$\omega^2 = \omega_{p0}^2, \quad \varphi(x) = \varphi_0(x), \quad (3.2)$$

<sup>1</sup> Волну называют поверхностью, если её пространственная структура в направлении, перпендикулярном направлению распространения, задаётся функциями вида  $\exp(\pm k_z x)$  с вещественным  $k_z$ . В случае мнимого  $k_z$  волну называют объёмной [10, 13].

где  $\varphi_0(x)$  — произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям (2.2). Формулы (3.2) определяют объёмную ленгмюровскую волну однородной холодной электронной плазмы. Что касается функции (3.1), то она может удовлетворить граничным условиям (2.2) только при  $A = B = 0$ , но тогда  $\varphi(x) \equiv 0$ . Таким образом, имеем очевидный результат: если плотность плазмы постоянна во всей области  $(0, L)$ , то поверхностные волны в слое плазмы, находящемся между обкладками конденсатора, нет.

Граничным условиям (2.2) можно удовлетворить, если  $\omega_p^2(x)$  является кусочно-постоянной функцией. Пусть, например,

$$\omega_p^2(x) = \begin{cases} \omega_{p1}^2, & 0 < x < a, \\ \omega_{p2}^2, & a < x < L. \end{cases} \quad (3.3)$$

Тогда, как сразу следует из уравнения (2.3), имеются две объёмные ленгмюровские волны:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_{p1}^2, \quad \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x < a, \\ 0, & a < x < L, \end{cases} \\ \omega^2 &= \omega_{p2}^2, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \varphi_2(x), & a < x < L, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

существующие в соседних областях плазменного слоя ( $\varphi_{1,2}(x)$  — произвольные функции, удовлетворяющие соответствующим граничным условиям).

Кроме того, у уравнения (2.1) имеются и решения вида (3.1), которые, учитывая граничные условия (2.2), запишем в виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} A \sinh(k_z x), & x < a, \\ B \sinh(k_z(x - L)), & a < x < L. \end{cases} \quad (3.5)$$

Решение (3.5) определяет поверхностную волну. Поскольку функция  $\omega_p^2(x)$  имеет в точке  $x = a$  разрыв первого рода, из уравнения (2.1) следуют условия сшивания решения (3.5) в этой точке:

$$\{\varphi(x)\}|_{x=a} = 0, \quad \left\{ [\omega_p^2(x) - \omega^2] \frac{d\varphi(x)}{dx} \right\}_{x=a} = 0, \quad (3.6)$$

подставляя в которые (3.5), для квадрата частоты поверхности волны находим следующее известное выражение [10, 13]:

$$\omega^2(k_z) = \frac{\omega_{p1}^2 \tanh(k_z(L - a)) + \omega_{p2}^2 \tanh(k_z a)}{\tanh(k_z(L - a)) + \tanh(k_z a)}. \quad (3.7)$$

Пусть теперь функция  $\omega_p^2(x)$  является кусочно-постоянной (ступенчатой) функцией. А именно, при  $x \in G_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , имеем  $\omega_p^2(x) = \omega_{pj}^2 = \text{const}$ , где  $G_j$  — непрерывные неперекрывающиеся подобласти разбиения области  $(0, L)$ . Очевидно, что в каком-то виде поверхность волны сохранится<sup>2</sup>. Её частота определяется из граничных условий (2.2) и условий сшивания решений (3.1) в точках разрыва функции  $\omega_p^2(x)$  (см. (3.6)). Останутся и объёмные ленгмюровские волны, частоты и потенциалы которых, по аналогии с (3.4), определяются

<sup>2</sup> Поверхностных волн будет столько, сколько точек разрыва имеет функция  $\omega_p(x)$ .

соотношениями

$$\omega = \omega_{pj}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_j(x), & x \in G_j, \\ 0, & x \notin G_j, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

где  $\varphi_j(x)$  — произвольные функции.

Осуществляя далее предельный переход  $|G_j| \rightarrow 0$ , перейдём от разрывной ступенчатой функции  $\omega_p^2(x)$  к непрерывной зависимости. То, что при таком предельном переходе поверхностная волна должна сохраняться, ясно из следующего простого рассуждения. Пусть, например, плазменная частота определяется не формулой (3.3), а формулой

$$\omega_p^2(x) = \begin{cases} \omega_{p1}^2, & 0 < x < a, \\ \omega_{p1}^2 + (\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2) \frac{x - a}{b - a}, & a < x < b, \\ \omega_{p2}^2, & b < x < L. \end{cases} \quad (3.9)$$

При  $b \rightarrow a$  непрерывная функция (3.9) переходит в разрывную функцию (3.3). Из общих соображений ясно, что небольшая размытость границы раздела плазм разной плотности не может привести к значительному изменению частоты (3.7) и потенциала (3.5) реальной физической волны, по крайней мере до тех пор, пока  $k_z(b - a) \ll 1$ . В дальнейшем мы рассмотрим предельный переход от распределения (3.9) к распределению (3.3).

Далее, в пределе  $|G_j| \rightarrow 0$  для объёмных ленгмюровских волн получим выражения

$$\omega = \omega_p(x_j), \quad \varphi(x) = \psi(x_j) \tilde{\delta}(x - x_j), \quad (3.10)$$

определяющие частоты и потенциал волн плазменного слоя. Здесь  $\psi(x_j)$  — произвольная постоянная,  $x_j \in (0, L)$  — точка, в которую при  $|G_j| \rightarrow 0$  стягивается область  $G_j$ ,  $\tilde{\delta}(x)$  — любая функция, отличная от нуля только в точке  $x = 0$  и её бесконечно малой окрестности (например,  $\delta$ -функция Дирака). Волны (3.10) называются локальными ленгмюровскими волнами непрерывного спектра [14]. Будем называть их ленгмюровскими псевдоволнами<sup>3</sup>. Непрерывность спектра означает, что собственные частоты образуют непрерывное множество значений  $\omega_p(x_j)$ ,  $x_j \in (0, L)$ ,  $\tilde{\delta}(x - x_j)$  — соответствующая собственная функция. Тогда собственная псевдволна (с учётом временной зависимости) имеет вид

$$\varphi_S(t, x; x_j) = \tilde{\delta}(x - x_j) \exp(-i\omega_p(x_j)t). \quad (3.11)$$

Используя определение функции  $\tilde{\delta}(x)$ , произвольное возмущение потенциала можно представить в виде разложения по собственным псевдоволнам:

$$\varphi(t, x) = \int_0^L \psi(x_j) \varphi_S(t, x; x_j) dx_j = f(x) \exp(-i\omega_p(x)t), \quad (3.12)$$

где  $f(x)$  — произвольная функция.

С наличием среди нормальных возмущений слоя плазмы псевдоволны можно связать одну математическую особенность уравнения (2.1), или (2.3). При

<sup>3</sup> Термин "псевдоволна" был введён в монографии [15] в связи с рассмотрением резонансных взаимодействий волна — частица в плазме.

$d\omega_p^2/dx \neq 0$  уравнение (2.3) описывает взаимодействие поверхностной волны плазменного слоя и ленгмюровской псевдоволны непрерывного спектра. Как известно из теории связанных волн [16, 17], взаимодействие волн наиболее сильно тогда, когда их частоты (и волновые числа) близки между собой, что в нашем случае можно представить в виде равенства  $\omega(k_z) = \omega_p(x)$ , определяющего в слое плазмы некоторую резонансную точку, к исследованию которой мы перейдём несколько позднее.

Казалось бы, что, основываясь на аналогии уравнений (2.1) и (2.4), а также (2.3) и (2.6), можно проведённый выше анализ простейших решений для слоя плазмы перенести на плоский поток несжимаемой жидкости. Действительно, если скорость  $U_0(x)$  является линейной функцией, то уравнение (2.6) имеет решение в виде поверхностной волны (3.1). В случае кусочно-линейной функции  $U_0(x)$  можно построить решение уравнения (2.6), удовлетворяющее граничным условиям (2.5), т.е. поверхностную волну. Можно ввести и локальную гидродинамическую волну (псевдоволну потока) с непрерывным спектром

$$\omega = k_z U_0(x). \quad (3.13)$$

Но на этом аналогия заканчивается.

Главное отличие гидродинамического уравнения (2.6) от плазменного уравнения (2.3) заключается в том, что второе слагаемое в левой части (2.6) содержит вторую производную  $d^2 U_0/dx^2$ , а второе слагаемое в левой части (2.3) — первую производную  $d\omega_p^2/dx$ . Предположим, что условие резонанса поверхностной волны потока и гидродинамической псевдоволны (3.13)  $\omega(k_z) = k_z U_0(x)$  реализуется в некоторой точке  $x_0 \in (0, L)$ . В этой точке и её окрестности любую непрерывную функцию  $U_0(x)$  можно аппроксимировать линейной зависимостью. Но вторая производная от линейной функции равна нулю, поэтому второе слагаемое в левой части уравнения (2.6) исчезает. Таким образом, резонансное взаимодействие поверхностной волны потока и гидродинамической псевдоволны (3.13) отсутствует. Указанное обстоятельство приводит к глубоким последствиям. Можно, конечно, пойти дальше и учесть в разложении функции  $U_0(x)$  около точки  $x_0$  следующие члены. К чему это приведёт, выясним в разделе 4. Позднее будут рассмотрены и решения краевой задачи (2.4), (2.5) при кусочно-линейной функции  $U_0(x)$  (аналог (3.5), (3.7)).

#### 4. Поведение решений вблизи особой точки

Для уравнений типа (2.1) и (2.4) особыми называют точки, в которых коэффициент при старшей производной обращается в нуль. Особые точки  $x = x_0(\omega)$  определяются из уравнений

$$\omega_p^2(x) - \omega^2 = 0, \quad (4.1)$$

$$U_0(x) - \frac{\omega}{k_z} = 0. \quad (4.2)$$

Особые точки  $x_0$  называют также резонансными точками, поскольку соотношение (4.1) является условием плазменного резонанса [18], а равенство (4.2) является гидродинамическим аналогом известного из электродинамики условия черенковского резонанса [5, 19].

Исследуем поведение решений уравнений (2.1) и (2.4) вблизи резонансных точек. Заметим, что поскольку частоты  $\omega$  заранее неизвестны, то неизвестно, принадлежат ли особые точки области  $(0, L)$ , в которой решаются уравнения (2.1) и (2.4). Но для формального исследования решений в окрестности особых точек это обстоятельство значения не имеет.

Ограничимся пока случаем, в котором вблизи резонансной точки для левых частей уравнений (4.1) и (4.2) имеют место представления  $\alpha(x - x_0)$ , где  $\alpha$  — постоянная. Поэтому при  $x \approx x_0$  уравнение (2.1) сводится к следующему:

$$\frac{d}{dx} \left[ (x - x_0) \frac{d\varphi}{dx} \right] - k_z^2 (x - x_0) \varphi = 0. \quad (4.3)$$

Решение уравнения (4.3) имеет вид

$$\varphi(x) = A I_0[k_z(x - x_0)] + B K_0[k_z(x - x_0)], \quad (4.4)$$

где  $I_0(x)$  и  $K_0(x)$  — функции Инфельда и Макдональда. При выполнении неравенства  $|k_z(x - x_0)| \ll 1$  (в длинноволновом пределе) решение (4.4) принимает вид

$$\varphi(x) = \tilde{A} + \tilde{B} \ln[k_z(x - x_0)], \quad \tilde{A}, \tilde{B} = \text{const}. \quad (4.5)$$

Решения (4.4) и (4.5) являются сингулярными — они имеют логарифмическую особенность. Кроме того, даже при вещественных значениях  $k_z$ ,  $x$  и  $x_0$  эти решения оказываются комплексными, поскольку  $\ln[k_z(x - x_0)] - \ln[k_z(x_0 - x)] = \pm i\pi$ .

Заметим, что исходное уравнение (2.1), так же как и более простое уравнение (4.3), являются уравнениями вида

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d\varphi}{dx} \right) - \lambda q(x) \varphi = 0, \quad p(x_0) = 0. \quad (4.6)$$

В курсах математической физики и теории дифференциальных уравнений для уравнения (4.6) рассматривается краевая задача для собственных значений  $\lambda$  (задача Штурма–Лиувилля) [20], решаемая в области  $x_0 < x < x_1$  (или  $x_1 < x < x_0$ ) с условием ограниченности решения в особой точке  $x = x_0$  (второе условие ставится в точке  $x = x_1$ ). Условие ограниченности означает, что, записывая общее решение уравнения (4.6), следует отбросить то из его линейно независимых решений, которое в особой точке обращается в бесконечность (т.е. положить в (4.4)  $B = 0$ ). В случае плазменного слоя имеет место иная ситуация: уравнения (2.1) и (4.3) решаются по обе стороны от особой точки  $x_0$ , т.е. решение (4.4) должно быть справедливым как при  $x > x_0$ , так и при  $x < x_0$ , причём отбросить сингулярную составляющую в решении никак нельзя. Таким образом, между традиционной краевой задачей Штурма–Лиувилля для уравнения (4.6) и краевой задачей для слоя плазмы имеются принципиальные различия.

Что касается уравнения (2.4), то при  $x \approx x_0$  оно преобразуется в

$$(x - x_0) \left( \frac{d^2 W}{dx^2} - k_z^2 W \right) = 0. \quad (4.7)$$

Общее решение последнего уравнения совпадает с (3.1). Как видим, решение уравнения (4.7) не имеет особенностей

тей. Таким образом, для уравнения (2.4) особая точка фактически таковой не является. Для уточнения этого результата следует около особой точки использовать разложение

$$U_0(x) - \frac{\omega}{k_z} = \alpha(x - x_0) + \beta(x - x_0)^2. \quad (4.8)$$

С учётом (4.8) уравнение (2.6) можно записать в виде

$$(x - x_0) \left( \frac{d^2 W}{dx^2} - k_z^2 W \right) - 2\tilde{\beta} W = 0, \quad (4.9)$$

где  $\tilde{\beta} = \beta/\alpha$  (случай  $\alpha = 0$  мы не рассматриваем). Общее решение уравнения (4.9) выражается через гипергеометрическую функцию  $\mathcal{U}(s, r, x)$  и функцию Лагерра  $\mathcal{L}(s, r, x)$  [21]:

$$\begin{aligned} W(x) = & A \exp[-k_z(x - x_0)] \mathcal{L}\left[-\frac{\tilde{\beta}}{k_z}, -1, 2k_z(x - x_0)\right] + \\ & + B \exp[-k_z(x - x_0)] \mathcal{U}\left[\frac{\tilde{\beta}}{k_z}, 0, 2k_z(x - x_0)\right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Решение (4.10) регулярно в особой точке. Кроме того, функция  $\mathcal{U}$  является комплекснозначной. В длинноволновом пределе  $|k_z(x - x_0)| \ll 1$  решение (4.10) принимает вид (ср. с (4.5)):

$$W(x) = \tilde{A} \tilde{\beta}(x - x_0) + \tilde{B} \{1 + 2\tilde{\beta}(x - x_0) \ln [\tilde{\beta}(x - x_0)]\}. \quad (4.11)$$

Уравнение (2.4) является уравнением вида

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dW}{dx} - \frac{dp(x)}{dx} W \right) - \lambda q(x) W = 0, \quad p(x_0) = 0. \quad (4.12)$$

Хотя последнее уравнение и похоже на уравнение (4.6), свойства (4.12) оказываются существенно иными. В частности, при постановке краевой задачи для уравнения (4.12) несущественно, является ли особая точка  $x_0$  внутренней точкой области интегрирования или нет. Поэтому, как будет показано в разделе 5, волновые свойства плазменного слоя и плоского потока несжимаемой жидкости оказываются во многом несходящими между собой.

## 5. Плазменные волны в длинноволновом приближении

В длинноволновом пределе  $k_z \rightarrow 0$  вторым слагаемым в левой части уравнения (2.1) можно пренебречь. После этого уравнение (2.1) один раз интегрируется, что даёт

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{B}{\omega_p^2(x) - \omega^2}. \quad (5.1)$$

Из граничных условий (2.2) имеем  $\varphi(L) - \varphi(0) = 0$ . Отсюда и из (5.1) получаем следующее дисперсионное уравнение для определения частоты  $\omega$ :

$$\int_0^L \frac{dx}{\omega_p^2(x) - \omega^2} = 0. \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) имеет решение, только если в области  $(0, L)$  находится хотя бы одна особая точка  $x_0(\omega)$ , т.е.

3\*

корень уравнения (4.1). Но если в области интегрирования находится хотя бы одна особая точка, то интеграл в (5.2) расходится. Поэтому частота неизбежно должна быть комплексной. Единственным случаем, в котором частота может быть вещественной, является случай совпадения особой точки с точкой разрыва функции  $\omega_p^2(x)$  (что возможно только при ступенчатом плазменном заполнении).

Преобразуем уравнение (5.2), точнее, распишем его более подробно. Исходим из того, что частота  $\omega$  имеет бесконечно малую положительную мнимую часть, что обусловлено принципом причинности, согласно которому при  $t \rightarrow -\infty$  любые возмущения в системе должны исчезать [22]. Поскольку зависимость возмущений от времени была взята в виде  $\exp(-i\omega t)$ , следует положить  $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ ,  $\delta \rightarrow +0$ . Тогда, используя одну из формул Сохоцкого [22, 23], приведём дисперсионное уравнение (5.2) к виду

$$\text{V.p.} \int_0^L \frac{dx}{\omega_p^2(x) - \omega^2} + i\pi(\text{sign } \omega') \left| \frac{d\omega_p^2}{dx_0} \right|^{-1} = 0. \quad (5.3)$$

Здесь производная от функции  $\omega_p^2(x)$  берётся в точке  $x_0$ . Как видим, дисперсионное уравнение (5.3) оказывается комплексным даже при вещественной частоте  $\omega$  (так как  $\delta \rightarrow 0$ ). Последнее является следствием того, что решения (4.4) и (4.5), определённые по обе стороны от особой точки, — комплексные. Таким образом, комплексное дисперсионное уравнение (5.3) при  $x_0(\omega) \in (0, L)$  определяет комплексные частоты  $\omega = \omega' + i\omega''$ .

Необходимо отметить, что уравнение (5.3) неприменимо для нахождения частот волн с достаточно сильным затуханием. Действительно, уравнение (5.3) фактически получено из точного уравнения (5.2) предельным переходом  $\text{Im } \omega = \omega'' = \delta \rightarrow +0$ . Случай, в котором мнимая часть частоты конечна и отрицательна, требует отдельного рассмотрения. Поэтому вернёмся к уравнению (5.2). Выше было указано, что из принципа причинности следует наличие у частоты  $\omega$  положительной мнимой части (хотя бы бесконечно малой, но, может быть, и сколь угодно большой). Таким образом, интеграл в (5.2) определён только в верхней полуплоскости комплексной плоскости  $\omega = \omega' + i\omega''$ . Для того чтобы находить частоты затухающих волн, интеграл в (5.2) необходимо определить и на нижней полуплоскости  $\omega'' < 0$ . Делается это с помощью известной процедуры аналитического продолжения, впервые предложенной Л.Д. Ландау в теории ленгмюровских волн горячей плазмы [10, 22, 24]. Опуская стандартные детали аналитического продолжения (переход на комплексную плоскость  $x$  и деформация контура интегрирования)<sup>4</sup>, приведём только окончательный вид дисперсионного уравнения для частот поверхностных волн неоднородного плазменного слоя<sup>5</sup>:

$$\int_0^L \frac{dx}{\omega_p^2(x) - \omega^2} - i\pi(1 - \text{sign } \omega'') \text{sign } x_0'' \left( \frac{d\omega_p^2}{dx_0} \right)^{-1} = 0. \quad (5.4)$$

Здесь интегрирование осуществляется вдоль вещественной оси на комплексной плоскости  $x = x' + ix''$ , а про-

<sup>4</sup> Основные математические детали аналитического продолжения по методу Л.Д. Ландау применительно к рассматриваемым в настоящей статье проблемам изложены в приложении.

<sup>5</sup> См. формулу (П.6) в приложении.

изводная берётся в комплексной резонансной точке  $x_0(\omega' + i\omega'') = x'_0 + ix''_0$ . Несложно увидеть, что при  $\omega'' \rightarrow \pm 0$  из (5.4) получается уравнение (5.3).

Найденная из уравнения (5.4) частота имеет отрицательную мнимую часть — декремент затухания волны. Механизм затухания связан с резонансным возбуждением поверхностной волной слоя плазмы псевдоволны (3.11). В теории плазмы бесстолкновительное затухание хорошо известно. Мы имеем в виду затухание Ландау ленгмюровских волн в однородной горячей плазме [24]. Согласно одной из современных трактовок оно обусловлено резонансным возбуждением ленгмюровской волной  $\omega \approx \omega_p$  псевдоволны (ср. с (3.11))

$$\tilde{f}(t, v; v_j) = \delta(v - v_j) \exp(-ik_z v_j t) \quad (5.5)$$

при черенковском резонансе  $\omega - k_z v = 0$ . Здесь  $v$  — скорость частицы,  $\tilde{f}$  — возмущение функции распределения частиц по скоростям.

Рассмотрим пример. Пусть ленгмюровская частота электронов плазмы задана формулой (3.9) при  $\omega_{p1}^2 = 0$  и  $\omega_{p2}^2 = \omega_{p0}^2$ , где  $\omega_{p0}$  — постоянная. Формула (3.9) описывает плазму с нерезкой границей  $a < x < b$ . Резонансная точка определяется формулой

$$x_0(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_{p0}^2} (b - a) + a. \quad (5.6)$$

При вещественной частоте  $\omega < \omega_{p0}$  резонансная точка находится между точками  $a$  и  $b$ . Подставляя выражение (3.9) в дисперсионное уравнение (5.4), после элементарного интегрирования с учётом (5.6) находим

$$\frac{[L - (b - a)] \omega^2 - a\omega_{p0}^2}{\omega^2(\omega_{p0}^2 - \omega^2)} + \frac{b - a}{\omega_{p0}^2} \left( \ln \frac{\omega^2 - \omega_{p0}^2}{\omega^2} + 2i\pi \right) = 0. \quad (5.7)$$

Для того чтобы найти аналитическое решение уравнения (5.7), предположим, что величина  $\mu = (b - a)/L$  является малым параметром. В нулевом приближении по  $\mu$  для частоты имеем  $\omega^2 = \omega_{p0}^2 a/L$ . Тогда в первом приближении получаем следующий результат:

$$\omega^2 = \omega_{p0}^2 \frac{a}{L} - \omega_{p0}^2 \frac{b-a}{L} \frac{a}{L} \left( 1 - \frac{a}{L} \right) \left( \ln \frac{L-a}{a} + i\pi \right). \quad (5.8)$$

Декремент затухания поверхностной плазменной волны (5.8)  $\omega'' \approx -i\mu\omega_{p0}$  обусловлен резонансным возбуждением поверхностной волной локальной ленгмюровской волны непрерывного спектра.

Ранее мы качественно рассмотрели предельный переход от случая с непрерывной зависимостью плотности плазмы от координаты  $x$  к случаю ступенчатой зависимости. С помощью формулы (5.8) такой предельный переход осуществляется элементарно. Действительно, полагая в (5.8)  $b = a$ , получаем вещественную частоту (3.7), если в ней положить  $k_z = 0$ ,  $\omega_{p1}^2 = 0$  и  $\omega_{p2}^2 = \omega_{p0}^2$ .

Рассмотрим общие решения дисперсионного уравнения (5.7). Для сокращения числа свободных параметров положим  $a = (1 - \Delta)L/2$ ,  $b = (1 + \Delta)L/2$  и запишем уравнение (5.7) в безразмерном виде

$$\frac{w^2 - 1/2}{w^2(1 - w^2)} + \frac{\Delta}{1 - \Delta} \left( \ln \frac{w^2 - 1}{w^2} + 2i\pi \right) = 0, \quad (5.9)$$

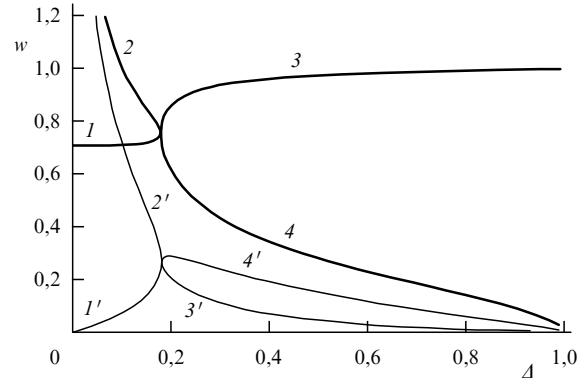


Рис. 1. Комплексные безразмерные частоты поверхностных волн плазменного слоя: жирные кривые (1–4) — вещественные части частот, тонкие кривые (1'–4') — мнимые части частот.

где  $w = \omega/\omega_{p0}$  — безразмерная частота. Численные решения уравнения (5.9) представлены на рис. 1. Видно, что помимо волн с частотой (5.8) (кривая 1) в разных диапазонах значений параметра  $\Delta$  имеются ещё три поверхностные волны (кривые 2, 3, 4), часть из которых являются слабо затухающими.

Поверхностные волны плазменного слоя, о которых здесь шла речь, исследованы достаточно полно и в широком диапазоне длин волн [9, 25, 26]. Поэтому более подробно обсуждать их в настоящей статье нецелесообразно. Вполне достаточно анализа общего дисперсионного уравнения (5.2) и конкретного примера (5.7).

## 6. Волны потока жидкости в длинноволновом приближении

Перейдём теперь к рассмотрению потока жидкости. Ограничимся сначала длинноволновым пределом, для чего обозначим  $\omega/k_z = V$  и отбросим в уравнении (2.4) член, пропорциональный  $k_z^2$ . Интегрируя оставшееся уравнение методом вариации постоянной, получим

$$W(x) = A(U_0(x) - V) + B(U_0(x) - V) \int_0^x \frac{dx'}{(U_0(x') - V)^2}, \quad 0 < x < L. \quad (6.1)$$

Подставляя далее решение (6.1) в граничные условия (2.5), находим дисперсионное уравнение для комплексной фазовой скорости  $V = V' + iV''$  поверхностных волн потока несжимаемой жидкости в длинноволновом пределе

$$\int_0^L \frac{dx}{(U_0(x) - V)^2} = 0. \quad (6.2)$$

Уравнение (6.2) кардинально отличается от дисперсионного уравнения (5.2). Действительно, если резонансная точка принадлежит области  $(0, L)$ , то интеграл в (6.2) не существует даже в смысле главного значения (V.p.). Поэтому корни уравнения (6.2) либо являются комплексными, либо вообще отсутствуют (за исключением тривиальных корней  $V = \pm\infty$ ). Кроме того, если величина  $V = V' + iV''$  является корнем уравнения (6.2), то корнем является и комплексно сопряжённая величина

$V^* = V' - iV''$ . Следовательно, система, для которой уравнение (6.2) имеет решения, неустойчива. Эта неустойчивость аналогична многочисленным гидродинамическим неустойчивостям в плазме [10], типа неустойчивости моноскоростного холодного электронного пучка в холодной плазме [27]. В свою очередь диссириация, описываемая дисперсионным уравнением (5.2), аналогична многочисленным кинетическим плазменным явлениям, типа затухания Ландау ленгмюровских волн. Заметим, что в связи с уравнением (6.2) проблемы аналитического продолжения не возникает. Действительно, результатом интегрирования по  $x$  функции  $(x-x_0)^{-2}$  является функция, аналитическая на всей комплексной плоскости  $x$ , за исключением изолированной особой точки<sup>6</sup>  $x = x_0$ .

Ограничимся простейшим примером применения уравнения (6.2). Пусть скорость потока определяется формулой

$$U_0(x) = U \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & b < x < L, \end{cases} \quad (6.3)$$

где  $U$  — постоянная. Подставляя (6.3) в (6.2), после элементарного интегрирования имеем

$$\begin{aligned} \frac{a}{V^2} + \frac{L-b}{(U-V)^2} - \frac{b-a}{V(U-V)} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow LV^2 - (a+b)UV + aU^2 &= 0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

При  $b = a$  из уравнения (6.4) находим

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= k_z U \frac{a}{L} \left( 1 \pm i\sqrt{\frac{L}{a} - 1} \right), \\ \text{при } L = 2a \quad \omega &= k_z U \frac{1 \pm i}{2}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Комплексная частота (6.5) описывает известную неустойчивость тангенциального разрыва в потоке несжимаемой жидкости со скачком скорости [4]. При произвольных значениях  $a$  и  $b$  частоты определяются следующей формулой:

$$\omega_{1,2} = k_z U \left[ \frac{a+b}{2L} \pm \sqrt{\left( \frac{a+b}{2L} \right)^2 - \frac{a}{L}} \right]. \quad (6.6)$$

Заметим, что при выполнении неравенства  $4aL < (a+b)^2$  частоты (6.6) оказываются вещественными. Однако и в этом случае, несмотря на формальную расходимость интеграла (6.2), формула (6.6) фактически смысла не теряет, что будет показано в разделе 7.

## 7. Точное решение задачи об устойчивости потока несжимаемой жидкости

В случае потока, профиль невозмущённой скорости которого определяется формулой (6.3), точное решение задачи об устойчивости получается весьма просто [12]. Воспроизведём существенные моменты вывода дисперсионного уравнения. Для профиля (6.3) решение уравнения (2.6), удовлетворяющее граничным условиям (2.5),

<sup>6</sup> См. формулу (П.7) в приложении.

имеет вид

$$W(x) = \begin{cases} A \sinh(k_z x), & 0 < x < a, \\ C_1 \exp(k_z x) + C_2 \exp(-k_z x), & a < x < b, \\ B \sinh[k_z(L-x)], & b < x < L, \end{cases} \quad (7.1)$$

где  $A, B, C_{1,2}$  — постоянные. Поскольку функция (6.3) в точках  $x = a, x = b$  имеет разрывы первой производной, в этих точках уравнение (2.6) неприменимо и оно должно быть заменено условиями сшивания. Одно из условий — непрерывность поперечной скорости  $W(x)$  — следует из физических соображений. Другое условие получается непосредственно из уравнения (2.6), записанного в виде (2.4), посредством интегрирования по бесконечно малой окрестности точки разрыва. В итоге условия сшивания решения в точках разрыва производной функции (6.3) оказываются следующими:

$$\{W(x)\}|_{x=a,b} = 0, \quad \left[ (U_0(x) - V) \frac{dW}{dx} - \frac{dU_0}{dx} W \right]_{x=a,b} = 0. \quad (7.2)$$

Несложно показать, что второе условие (7.2) следует из непрерывности давления в потоке.

Подставляя решение (7.1) в условия сшивания (7.2) и исключая постоянные  $A, B, C_{1,2}$ , после несложных вычислений получаем дисперсионное уравнение для определения фазовой скорости волны потока  $V(k_z) = \omega(k_z)/k_z$ :

$$\begin{aligned} \frac{(U-V)\{1 - \coth[k_z(L-b)]\} + U_0/[k_z(b-a)]}{(U-V)\{1 + \coth[k_z(L-b)]\} - U_0/[k_z(b-a)]} \times \\ \times \frac{V[1 - \coth(k_z a)] + U_0/[k_z(b-a)]}{V[1 + \coth(k_z a)] - U_0/[k_z(b-a)]} = \\ = \exp[2k_z(b-a)]. \end{aligned} \quad (7.3)$$

При  $b = a$  уравнение (7.3) существенно упрощается:

$$V^2 \tanh[k_z(L-a)] + (U-V)^2 \tanh(k_z a) = 0. \quad (7.4)$$

В пределе  $k_z \rightarrow 0$  дисперсионное уравнение (7.3) переходит в уравнение (6.4), а из уравнения (7.4) в том же пределе получаются частоты (6.5).

Дисперсионное уравнение (6.4) можно получить и непосредственно, без предельного перехода, тем же способом, что и уравнение (7.3). Для этого в условия сшивания (7.2) достаточно подставить функцию

$$W(x) = \begin{cases} Ax, & 0 < x < a, \\ C_1 x + C_2, & a < x < b, \\ B(L-x), & b < x < L, \end{cases} \quad (7.5)$$

являющуюся общим решением уравнения (2.6) со скоростью (6.3) и граничными условиями (2.5) при  $k_z = 0$ . Поскольку при этом, так же как и при получении общего уравнения (7.3), никаких ограничений не накладывается, дисперсионное уравнение (6.4) и формулы для частот (6.6) можно считать верными как при комплексных частотах, так и в случае, когда частоты  $\omega$  оказываются вещественными (см. замечание в конце раздела 6).

Мы не будем выписывать громоздких решений квадратного уравнения (7.3), а рассмотрим один типичный числовой пример. Зададим в относительных единицах

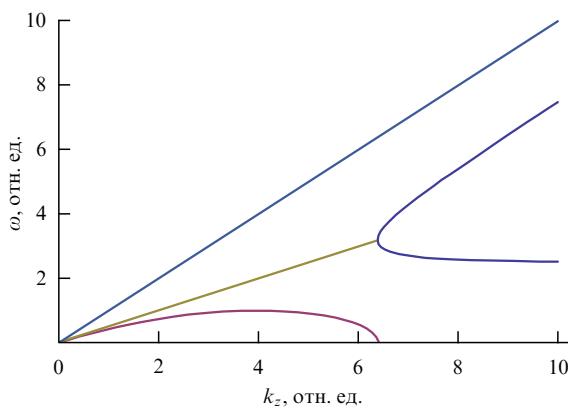


Рис. 2. Дисперсионные кривые волн потока жидкости с профилем скорости (6.3).

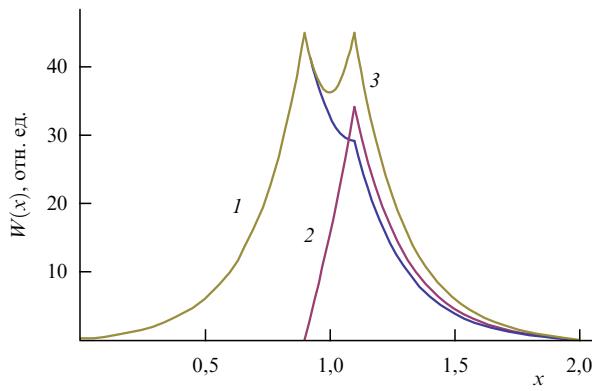


Рис. 3. Возмущение скорости  $W(x)$  в волне потока жидкости при  $k_z = 5$ .  $\text{Re } W$  — кривая 1,  $\text{Im } W$  — кривая 2,  $|W|$  — кривая 3.

параметры  $U = 1$ ,  $L = 2$ ,  $a = 0,9$ ,  $b = 1,1$ . Дисперсионные кривые  $\omega(k_z)$  представлены на рис. 2. Проведена также прямая  $\omega = k_z U$  (самая верхняя линия). Мнимая часть частоты (самая нижняя кривая) отлична от нуля в области волновых чисел  $0 < k_z < k_0 \approx 6,2$ , являющейся, следовательно, областью неустойчивости потока. В более коротковолновой области поток устойчив: в нём имеются две поверхностные волны с фазовыми скоростями, меньшими максимальной скорости потока  $U$  и большими его минимальной скорости (в данном примере минимальная скорость равна нулю). Типичная для поверхностной волны структура комплексного возмущения скорости  $W(x)$  в потоке при  $k_z = 5$  представлена на рис. 3.

## 8. Теорема Рэлея и некоторые другие утверждения

Поделим обе части уравнения (2.6) на  $(U_0(x) - \omega/k_z)$ , умножим на комплексно сопряжённое решение  $W^*(x)$  и с учётом граничных условий (2.5) проинтегрируем по  $x$  от 0 до  $L$ . В результате получим следующее соотношение:

$$\int_0^L \left( \left| \frac{dW}{dx} \right|^2 + k_z^2 |W|^2 \right) dx = - \int_0^L \frac{d^2 U_0 / dx^2}{[U_0(x) - \omega/k_z]} |W|^2 dx. \quad (8.1)$$

Заметим, что при получении (8.1) применена формула интегрирования по частям к функциям  $W^*(x)$  и  $dW/dx$ , что предполагает по меньшей мере отсутствие у этих функций в области  $(0, L)$  разрывов второго рода. В разделе 4 показано, что это действительно имеет место (формулы (4.10), (4.11)). Исходя из соотношения (8.1) доказывается известная теорема Рэлея о точке перегиба [11, 12], согласно которой определяемая уравнением (8.1) частота  $\omega(k_z)$  может иметь отличную от нуля мнимую часть только при условии, что вторая производная  $d^2 U_0 / dx^2$  в области  $(0, L)$  меняет знак, т.е. функция  $U_0(x)$  имеет точку перегиба. Доказательство основано на вещественности левой части соотношения (8.1).

Теорему Рэлея можно немного дополнить. Пусть  $x_s$  — точка перегиба функции  $U_0(x)$ . Предположим, что вещественная особая точка  $x_0$  является внутренней точкой области  $(0, L)$ . Тогда интеграл в правой части (8.1) может быть сходящимся, только если особая точка и точка перегиба совпадают. Таким образом, при наличии точки перегиба возможен следующий вещественный спектр (нейтральная мода):

$$\omega = k_z U_0(x_s). \quad (8.2)$$

Если точки перегиба нет, то в области  $(0, L)$  не может быть особой точки, а согласно теореме Рэлея частота  $\omega$  может быть только вещественной. При этом уравнение (6.2) не имеет решений. Следовательно, если у профиля скорости течения несжимаемой жидкости  $U_0(x)$  нет точки перегиба, то нормальные моды (собственные волны) в потоке жидкости отсутствуют.

Рассмотрим в свете теоремы Рэлея поток жидкости с профилем скорости (6.3). Функция (6.3) имеет разрывную первую производную, а её вторую производную естественно определить как

$$\frac{d^2 U_0(x)}{dx^2} = \frac{U}{b-a} (\delta(x-a) - \delta(x-b)). \quad (8.3)$$

Функция (8.3) меняет знак в области  $(0, L)$ , но вместо точки перегиба имеется целая "область перегиба" — интервал  $(a, b)$ , в котором вторая производная скорости тождественно равна нулю. Поэтому комплексные частоты оказались возможными и были нами найдены в разделах 6 и 7 (см. формулы (6.5), (6.6) и рис. 2). Далее, в случае распределения (6.3) оказывается возможным вместо частоты (8.2) целый "конус" частот:

$$0 = k_z U_0(a) < \omega < k_z U_0(b) = U. \quad (8.4)$$

Обе вещественные частоты, показанные на рис. 2, попадают в этот конус, в полном согласии с формулой (8.2).

Чтобы получить соотношение типа (8.1) для плазменного слоя, следует использовать уравнение (2.2). Умножая это уравнение на комплексно сопряжённое решение  $\varphi^*(x)$  и интегрируя его по  $x$  от 0 до  $L$ , с учётом граничных условий (2.2) получим

$$\int_0^L (\omega_p^2(x) - \omega^2) \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 dx + k_z^2 \int_0^L (\omega_p^2(x) - \omega^2) |\varphi|^2 dx = 0. \quad (8.5)$$

Поскольку точка плазменного резонанса  $x_0(\omega)$ , определяемая из уравнения (4.1), находится внутри плазмен-

ногого слоя, первый интеграл, как видно из решений (4.4) и (4.5), в выражении (8.5) логарифмически расходится (второй интеграл в (8.5) является сходящимся) и выражение (8.5) не имеет смысла. Дело в том, что применение формулы интегрирования по частям к функциям  $\varphi^*(x)$  и  $(\omega_p^2 - \omega^2) d\varphi/dx$ , первая из которых имеет разрыв второго рода, некорректно. Таким образом, аналог теоремы Рэлея для слоя плазмы отсутствует. Заметим, что, если при  $k_z = 0$  в соотношение (8.5) подставить выражение (5.1), то получится дисперсионное уравнение (5.2), которое, как показано ранее, имеет смысл только при наличии у частоты мнимой части. Это же в полной мере относится и к общему соотношению (8.5). И вообще, в связи с дисперсионным уравнением (5.2) и соотношением (8.5) можно сформулировать альтернативу: или не обходить полюс, а расходящиеся интегралы понимать в смысле главного значения, или использовать при вычислении расходящихся интегралов процедуру аналитического продолжения. Общепризнанным в настоящее время является второй подход.

Как говорилось выше, дифференциальное уравнение плазменного слоя является уравнением вида (4.6). Пусть  $\varphi_{1,2}(x)$  — линейно независимые решения этого уравнения, причём функция  $\varphi_1(x)$  регулярна в особой точке  $x_0$ . Из уравнения (4.6) для вронскиана функций  $\varphi_{1,2}(x)$  имеем

$$\varphi_1 \varphi'_2 - \varphi_2 \varphi'_1 = \varphi_1^2 \left( \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right)' = \frac{C}{p(x)}, \quad (8.6)$$

где  $C$  — постоянная, а штрихом обозначено дифференцирование по  $x$ . Используя (8.6), можно выразить решение  $\varphi_2(x)$  через  $\varphi_1(x)$  и в итоге записать следующее общее решение уравнения (4.6) [20]:

$$\varphi(x) = A\varphi_1(x) + B\varphi_1(x) \int_0^x \frac{dx'}{p(x') \varphi_1^2(x')} . \quad (8.7)$$

Подстановка решения (8.7) в граничные условия (2.2) приводит к соотношению

$$\int_0^L \frac{dx}{p(x) \varphi_1^2(x)} = 0, \quad (8.8)$$

которое с учётом формулы  $p(x) = \omega_p^2(x) - \omega^2$  следует рассматривать как обобщение для случая  $k_z \neq 0$  дисперсионного уравнения (5.2) для плазменного слоя. При  $k_z = 0$  регулярным решением  $\varphi_1(x)$  уравнения (4.6) для плазменного слоя является константа и уравнение (8.8) переходит в (5.2). Поскольку функция  $\varphi_1(x)$  является регулярной при любом  $k_z$ , мнимая часть дисперсионного уравнения (8.8) определяется вычетом подынтегральной функции в особой точке  $x_0$ , в которой  $p(x) = 0$ . Следовательно, поверхностные волны слоя плавно неоднородной плазмы обязательно затухают в любом диапазоне длин волн. Мнимая часть дисперсионного уравнения (8.8) определяется, так же как и мнимая часть в уравнении (5.4), методом аналитического продолжения.

В случае дифференциального уравнения (4.12) для вронскиана имеем

$$W_1 W'_2 - W_2 W'_1 = W_1^2 \left( \frac{W_2}{W_1} \right)' = C, \quad (8.9)$$

причём обе функции,  $W_{1,2}(x)$ , регулярны в области  $(0, L)$  (постоянная  $\alpha$  в разложении (4.8) отлична от нуля). Используя (8.9), запишем общее решение уравнения (4.12) в виде

$$W(x) = AW_1(x) + BW_1(x) \int_0^x \frac{dx'}{W_1^2(x')} . \quad (8.10)$$

Подстановка решения (8.10) в граничные условия (2.5) приводит к соотношению

$$\int_0^L \frac{dx}{W_\mu^2(x)} = 0 . \quad (8.11)$$

Здесь  $W_\mu(x)$  — любое из линейно независимых решений уравнения (4.12), т.е.  $\mu = 1$  или  $\mu = 2$ . Переходя от общего уравнения (4.12) к конкретному уравнению (2.4), замечаем, что в длинноволновом пределе одним из линейно независимых решений является  $W_\mu(x) = U_0(x) - V$ . При этом уравнение (8.11) переходит в (6.2). Если частота  $\omega$  вещественна и в области  $(0, L)$  отсутствует особая точка, то функции  $W_\mu(x)$  являются вещественными. При этом равенство (8.11) невозможно. Мы опять приходим к утверждению, что при отсутствии у скорости  $U_0(x)$  точки перегиба краевая задача (2.4), (2.5) не имеет решений.

## 9. Основные уравнения для неравновесной плазмы и сжимаемой жидкости

Основной особенностью неравновесной плазмы является, как известно, её неустойчивость к некоторым малым возмущениям. Важным и интересным классом неустойчивостей неравновесной плазмы являются неустойчивости, при которых в плазме возбуждаются (излучаются) её собственные электромагнитные волны. Это так называемые излучательные неустойчивости [5, 28], на которых мы здесь и сосредоточим своё внимание. Источником неравновесности плазмы может быть направленное движение заряженных частиц одного сорта относительно других частиц — пучки заряженных частиц. Что касается собственных электромагнитных волн, то в плазме имеется их достаточно большое число, например ленгмюровские волны, циклотронные волны, ионный звук и т.д.

В потенциальном приближении, которым мы в основном и ограничимся, наиболее общим дифференциальным уравнением плазменного слоя является следующее [9, 10]:

$$\frac{d}{dx} \left( \varepsilon_\perp(\omega, x) \frac{d\varphi}{dx} \right) - k_z^2 \varepsilon_{||}(\omega, x) \varphi = 0 . \quad (9.1)$$

Здесь  $\varepsilon_\perp(\omega, x)$  и  $\varepsilon_{||}(\omega, x)$  — поперечная и продольная диэлектрические проницаемости. Уравнение (2.1) является частным случаем уравнения (9.1).

Пусть плазма состоит из частиц двух сортов: холодных неподвижных электронов с неоднородной плотностью и электронов пучка с неоднородной плотностью и неоднородной скоростью в направлении вдоль слоя (движение тяжёлых ионов не учитываем). Пусть также вдоль слоя приложено внешнее однородное магнитное поле. Пучок считаем нерелятивистским. Диэлектрические проницаемости такого слоя определяются извест-

ными формулами [10, 29]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\perp}(\omega, x) &= 1 - \frac{\omega_p^2(x)}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{\omega_b^2(x)}{(\omega - k_z U_0(x))^2 - \Omega_e^2}, \\ \varepsilon_{||}(\omega, x) &= 1 - \frac{\omega_p^2(x)}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2(x)}{(\omega - k_z U_0(x))^2},\end{aligned}\quad (9.2)$$

где  $\omega_b(x)$  — ленгмюровская частота электронов пучка,  $\Omega_e$  — электронная циклотронная частота. Предположим, что плазменный слой ограничен проводящими заземлёнными плоскостями, координаты которых определяются уравнениями  $G_0(x) = 0$ , а плоскости  $G(x) = 0$  задают координаты точек разрыва диэлектрических проницаемостей (9.2). На указанных плоскостях имеют место следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}\varphi(x)|_{G_0(x)=0} &= 0, \quad \{\varphi(x)\}|_{G(x)=0} = 0, \\ \left\{ \varepsilon_{\perp}(\omega, x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right\}_{G(x)=0} &= 0.\end{aligned}\quad (9.3)$$

Рассмотрим простейшие плазменные волны, определяемые краевой задачей (9.1), (9.3). Пусть  $\omega_b^2(x) \equiv 0$ ,  $\omega_p^2(x) = \omega_{p0}^2 = \text{const}$ ,  $G_0(x) = x \pm L$ . То есть речь пойдёт о слое однородной магнитоактивной плазмы толщиной  $2L$  (или о плоском плазменном волноводе). Общее решение уравнения (9.1) имеет вид  $A \sin(\chi x) + B \cos(\chi x)$ , где  $\chi^2 = -k_z^2 \varepsilon_{||}/\varepsilon_{\perp}$ . Подставляя общее решение в первые граничные условия (9.3), находим дисперсионное уравнение для частот плазменного слоя

$$\left( \frac{\pi n}{2Lk_z} \right)^2 \left( 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \right) + 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9.4)$$

и соответствующие собственные функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos\left(x \frac{\pi n}{2L}\right), & n = 1, 3, 5, \dots, \\ \sin\left(x \frac{\pi n}{2L}\right), & n = 2, 4, 6, \dots. \end{cases} \quad (9.5)$$

По структуре собственных функций рассматриваемые волны разделяют на волны, нечётные по координате  $x$  ( $n = 2, 4, \dots$ ) и чётные по координате  $x$  ( $n = 1, 3, \dots$ ). В коротковолновой области ( $k_z L \gg 1$ ) их частоты определяются формулами

$$\omega = \sqrt{\omega_{p0}^2 + \left( \frac{\pi n}{2Lk_z} \right)^2 \frac{\omega_{p0}^2 \Omega_e^2}{\omega_{p0}^2 - \Omega_e^2}} \equiv \omega_1(k_z), \quad (9.6)$$

$$\omega = \sqrt{\Omega_e^2 + \left( \frac{\pi n}{2Lk_z} \right)^2 \frac{\omega_{p0}^2 \Omega_e^2}{\Omega_e^2 - \omega_{p0}^2}} \equiv \omega_2(k_z). \quad (9.7)$$

Формулы (9.6) и (9.7) справедливы до тех пор, пока вторые слагаемые под корнем в них малы в сравнении с первыми слагаемыми. В противоположном длинноволновом пределе ( $k_z L \ll 1$ ) для частот имеем

$$\omega = \frac{k_z 2L}{\pi n} \sqrt{\frac{\omega_{p0}^2 \Omega_e^2}{\omega_{p0}^2 + \Omega_e^2}} \equiv \omega_1(k_z), \quad (9.8)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_{p0}^2 + \Omega_e^2 - \left( \frac{k_z 2L}{\pi n} \right)^2 \frac{\omega_{p0}^2 \Omega_e^2}{\omega_{p0}^2 + \Omega_e^2}} \equiv \omega_2(k_z). \quad (9.9)$$

Мы будем называть эти волны низкочастотной (спектр (9.8)) и высокочастотной (спектр (9.9)) плазменными волнами. Какая из частот (9.6) или (9.7) является более высокой, зависит от соотношения между частотами  $\omega_{p0}$  и  $\Omega_e$ , что не имеет для нас никакого значения. Как показано ниже, волны слоя плазмы могут возбуждаться (излучаться) проходящим в слое электронным пучком.

Заметим, что исходное уравнение (9.1) записано в потенциальном приближении, поэтому выражения для частот (9.6)–(9.9) справедливы только при выполнении неравенств  $\omega_{1,2}(k_z)/k_z \ll c$ , где  $c$  — скорость света в пустоте. Непотенциальная теория плазменных волн (9.6)–(9.9) (обычно их называют косыми ленгмюровскими волнами или модами Трайвелписа–Голда) подробно разработана (см., например, [13, 16, 27]) и сейчас не обсуждается, поскольку применительно к проблеме возбуждения этих волн электронным пучком непотенциальные эффекты не имеют существенного значения. Однако в дальнейшем мы рассмотрим ещё один пример из электродинамики, в котором учёт непотенциальных эффектов принципиально необходим.

Перейдём теперь к формулировке соответствующих уравнений гидродинамики. Подойдут уравнения потока жидкости с поперечно неоднородной продольной скоростью потока  $U_0(x)$ . Именно неоднородность скорости потока является источником неравновесности системы<sup>7</sup>. Жидкость обязательно должна быть сжимаемой, поскольку в несжимаемой жидкости отсутствуют собственные волны, которые могли бы возбуждаться (излучаться) при неустойчивости. Поэтому в качестве аналога приведённых выше уравнений электродинамики слоя неравновесной плазмы возьмём следующее уравнение плоского потока сжимаемой жидкости (или газа) [4, 30]:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[ \left( k_z^2 - \frac{\Delta^2(x)}{c_s^2} \right)^{-1} \left( \Delta(x) \frac{dW}{dx} + k_z \frac{dU_0}{dx} W \right) \right] - \\ - \Delta(x) W = 0,\end{aligned}\quad (9.10)$$

где  $\Delta(x) = \omega - k_z U_0(x)$ ,  $c_s$  — скорость звука. В случае несжимаемой жидкости  $c_s \rightarrow \infty$  и уравнение (9.10) переходит в уравнение (2.4). Уравнение (9.10) удобно записать относительно возмущения давления в потоке  $p(x)$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\Delta(x)} \frac{dp}{dx} \right) - \frac{1}{\Delta(x)} \left( k_z^2 - \frac{\Delta^2(x)}{c_s^2} \right) p + \\ + k_z \frac{1}{\Delta^2(x)} \frac{dU_0}{dx} \frac{dp}{dx} = 0,\end{aligned}\quad (9.11)$$

а возмущение давления связано с поперечной скоростью формулой

$$W = -i \frac{1}{\Delta(x)} \frac{dp}{dx}. \quad (9.12)$$

<sup>7</sup> Напомним, что и в плазме основным источником неравновесности является неоднородность продольной скорости электронов — наличие пучка.

Уравнения (9.10) и (9.11) получены при предположении, что скорость звука не зависит от координаты  $x$ .

Предположим, что в поперечном направлении поток газа ограничен абсолютно твёрдыми стенками, координаты которых определяются уравнениями  $G_0(x) = 0$ . На этих стенках поперечная скорость потока обращается в нуль, что с учётом (9.12) даёт следующее граничное условие:

$$\frac{dp}{dx} \Big|_{G_0(x)=0} = 0. \quad (9.13)$$

Пусть также плоскости  $G(x) = 0$  задают координаты точек разрыва функции  $U_0(x)$  (поток с кусочно-неоднородным профилем скорости). В этих точках должны быть непрерывными возмущение давления и поперечная компонента скорости потока  $W(x)$ , т.е.

$$p(x) \Big|_{G(x)=0} = 0, \quad \left( \frac{1}{A(x)} \frac{dp}{dx} \right) \Big|_{G(x)=0} = 0. \quad (9.14)$$

Для примера получим решение краевой задачи (9.11), (9.13) и (9.14) для однородного газового слоя с нулевой направленной скоростью  $U_0(x) = 0$  и  $G_0(x) = x \pm L$  (плоский акустический волновод). Общее решение уравнения (9.11) запишем в виде  $A \sin(\chi x) + B \cos(\chi x)$ , где  $\chi^2 = \omega^2/c_s^2 - k_z^2$ . Подставляя решение в граничные условия (9.13), находим спектры звуковых волн акустического волновода

$$\omega = c_s \sqrt{k_z^2 + \left( \frac{\pi n}{2L} \right)^2} = \omega_s(k_z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9.15)$$

и соответствующие собственные функции

$$p(x) = \begin{cases} \sin\left(x \frac{\pi n}{2L}\right), & n = 1, 3, 5, \dots \\ \cos\left(x \frac{\pi n}{2L}\right), & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (9.16)$$

Единственные волны, которые могут излучаться в акустическом волноводе, — это звуковые волны (9.15).

## 10. Пучковые неустойчивости в плазме

В простейшем случае однородных плазмы и пучка ( $\omega_p^2(x) = \omega_{p0}^2$ ,  $\omega_b^2(x) = \omega_{b0}^2$ ,  $U_0(x) = U$ ) дисперсионное уравнение для собственных частот плазменно-пучкового слоя, которое получается так же, как и уравнение (9.4), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\pi n}{2Lk_z} \right)^2 \left( 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{\omega_{b0}^2}{(\omega - k_z U)^2 - \Omega_e^2} \right) + \\ + 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{b0}^2}{(\omega - k_z U)^2} = 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Считая, что выполнены неравенства

$$\omega_{b0}^2 \ll \omega_p^2(x), \quad \Omega_e^2, \quad (10.2)$$

рассмотрим только такие решения уравнения (10.1), которые удовлетворяют условию

$$|\omega - k_z U|^2 \ll \Omega_e^2. \quad (10.3)$$

Тогда уравнение (10.1) можно представить в виде

$$D_0(\omega, k_z) = Q(\omega, k_z) \frac{\omega_{b0}^2}{(\omega - k_z U)^2}, \quad (10.4)$$

где  $D_0(\omega, k_z)$  — дисперсионная функция, нули которой определяют собственные частоты плазменного слоя без пучка,  $Q(\omega, k_z)$  — некоторая функция, не обращающаяся в нуль одновременно с  $D_0$ . В нашем случае  $D_0(\omega, k_z)$  совпадает с левой частью уравнения (9.4), а  $Q = 1$ . Уравнение (10.4) имеет место и в случае системы с более сложной геометрией [27, 31]. Например, если пучок распространяется в канале толщиной  $a \ll L$ , то  $Q \sim \sim a\varphi^2(x_0)/L$ , где  $\varphi(x)$  — собственная функция (9.5),  $x_0$  — средняя координата пучка.

Если величина  $k_z U$  не совпадает ни с одной из собственных частот  $\omega_{1,2}(k_z)$  плазменного слоя, то с учётом неравенства (10.2) решения уравнения (10.4) имеют вид

$$\omega = k_z U \pm \omega_{p0} \sqrt{\frac{Q(k_z U, k_z)}{D_0(k_z U, k_z)}}. \quad (10.5)$$

При отрицательном подкоренном выражении частоты (10.5) являются комплексными, что означает неустойчивость плазменно-пучковой системы. Эту неустойчивость, не связанную с излучением плазменных волн, называют неустойчивостью типа отрицательной массы или неустойчивостью пучка в среде с отрицательной диэлектрической проницаемостью [27, 32]. Последнее название связано с тем, что в безграничной системе ( $k_z L \gg 1$ ) дисперсионная функция  $D_0$  сводится к продольной диэлектрической проницаемости плазмы, которая отрицательна при  $\omega \approx k_z U < \omega_{p0}$ . Для этого частного случая формула (10.5) принимает вид

$$\omega = k_z U \pm i \sqrt{\frac{\omega_{b0}^2}{\omega_{p0}^2}} \left( 1 - \frac{U^2}{c_p^2} \right)^{-1/2} k_z U, \quad (10.6)$$

где  $c_p = \omega_{p0}/k_z$  — фазовая скорость ленгмюровской волны в безграничной плазме. Неустойчивость имеет место только при  $U < c_p$ . Ниже показано, что подобная неустойчивость возможна и в газовом потоке.

При наличии черенковского резонанса  $\omega_{1,2}(k_z) = k_z U$  пучка с какой-либо из плазменных волн решение дисперсионного уравнения (10.4) следует искать в виде

$$\omega = \omega_{1,2}(k_z) + \delta\omega = k_z U + \delta\omega. \quad (10.7)$$

При этом из уравнения (10.4) легко получается следующее выражение для комплексного инкремента:

$$\delta\omega = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \left[ \omega_{b0}^2 Q_{1,2} \left( \frac{\partial D_0}{\partial \omega_{1,2}} \right)^{-1} \right]^{1/3}, \quad (10.8)$$

где функция  $Q$  и производная дисперсионной функции  $D_0$  берутся при  $\omega = \omega_1$  или  $\omega = \omega_2$ . Неустойчивость с инкрементом (10.8) известна в литературе как одночастичный вынужденный черенковский эффект [28].

Подставляя в дисперсионное уравнение (9.4)  $k_z = \omega/U$ , получаем уравнение для определения частоты черенковского резонанса. Резонансных частот две. Одна, более высокая, существует всегда. Это частота резонанса пучка с высокочастотной волной (9.9). Другая резонансная частота существует только при выполнении нера-

венства

$$\sqrt{\frac{\omega_{p0}^2 \Omega_e^2}{\omega_{p0}^2 + \Omega_e^2}} > \frac{\pi n}{2L} U, \quad (10.9)$$

которое можно записать в виде  $U < c_p$ . Здесь  $c_p = \omega_1(k_z)/k_z$  — фазовая скорость низкочастотной плазменной волны (9.8). Если  $U > c_p$ , то пучок малой плотности в слое магнитоактивной плазмы устойчив относительно возбуждения низкочастотной плазменной волны, что обусловлено характерным законом дисперсии этой волны — законом дисперсии акустического типа.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий другой закон дисперсии излучаемой электронным пучком волны. Пусть вместо слоя плазмы имеем диэлектрический слой — плоский волновод с диэлектрическим заполнением. Предположим, что диэлектрик — изотропный и его проницаемость  $\epsilon_0$  не зависит от частоты. Поскольку волны в таком диэлектрике имеют чисто электромагнитную природу, откажемся от потенциального приближения. Предположим также, что пучок проходит в узком канале,  $-a < x < a$ , в диэлектрике. И наконец, считаем, что выполнено неравенство (10.3). В рамках сделанных предположений краевая задача для определения собственных частот диэлектрического волновода с пучком формулируется следующим образом [27]:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\epsilon_\perp(x)}{\chi^2(\omega, x)} \frac{dE_z}{dx} \right) - \epsilon_{||}(\omega, x) E_z = 0, \quad (10.10)$$

$$E_z(-L) = E_z(L) = 0.$$

Здесь  $E_z$  — составляющая напряжённости электрического поля,  $\chi^2(\omega, x) = k_z^2 - \epsilon_\perp(x) \omega^2/c^2$ ,  $\epsilon_\perp = \epsilon_0$  в объёме диэлектрика и  $\epsilon_\perp = 1$  в канале пучка (для простоты считаем пучок замагниченным, т.е. полагаем в (9.2)  $\Omega_e \gg \omega_{b0}$ ),  $\epsilon_{||}(\omega, x) = 1 - \omega_{b0}^2/(\omega - k_z U)^2 \equiv \epsilon_b$  в канале пучка и  $\epsilon_{||}(\omega, x) = \epsilon_0$  в объёме диэлектрика,  $c$  — скорость света.

Из (10.10) стандартным образом выводится дисперсионное уравнение. Опуская несложную процедуру вывода, имеем

$$\frac{\epsilon_0}{q_0} \cot[q_0(L-a)] - \frac{\sqrt{\epsilon_b}}{q} \operatorname{Hth}(q\sqrt{\epsilon_b}a) = 0. \quad (10.11)$$

где  $q = \sqrt{k_z^2 - \omega^2/c^2}$ ,  $q_0 = \sqrt{\omega^2/c_0^2 - k_z^2}$ ,  $c_0 = c/\sqrt{\epsilon_0}$ ,  $\operatorname{Hth}(x) = \coth(x)$  в случае нечётной волны, а для чётной волны  $\operatorname{Hth}(x) = \operatorname{th}(x)$ . Предположим, что выполнены неравенства  $a \ll L$  и  $k_z a \ll 1$ , означающие, что канал пучка — узкий. Тогда, как видно из уравнения (10.11), в нулевом приближении пучок не взаимодействует с нечётной волной. Это связано с тем, что поле  $E_z$  нечётной волны в канале пучка близко к нулю.

Для чётной волны уравнение (10.11) приводится к виду

$$[q_0 L \tan(q_0 L)]^{-1} = -\frac{a}{L} \frac{\omega_b^2}{\epsilon_0(\omega - k_z U)^2}, \quad (10.12)$$

совпадающему с (10.4) при  $D_0(\omega, k_z) = [q_0 L \tan(q_0 L)]^{-1}$ ,  $Q = -a/(L\epsilon_0)$ . При этом из (10.5) находим следующее выражение для частоты:

$$\begin{aligned} \omega &= k_z U \pm i \sqrt{\frac{a}{L\epsilon_0}} \times \\ &\times \omega_{b0} \sqrt{k_z L \sqrt{\frac{U^2}{c_0^2} - 1}} \tan \left[ k_z L \sqrt{\frac{U^2}{c_0^2} - 1} \right]. \end{aligned} \quad (10.13)$$

При  $k_z L \ll 1$  формула (10.13) упрощается:

$$\omega = k_z U \pm i \sqrt{\frac{a}{L\epsilon_0}} \omega_{b0} k_z L \left( \frac{U^2}{c_0^2} - 1 \right)^{1/2}. \quad (10.14)$$

Мнимые части частот (10.13) и (10.14) определяют инкременты нерезонансной неустойчивости пучка в диэлектрическом волноводе относительно чётных возмущений (неустойчивость типа отрицательной массы). Неустойчивость с инкрементами (10.13) и (10.14) имеет место только при  $U > c_0$ . При  $U < c_0$  частоты (10.13) являются вещественными, и вместе с частотами обычных электромагнитных волн (слабо возмущённых пучком) формируют полный спектр диэлектрического волновода с пучком.

Формула (10.13) неверна при  $k_z L \sqrt{U^2/c_0^2 - 1} = \pi n/(2L)$ ,  $n = 1, 3, \dots$ , что имеет место при черенковском резонансе пучка с чётной электромагнитной волной, когда в системе развивается резонансная излучательная неустойчивость. Общее выражение для инкремента этой неустойчивости приведено в (10.8). Откуда и из (10.12) для инкремента получим

$$\delta\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{a}{L} \frac{\omega_{b0}^2}{\epsilon_0 \omega_0^2} \left( \frac{\pi n c_0}{2L \omega_0} \right)^2 \right]^{1/3} \omega_0. \quad (10.15)$$

Резонансная частота определяется как

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{2L} c_0 \left( 1 - \frac{c_0^2}{U^2} \right)^{-1/2}. \quad (10.16)$$

Частота (10.16) существует только при  $U > c_0$ , что, как уже говорилось, является условием неустойчивости пучка в диэлектрическом волноводе. Если  $U < c_0$ , то пучок в волноводе с диэлектриком устойчив, что обусловлено характерным законом дисперсии волны — законом дисперсии оптического типа.

Заметим, что наше обращение здесь к диэлектрическому волноводу (т.е. уход от рассмотрения чисто плазменной системы) неслучайно. В разделе 11 это даст нам возможность сопоставить газодинамические явления с более общими, чем только плазменные, электромагнитными процессами.

## 11. Неустойчивости неоднородного газового потока

Рассмотрим теперь неподвижный газ, заключённый между твёрдыми поверхностями, в центре которого создан однородный газовый поток, т.е. распределение направленной скорости в газовом канале имеет следующий вид:

$$U_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-L, -a), \\ U = \text{const}, & x \in [-a, a], \\ 0, & x \in (a, L). \end{cases} \quad (11.1)$$

Из симметрии распределения (11.1) относительно плоскости  $x = 0$  следует, что возмущения газа распадаются на чётные (давление — чётная функция  $x$ ) и нечётные (давление — нечётная функция  $x$ ). Поэтому решение уравнения (9.11) в различных областях поперечного сечения газового канала при  $x > 0$  следует искать в виде

$$p(x) = \begin{cases} A \begin{cases} \sinh(q_1 x) & \text{нечётная волна, } 0 < x < a, \\ \cosh(q_1 x) & \text{чётная волна, } 0 < x < a, \end{cases} \\ B \cosh[q_2(L-x)], & a < x < L, \end{cases} \quad (11.2)$$

где  $q_1^2 = k_z^2 - (\omega - k_z U)^2/c_s^2$ ,  $q_2^2 = \omega^2/c_s^2 - k_z^2$ . Решение (11.2) удовлетворяет последнему граничному условию (9.13). Подставляя (11.2) в первые два условия (9.14) и исключая постоянные  $A$  и  $B$ , приходим к следующему дисперсионному уравнению [30]:

$$\frac{1}{\omega^2} q_2 \tan [q_2(L-a)] - \frac{1}{(\omega - k_z U)^2} q_1 \text{Hth}(q_1 a) = 0. \quad (11.3)$$

Функция  $\text{Hth}(x)$  та же, что и в уравнении (10.11).

Прежде чем приступить к анализу уравнения (11.3) в интересующем нас аспекте, приведём его решение для случая несжимаемой жидкости ( $c_s \rightarrow \infty$ ), а именно:

$$\omega = \frac{k_z U}{1 \pm i\sqrt{\text{Hth}(k_z a) \coth[k_z(L-a)]}}. \quad (11.4)$$

Мнимая часть частоты (11.4) даёт инкремент развития неустойчивости тангенциального разрыва. В частности, в пределе  $k_z a \gg 1$ ,  $k_z(L-a) \gg 1$  из (11.4) для комплексной частоты получается известная формула (6.5). Решения вида (11.4) у дисперсионного уравнения (11.3) имеются при любом соотношении между скоростью потока  $U$  и скоростью звука  $c_s$ . Далее нас будут интересовать другие решения, описывающие неустойчивость, отличную от неустойчивости тангенциального разрыва скорости потока.

Перейдём теперь к анализу собственно уравнения (11.3), предполагая, что толщина газового потока мала по сравнению с размером всего канала, т.е.  $a \ll L$ . Предположим также, что выполняются неравенства

$$k_z a \ll 1, \quad \frac{a|\omega|}{c_s} \ll 1. \quad (11.5)$$

Тогда дисперсионное уравнение (11.3) упрощается. Для нечётной волны

$$(q_2 L \tan(q_2 L))^{-1} = \frac{a}{L} \frac{(\omega - k_z U)^2}{\omega^2}, \quad (11.6)$$

а для чётной волны дисперсионное уравнение оказывается следующим:

$$q_2 L \tan(q_2 L) = \frac{a}{L} q_1^2 L^2 \frac{\omega^2}{(\omega - k_z U)^2}. \quad (11.7)$$

При  $a = 0$ , когда газ во всём канале неподвижен, дисперсионные уравнения (11.6) и (11.7) сводятся к уравнению  $\cos(q_2 L) = 0$  и  $\sin(q_2 L) = 0$ . Откуда следуют спектры (9.15) частот нечётных и чётных звуковых волн, распространяющихся вдоль плоского акустического волновода.

При  $a \neq 0$  помимо вещественных решений у уравнений (11.6) и (11.7) возникают комплексные корни. В уравнении (11.6) появляется комплексная частота, обусловленная неустойчивостью тангенциального разрыва в акустическом волноводе с потоком газа относительно нечётных возмущений:

$$\omega = \pm i\sqrt{\frac{a}{L}} k_z U \sqrt{k_z L \tanh(k_z L)}. \quad (11.8)$$

Последняя формула, конечно, содержится и в общем выражении (11.4). Других неустойчивостей дисперсионное уравнение (11.6) не описывает. Данный результат обусловлен тем, что возмущение давления в нечётной волне в плоскости  $x = 0$ , т.е. непосредственно в газовом потоке, обращается в нуль. С похожей ситуацией мы уже

сталкивались, рассматривая нечётные волны в диэлектрическом волноводе с пучком электронов.

Перейдём теперь к анализу дисперсионного уравнения чётных волн (11.7). Сразу обратим внимание на сходство уравнений (11.7) и (10.12). Различие левых частей обусловлено различием собственных функций диэлектрического и акустического волноводов, что в свою очередь связано с разными граничными условиями: (10.10) и (9.13). Различие правых частей обусловлено различием механизмов взаимодействия электронного пучка и газового потока с волноводом: в одном случае это электромагнитные силы поля, а в другом — механические силы давления. При  $a/L \ll 1$  одно из решений уравнения (11.7) имеет вид

$$\omega = k_z U \times \times \left( 1 \pm i\sqrt{\frac{a}{L}} \sqrt{\frac{k_z L}{(1-U^2/c_s^2)^{1/2} \tanh[k_z L(1-U^2/c_s^2)^{1/2}]}} \right). \quad (11.9)$$

При  $k_z L \ll 1$  выражение (11.9) упрощается:

$$\omega = k_z U \pm i\sqrt{\frac{a}{L}} \left( 1 - \frac{U^2}{c_s^2} \right)^{-1/2} k_z U. \quad (11.10)$$

Видно, что при  $U < c_s$  одна из частот (11.10) имеет положительную мнимую часть, что означает неустойчивость тангенциального разрыва в акустическом волноводе с потоком газа относительно чётных возмущений. Сопоставляя формулы (11.10) и (10.6), приходим к выводу о том, что между неустойчивостью тангенциального разрыва в газе и неустойчивостью электронного пучка в плазме с отрицательной диэлектрической проницаемостью имеется большое сходство.

Имеется также несомненное сходство между формулами (11.9) и (11.10), с одной стороны, и формулами (10.13) и (10.14), с другой стороны. Основное различие состоит в том, что неустойчивость с инкрементом (11.10) имеет место только при  $U < c_s$ , но при выполнении аналогичного неравенства  $U < c_0$  диэлектрический волновод с пучком вообще устойчив. Заметим, что дисперсии электромагнитных волн в диэлектрическом волноводе и звуковых волн в акустическом волноводе относятся к одному и тому же оптическому типу.

Но частоты (11.9) в некоторых диапазонах волновых чисел  $k_z$  оказываются комплексными и при выполнении неравенства  $U > c_s$ . То есть имеется ещё одна неустойчивость тангенциального разрыва, которую можно считать аналогичной неустойчивости с инкрементом (10.13). Более того, при  $k_z L \sqrt{U^2/c_s^2 - 1} = \pi n/(2L)$ ,  $n = 2, 4, \dots$ , формула (11.9) становится неприменимой. Это имеет место при черенковском резонансе газового потока с чётной звуковой волной акустического волновода, когда в системе развивается резонансная излучательная неустойчивость. Подставляя в дисперсионное уравнение (11.7)

$$\omega = \omega_s(k_z) + \delta\omega = k_z U + \delta\omega, \quad (11.11)$$

где  $\omega_s(k_z)$  определена формулой (9.15) при чётном  $n$ , для инкремента  $\delta\omega$  находим

$$\delta\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \left( \frac{a}{L} \frac{k_z^2 c_s^2}{\omega_0^2} \right)^{1/3} \omega_0. \quad (11.12)$$

Резонансная частота определяется формулой

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{2L} c_s \left( 1 - \frac{c_s^2}{U^2} \right)^{-1/2} \equiv \omega_{0n}. \quad (11.13)$$

Неустойчивость с инкрементом (11.12) развивается на каждой чётной по  $x$  поперечной моде неравновесного акустического волновода. Данная неустойчивость обусловлена черенковским излучением сверхзвуковым газовым потоком звуковых волн в газе. Можно показать, что инкремент, определяемый формулой (11.12), при  $a \ll L$  является максимально возможным [27, 32]. Как видно из (11.11), неустойчивость с инкрементом (11.12) развивается при выполнении условия резонанса  $\omega_s(k_z) = k_z U$ , являющегося известным условием черенковского излучения, а  $\omega_{0n}$  представляют собой частоты излучаемых волн. Между формулами (10.15), (10.16) и (11.12), (11.13) имеется не только внешнее сходство, но и глубокая физическая аналогия.

Черенковское излучение в среде возможно только при выполнении условия

$$V_{\max} > U > V_{\min}, \quad (11.14)$$

где  $U$  — скорость излучателя,  $V_{\max}$  и  $V_{\min}$  — максимальная и минимальная фазовые скорости волн в среде. В плазменном волноводе  $V_{\min} = 0$ , а  $V_{\max} = \infty$  при излучении на высокой частоте (9.9) или вычисляется из формулы (9.8) при излучении на низкой частоте. В диэлектрическом волноводе  $V_{\max} = \infty$ , а  $V_{\min} = c_0$ . В акустическом волноводе  $V_{\max} = \infty$ , а  $V_{\min} = c_s$ . Между излучением электромагнитных волн пучком заряженных частиц в электродинамике и излучением звуковых волн газовым потоком в газовой динамике имеется глубокая аналогия, что продемонстрировано выше. Однако это относится только к эффекту вынужденного черенковского излучения. В электродинамике известен эффект спонтанного черенковского излучения [33]. Это, собственно, тот эффект, который был обнаружен и объяснён первооткрывателями [19]. Суть эффекта состоит в том, что движущийся заряд создаёт поле, которое при наличии среды может "оторваться" от заряда. Спонтанного излучения звука, подобного спонтанному излучению заряда в электродинамике, в газовой динамике нет. При сверхзвуковом движении тела в газе излучает газовый поток, создаваемый движущимся телом. Излучение потока является вынужденным излучением.

## 12. Неустойчивость потока плазмы с неоднородной скоростью

Рассмотрим ещё одну неустойчивость неравновесной плазмы, имеющую аналогии в гидродинамике несжимаемой жидкости. Речь идёт о неустойчивости потока плазмы с неоднородной скоростью (slipping-instability в англоязычной литературе) [29, 34]. Эта неустойчивость обусловлена проскальзыванием одних слоёв электронов относительно других. Внешнее магнитное поле полагаем равным нулю. Поэтому исходим из уравнения (9.1), в котором [29]

$$\varepsilon_{\perp}(\omega, x) = \varepsilon_{||}(\omega, x) = \varepsilon(\omega, x) = 1 - \frac{\omega_b^2(x)}{(\omega - k_z U_0(x))^2}. \quad (12.1)$$

В длинноволновом приближении вторым слагаемым в левой части уравнения (9.1) можно пренебречь, что приводит нас к следующему дисперсионному уравнению:

$$\int_0^L \frac{dx}{\varepsilon(\omega, x)} = 0 \Rightarrow \int_0^L \frac{[V - U_0(x)]^2}{[V - U_0(x)]^2 - \omega_b^2(x)/k_z^2} dx = 0, \quad (12.2)$$

где  $V = \omega/k_z$ . Заметим, что, пренебрегая вторым слагаемым в левой части (9.1), мы предполагали выполнение неравенства

$$k_z L \ll 1, \quad (12.3)$$

не налагая при этом каких-либо существенных ограничений на допустимые значения  $k_z$  и  $\omega$  в дисперсионном уравнении (12.2). Это в полной мере относится и к дисперсионным уравнениям (5.2) и (6.2). В квазистатическом пределе

$$\lim_{k_z \rightarrow 0} V(k_z) = \text{const}, \quad (12.4)$$

которым мы здесь и ограничимся, дисперсионное уравнение (12.2) приводится к виду

$$\int_0^L [V - U_0(x)]^2 \omega_b^{-2}(x) dx = 0. \quad (12.5)$$

Решения уравнения (12.5) могут быть только комплексными и обязательно комплексно сопряжёнными. Таким образом, дисперсионное уравнение (12.5) описывает, безусловно, неустойчивую систему.

Пусть плотность электронов постоянна, а профиль скорости выражается формулой (6.3). Подставляя (6.3) в уравнение (12.5), получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$LV^2 + (a + b - 2L)UV - \frac{1}{3}(a + 2b - 3L)U^2 = 0. \quad (12.6)$$

Уравнение (12.6) не совпадает с уравнением (6.4). Поэтому поток несжимаемой жидкости и поток электронов даже в квазистатическом пределе имеют разные наборы нормальных возмущений. В частности, электронный поток всегда неустойчив, а поток несжимаемой жидкости устойчив при определённых соотношениях между размерами  $a$ ,  $b$  и  $L$ . В частном случае  $a = b = L/2$  уравнения (12.4) и (6.4) совпадают. Их решения в этом случае выражаются формулой (6.5). В другом частном случае,  $a = 0$ ,  $b = L$  (электронный поток с линейным профилем скорости), решения уравнения (12.4) описываются формулой

$$V = \frac{\omega}{k_z} = \frac{1}{2} U \left( 1 \pm i \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad (12.7)$$

а поток несжимаемой жидкости при  $a = 0$  и  $b = L$  устойчив.

Для кусочно-постоянной диэлектрической проницаемости электронного потока в волноводе несложно получить дисперсионное уравнение и при произвольном значении параметра  $k_z L$ . Пусть, например, диэлектрическая проницаемость потока при  $x \in (0, a)$  равна  $\varepsilon_1$ , а при  $x \in (a, L)$  диэлектрическая проницаемость —  $\varepsilon_2$ . Тогда

дисперсионное уравнение оказывается следующим:

$$\varepsilon_1 \tanh [k_z(L-a)] + \varepsilon_2 \tanh (k_z a) = 0, \\ \varepsilon_{1,2} = 1 - \frac{\omega_{b1,2}^2}{(\omega - k_z U_{1,2})^2}. \quad (12.8)$$

В гидродинамике несжимаемой жидкости аналогом уравнения (12.8), казалось бы, должно быть дисперсионное уравнение (7.4). Но, как видим, нет ничего общего. Это и понятно, поскольку в гидродинамике не существует аналого току смещения. Но в квазистатическом длинноволновом пределе, когда  $|\omega - k_z U_{1,2}| \ll \omega_{b1,2}$  и ток поляризации существенно больше тока смещения, уравнение (12.8) принимает вид

$$\omega_{b1}^2 (U_2 - V)^2 \tanh [k_z(L-a)] + \omega_{b2}^2 (U_1 - V)^2 \tanh (k_z a) = 0. \quad (12.9)$$

При  $\omega_{b1} = \omega_{b2}$ ,  $U_1 = 0$ , и  $U_2 = U$  уравнения (7.4) и (12.9), хотя и не совпадают полностью, имеют тождественную структуру. Уравнение (12.9), так же как и (7.4), имеет только комплексные корни, т.е. электронный поток со скачком скорости, безусловно, неустойчив. Близость дисперсионных уравнений потока жидкости и электронного потока со скачками скорости имеет физические причины. Как неустойчивость тангенциального разрыва, так и slipping-неустойчивость обусловлены поперечным смещением слоёв потока под действием сил давления ( $\sim dW/dx$ ) или электрических сил ( $\sim d\phi/dx$ ). Энергетическим источником неустойчивостей является энергия относительного движения слоёв потоков. Таким образом, в длинноволновом квазистатическом пределе электронный поток с неоднородным профилем скорости аналогичен неоднородному потоку несжимаемой жидкости. Такой вывод, однако, не является универсальным: многое зависит от профиля скорости.

В связи с этим рассмотрим ещё один характерный пример. Пусть профиль скорости потока имеет вид

$$U_0(x) = U \left( \frac{x}{L} \right)^2, \quad -L < x < L. \quad (12.10)$$

В гидродинамике течение жидкости с таким профилем скорости называют течением Пуазейля. Из теоремы Рэлея следует, что такое течение устойчиво, в чём можно непосредственно убедиться, подставив (12.10) в (6.2): получающееся в результате этого дисперсионное уравнение вообще не имеет решений. Противоречий эксперименту результат об устойчивости течения Пуазейля невязкой жидкости был осознан только после появления работ В. Гейзенберга, рассмотревшего данную проблему с учётом вязкости [11, 12]. В случае потока электронов подстановка (12.10) в уравнение (12.5) даёт

$$V^2 - \frac{2}{3} V + \frac{1}{5} = 0 \rightarrow V_{1,2} = \frac{1}{3} \left( 1 \pm i \frac{2}{\sqrt{5}} \right), \quad (12.11)$$

что свидетельствует о неустойчивости электронного потока с "пуазейлевским" профилем скорости. Таким образом, аналогия между гидродинамикой потока несжимаемой жидкости и электродинамикой неоднородных потоков плазмы имеется, но только до определённого предела: некоторые физические процессы в плазме и потоках жидкости и газа весьма близки и они описы-

ваются сходными уравнениями, но конкретные решения могут быть существенно разными.

### 13. Заключение

Подведём краткий итог изложенному выше сравнительному анализу некоторых плазменных и газодинамических явлений.

1. Основные свойства квазинейтральной плазмы обусловлены самосогласованным электромагнитным полем, возникающим при нарушении квазинейтральности плазмы. В простейшем потенциальном случае напряжённость самосогласованного электрического поля пропорциональна интегралу от возмущения плотности индуцированных в плазме зарядов (согласно уравнению Пуассона). Таким образом, действующие в плазме силы определяются интегралами от возмущений плотности частиц, составляющих плазму. В нейтральных газах и жидкостях основными являются силы давления, определяемые производными от возмущений плотности. Хотя физическая природа сил в плазме и газе различна, они и в плазме, и в газе определяются фактически одинаково — линейными операторами от возмущений плотности. Этим и обусловлены многочисленные аналогии между плазменными и газодинамическими явлениями. Конечно, в многомерном случае применение интегрального и дифференциального операторов к одной и той же функции может привести к существенно разным результатам, что в свою очередь приводит к тому, что плазменные и газодинамические явления иногда во многом различаются.

2. Как в поперечно неоднородном слое равновесной электронной плазмы, так и в поперечно неоднородном потоке несжимаемого нейтрального газа возможны сходные по закону дисперсии и по поперечной структуре возмущений (поля и скорости) поверхностные волны. Возможны в них и локальные объёмные волны непрерывного спектра (псевдоволны). В плазме резонансное взаимодействие поверхностных волн и локальных объёмных волн приводит к появлению бесстолкновительного затухания поверхностных волн, в то же время аналогичное затухание поверхностных волн в потоке газа отсутствует. К такому глобальному результату приводит несущественное на первый взгляд различие дифференциальных уравнений плазменного слоя и газового потока — уравнений (2.1) и (2.4).

3. Одним из важных свойств плазмы является существование в ней электромагнитных волн с фазовыми скоростями, меньшими скорости света в пустоте. Этим же свойством обладают и многие другие материальные среды (или электродинамические системы). Электрон, двигаясь в среде со скоростью, превышающей минимальную фазовую скорость волны, излучает такую волну. Механизм этого излучения, известного как излучение Вавилова–Черенкова, состоит в том, что электрон, поляризуя среду, создаёт в ней электромагнитное поле, которое отстаёт (отрывается) от движущегося электрона. Возникает свободное, не связанное с электроном поле, что и представляет собой излучение. Излучение отдельного электрона является спонтанным. Оказывается, что при наличии потока электронов в среде возникает вынужденное черенковское излучение, причисляемое в теории плазмы к одной из разновидностей пучковых неустойчивостей. Аналогом замедленных электро-

магнитных волн в плазме в газах и сжимаемых жидкостях являются звуковые волны. Если в газе имеется газовый поток со скоростью, превышающей минимальную фазовую скорость звуковой волны, то возникает излучение звука, подобное вынужденному черенковскому излучению. Такое излучение можно трактовать как некую гидродинамическую неустойчивость. При этом сходство электродинамики плазмы (и даже всей линейной электродинамики материальных сред с дисперсией) и газодинамики оказывается настолько сильным, что дисперсионные уравнения для инкрементов неустойчивостей и сами инкременты чуть ли не совпадают. Однако спонтанного излучения звука движущимся телом, подобного спонтанному излучению электрона, в газовой динамике нет: тело, в отличие от электрона, не создаёт поля. При сверхзвуковом движении тела в газе излучает газовый поток, создаваемый движущимся телом. Излучение потока является вынужденным.

4. Одной из известнейших гидродинамических неустойчивостей является неустойчивость тангенциального разрыва в потоке газа или жидкости со скачком скорости потока. При определённых условиях неустойчивость имеет место и при отсутствии скачка (разрыва) скорости потока. Аналогичные неустойчивости известны в поперечно неоднородных потоках плазмы (пучках заряженных частиц). В отличие от потоков жидкости и газа, плазменные потоки всегда неустойчивы при любой степени неоднородности их скорости. Особенно ярко различие между неоднородными плазменными и газовыми потоками видно в длинноволновом приближении из сравнения основного дисперсионного уравнения неустойчивости тангенциального разрыва (6.2) и дисперсионного уравнения slipping-неустойчивости (12.5). Ещё одним плазменным аналогом гидродинамических неустойчивостей тангенциального разрыва являются нерезонансные неизлучательные пучковые неустойчивости типа неустойчивостей отрицательной массы (неустойчивости в среде с отрицательной диэлектрической проницаемостью).

Мы стремились показать, что электродинамические и гидродинамические явления, несмотря на математическое сходство их описаний, имеют принципиально разную физическую природу. Сразу после появления теории Maxwella и впоследствии электродинамики сплошных сред учёные стремились свести электродинамические явления в сплошных средах к газогидродинамическим. Причиной послужило наличие в средах без дисперсии линейного спектра электромагнитных волн, подобного спектру звуковых волн, с фазовой скоростью света (порядка  $10^8 \text{ м с}^{-1}$ ), намного превосходящей скорость звука в газах и жидкостях (порядка  $10^2 - 10^4 \text{ м с}^{-1}$ ). Правда, звук существует только в средах при учёте их сжимаемости. И тогда учёные придумали непонятный эфир, наделив его сверхъестественными свойствами, помимо того, меняющимися с развитием экспериментальной электродинамики. Главным был спектр волн, который отождествили со звуком, — в эфире скорость света представляет собой скорость звука, обусловленную сжимаемостью эфира. Но почему-то скорость ни одного реального тела с конечной массой не могла превзойти скорость звука в эфире (или скорость света в вакууме), и даже скорость перемещения энергии упругих волн в газах и жидкостях всегда должна была быть меньше скорости света в вакууме.

Но первый сюрприз принесли эксперименты И. Ленгмюра [35–39] в 1925 г., показавшие, что в плазме газового разряда существуют высокочастотные колебания, обладающие длинноволновым пределом частоты, который зависит от плотности электронов и их заряда. Таких колебаний в газах нейтральных частиц и жидкостях не наблюдалось. Всё указывало на то, что взаимодействие частиц в плазме носит коллективный характер и определяется дальнодействующими силами, дальнодействие которых намного превосходит среднее расстояние между частицами (в случае газа, а для жидкости понятие частицы неприменимо).

В 1929 г. И. Ленгмюр и Л. Тонкс [40–42] построили простую механическую теорию плазмы, в которой взаимодействие частиц определяется создаваемыми ими же электромагнитными полями, т.е. построили простую теорию плазмы с самосогласованным полевым взаимодействием, полностью преодолевая парными столкновениями, составляющими основу теории газов Л. Больцмана [43].

Ленгмюр и Тонкс дали объяснение низкочастотным колебаниям, существующим в неизотермической плазме с горячими электронами; в такой плазме давление определяется электронным компонентом (температурой электронов), а инерция — ионным компонентом (массой ионов). Такие колебания тоже обладают предельной частотой, но в коротковолновом пределе эта частота также определяется плотностью заряженных частиц и температурой (а также давлением) электронов. В отличие от высокочастотных колебаний, которые носят название ленгмюровских в честь их открывателя, низкочастотные волны называются ионно-звуковыми.

В этом заключении мы преднамеренно отошли от прямого содержания настоящей статьи, чтобы ещё раз подчеркнуть, что, несмотря на указанные выше аналогии и математическое сходство описаний различных "подобных" явлений в газах и плазме, они имеют принципиально различную физическую природу.

## 14. Приложение.

### Вычисление комплексных интегралов

В теории плазмы и гидродинамике часто встречаются интегралы вида

$$J_n(w) = \int_a^b \frac{f(z)}{(z-w)^n} dz, \quad (\text{П.1})$$

где  $w$  — комплексная переменная,  $n = 1, 2$ , а интегрирование проводится по отрезку вещественной оси  $a < z < b$ . Пределы интегрирования могут быть и бесконечными,  $a = -\infty$  и  $b = +\infty$ . В кинетической теории плазмы интегралы (П.1) возникают при вычислении диэлектрических проницаемостей, при этом  $w$  пропорциональна частоте,  $z$  — скорость,  $f(z)$  — функция распределения. В теории неоднородной плазмы интегралы (П.1) возникают при интегрировании уравнений поля (см. формулу (5.2)), при этом  $z$  — пространственная координата, а  $w$  пропорциональна квадрату частоты,  $f(z)$  определяется геометрией. В гидродинамике неоднородных потоков интегралом типа (П.1) является интеграл (6.2). Будем считать, что функция  $f(z)$  является аналитической на всей комплексной плоскости  $z = z' + iz''$ , за исключением разрезов  $z' < a$  и  $z' > b$  вдоль вещественной оси

$z'' = 0$ . На разрезах можно положить  $f(z) \equiv 0$  и вычислять интеграл (П.1) в бесконечных пределах.

Пусть интеграл  $J_n(w)$  является аналитической функцией в верхней полуплоскости  $w'' > 0$  комплексной переменной  $w = w' + iw''$ . Рассмотрим проблему аналитического продолжения функции  $J_n(w)$  в нижнюю полуплоскость  $w'' < 0$ . Такая проблема есть — она связана с тем, что интеграл  $J_n(w)$  не существует для вещественных значений  $w \in [a, b]$ . Можно говорить только о пределе

$$\lim_{\substack{w'' \rightarrow \pm 0 \\ w' \in [a, b]}} J_n(w' + iw''). \quad (\text{П.2})$$

Начнём со случая  $n = 1$ . Согласно формулам Сохоцкого

$$J_1(w' + i0) - J_1(w' - i0) = 2\pi i f(w'). \quad (\text{П.3})$$

Следовательно, вдоль отрезка вещественной оси  $a < w' < b$  функция  $J_1(w)$  не является однозначной. Естественным способом аналитического продолжения функции комплексной переменной  $F(w)$ , аналитической в области  $W_1$ , на область  $W_2$  является перемещение точки  $w$  из области  $W_1$  в область  $W_2$  по пути, обходящему все особенности функции  $F(w)$ . Проблема аналитического продолжения возникает именно тогда, когда такой путь отсутствует. Посмотрим, как обстоит дело в нашем случае.

При  $w'' > 0$  особая точка подынтегральной функции в (П.1)  $z = z_0 = w$  расположена в верхней полуплоскости комплексной плоскости  $z$ . При изменении мнимой части  $w$  от положительных значений до отрицательных особая точка  $z_0$  перемещается в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости  $z$  (рис. 4). Возможны три пути перемещения точки  $z_0$ , помеченные на рис. 4 стрелками. Два из них проходят левее точки  $z = a$  и правее точки  $z = b$ , третий путь пересекает отрезок вещественной оси  $a < z < b$ , т.е. контур интегрирования в (П.1). Но ни один из этих путей не годится: первые два пути пересекают разрезы на комплексной плоскости  $z$ , обусловленные функцией  $f(z)$ , третий путь пересекает область расходимости интеграла (П.1). Следовательно, естественный способ аналитического продолжения невозможен.

Для выхода из такого положения Ландау предложил деформировать контур интегрирования в (П.1) так, чтобы он всегда проходил ниже особой точки  $z_0 = w$ , т.е. при  $w'' < 0$  заменить контур  $aOb$  контуром  $acdb$  (см. рис. 4). Правило Ландау обосновывается тем, что при изменении  $w''$  от положительных значений до отрицательных особая точка  $z_0$  перемещается из верхней полуплоскости комплексной плоскости  $z$  в нижнюю полуплоскость, зацепляя и деформируя контур интегрирования. Поскольку интеграл по контуру  $acdb$  равен интегралу по

контуру  $aOb$  плюс вычет подынтегральной функции в особой точке, умноженный на  $2\pi i$ , получим следующую основную формулу:

$$J_1(w) = \left( \int_a^b dz \frac{f(z)}{z-w} \right) + \begin{cases} 0, & w'' > 0, \\ 2\pi i f(w), & w'' < 0. \end{cases} \quad (\text{П.4})$$

Приведённые рассуждения остаются в силе и в случае  $n = 2$ . Опуская подробности, представим окончательный результат:

$$J_2(w) = \left( \int_a^b dz \frac{f(z)}{(z-w)^2} \right) + \begin{cases} 0, & w'' > 0, \\ 2\pi i f'(w), & w'' < 0, \end{cases} \quad (\text{П.5})$$

где  $f'(w)$  — производная функции  $f(z)$ . Формулы (П.4) и (П.5) являются частными случаями более общей формулы

$$J_n(w) = \left( \int_a^b dz \frac{f(z)}{(z-w)^n} \right) + \begin{cases} 0, & w'' > 0, \\ \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(w), & w'' < 0. \end{cases} \quad (\text{П.6})$$

Несложно увидеть, что дисперсионное уравнение (5.4) получается из (5.2) в результате использования формулы (П.4), а уравнение (6.2) следует из формулы (П.5) (при  $f(z) \equiv 1$ ).

## Список литературы

- Гинзбург В Л, Рухадзе А А *Волны в магнитоактивной плазме* (М.: Наука, 1975)
- Krall N A, Trivelpiece A W *Principles of Plasma Physics* (New York: McGraw-Hill, 1973); Пер. на русск. яз.: Кролл Н, Трайвелпес А *Основы физики плазмы* (М.: Мир, 1975)
- Лойцянский Л Г *Механика жидкости и газа* (М.: Наука, 1973); Пер. на англ. яз.: Loitsyanski L G *Mechanics of Liquids and Gases* (New York: Begell House, 1995)
- Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)
- Кузелев М В, Рухадзе А А УФН **152** 285 (1987); Kuzelev M V, Rukhadze A A Sov. Phys. Usp. **30** 507 (1987)
- Кузелев М В, Рухадзе А А, в сб. *Проблемы теоретической физики и астрофизики. Сборник статей, посвященный 70-летию В.Л. Гинзбурга* (Отв. ред. Л В Келдыш, В Я Файнберг) (М.: Наука, 1989) с. 70
- Buts V A, Lebedev A N, Kurikko V I *The Theory of Coherent Radiation by Intense Electron Beams* (Berlin: Springer, 2006)
- Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Физическая кинетика* (М.: Наука, 1979); Пер. на англ. яз.: Lifshitz E M, Pitaevskii L P *Physical Kinetics* (Oxford: Pergamon Press, 1981)
- Кузелев М В, Орликовская Н Г ЖЭТФ **150** 1255 (2016); Kuzelev M V, Orlikovskaya N G JETP **123** 1090 (2016)
- Александров А Ф, Богданович Л С, Рухадзе А А *Основы электродинамики плазмы* (М.: Высшая школа, 1978); Пер. на англ. яз.: Alexandrov A F, Bogdanovich L S, Rukhadze A A *Principles of Plasma Electrodynamics* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)
- Lin C *The Theory of Hydrodynamic Stability* (Cambridge: Univ. Press, 1955); Пер. на русск. яз.: Линь Ц *Теория гидродинамической устойчивости* (М.: ИЛ, 1958)
- Веденеев В В *Математическая теория устойчивости плоскопараллельных течений и развитие турбулентности* (Долгопрудный: Интеллект, 2016)
- Кондратенко А Н *Поверхностные и объемные волны в ограниченной плазме* (М.: Энергоатомиздат, 1988)
- Кадомцев Б Б *Коллективные явления в плазме* (М.: Наука, 1976); Пер. на англ. яз.: Kadomtsev B B *Reviews of Plasma*

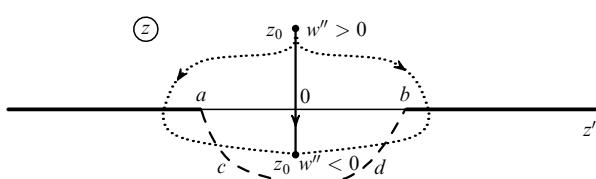


Рис. 4.

- Physics* Vol. 22 (Ed. V D Shafranov) (New York: Kluwer Acad. Plenum Publ., 2001) p. 1
15. Тимофеев А В *Резонансные явления в колебаниях плазмы* (М.: Физматлит, 2000)
  16. Кузелев М В, Рухадзе А А *Методы теории волн в средах с дисперсией* (М.: Физматлит, 2007)
  17. Lousell W H *Coupled mode and parametric electronics* (New York-London, Wiley, 1960); Пер. на русск. яз.: Люиселл У *Связанные и параметрические колебания в электронике* (М.: ИЛ, 1963)
  18. Гинзбург В Л *Распространение электромагнитных волн в плазме* (М.: Наука, 1967); Пер. на англ. яз.: Ginzburg V L *The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas* (Oxford: Pergamon Press, 1970)
  19. Болотовский Б М *УФН* **179** 1161 (2009); Bolotovskii B M *Phys. Usp.* **52** 1099 (2009)
  20. Тихонов А Н, Самарский А А *Уравнения математической физики* (М.: Наука, 1972); Пер. на англ. яз.: Tikhonov A N, Samarskii A A *Equations of Mathematical Physics* (New York: Dover Publ., 1990)
  21. Abramowitz M, Stegun I A (Eds) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (New York: Dover Publ., 1972); Пер. на русск. яз.: Абрамович М, Стиган И (Ред.) *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* (М.: Наука, 1979)
  22. Силин В П, Рухадзе А А *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред* (М.: Атомиздат, 1961)
  23. Владимиров В С *Уравнения математической физики* (М.: Наука, 1976); Пер. на англ. яз.: Vladimirov V S *Equations of Mathematical Physics* (Moscow: Mir, 1984)
  24. Ландау Л Д *ЖЭТФ* **26** 547 (1946)
  25. Кузелев М В, Хунджуа Н Г *Радиотехника и электроника* **53** 726 (2008); Kuzelev M V, Khundzhua N G *J. Commun. Technol. Electron.* **53** 689 (2008)
  26. Кузелев М В, Хунджуа Н Г *Радиотехника и электроника* **56** 423 (2011); Kuzelev M V, Khundzhua N G *J. Commun. Technol. Electron.* **56** 389 (2011)
  27. Кузелев М В, Рухадзе А А *Электродинамика плотных электронных пучков в плазме* (М.: Наука, 1990)
  28. Кузелев М В, Рухадзе А А *УФН* **178** 1025 (2008); Kuzelev M V, Rukhadze A A *Phys. Usp.* **51** 989 (2008)
  29. Рухадзе А А и др. *Физика сильноточных релятивистских электронных пучков* (М.: ЛЕНАНД, 2016)
  30. Кузелев М В, Рухадзе А А *ЖЭТФ* **134** 1034 (2008); Kuzelev M V, Rukhadze A A *JETP* **107** 887 (2008)
  31. Богданов В В, Кузелев М В, Рухадзе А А *Физика плазмы* **10** 548 (1984); Bogdanov V V, Kuzelev M V, Rukhadze A A *Sov. J. Plasma Phys.* **10** 319 (1984)
  32. Кузелев М В, Рухадзе А А, Стрелков П С *Плазменная релятивистская СВЧ-электроника* (М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002)
  33. Гинзбург В Л *Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы 2-е изд.* (М.: Наука, 1981); Пер. на англ. яз.: Ginzburg V L *Theoretical Physics and Astrophysics* (Oxford: Pergamon Press, 1979)
  34. Davidson R C *Theory of Nonneutral Plasmas* (Reading, Mass.: W.A. Benjamin, 1974); Пер. на русск. яз.: Дэвидсон Р *Теория заряженной плазмы* (М.: Мир, 1978)
  35. Langmuir I *Cen. Elec. Rev.* **27** 449 (1924)
  36. Langmuir I *Cen. Elec. Rev.* **27** 538 (1924)
  37. Langmuir I *Cen. Elec. Rev.* **27** 616 (1924)
  38. Langmuir I *Cen. Elec. Rev.* **27** 762 (1924)
  39. Langmuir I *Cen. Elec. Rev.* **27** 810 (1924)
  40. Tonks L, Langmuir I *Phys. Rev.* **33** 195 (1929)
  41. Tonks L, Langmuir I *Phys. Rev.* **33** 990 (1929)
  42. Tonks L, Langmuir I *Phys. Rev.* **34** 876 (1929)
  43. Силин В П *Введение в кинетическую теорию газов* (М.: Наука, 1971)

## Waves in inhomogeneous plasmas and liquid and gas flows. Analogies between electro- and gas-dynamic phenomena

M.V. Kuzelev<sup>(1)</sup>, A.A.Rukhadze<sup>(2,1)</sup>

<sup>(1)</sup> Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University,  
Leninskie gory 1, str. 2, 119992 Moscow, Russian Federation

<sup>(2)</sup> A.M. Prokhorov General Physics Institute, Russian Academy of Sciences,  
ul. Vavilova 38, 119942 Moscow, Russian Federation  
E-mail: <sup>(1)</sup>kuzelev@mail.ru

Two rather closely analogous classes of phenomena — plasma and hydrodynamic ones — are reviewed. Topics covered include: surface waves on an inhomogeneous plasma layer and on an inhomogeneous incompressible flow; the instability of the tangential discontinuity of an inhomogeneous gas flow and the negative mass instability of an electron-beam-carrying plasma; radiative Cherenkov instabilities of an electron beam in a plasma and of a gas flow in a gas; the instability of plasma flows and of incompressible fluid flows with inhomogeneous velocity profiles. Special attention is given to the collisionless damping of plasma surface waves. It is shown that no such damping occurs for surface waves in gas flows.

**Keywords:** plasma and hydrodynamic analogies, tangential discontinuity instability, negative mass instability, analog of collisionless plasma damping

PACS numbers: 41.60.Bq, 52.25.Os

Bibliography — 43 references

Received 3 April 2017, revised 27 August 2017

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **188** (8) 831–848 (2018)

*Physics – Uspekhi* **61** (8) (2018)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.10.038214>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.10.038214>