

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Гармония в многочастичной квантовой задаче

К.В. Чукбар

Предлагается использовать точное решение модельной квантовой задачи об облаке идентичных нерелятивистских частиц, взаимодействующих посредством потенциала гармонического осциллятора, помещённого в гармоническую яму, для наглядного представления об эффективности приближённых методов, стандартно используемых в более реалистичных многочастичных расчётах.

Ключевые слова: многочастичное уравнение Шрёдингера, гармонический осциллятор, фермионы, бозоны, уравнение Томаса – Ферми

PACS numbers: 03.65. – w, 05.30.Fk, 05.30.Jp, 31.15.bt

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.06.038159>

Содержание

1. Введение (446).
 2. Постановка задачи (447).
 3. Приближение среднего поля (448).
 4. Два гармонических фермиона (449).
 5. Три гармонических фермиона (450).
 6. Невзаимодействующие фермионы (451).
 7. Гармонические бозоны (451).
 8. Когерентные состояния (453).
 9. Заключение (453).
- Список литературы (454).

1. Введение

Основное предназначение физических моделей — описание и расчёт практических ситуаций. Но последние достаточно сложны, поэтому необходимые вычисления, как правило, не могут быть проведены строго, и в действительности на первый план выходят различные приближённые математические методы решения задач. Чтобы понять цену сделанным приближениям и чётко представить точность используемых методов, целесообразно и эффективно провести их тестирование на какой-либо точно решаемой модели, пусть даже весьма экзотичной, но допускающей прямую проверку подходов, развитых для гораздо более реалистичных задач. Иными словами, точные решения физических задач, как

правило, существующие лишь в частных, вырожденных случаях, могут служить прекрасным тестом для приближённых методов анализа, применяемых в случаях "общего положения".

В данной статье предлагается "тестовая" квантово-механическая модель, способная прояснить и сделать наглядным множество приближённых методов, используемых для описания многочастичных (нерелятивистских) фермионных и бозонных систем. В качестве популярных областей их применения можно указать многоэлектронные атомы (см., например, [1–3]) и облака атомных газов в ловушках для наблюдения бозе-конденсации [4, 5]. Для "визуализации" достоинств используемых при этом аналитических подходов (теории возмущений, вариационного, Томаса – Ферми, матрицы плотности, коллективного гидродинамического описания и пр.) может послужить гармонический аналог таких систем, в котором межчастичное взаимодействие характеризуется потенциалом линейного осциллятора. Такая модель обладает несколькими замечательными в математическом аспекте свойствами, позволяющими получать точные решения, как будто сами собой предназначенные для проверки стандартных методов атомной физики, причём для произвольного, сколь угодно большого числа квантовых частиц в системе.

Соответствующая процедура получения этих точных решений (но, по-видимому, не все решения сами по себе) отнюдь не нова — под названием "переход к нормальным координатам" она входит практически во все учебники по классической механике (см., например, [6, 7]), а её квантовые обобщения составляют предмет обширного цикла работ В.И. Манько с соавторами (здесь процитируем лишь [8, 9]). Однако предлагаемая идеология в доступной литературе не встречалась, и поэтому представляется ценной с методической точки зрения — как материал дополнительного параграфа в курсе квантовой механики для продвинутых студентов. Следует отдавать себе отчёт, что, несмотря на проводимые ниже многочисленные сравнения и параллели с популярными многоэлектронными и многоатомными системами, эта цен-

К.В. Чукбар. Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт",
пл. Академика Курчатова 1, 123182 Москва, Российская Федерация;
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
Институтский пер. 9, 141700 Долгопрудный, Московская обл.,
Российская Федерация
E-mail: Chukbar_KV@nrcki.ru

Статья поступила 3 апреля 2017 г.,
после доработки 5 июня 2017 г.

ность заключается не в продвижении исследований таких систем, а всего лишь в помощи в освоении приёмов, используемых для такого продвижения.

2. Постановка задачи

Итак, пусть в неподвижной параболической яме (аналог поля атомного ядра или ловушки) содержатся N одинаковых частиц массой m , взаимодействующих между собой также по параболическому закону, но с другой "интенсивностью". Стационарное состояние системы в одномерном случае описывается уравнением Шрёдингера для многочастичной волновой функции

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} + \frac{m\omega^2}{2} \left[\sum_{i=1}^N x_i^2 + \alpha \sum_{i>j} (x_i - x_j)^2 \right] \psi = E\psi. \quad (1)$$

Ситуация, конечно, является чисто модельной и не претендует на жизненность. Повторим, что такая система рассматривается здесь главным образом в качестве инструмента, причём инструмента учебного, а не объекта исследования (впрочем, см. раздел 9).

Первым и самым замечательным свойством гармонического потенциала является то, что, как известно, всегда существует одновременная диагонализация матриц кинетической и потенциальной энергий в координатах $\xi_i(x)$, как раз и называемых нормальными, превращающая исходное уравнение (1) в следующее:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i^2} + \frac{m\omega^2 \xi_1^2}{2} \psi + (1 + N\alpha) \frac{m\omega^2}{2} \sum_{i=2}^N \xi_i^2 \psi = E\psi, \quad (2)$$

причём в данном случае из-за исходной "единичности" матрицы кинетической энергии (в квантовой области — лапласиана) новые координаты ортонормированы, т.е. речь идёт просто о повороте, возможно, с некоторыми отражениями и перестановками осей многомерной системы координат СК- x . Коэффициенты новой квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^N x_i^2 + \alpha \sum_{i>j} (x_i - x_j)^2 = [1 + (N-1)\alpha] \sum_{i=1}^N x_i^2 - 2\alpha \sum_{i>j} x_i x_j \rightarrow \xi_1^2 + (1 + N\alpha) \sum_{i=2}^N \xi_i^2 \quad (3)$$

нетрудно найти из анализа собственных значений $(N \times N)$ -симметрической матрицы этой формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 + (N-1)\alpha & -\alpha & * & -\alpha \\ -\alpha & 1 + (N-1)\alpha & * & -\alpha \\ * & * & * & * \\ -\alpha & -\alpha & * & 1 + (N-1)\alpha \end{pmatrix},$$

поскольку

$$\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)(1 + N\alpha - \lambda)^{N-1}$$

(можно, например, вычестить из каждой строки, начиная с нижней, предыдущую и расписать определитель по нетронутой первой строке). То есть собственных значений всего два: 1 у вектора $\{1, 1, \dots, 1\}$ (в чём можно убедиться простой проверкой) и $1 + N\alpha$ у всех остальных.

Таким образом, способ перехода в СК- ξ прост: после выделения координаты центра масс (ЦМ) "облака" $\xi_1 = (\sum_{i=1}^N x_i)/\sqrt{N}$ (коэффициент здесь и ниже выбирается из единичности вектора нормали-градиента к данной гиперплоскости, на самом деле координата ЦМ в \sqrt{N} раз меньше ξ_1 , а её квадрат, соответственно, в N раз меньше ξ_1^2), остальные оси достраиваются совершенно произвольным образом ($(N-1)$ -кратное вырождение) последовательной процедурой ортонормирования. Может быть, часть этих осей стоит выбирать из непересекающихся пар $(x_i - x_j)/\sqrt{2}$, $i \neq j$, тогда они автоматически получают ортогональными друг другу и первой оси, а соответствующие ψ -функции будут по крайней мере по этим парам симметричны (антисимметричны) (см. ниже). При малых значениях N остающаяся достройка получается очень короткой: для двух частиц точно

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \\ \xi_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{\sqrt{2}}, \\ x_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

а, например, для трёх (так как, начиная именно с этого случая, направления осей $\xi_{i \geq 2}$ допускают поворот на произвольный угол вокруг оси ξ_1 плюс произвольное число перестановок: разница между правой и левой ориентациями СК в этой задаче не проявляется):

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{x_1}{\sqrt{3}} + \frac{x_2}{\sqrt{3}} + \frac{x_3}{\sqrt{3}}, \\ \xi_2 = -\frac{\sqrt{2}x_1}{\sqrt{3}} + \frac{x_2}{\sqrt{6}} + \frac{x_3}{\sqrt{6}}, \\ \xi_3 = -\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

(обращение перехода также тривиально, но здесь мы его не приводим, поскольку в дальнейшем это не требуется). И при $i = 4$ достройка единственной недостающей оси ξ_4 после рекомендованного выделения ξ_1 , $\xi_2 = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$, $\xi_3 = (x_3 - x_4)/\sqrt{2}$ очень проста. Коэффициенты в матрицах, связывающих старые и новые координаты, как указывалось выше, подбираются таким образом, чтобы сохранялся вид лапласиана, так что якобианы переходов везде по модулю равны единице.

Решение (2) как системы невзаимодействующих осцилляторов очевидным образом факторизуется:

$$\psi = f(\xi_1) \prod_{i=2}^N g_i(\xi_i), \quad E = \sum_{i=1}^N E_i, \quad (4)$$

с помощью полиномов Эрмита,

$$f \propto H_{k_1} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \xi_1 \right) \exp \left(-\frac{m\omega \xi_1^2}{2\hbar} \right),$$

$$g_i \propto H_{k_i} \left(\sqrt{\frac{m\sqrt{1+N\alpha}\omega}{\hbar}} \xi_i \right) \exp \left(-\frac{m\sqrt{1+N\alpha}\omega \xi_i^2}{2\hbar} \right),$$

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} \left[1 + 2k_1 + \sqrt{1+N\alpha} \sum_{i=2}^N (1 + 2k_i) \right],$$

$$k_i = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Видно, что параметр α в модели может принимать произвольные положительные значения, но в случае межчастичного отталкивания его величина ограничена неравенством $\alpha > -1/N$ (понятно, что лишь при $N \geq 2$)¹ — в противном случае внешний потенциал не способен удерживать облако гармоничных частиц. Именно с этим решением и предстоит сравнивать результаты, получаемые приближёнными методами.

Конечно, диагонализация с последующей факторизацией применима и в случае запертых во внешней яме частиц с разными значениями α и даже m , но в данной работе изучается только вариант (1). При неидентичности составляющих системы переход к (2) существенно более громоздок и не столь универсален, но на нём решение задачи и заканчивается, тогда как в данном случае всё только начинается. Согласно принципу неразличимости квантовых объектов необходимо ещё провести процедуру — в зависимости от бозе- или ферми-статистики компонентов — симметризации (антисимметризации) волновой функции по всевозможным перестановкам $i \leftrightarrow j$ [1, 2, 10], причём, во-первых, в реальном x -пространстве, а не в формальном ξ -пространстве и, во-вторых, именно полной волновой функции с учётом её спиновой составляющей, которая вследствие независимости гамильтониана (1) от спина возникает в виде множителя у выписанных в (4) ψ .

Хорошо известно, что осуществление этой чрезвычайно важной для реальных атомов и бозонных ловушек программы действий при $N \gg 1$ бывает не менее сложным (а в данной модели и гораздо более сложным), чем нахождение координатной ψ . Далее для простоты и определённости выкладок фермионы считаются обладающими половинным спином (волновая функция i -й частицы со спином, направленным вверх или вниз, обозначается как \uparrow_i или \downarrow_i), а бозоны — нулевым. Кроме того, полагается, что для первых характерно взаимное отталкивание ($\alpha < 0$), а для вторых — притяжение ($\alpha > 0$). Задачи рассматриваются лишь одномерные, поскольку ещё одним удобным свойством модели является то, что при переходе к дву- или трёхмерным ситуациям система просто диагонализуется отдельно по наборам x_i , y_i и (если нужно) z_i .

3. Приближение среднего поля

Приближение среднего поля в разных вариантах является едва ли не самым популярным именно в многочастичных задачах с $N \gg 1$, причём для обеих статистик частиц, составляющих облако. В атомной физике оно известно как приближение Томаса–Ферми. Сопоставление с ним будет проводиться постоянно, в связи с чем в данной модели с потенциалом взаимодействия, отнюдь не обнуляющимся при стремлении межчастичного расстояния к бесконечности, это приближение стоит рассмотреть особо.

Прежде всего следует подчеркнуть, что речь идёт о смене языка описания объекта-облака: вместо точной многочастичной волновой функции $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ оно характеризуется концентрацией частиц $n(x)$ (опять обращаемся к одномерному варианту). Поэтому для адекват-

ности сравнения следует дать "перевод" с одного языка на другой. Очевидно, что вследствие неразличимости частиц такой "перевод" можно осуществить, выражая концентрацию $n(x)$ в виде простой суммы вкладов от каждой из них:

$$n(x) = \sum_{i=1}^N \int \dots \int |\psi(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_N)|^2 \times \\ \times dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_N. \quad (6)$$

Впрочем, благодаря симметричности $|\psi|^2$ по всем x_i последующие выкладки выглядят компактнее. Странно, но даже в очень хороших книгах эта банальная формула либо вообще отсутствует [1, 2], либо приводится лишь для случая одноэлектронных волновых функций [3] (см. раздел 6), хотя без неё связность изложения явно теряется.

Теперь, когда мы уяснили, с чем предстоит сравнивать результат данного приближённого метода, можно приступить к выводу его формул. Этот вывод распадается на два этапа: установление связи среднего или эффективного поля с концентрацией частиц и вычисление обратного "отклика" облака на профиль коллективного потенциала. Первый этап вполне универсален и не различает, фермионное или бозонное облако порождает потенциал $\phi(x)$. Здесь имеет смысл подчеркнуть эффективность (а также эффектность) гармонической модели, позволяющей без проблем выписывать точные формулы. Поскольку сумма любого числа любых квадратных трёхчленов является квадратным трёхчленом, искомая связь представляет собой просто

$$\phi = \frac{m\omega^2}{2} \left[x^2 + \alpha \int n(x')(x-x')^2 dx' \right] \rightarrow \\ \rightarrow \phi = \frac{m\omega^2}{2} [x^2(1+N\alpha) + N\alpha\langle x^2 \rangle]. \quad (7)$$

При этом считается, что моменты распределения концентрации удовлетворяют соотношениям

$$\int n dx = N, \quad \int xn dx = 0, \quad \int x^2 n dx = N\langle x^2 \rangle.$$

Первое очевидно, третье тавтологично, второе можно доказать (см. ниже).

А вот откликаются бозоны и фермионы на потенциал по-разному, так как их давление в силовом балансе

$$-\frac{\nabla P}{n} - \nabla\phi = 0 \quad (8)$$

существенно зависит от статистики. Принято считать, что в наименьшем возможном энергетическом состоянии "макроскопической" системы температура $T = 0$, и в случае одномерного ферми-дираковского облака, двукратно вырожденного по спину, $P = P_F = (\pi\hbar)^2 n^3 / (12m)$, отсюда

$$\frac{3P_F}{2n} + \phi = \text{const} \rightarrow n = \frac{2}{\pi\hbar} \begin{cases} \sqrt{2m(\phi_0 - \phi)}, & \phi < \phi_0, \\ 0, & \phi > \phi_0. \end{cases}$$

Видно, что n наследует симметрию ϕ (так получается и при статистике Бозе–Эйнштейна), поэтому, если бы первый момент n не равнялся нулю, перенос начала отсчёта в точку, относительно которой всё же $\int nx dx = 0$,

¹ Полезно, например, для $N = 2$ разобрать, почему в правой части неравенства для α должно быть $-1/N$, а не $-1/(N-1)$, как может показаться.

приводил бы к противоречию из-за наличия в (7) внешнего поля, теряющего симметрию при таком сдвиге. Окончательно с учётом (7) получим

$$n = \frac{2m\omega}{\pi\hbar} \sqrt{1 + N\alpha} \times \begin{cases} \sqrt{x_0^2 - x^2}, & |x| < x_0, \\ 0, & |x| > x_0 \end{cases} \rightarrow \langle x^2 \rangle = \frac{x_0^2}{4}. \quad (9)$$

Итак, распределение концентрации симметрично относительно $x = 0$ исключительно благодаря внешнему потенциалу, поскольку именно он отвечает за фиксацию ЦМ системы. Константа x_0 определяется из нормировки:

$$\int_{-x_0}^{+x_0} n dx = N = \frac{m\omega}{\hbar} \sqrt{1 + N\alpha} x_0^2.$$

Видно, насколько (9) проще и нагляднее уравнения Томаса–Ферми для взаимодействующих по Кулону электронов в атоме. В общем s -мерном случае² $n \propto (r_0^2 - r^2)^{s/2}$, так как $P_F \propto n^{(s+2)/s}$.

Очевидно, что, как везде и пишут, основной идеологический недостаток усреднительного подхода состоит в классичности описания системы без всяких признаков квантовой дискретности (ср. с (5))³. Тем не менее некоторые квантовые эффекты включаются в этот подход достаточно просто. Так, например, в последнее время для дополнительного учёта туннельного "просачивания" частиц внутрь барьеров нередко добавляют в баланс (8) градиент так называемого *бомовского потенциала*

$$+ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \left(\frac{\Delta \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right)$$

(правда, для описания вырожденной плазмы, а не связанных электронов в атомах (см. [11, 12])). Бомовский потенциал возникает из лапласиана кинетической энергии в уравнении Шрёдингера и связи $n \leftrightarrow \psi^2$ (подробности можно посмотреть в [13, 14]). Конечно, в этом случае возможность аналитического решения (8) сразу исключается, но вносимые поправки понять легко. Во-первых, поскольку в системе всё равно $\phi \propto x^2$, при $|x| \rightarrow \infty$ вместо области $n \equiv 0$ у облака появляются плавные "крылья":

$$-(1 + N\alpha) \left(\frac{m\omega x}{\hbar} \right)^2 \sqrt{n} + \frac{d^2 \sqrt{n}}{dx^2} \approx 0 \rightarrow \\ \rightarrow n \propto \exp \left(- \frac{m\omega}{\hbar} \sqrt{1 + N\alpha} x^2 \right),$$

что ничуть не удивительно, а во-вторых, бомовский вклад в основное "тело" системы мал по параметру:

$$\frac{\hbar^2/(mx_0^2)}{(\hbar n)^2/m} \sim \frac{1}{(nx_0)^2} \sim \frac{1}{N^2}.$$

Что касается частиц, описываемых статистикой Бозе–Эйнштейна, то для них пренебрежение температурными эффектами (возбуждениями) означает, что $P = 0$ (см., что

по этому поводу написано в [15]). По этой причине здесь ситуацию часто анализируют на другом языке: уравнения Гросса–Питаевского для некой коллективной волновой функции [4, 5]. К сожалению, вследствие неубывания гармонического потенциала взаимодействия (для бозонов с их $\alpha > 0$ он вообще обладает свойством конфайнмента) такой язык представляется совершенно неприменимым к обсуждаемой модели. С другой стороны, расширять и углублять средства описания нашей чисто формальной, предназначенной для методических нужд системы кажется совершенно излишним. Тем не менее остаться в рамках (8) можно, если вывести на первый план эффект, появившийся выше лишь в виде малой поправки. Действительно, гармоничные бозоны, собираясь, в разительном отличии от фермионов, в наинишем состоянии всем сообществом на одном, нулевом по всем k_i , уровне, формируют профиль плотности исключительно благодаря бомовскому эффекту:

$$\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \frac{d^2 \sqrt{n}}{dx^2} - \frac{m\omega^2}{2} [(1 + N\alpha)x^2 + N\alpha \langle x^2 \rangle] = \text{const}$$

(ср. с (1)). Если здесь $\text{const} = -\hbar\omega(\sqrt{1 + N\alpha} + N\alpha m\omega \langle x^2 \rangle / \hbar) / 2$, что как раз соответствует нулевому, самому нижнему, коллективному уровню, то

$$n = N \sqrt{\frac{m\omega \sqrt{1 + N\alpha}}{\pi\hbar}} \exp \left(- \frac{m\omega}{\hbar} \sqrt{1 + N\alpha} x^2 \right) \rightarrow \\ \rightarrow \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{1 + N\alpha}} \frac{m\omega}{\hbar}. \quad (10)$$

Любопытно, что потенциал, называемый бомовским в фермионном сообществе, хорошо известен бозонному сообществу и широко им используется в аналогичных вычислениях [4, 5], но *никак специально не называется*.

Подготовительную работу можно считать законченной и перейти к обещанному сопоставлению точных и приближённых результатов в различных, но всегда гармонических ситуациях.

4. Два гармонических фермиона

Объект, состоящий из двух гармонических фермионов, аналогичен атому гелия, который вследствие его относительной простоты широко используется для демонстрации целого набора приближённых методов [1]. Однако для реального гелия доступным оказывается лишь сопоставление результатов между собой, тогда как в случае предлагаемой абстрактной гармонической системы можно опереться на точный и строгий результат.

Здесь (см. (5)) наинишее энергетическое состояние с $k_1 = k_2 = 0$ могут занимать только фермионы с антипараллельными спинами (т.е. с антисимметричной спиновой функцией $(\uparrow_1 \downarrow_2 - \downarrow_1 \uparrow_2) / \sqrt{2}$), для которых

$$\psi \propto \exp \left[- \frac{m\omega}{2\hbar} (\xi_1^2 + \sqrt{1 + 2\alpha} \xi_2^2) \right] = \\ = \exp \left\{ - \frac{m\omega}{4\hbar} [(x_1^2 + x_2^2)(1 + \sqrt{1 + 2\alpha}) + \right. \\ \left. + 2x_1 x_2 (1 - \sqrt{1 + 2\alpha})] \right\}$$

и

$$E = \frac{\hbar\omega(1 + \sqrt{1 + 2\alpha})}{2}.$$

² Размерность концентрации, конечно, зависит от s : n [см^{-s}].

³ Существуют и более изощрённые подходы, позволяющие учитывать в коллективном описании и фермионных, и бозонных систем энергетическую дискретность, но их обсуждение в данной статье представляется излишним.

Сравним последние соотношения с результатами нескольких стандартных приближений, используемых в атомной физике.

1. Первый порядок теории возмущений по α исходит из функции чисто внешнего осциллятора

$$\psi = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 + x_2^2)\right]$$

и описывает сдвиг энергии по отношению к базовому $\hbar\omega$

$$\Delta E = \alpha \iint \psi^2 \frac{m\omega^2(x_1 - x_2)^2}{2} dx_1 dx_2 = \frac{\alpha\hbar\omega}{2},$$

т.е. $E = \hbar\omega(1 + \alpha/2)$.

2. В вариационном подходе сначала вводится произвольный центральный "заряд" в виде множителя β перед ω в "невозмущённой" ψ -функции, приведённой выше (поле внешнего осциллятора как бы отчасти экранируется облаком частиц), и ищется

$$E = \min_{\beta} \iint \psi^* \hat{H} \psi dx_1 dx_2 = \min_{\beta} \left[\hbar\omega \left(\beta + \frac{1 - \beta^2 + \alpha}{2\beta} \right) \right] = \hbar\omega\sqrt{1 + \alpha},$$

где \hat{H} — полный гамильтониан из (1). Этот метод позволяет получить лучшее приближение к точному значению энергии системы, хотя его невязка имеет тот же порядок, $O(\alpha^2)$.

3. Среднеполевое описание (аналог описания Томаса–Ферми), хотя двойка вряд ли может считаться большим числом, оказывается не таким уж плохим:

$$n = \frac{2m\omega}{\pi\hbar} \sqrt{1 + 2\alpha} \sqrt{x_0^2 - x^2}, \quad x_0^2 = \frac{2\hbar}{m\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha}}$$

(ср. с (9)), что качественно — можно сравнить ширину и значение в нуле — весьма похоже на точную величину

$$n = \int \psi^2(x, x_2) dx_2 + \int \psi^2(x_1, x) dx_1 = 2\sqrt{\frac{2m\omega\sqrt{1 + 2\alpha}}{\pi\hbar(1 + \sqrt{1 + 2\alpha})}} \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{2\sqrt{1 + 2\alpha}}{1 + \sqrt{1 + 2\alpha}} x^2\right),$$

особенно с учётом боровских крыльев. Близкой в этом приближении оказывается и энергия облака: суммирование кинетической и потенциальной энергий вырожденного одномерного гармоничного "газа" даёт

$$E = \int \left[\frac{P_F}{2} + n \left(\phi_{\text{ext}} + \frac{\phi_{\text{int}}}{2} \right) \right] dx = \hbar\omega\sqrt{1 + 2\alpha}$$

(здесь проведено разделение эффективного потенциала (7) на внешнюю и "внутреннюю", самосогласованную — ту, что пропорциональна α , — части). Правда, порядок невязки всего лишь $O(\alpha)$.

Меру качества приближения можно осознать, заметив, что на низшем уровне $k_1 = k_2 = 0$ вполне могут находиться и два бозона, для которых концентрация облака в среднеполевой модели описывается формулой (10). Снова "похоже", но только для не слишком больших значений α (причём, допустив возможность $\alpha > 0$ для фермионов, сталкиваемся с той же проблемой). Почему при $N\alpha \gg 1$, $\alpha \gg N$ усреднительный подход вступает в

трагическое противоречие с точными решениями, обсуждается в разделе 7.

Чем ещё хороша гармоничная пара, так это возможностью наглядно наблюдать расщепление уровней вследствие обменного взаимодействия, так как процедура симметризации/антисимметризации для неё тривиальна. (Все эффекты описаны в учебниках [1, 2], но на языке теории возмущений.) Для этого надо всего лишь посмотреть на возбуждённые состояния исследуемой системы. Так, для фермионов с антипараллельными спинами (и для бозонов) в них в обязательном порядке включаются только чётные k_2 при любых k_1 : экспоненты в (5) всегда симметричны к перестановкам $x_1 \leftrightarrow x_2$, как и полиномы Эрмита в f , тогда как у g при нечётных k_2 они антисимметричны. Напротив, в системе с сонаправленными спинами (т.е. со спиновой функцией

$$\uparrow_1 \uparrow_2 \quad \vee \quad \frac{\uparrow_1 \downarrow_2 + \uparrow_2 \downarrow_1}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad \downarrow_1 \downarrow_2$$

на выбор) возможны только нечётные k_2 . Следовательно, на первом возбуждённом уровне (при сравнении с рассмотренным нулевым, если фиксировать спиновую функцию, то, для параллели, этот уровень будет не возбуждённым, а основным) энергия системы может принимать значения (в единицах $\hbar\omega/2$ и при достаточной отдалённости α от критического значения $-1/2$)

$$1 + 3\sqrt{1 + 2\alpha} \quad (\uparrow\uparrow) \quad \vee \quad 3 + \sqrt{1 + 2\alpha} \quad (\uparrow\downarrow)$$

с понятной краткой записью состояния с полным единичным и нулевым спином, причём распределение концентрации фермионного облака

$$n \propto \left(\frac{4\sqrt{1 + 2\alpha}}{1 + \sqrt{1 + 2\alpha}} \zeta^2 + C \right) \exp\left(-\frac{2\sqrt{1 + 2\alpha}}{1 + \sqrt{1 + 2\alpha}} \zeta^2\right)$$

(здесь и далее для компактности формул полагается, что $\zeta = x\sqrt{m\omega/\hbar}$ тоже получается различным:

$$C = \begin{cases} (1 + 2\alpha)^{1/2} & (\uparrow\uparrow) \\ (1 + 2\alpha)^{-1/2} & (\uparrow\downarrow) \end{cases}.$$

Однако если $\alpha < -3/8$, то первым возбуждённым для антипараллели окажется уровень с $k_1 = 0$, $k_2 = 2$: $E = \hbar\omega(1 + 5\sqrt{1 + 2\alpha})/2$, и различия в n станут куда заметнее.

5. Три гармонических фермиона

Как сказано у классиков [1] (см. также [10]), переход к случаю $N \geq 2$ резко усложняет процедуру симметризации полной волновой функции. Формулы становятся всё более громоздкими, и, начиная с этого раздела, коэффициенты при ψ и n в точных соотношениях, как правило, не выписываются, поскольку они легко восстанавливаются из нормировки на 1 и N соответственно.

В новой системе уже нельзя в наинизшем состоянии полагать все $k_i = 0$, так как получающаяся волновая функция будет симметричной по трём x_i , что не компенсируется никакой спиновой составляющей. Следовательно, надо допустить единичный сдвиг по одному из квантовых чисел, причём непременно из $k_{2,3}$, так как любые f_{k_i} всё равно симметричны (см. выше) (при

отталкивании это и выгоднее). И действительно, если состояния $\mathbf{k} = \{0, 1, 0\}$ и $\{0, 0, 1\}$ (здесь k_i представлены компонентами некоторого вектора) заставить интерферировать, то вполне удаётся построить полную антисимметричную функцию. Например, при спинах $\uparrow\uparrow\downarrow$, т.е. с полным спином в $1/2$ (с опущенным симметричным экспоненциальным множителем) эта функция имеет вид

$$(x_1 - x_2) \uparrow_1 \uparrow_2 \downarrow_3 + (x_2 - x_3) \downarrow_1 \uparrow_2 \uparrow_3 + (x_3 - x_1) \uparrow_1 \downarrow_2 \uparrow_3 .$$

Таким образом, в основном состоянии облака-тройки $E = \hbar\omega(1 + 4\sqrt{1 + 3\alpha})/2$ и

$$n(x) \propto \iint (x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \times \exp \left\{ -\frac{m\omega}{3\hbar} [(x^2 + y^2 + z^2)(1 + 2\sqrt{1 + 3\alpha}) + 2(xy + xz + yz)(1 - \sqrt{1 + 3\alpha})] \right\} dy dz$$

(при возведении ψ в квадрат перекрёстные члены исчезают вследствие ортогональности спиновых функций (ср. с разделом 6)), y и z здесь — всего лишь удобные переменные интегрирования, а не реальные ордината и аппликата. Эффективнее провести интегрирование по $\eta_{1,2} = (y \pm z)/\sqrt{2}$, тогда

$$n \propto \left(1 + \sqrt{1 + 3\alpha} + \frac{6\sqrt{1 + 3\alpha}}{2 + \sqrt{1 + 3\alpha}} \zeta^2 \right) \times \exp \left(-\frac{3\sqrt{1 + 3\alpha}}{2 + \sqrt{1 + 3\alpha}} \zeta^2 \right).$$

Нетрудно заметить, что, в отличие от концентрации в предыдущем варианте, теперь (при $\alpha < 0$) n в нуле имеет минимум, что при взаимном отталкивании частиц представляется естественным.

Дальнейшее увеличение N ещё более удлинит выкладки, поэтому закончим фермионное рассмотрение разделом 6.

6. Невзаимодействующие фермионы

Случай $\alpha = 0$ демонстрирует удивительно хорошее соответствие точного и среднеполевого описания (ср. с описанием в разделе 4). Согласно точному описанию в основном состоянии гармонические частицы сидят попарно с антипараллельными спинами ($\uparrow\downarrow$) на каждом уровне внешнего осциллятора (ψ выражается через "одночастичные" функции), так что концентрация облака находится из суммы квадратов собственных функций стандартного осциллятора и компактный результат получается для произвольного числа частиц. Пусть для простоты $N = 2K$, тогда очевидно, что с сохранением всех коэффициентов [1]

$$n = 2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp(-\zeta^2) \sum_{i=0}^{K-1} \frac{H_i^2(\zeta)}{2^i i!} = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} 2K \frac{\exp(-\zeta^2)}{2^K K!} [H_K^2(\zeta) - H_{K-1}(\zeta) H_{K+1}(\zeta)]$$

(возникающие у антисимметризованной по всем x_i псифункции интерференционные слагаемые в формуле для n обнуляются вследствие ортогональности собственных

функций, в том числе спиновых). Использованная формула для суммы содержится в [16], и она легко проверяется по индукции при учёте рекуррентного соотношения для полиномов Эрмита. Например, для $N = 10$

$$(16\zeta^8 - 64\zeta^6 + 120\zeta^4 + 45) \frac{\exp(-\zeta^2)}{12\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}.$$

Согласно приближению Томаса – Ферми (без учёта боровского потенциала)

$$n = \frac{2}{\pi} \sqrt{N - \zeta^2} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}.$$

Если чётно и K , т.е. $N = 4M$, то точное и среднеполевое значения в нуле безразмерной концентрации $\tilde{n} = n\sqrt{\hbar/(m\omega)}$ представимы соответственно в виде

$$\frac{4M}{2^{2M}\sqrt{\pi}} \frac{(2M)!}{(M!)^2}, \quad \frac{4\sqrt{M}}{\pi},$$

и последние величины очень близки между собой, поскольку использование формулы Стирлинга для факториала ($Q! \approx \sqrt{2\pi Q} \exp(-Q) Q^Q$) приводит просто к их совпадению, а эта формула даёт хорошее приближение даже при небольших Q . Для нечётных K и даже нечётных N стремление к совпадению тоже имеет место, просто формулы немного более громоздки. Соответствуют друг другу и энергии системы, рассчитанные в точной и томас-фермиевской моделях, соответственно:

$$E = \int \left(\frac{P_F}{2} + n\phi \right) dx = \frac{N^2 \hbar\omega}{4},$$

$$E = \hbar\omega \sum_{i=0}^{K-1} (1 + 2i) = K^2 \hbar\omega$$

(опять для простоты для чётных N) (см. раздел 4).

Насколько близки эти два описания, демонстрирует рисунок, на котором изображены профили $\tilde{n}(\zeta)$ для $N = 10$ и $N = 4$. Конечно, осцилляции (очень небольшие!) — так называемую оболочечную структуру — приближение Томаса – Ферми не улавливает, а вот крылья точного решения Бома может описать очень хорошо. Меньший вариант выбран потому, что при $\alpha = 0$ именно у четвёрки, а не у тройки появляется минимум концентрации облака в нуле, причём далее с возрастанием N он то превращается в максимум, то возрождается.

7. Гармонические бозоны

При "оседании" гармонических бозонов на низший уровень $\forall k_i = 0$, т.е. при энергии системы $E = \hbar\omega [1 + (N - 1)\sqrt{1 + N\alpha}]/2$, полная (благо спиновая часть отсутствует) волновая функция имеет чисто гауссов вид:

$$\psi \propto \exp \left\{ -\frac{m\omega}{2\hbar} \left[\xi_1^2 + \sqrt{1 + N\alpha} \sum_{i=2}^N \xi_i^2 \right] \right\},$$

причём (что важно для дальнейшего) $\xi_1 = \sum_{i=1}^N x_i/\sqrt{N}$.

Для определения $n(x)$ следует сначала представить квадрат этого выражения как функцию x_i , воспользовавшись указанной в (3) эквивалентностью квадратичных

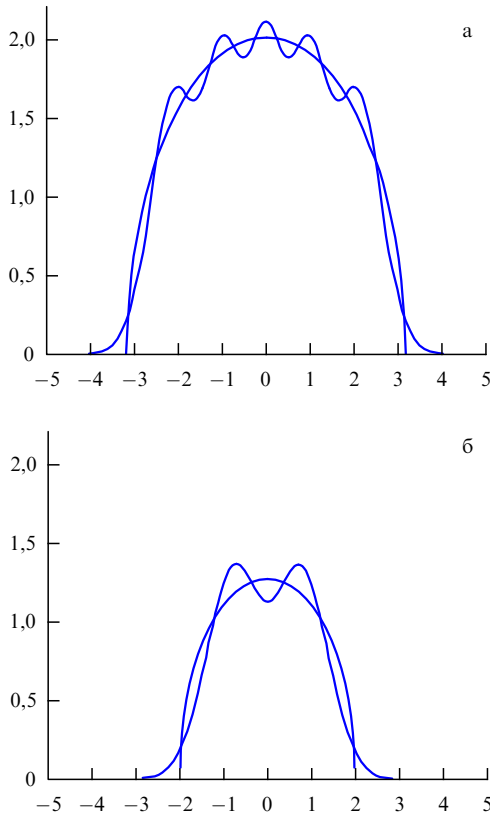


Рисунок. Сопоставление концентрационных профилей фермионного облака невзаимодействующих частиц в точном и усреднённом описаниях при $N = 10$ (а) и $N = 4$ (б).

форм в x - и ξ -пространствах, а именно, вычислив из неё $\sum_{i=2}^N$ через x_i и ξ_1 , затем, учтя симметричность $x_i \leftrightarrow x_j$ такой ψ^2 , осуществить в ней замену $x_N \rightarrow x$, после чего проинтегрировать полученную экспоненту с показателем

$$-\frac{m\omega}{\hbar N} \left\{ [1 + (N-1)\sqrt{1+N\alpha}]x^2 + 2(1 - \sqrt{1+N\alpha})x \sum_{i=1}^{N-1} x_i + [1 + (N-1)\sqrt{1+N\alpha}] \sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 + \frac{2(1 - \sqrt{1+N\alpha}) \sum_{i>j} x_i x_j}{N-1} \right\} \quad (11)$$

по всем оставшимся $N-1$ x_i .

Заключительную операцию удобно проводить в СК- η , диагоналирующей форму, выраженную подчёркнутыми членами формулы (11). Для вычисления надо только использовать то, что $\eta_1 = \sum_{i=1}^{N-1} x_i / \sqrt{N-1}$, а собственное значение этого вектора легко находится из вида исходной $(N-1) \times (N-1)$ -матрицы B уже этой формы:

$$\begin{pmatrix} 1 + (N-1)\sqrt{1+N\alpha} & 1 - \sqrt{1+N\alpha} & * \\ 1 - \sqrt{1+N\alpha} & 1 + (N-1)\sqrt{1+N\alpha} & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ * \end{pmatrix} = (N-1 + \sqrt{1+N\alpha}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ * \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты при других η_i^2 неважны, поскольку интегрирование по этим переменным даёт лишь малоинформативный множитель перед экспонентой (см. раздел 5), но очевидно, что, по аналогии с собственными значениями матрицы A , они все равны $N\sqrt{1+N\alpha}$. Окончательно получим

$$n(x) \propto \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar} \frac{N\sqrt{1+N\alpha}}{N-1 + \sqrt{1+N\alpha}} x^2\right). \quad (12)$$

Видно, что для большого N ($N \gg 1$) облака гармоничных бозонов коэффициент при ζ^2 в показателе является средним гармоническим N и $\sqrt{1+N\alpha}$. Случайно ли?

Сравнение (12) и (10) снова поднимает вопрос, затронутый в разделе 4, но отложенный до данного места. Почему приближение среднего поля прекрасно соответствует точным формулам при $N \gg \alpha$, но грубо врёт, если $\alpha \gg N \gg 1$? Ответ заключается в следующем качественном объяснении наблюдаемого "среднегармонического" скейлинга.

Если при фиксированном $\alpha > 0$ наращивать N , то при основополагающем вкладе гармонических частиц в удерживающее поле, $N\alpha \gg 1$, у каждой из них, по теореме вириала и простой оценке членов в (1), кинетическая и потенциальная энергия сравнимы, $\hbar^2/(mx_0^2) \sim m\omega^2 N\alpha x_0^2$ (где x_0 — характерная ширина $n(x)$), поэтому $x_0^2 \sim \hbar/(m\omega\sqrt{N\alpha})$. Если фиксировать $N \gg 1$ и неограниченно увеличивать α , то структура облака будет оставаться такой же, как описанно выше, до тех пор пока в некий момент коллективизация частиц не достигнет логического предела, сформировав из ансамбля частиц единую "суперчастицу" с массой Nm и "зарядом" N . Начиная с этого момента наблюдаемая ширина n будет определяться динамикой этой суперчастицы исключительно во внешнем поле безотносительно к внутреннему взаимодействию её составляющих⁴, так что согласно новой теореме вириала $\hbar^2/(Nm x_0^2) \sim Nm\omega^2 x_0^2$ получается, что $x_0^2 \sim \hbar/(m\omega N)$. Этот режим выходит на первый план, если "размазка" суперчастицы по Гейзенбергу превышает её внутренний размер, т.е. как раз $\alpha > N$ ("размазка" ξ_1 , согласно (2), (5), получается ~ 1).

Та же специфика видна и у первого возбуждённого состояния бозонной системы. При $\alpha > 0$ это состояние отстоит на $\hbar\omega$ ($k_1 = 1, k_{i \geq 2} = 0$) от основного и его волновая функция имеет, в отличие от указанной, множитель ξ_1 , который порождает в $n(x)$ множитель

$$\frac{N(1+N\alpha)}{N-1 + \sqrt{1+N\alpha}} \zeta^2 + \frac{N-1}{2}$$

перед уже вычисленной экспонентой. Если $N \gg \alpha \gg 1$, то вклад члена с ζ^2 мал как $\sqrt{\alpha/N}$, однако при $\alpha \gg N \gg 1$ профиль концентрации сильно модифицируется (причём по тому же, теперь большому, параметру), его определяет первый возбуждённый уровень суперчастицы во внешнем поле. Иными словами, усреднительный подход при $N\alpha \gg 1$ теряет из вида внешний потенциал на фоне коллективного и поэтому не замечает формирования при $N \gg \alpha$ единого гармоничного "кулака".

Можно проанализировать ситуацию и при другом варьировании параметров, а именно при фиксирован-

⁴ Допустима аналогия с поведением протона в электростатической ловушке, никак не связанным с динамикой составляющих его кварков.

ных числе частиц в облаке и силе их взаимодействия ($\alpha\omega^2 = \tilde{\omega}^2 = \text{const}$), но при изменении удерживающего это облако поля (ω). Тогда при увеличении "жесткости" внешнего осциллятора, т.е. при попытке "зажать" облако во всё более узкой яме, согласно скейлингу $x_0^2 \sim \hbar/(mN\omega)$, неизбежно наступает момент ($N\omega^2 > \tilde{\omega}^2$), в который ширина $n(x)$ перестаёт уменьшаться и начинает определяться внутренним размером суперчастицы $x_0^2 \sim \hbar/(m\sqrt{N\tilde{\omega}^2})$. Довольно долго после этого единый кулак-ансамбль успешно сопротивляется сжатию, но дальнейшее наращивание ω при $\omega^2 > N\tilde{\omega}^2$ всё же приводит к его "раздавливанию" внешним полем и начиная с этого момента восстановлению сжатия облака по закону $x_0^2 \sim \hbar/m\omega$.

Исходя из сказанного видно, что среднеполевую модель можно легко корректировать "вручную". Надо только, согласно (2), отделить внешний осциллятор от всех других: сначала при $N\alpha \gg 1$ рассмотреть формирование коллективного облака, а потом изучать движение его ЦМ во внешнем потенциале.

8. Когерентные состояния

Осталось не использованным ещё одно уникальное свойство гармонического осциллятора: вследствие изохронности его динамики существует очень простое, по форме "полуклассическое", но, по сути, абсолютно точное и очень эффективное представление нетривиальной эволюции системы на языке так называемых когерентных состояний [1]. В работах, посвящённых наблюдению бозе-конденсации в атомных газах, захваченных в магнитные ловушки (см. [4, 5]), очень часто изучаются различные моды колебаний их облаков. Анализ обычно проводится на языке гидродинамического приближения в коллективном уравнении Гросса–Питаевского, который, как указано выше, совершенно неприменим к пропагандируемому здесь гармоническому случаю (в связи с нелокальностью межчастичного взаимодействия такой облачный газ крайне неидеален). Зато данный вариант позволяет исследовать колебания абсолютно точно и достаточно компактно.

Когерентное состояние осциллятора описывается нестационарной волновой функцией (ВФ)

$$\propto \exp \left[\frac{i\bar{p}q}{\hbar} - \frac{m\Omega(q - \bar{q})^2}{2\hbar} - \frac{i\Omega t}{2} - \frac{i\bar{p}\bar{q}}{2\hbar} \right],$$

где Ω — частота осциллятора, а "средние" координата и импульс — функции времени, связанные классическими уравнениями:

$$m\dot{\bar{q}} = \bar{p}, \quad \dot{\bar{p}} = -m\Omega^2\bar{q} \rightarrow \frac{\bar{p}^2}{2m} + \frac{m\Omega^2\bar{q}^2}{2} = \bar{k}\hbar\Omega,$$

поэтому если $\bar{q} = \sqrt{2\bar{k}\hbar/(m\Omega)} \sin(\Omega t)$, то $\bar{p} = \sqrt{2\bar{k}m\hbar\Omega} \cos(\Omega t)$. Величину \bar{k} называют "средним числом квантов"⁵. К сожалению, при использовании выписанного точного решения уравнения Шрёдингера для одного осциллятора в факторизуемой системе (2) многих осцилляторов опять требуется громоздкая про-

цедура симметризации (антисимметризации). Поэтому для демонстрации метода остановимся на простейшем двухчастичном варианте.

Если когерентен первый осциллятор: $q = \xi_1$, $\Omega = \omega$ (для "средних" сохраняются старые обозначения), а второй, характеризуемый координатой ξ_2 , находится в стационарном состоянии $k_2 = 0$ (для полноты картины g надо умножить на $\exp(-iE_2t/\hbar)$) (см. (5)), то общая координатная функция симметрична и, следовательно, описывает колебания гармонического облака либо двух бозонов, либо двух фермионов с антипараллельными спинами. В этом случае

$$n(x, t) \propto \exp \left[-\frac{2\sqrt{1+2\alpha}}{1+\sqrt{1+2\alpha}} \frac{m\omega}{\hbar} \left(x - \frac{\bar{q}}{\sqrt{2}} \right)^2 \right].$$

Очевидно, что это антисимметричная мода колебаний со смещением ЦМ (понятно, почему на $\bar{q}/\sqrt{2}$), и она без затруднений переносится на системы с $N > 2$.

Если, наоборот, $q = \xi_2$, $\Omega = \sqrt{1+2\alpha}\omega$ и $k_1 = 0$, то для указанного варианта системы требуется предварительная симметризация когерентной ВФ по $x_{1,2}$ и

$$\begin{aligned} n(x, t) \propto & \left\{ \exp \left[-\frac{2\sqrt{1+2\alpha}}{1+\sqrt{1+2\alpha}} \frac{m\omega}{\hbar} \left(x - \frac{\bar{q}}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \exp \left[-\frac{2\sqrt{1+2\alpha}}{1+\sqrt{1+2\alpha}} \frac{m\omega}{\hbar} \left(x + \frac{\bar{q}}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] \right\} + \\ & + 2 \cos \left[\frac{2\sqrt{2}\bar{p}x}{(1+\sqrt{1+2\alpha})\hbar} \right] \exp \left(-\frac{2\sqrt{1+2\alpha}}{1+\sqrt{1+2\alpha}} \frac{m\omega}{\hbar} x^2 - \right. \\ & \left. - \frac{2\sqrt{1+2\alpha}}{1+\sqrt{1+2\alpha}} \bar{k} - \frac{\sqrt{1+2\alpha}m\omega}{\hbar} \bar{q}^2 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Это уже симметричная мода колебаний (см. выражение в фигурных скобках в правой части (13)) и с другой частотой. С возрастанием \bar{k} "интерференционный" член с косинусом быстро стремится к нулю.

У системы фермионов с параллельными спинами первая выписанная мода отсутствует, а во второй процедура антисимметризации когерентной ВФ всего лишь меняет знак перед косинусом. Впрочем, жизнь весьма разнообразят варианты с $k_i \neq 0$ у стационарной части общей ВФ и с когерентностью по обоим $\xi_{1,2}$.

9. Заключение

Проведённый анализ показывает, что гармонический мир может быть прекрасным полигоном для тестирования приближённых методов описания квантовых многочастичных систем. Особенно полезную роль он способен сыграть при обучении этим методам, так как предоставляет возможность для наглядного и технически неизощрённого манипулирования с необходимыми математическими выкладками. В то же время, будучи средством приобретения опыта для решений последующих практических задач, этот мир, тем не менее, как представляется, в некотором противоречии со сказанным в разделе 2 (или в развитие раздела 2), и сам может стать объектом физического интереса, поскольку демонстрирует весьма любопытную и нетривиальную внутреннюю жизнь, например формирование суперчастиц.

Автор благодарен В.С. Лисице за ценные обсуждения и А.Б. Кукушкину за указание на работы В.И. Манько.

⁵ Замена способа усреднения $\bar{*}^2 \rightarrow \overline{*^2}$ добавляет к энергии правильные $\hbar\Omega/2$ [1], но для целей настоящей статьи такая модификация обозначений несущественна.

Список литературы

1. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1974); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory* (Oxford: Pergamon Press, 1965)
2. Буреова Л А, Лисица В С *Возмущенный атом* (М.: ИздАТ, 1997)
3. Мигдал А Б, Крайнов В П *Приближенные методы квантовой механики* (М.: Наука, 1966); Пер. на англ. яз.: Migdal A B, Kraïnov V *Approximation Methods in Quantum Mechanics* (New York: W.A. Benjamin, 1969)
4. Кадомцев Б Б, Кадомцев М Б *УФН* **167** 649 (1997); Kadomtsev B B, Kadomtsev M B *Phys. Usp.* **40** 623 (1997)
5. Питаевский Л П *УФН* **168** 641 (1998); Pitaevskii L P *Phys. Usp.* **41** 569 (1998)
6. Арнольд В И *Математические методы классической механики* (М.: Наука, 1974); Пер. на англ. яз.: Arnold V I *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (New York: Springer-Verlag, 1978)
7. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (М.: Наука, 1973); Пер. на англ. яз.: Landau L D, Lifshitz E M *Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1976)
8. Додонов В В, Манько В И "Квантование, гравитация и групповые методы в физике" *Труды ФИАН* **152** 145 (1983)
9. Ахундова Э А, Додонов В В, Манько В И *ТМФ* **60** 413 (1984); Akhundova É A, Dodonov V V, Man'ko V I *Theor. Math. Phys.* **60** 907 (1984);
10. Каплан И Г *Симметрия многоэлектронных систем* (М.: Наука, 1969); Пер. на англ. яз.: Kaplan I G *Symmetry of Many-Electron Systems* (New York: Academic Press, 1975)
11. Haas F et al. *Phys. Plasmas* **10** 3858 (2003)
12. Hossen M A, Mamin A A *Phys. Plasmas* **22** 073505 (2015)
13. Philippidis C, Bohm D, Kaye R D *Nuovo Cimento B* **71** 75 (1982)
14. Bohm D *Phys. Rev.* **85** 166 (1952)
15. Румер Ю Б, Рывкин М Ш *Термодинамика, статистическая физика и кинетика* (М.: Наука, 1977); Пер. на англ. яз.: Rumer Yu B, Ruvkin M Sh *Thermodynamics, Statistical Physics, and Kinetics* (Moscow: Mir, 1980)
16. Прудников А П, Брычков Ю А, Маричев О И *Интегралы и ряды Т. 2* (М.: Физматлит, 2003); Пер. на англ. яз. пред. изд.: *Integrals and Series Vol. 2* (New York: Gordon and Breach, 2002)

Harmony in many-particle quantum problem

K.V. Chukbar

National Research Center "Kurchatov Institute",
pl. Akademika Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russian Federation;
Moscow Institute for Physics and Technology (State University),
Institutskii per. 9, 141700 Dolgoprudnyi, Moscow region, Russian Federation
E-mail: Chukbar_KV@nrcki.ru

The model quantum problem of a harmonically trapped cloud of identical nonrelativistic particles interacting via harmonic oscillator potential has an exact solution which can be used to assess the efficiency of approximate methods standardly used in more realistic many-particle calculations.

Keywords: many-particle Schrödinger equation, harmonic oscillator, fermions, bosons, Thomas–Fermi equation

PACS numbers: **03.65** – w, 05.30.Fk, 05.30.Jp, 31.15.bt

Bibliography — 16 references

Received 3 April 2017, revised 5 June 2017

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **188** (4) 446–454 (2018)

Physics – Uspekhi **61** (4) (2018)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.06.038159>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.06.038159>